

ISSN 1563 – 0285
Индекс 75872; 25872

ӘЛ-ФАРАБИ атындағы ҚАЗАҚ ҮЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ

КазҰУ ХАБАРШЫСЫ

Математика, механика, информатика сериясы

КАЗАХСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени АЛЬ-ФАРАБИ

ВЕСТНИК КазНУ

Серия математика, механика, информатика

AL-FARABI KAZAKH NATIONAL UNIVERSITY

KazNU BULLETIN

Mathematics, Mechanics, Computer Science Series

№ 1 (84)

Алматы
«Қазақ университеті»
2015

Зарегистрирован в Министерстве культуры, информации и общественного

согласия Республики Казахстан, свидетельство № 956-Ж от 25.11.1999 г.

(Время и номер первичной постановки на учет № 766 от 22.04.1992 г.)

Выходит 4 раза в год

Редакционная коллегия:

Научный редактор: **Н. Т. Даанаев** – академик Национальной инженерной академии РК,
д. ф.-м. н., профессор, КазНУ им. аль-Фараби

Заместитель научного редактора: **Д. Ж. Ахмед-Заки** – д. т. н., КазНУ им. аль-Фараби

Ответственный секретарь: **Г. М. Даирбаева**, к. ф.-м. н., доцент КазНУ им. аль-Фараби

Члены редколлегии:

Айсагалиев С.А. – д.т.н., профессор, КазНУ им. аль-Фараби, Казахстан

Алиев Ф. А. – академик Национальной академии наук Азербайджана, Институт прикладной математики Бакинского государственного университета, Азербайджан

Бадаев С. А. – д.ф.-м.н., профессор, КазНУ им. аль-Фараби, Казахстан

Жайнаков А. Ж. – академик НАН Кыргызской Республики, Кыргызский государственный технический университет им. И. Раззакова, Кыргызстан

Калтаев А. Ж. – д.ф.-м.н., профессор, КазНУ им. аль-Фараби, Казахстан

Кангуужин Б. Е. – д.ф.-м.н., профессор, КазНУ им. аль-Фараби, Казахстан

Кыдырыбекулы А. Б. – д.т.н., КазНУ им. аль-Фараби, Казахстан

Майнке М. – профессор, Департамент Вычислительной гидродинамики Института Аэродинамики, Германия

Малышкин В. Э. – д.т.н., профессор, Новосибирский государственный технический университет, Россия

Мейрманов А. М. – д.ф.-м.н., профессор, Белгородский государственный университет, Россия

Мухамбетжанов С. Т. – д.ф.-м.н., профессор, КазНУ им. аль-Фараби, Казахстан

Отелбаев М. О. – академик Национальной академии наук РК, профессор, Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилева, Казахстан

Панфилов М. – д.ф.-м.н., профессор, Национальный политехнический институт Лотарингии, Франция

Ружанский М. – д.ф.-м.н., профессор, Имперский колледж Лондона, Великобритания

Тайманов И. А. – академик Российской академии наук, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Россия

Тукеев У. А. – д.т.н., профессор, КазНУ им. аль-Фараби, Казахстан

Шокин Ю. И. – академик Российской академии наук, Институт вычислительных технологий СО РАН, Россия

Юлдашев З. Х. – д.ф.-м.н., профессор, Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Узбекистан

Научное издание

Вестник КазНУ

Серия математика, механика, информатика

№ 1 (84) 2015

Редакторы: Г. М. Даирбаева

Компьютерная верстка: А. Б. Аетова

ИВ N 8036

Подписано в печать 25.03.2015 г. Формат 60 × 84 1/8. Бумага офсетная.

Печать цифровая. Объем 7.7 п.л. Тираж 500 экз. Заказ N 14.

Издательский дом “Казақ университеті”

Казахского национального университета им. аль-Фараби.

050040, г. Алматы, пр. аль-Фараби, 71, КазНУ.

Отпечатано в типографии издательского дома “Казақ университеті”.

© КазНУ им. аль-Фараби, 2015

1- бөлім**Математика****Раздел 1****Математика****Section 1****Mathematics**

УДК 517.5

Е.Ж.Айдос *, М.Қазтай

Ақпараттық және телекоммуникациялық технологиялар институты, Қ.И.Сәтбаев атындағы
Қазақ ұлттық техникалық университеті, Республика Казахстан, г. Алматы

* E-mail: erkaraai@mail.ru

Аралас нормалардағы ең жақсы жуықтамдар арасындағы қатыс туралы

Алғаш рет изотроптық кеңістікте гармоникалары берілген аралас туындыға сәйкес гиперболалық кресттерде жататын полиномдармен ең жақсы жуықтамдар арасындағы қатысты В.Н.Темляков дәлелдеген ([1], 2.3 теорема). Бұл мақаладағы негізгі теорема В.Н.Темляковтің осы теңсіздігін әртүрлі аралас нормаларда, анизотроптық жағдай үшін жалпылауга арналған. Мұндагы қындық тұғызатын басты мәселе - теоремада көрсетілген негізгі қатысты дәлелдеу үшін маңызды роль атқарытын Бернштейн теңсіздігі типтес теңсіздікті анизотроптық кеңістікте дәлелдеумен қатар $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_d)$, $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_d)$, $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_d)$ және т.с.с параметрлердің арасындағы байланысты табу. Аталған сұрақтардың күрделілігіне байланысты, қарастырылып отырган, аралас нормалардағы ең жақсы жуықтамдар арасындағы қатысты 1991ж. Е.Айdosов жоғарыда аталған параметрлер белгілі бір шарттарды қанағаттандыратын жағдайлар үшін гана алған еді. Ал қазіргі мақаладағы аралас нормаладағы ең жақсы жуықтамдар арасындағы қатыс үшін бұл шарттар алынып тасталған, яғни, негізгі параметрлердің $1 < p_i < q_i < \infty$, $i = 1, \dots, d$, $r = (r_1, \dots, r_d)$, $\min_i r_i \geq 0$ түріндегі жалпы жағдай үшін алынған. Мақалада аралас әртүрлі: $L_p(\pi_d)$ және $L_q(\pi_d)$ нормалардағы ең жақсы жуықтамдар арасындағы теңсіздік, гармоникалары берілген аралас туындыға сәйкес гиперболалық кресттерде жататын полиномдармен өрнектеледі. Теоремада көрсетілген негізгі теңсіздікten $E_{\mathbf{p},d,Q}(\lambda) \subset L_q^{(\mathbf{r})}(\pi_d)$, $E_{\mathbf{p},d,Q}(\lambda) \subset E_{\mathbf{q},d,Q}^{(\mathbf{r})}(\mu)$ түрлеріндегі енгізулер үшін жеткілікті шарттарды алуға болады.

Ключевые слова: ең жақсы жуықтам, аралас норма, гиперболалық крест, тригонометриялық полином.

E.Zh.Aidos, M.Kaztay

About the relation between the best approximations in mixed norms

The first time the ratio between the best approximations of polynomials with harmonics from hyperbolic crosses, corresponding to a given mixed derivative in the isotropic space was proved by V.N.Temlyakov ([1], 2.3 Theorem). The main theorem of this article is devoted to the generalization of the relation obtained by V.N.Temlyakov, for the anisotropic case. The main problem generating some difficulties here is finding links between $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_d)$, $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_d)$, $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_d)$ etc. parameters along with proof of the inequality of Bernstein, which plays an important role in the anisotropic space. Due to the complexities of these issues, in 1991, E.Aidos got the correlation between the best approximations in different mixed norms for cases where the above parameters satisfy certain specific conditions. In this article for relations between best approximations in different mixed norms, these conditions are removed, i.e. obtained for the general case when the basic parameters are of the form $1 < p_i < q_i < \infty$, $i = 1, \dots, d$, $r = (r_1, \dots, r_d)$, $\min_i r_i \geq 0$. In the article the relation between the best approximations in the norms $L_p(\pi_d)$ and $L_q(\pi_d)$ is expressed in terms of trigonometric polynomials whose harmonics lie in hyperbolic crosses, corresponding to a given mixed derivative. From the inequality, pointed in the theorem, we can obtain attachments of types $E_{\mathbf{p},d,Q}(\lambda) \subset L_q^{(\mathbf{r})}(\pi_d)$, $E_{\mathbf{p},d,Q}(\lambda) \subset E_{\mathbf{q},d,Q}^{(\mathbf{r})}(\mu)$.

Key words: best approximation, mixed norm, hyperbolic cross, trigonometric polynomial.

Е.Ж.Айдос, М.Қазтай

О соотношении между наилучшими приближениями в смешанных нормах

Впервые соотношение между наилучшими приближениями полиномами с гармониками из гиперболических крестов, соответствующих заданной смешанной производной, в изотропном пространстве доказал В.Н.Темляков ([1], 2.3 теорема). Основная теорема данной статьи посвящена обобщению соотношения, полученного В.Н.Темляковым, для анизотропного случая. Здесь основная проблема, порождающая некоторые трудности - наряду с доказательством неравенства типа Бернштейна, которое играет важную роль в анизотропном пространстве, нахождение связи между $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_d)$, $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_d)$, $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_d)$ и т.д. параметрами. В связи со сложностями названных вопросов, в 1991 г. Е.Айдосов получил рассматриваемое соотношение между наилучшими приближениями в разных смешанных нормах для случаев, когда вышеуказанные параметры удовлетворяют некоторым определенным условиям. А в данной статье для соотношения между наилучшими приближениями в разных смешанных нормах эти условия сняты, т.е. получено для общего случая, когда основные параметры имеют вид $1 < p_i < q_i < \infty$, $i = 1, \dots, d$, $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_d)$, $\min_i r_i \geq 0$. В статье неравенство между наилучшими приближениями в нормах $L_p(\pi_d)$ и $L_q(\pi_d)$ выражается через тригонометрические полиномы, гармоники которых лежат в гиперболических крестах, соответствующих заданной смешанной производной. Из неравенства, указанного в теореме, можно получить вложения видов $E_{\mathbf{p},d,Q}(\lambda) \subset L_{\mathbf{q}}^{(\mathbf{r})}(\pi_d)$, $E_{\mathbf{p},d,Q}(\lambda) \subset E_{\mathbf{q},d,Q}^{(\mathbf{r})}(\mu)$.

Түйін сөздер: наилучшее приближение, смешанная норма, гиперболический крест, тригонометрический полином

Kіріспе

Макалада қолданылатын белгілеулер мен негізгі теоремага қажетті тұжырымдарды келтіреміз.

R_d арқылы $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d)$ нүктелерінен құралған d - өлшемді евклид кеңістігін, ал $\pi_d \equiv [-\pi, \pi]^d$ арқылы d - өлшемді кубты белгілейміз. Өлшенетін, әрбір айнымал бойынша 2π периодты және ($\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_d)$, $1 \leq p_i < \infty$, $i = 1, 2, \dots, d$)

$$\|f\|_{\mathbf{p}} \equiv \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} (f(x_1, \dots, x_d))^{p_1} dx_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} dx_2 \dots \right)^{\frac{p_d}{p_{d-1}}} dx_d \right)^{\frac{1}{p_d}} < \infty,$$

(егер $p_1 = \dots = p_d = p$ болса, онда $\|f\|_{\mathbf{p}} \equiv \|f\|_p = \left(\int_{\pi_d} |f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}}$) шартын қанағаттан-дышратын $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_d)$ функциясы $L_{\mathbf{p}}(\pi_d)$ кеңістігінде жатады: $f \in L_{\mathbf{p}}(\pi_d)$.

Төмендегі белгілеудерді енгізейік:

$\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_d)$, k_j - бүтін сандар, $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_d)$, s_j - натурал сандар, $j = 1, \dots, d$;

$$\rho(\mathbf{s}) = \{ \mathbf{k} = (k_1, \dots, k_d) : 2^{s_j-1} \leq k_j < 2^{s_j}, j = 1, 2, \dots, d \};$$

$$\delta_s(f, \mathbf{x}) = \sum_{|\mathbf{k}| \in \rho(\mathbf{s})} \hat{f}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})},$$

мұнда $|\mathbf{k}| = (|k_1|, \dots, |k_d|)$, $\hat{f}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\pi_d} f(\mathbf{x}) e^{-i(\mathbf{k}, \mathbf{x})} d\mathbf{x}$.

Егер [1;d] аралығындағы қандай да бір бүтін сандар жиыны e болса, онда $j \in e$ үшін $\gamma_j = 1$ және $j \notin e$ үшін $\gamma_j > 1$ шарттарын қанағаттандыратын векторды $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_d)$ арқылы белгілейміз.

$\mathbf{r} = r\boldsymbol{\gamma} = (r_1, \dots, r_d)$, $r = \min_{i=1, \dots, d} r_i \geq 0$ болсын. Онда $t(\mathbf{x}) \in T(N, \boldsymbol{\gamma})$ полиномдары үшін $t^{(r)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha})$ жазуы $t(\mathbf{x})$ полиномының полиномымен үйірткісін (свертка) білдіреді, яғни, $t^{(r)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}) = (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} t(\mathbf{x} - \mathbf{y}) U_N^{\mathbf{r}}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\alpha}) d\mathbf{y}$ ($\boldsymbol{\alpha} = 0$, $\mathbf{r} = 0$ болса $t^{(0)}(\mathbf{x}, 0) \equiv t(\mathbf{x})$).

Енді келесі жиындарды анықтаймыз:

$|\mathbf{k}| \in \Gamma(N, \boldsymbol{\gamma}) = \{ \mathbf{k} : k_j > 0, j = 1, \dots, d, \prod_{j=1}^d k_j^{\gamma_j} \leq N \}$ болатын барлық \mathbf{k} векторлар жиынын $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_d)$ векторына сәйкес гиперболалық крест деп айтады;

$|\mathbf{k}| \in Q_n^{\mathbf{r}} = \bigcup_{(\boldsymbol{\gamma}, s) \leq n} \rho(\mathbf{s})$ орындалатын барлық \mathbf{k} векторлар жиынын $\boldsymbol{\gamma} = (\frac{r_1}{r}, \dots, \frac{r_d}{r})$ векторына немесе аралас $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_d)$ туындыға сәйкес гиперболалық баспалдақ крест деп айтады (мұнда $\mathbf{r} = r\boldsymbol{\gamma} = r(\frac{r_1}{r}, \dots, \frac{r_d}{r})$).

$T(N, \boldsymbol{\gamma})$ және $T(Q_n^{\mathbf{r}})$ арқылы сәйкес $\sum_{|\mathbf{k}| \in \Gamma(N, \boldsymbol{\gamma})} a_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})}$ және $\sum_{|\mathbf{k}| \in Q_n^{\mathbf{r}}} c_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})}$ түрлеріндегі барлық полиномдар жиындарын белгілейміз.

$$E_{N, \boldsymbol{\gamma}}(f)_{\mathbf{p}} = \inf_{t \in T(N, \boldsymbol{\gamma})} \|f - t\|_{\mathbf{p}}, \quad 1 \leq p_i < \infty, \quad i = 1, \dots, d,$$

$$E_{Q_n^{\mathbf{r}}}(f)_{\mathbf{p}} = \inf_{t \in T(Q_n^{\mathbf{r}})} \|f - t\|_{\mathbf{p}}, \quad 1 \leq p_i < \infty, \quad i = 1, \dots, d,$$

шамаларын, $f(\mathbf{x})$ - функциясының гармоникалары $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_d)$ (немесе \mathbf{r}) векторына сәйкес гиперболалық крестте жататын тригонометриялық полиномдармен $L_{\mathbf{p}}(\pi_d)$ метрикасы бойынша ең жақсы жуықтамдары деп айтады.

$\mathbf{r} = r\boldsymbol{\gamma}$ үшін $T(Q_n^{\mathbf{r}}) \subset T(2^n, \boldsymbol{\gamma}) \subset T(Q_{n+\gamma(d)}^{\mathbf{r}})$, $\gamma(d) = \sum_{j=1}^d \gamma_j$, енгізулері орындалатындықтан $E_{Q_n^{\mathbf{r}}}(f)_{\mathbf{p}}$ немесе $E_{N, \boldsymbol{\gamma}}(f)_{\mathbf{p}}$ шамаларының біреуін ғана қарастырсақ жеткілікті ([1]).

$L_{(\mathbf{p})}^{\mathbf{r}}(\pi_d)$ арқылы $f^{\mathbf{r}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha})$, $\mathbf{r} \geq 0$ туындылары $L_{\mathbf{p}}(\pi_d)$ кеңістігінде жататын $f(\mathbf{x})$ функциялар класын белгілейміз.

Егер қандай да бір $\lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ он сандар тізбегі берілсе ($\lambda_n \downarrow 0, n \uparrow \infty$), онда $E_{\mathbf{p}, d, Q}^{(\mathbf{r})}(\lambda)$ арқылы $E_{Q_n^{\mathbf{r}}}(f^{(\mathbf{r})}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}))_{\mathbf{p}} = \underline{Q}(\lambda_n)(n \rightarrow \infty)$ қатысы орындалатын $f(\mathbf{x}) \in L_{(\mathbf{p})}^{(\mathbf{r})}(\pi_d)$ түріндегі функциялар класын белгілейміз.

$C(\alpha, \beta, \dots)$ арқылы тек жақшадағы параметрлерге ғана тәуелді, бірақ әртүрлі формулаларда бөлек-бөлек болатын қандай да бір он шамаларды белгілейміз. Оң A және кез келген B үшін $B \ll_{\alpha, \beta, \dots} A$ жазуы $|B| \leq C(\alpha, \beta, \dots)A$ теңсіздігін білдіреді.

Оң A және B үшін $A \succcurlyeq_{\alpha, \beta, \dots} B$ жазуы $A \ll_{\alpha, \beta, \dots} B \ll_{\alpha, \beta, \dots} A$ қатыстарын көрсетеді.

Негізгі түжірымды дәлелдеуге келесі леммалар қажет.

1 Лемма [2].

Кез келген $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_d)$, $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_d)$, $1 < p_i < q_i < \infty$, $i = 1, \dots, d$, $\mathbf{r} =$

(r_1, \dots, r_d) , $\min_i r_i \geq 0$ үшін келесі теңсіздік орындалады

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} f_{n,\gamma}(\mathbf{x}) \right\|_{\mathbf{q}} \leq C(\mathbf{p}, \mathbf{q}, d) \left[\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n \left(\min_{1 \leq j \leq d} q_j \right)} \max_{1 \leq j \leq d} \left(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j} \right) \|f_{n,\gamma}(\mathbf{x})\|_{\mathbf{p}}^{\min_{1 \leq j \leq d} q_j} \right]^{\frac{1}{\min_{1 \leq j \leq d} q_j}} \quad (1)$$

мұндағы $f_{n,\gamma}(\mathbf{x}) \in T(Q_n^{\mathbf{r}})$, $n = 0, 1, 2, \dots$

2 Лемма [3].

$\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_d)$, $1 < p_i < \infty$, $i = 1, \dots, d$, $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_d)$, $0 < r_i < \infty$, $i = 1, \dots, d$; $\mathbf{r} = r\gamma$, $r = \min_i r_i$ болсын.

Онда кез келген $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ векторы үшін келесі теңсіздік орындалады

$$\sup_{t \in T(N, \gamma)} \frac{\|t^{(r\gamma)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha})\|_{\mathbf{p}}}{\|t(\mathbf{x})\|_{\mathbf{p}}} \ll_{\mathbf{p}, M} N^r.$$

Ең жақсы жуықтамдар араласындағы қатыс

Теорема. Егер $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_d)$, $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_d)$, $1 < p_i < q_i < \infty$, $i = 1, \dots, d$, $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_d)$, $\min_i r_i \geq 0$ және $L_{\mathbf{p}}(\pi_d)$ - Лебег класында жатқан, әрбір айнымал бойынша 2π периодты, d айнымалды $f(\mathbf{x})$ функциясы үшін

$$\sum_{l=1}^{\infty} 2^{l \left(\min_{1 \leq i \leq d} q_i \right)} \left[\max_{1 \leq j \leq d} \left(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j} \right) + \min_{1 \leq i \leq d} r_i \right] E_{Q_l^{\mathbf{r}}}^{\min_{1 \leq i \leq d} q_i}(f)_{\mathbf{p}} < \infty \quad (2)$$

шарты орындалса, онда $f(\mathbf{x})$ функциясының $L_{\mathbf{q}}(\pi_d)$ кеңістігінде $(\mathbf{r}, \boldsymbol{\alpha})$ туындысы бар және

$$E_{Q_l^{\mathbf{r}}}[f^{\mathbf{r}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha})]_{\mathbf{q}} \ll_{\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}} \left[\sum_{l=1}^{\infty} 2^{l \left(\min_{1 \leq i \leq d} q_i \right)} \left[\max_{1 \leq j \leq d} \left(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j} \right) + \min_{1 \leq i \leq d} r_i \right] E_{Q_l^{\mathbf{r}}}^{\min_{1 \leq i \leq d} q_i}(f)_{\mathbf{p}} \right]^{\frac{1}{\min_{1 \leq j \leq d} q_j}} \quad (3)$$

Дәлелдеуі.

Үңгайлылық үшін $\beta = \max_i \left(\frac{1}{p_i} - \frac{1}{q_i} \right)$, $q_0 = \min_i q_i$ және $r = \min_i r_i$ деп белгілейік. Егер $t_l(\mathbf{x}) \in T(Q_l^{\mathbf{r}})$ арқылы $f(\mathbf{x})$ функциясының $L_{\mathbf{p}}^0(\pi_d)$ кеңістігіндегі ең жақсы жуықтайдын полиномын белгілесек, онда $f(\mathbf{x}) \stackrel{L_{\mathbf{p}}(\pi_d)}{=} t_l(\mathbf{x}) + \sum_{l=2}^{\infty} [t_l(\mathbf{x}) - t_{l-1}(\mathbf{x})]$. Одан әрі 1 мен 2 леммаларды пайдалансақ

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{l=2}^{\infty} [t_l^{(\mathbf{r})}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}) - t_{l-1}^{(\mathbf{r})}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha})] \right\|_{\mathbf{q}}^{q_0} &\ll_{\mathbf{p}, \mathbf{q}} \sum_{l=2}^{\infty} \left\| t_l^{(\mathbf{r})}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}) - t_{l-1}^{(\mathbf{r})}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}) \right\|_{\mathbf{q}}^{q_0} 2^{l\beta q_0} \ll_{\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}} \\ &\ll_{\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}} \sum_{l=2}^{\infty} \|t_l(\mathbf{x}) - t_{l-1}(\mathbf{x})\|_{\mathbf{q}}^{q_0} 2^{l\beta q_0} 2^{lrq_0} \ll_{\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}} \sum_{l=2}^{\infty} E_{Q_{l-1}^{\mathbf{r}}}^{q_0}(f)_{\mathbf{p}} 2^{lq_0(r+\beta)} = \end{aligned}$$

$$= \sum_{l=1}^{\infty} E_{Q_l^r}^{q_0}(f)_{\mathbf{p}} 2^{lq_0(r+\beta)} < \infty$$

ЖӘНЕ

$$\begin{aligned} E_{Q_l^r}^{q_0} [f^{(\mathbf{r})}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha})]_{\mathbf{q}} &= \left(\inf_{T \in T(Q_n^r)} \|f^{(\mathbf{r})} - T\|_{\mathbf{q}} \right)^{q_0} \leq \\ &\leq \|f^{(\mathbf{r})} - t_n^{(\mathbf{r})}\|_{\mathbf{q}}^{q_0} = \left\| \sum_{l=n+1}^{\infty} [t_l^{(\mathbf{r})}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}) - t_{l-1}^{(\mathbf{r})}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha})] \right\|_{\mathbf{q}}^{q_0} \ll_{\mathbf{p}, \mathbf{q}} \\ &\ll_{\mathbf{p}, \mathbf{q}} \sum_{l=n+1}^{\infty} \|t_l^{(\mathbf{r})}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}) - t_{l-1}^{(\mathbf{r})}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha})\|_{\mathbf{q}}^{q_0} 2^{l\beta q_0} \ll_{\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}} \sum_{l=n+1}^{\infty} \|t_l(\mathbf{x}) - t_{l-1}(\mathbf{x})\|_{\mathbf{q}}^{q_0} 2^{l\beta q_0} 2^{lrq_0} \ll_{\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}} \\ &\ll_{\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}} \sum_{l=n+1}^{\infty} E_{Q_{l-1}^r}^{q_0}(f)_{\mathbf{p}} 2^{lq_0(r+\beta)} = \sum_{l=n}^{\infty} E_{Q_l^r}^{q_0}(f)_{\mathbf{p}} 2^{lq_0(r+\beta)} \end{aligned}$$

аламыз.

Бұл теңсіздіктерден, (1) шартты ескере отырып, теореманың дұрыстығына көз жеткіземіз.

Ескерту.

Егер $p_i = p$, $q_i = q$, $i = 1, 2, \dots, d$ болса, онда (2) теңсіздіктен В.Н.Темляковтің дәлелдеген теңсіздігі шығды ([1], 2.3 теореманы қараңыз).

Әдебиет тізімі

- [1] Темляков В.Н. Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Труды МИАН СССР. - 1986. - т.178 - с.3-112. 653 с.
- [2] Сулейменов К.М. О вложении анизотропного пространства типа Никольского-Бесова $B_{p,\theta}^\omega(R^n)$ в смешанной норме // Вестник ЕНУ имени Л.Н.Гумилева, 2011, №6.
- [3] Raushan Kadyrova and Erkara Zh. Aidos Inequality of Bernstein type for polynomials of hyperbolic crosses in a mixed norm // International Journal of Advanced Research (2013), Volume 1, Issue 9, p.494-498.

References

- [1] Temlyakov V.N. Priblizhenie funkciy s ogranicenoi smeshannoi proizvodnoi // Trudi MIAN SSSR - 1986. T.178 - p.3-112.
- [2] Sulejmenov K.M. O vlozenii anizotropnogo prostranstva tipa Nikol'skogo-Besova $B_{p,\theta}^\omega(R^n)$ v smeshannoi norme // Vestnik ENU imeni L.N.Gumileva, 2011, №6.
- [3] Raushan Kadyrova and Erkara Zh. Aidos Inequality of Bernstein type for polynomials of hyperbolic crosses in a mixed norm // International Journal of Advanced Research (2013), Volume 1, Issue 9, p.494-498.

УДК 517.938

С.А. АЙСАГАЛИЕВ

Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Республика Казахстан, г. Алматы
 E-mail: serikbaiaisagaliev@kaznu.kz

К решению краевой задачи с параметром для обыкновенных дифференциальных уравнений

Предлагается метод решения краевой задачи с параметром при наличии фазовых и интегральных ограничений. Получены необходимые и достаточные условия существования решения краевой задачи с параметром для обыкновенных дифференциальных уравнений. Разработан метод построения решения краевой задачи с параметром и ограничениями, путем построения минимизирующих последовательностей. Основой предлагаемого метода решения краевой задачи является принцип погружения. Принцип погружения был создан путем построения общего решения одного класса интегральных уравнений Фредгольма первого рода. В качестве примера приведено решение задачи Штурма-Лиувилля для значения параметра на заданном отрезке. Принципиальное отличие предлагаемого метода состоит в том, что разрешимость и построение решения краевой задачи с параметром и ограничениями решаются в едином, путем построения минимизирующих последовательностей, ориентированных на применении компьютерной техники. Разрешимость и построение решения краевой задачи определяются путем решения оптимизационной задачи. Создание общей теории краевых задач с параметрами для обыкновенных дифференциальных уравнений любого порядка со сложными граничными условиями при наличии фазовых и интегральных ограничений являются актуальной проблемой.

Ключевые слова: принцип погружения, оптимизационная задача, минимизирующие последовательности, интегральное уравнение, задача Штурма-Лиувилля.

S.A. Aisagaliev

**To solution of a boundary value problem with parameter
for ordinary differential equations**

A method for solving of a boundary value problem with parameter at presence of phase and integral constraints is supposed. Necessary and sufficient conditions for the existence of solution of the boundary value problem with parameter for ordinary differential equations are obtained. A method for constructing solution of the boundary value problem with parameter and constraints is developed by constructing minimizing sequences. The basis of the proposed method for solving the boundary value problem is the principle of immersion. The immersion principle is established by building the general solution of a class of Fredholm integral equations of the first kind. Solution of the Sturm-Liouville problem for the parameter value on the interval is presented as example. The principal difference between the proposed method lies in the fact that the solubility and the construction of the solution of the boundary value problem with a parameter and constraints are solved together, by constructing minimizing sequences focused on the use of computer technology. Solvability and construction of the solution of the boundary value problem are determined by solving the optimization problem. The creation of the general theory of boundary value problems with parameters for ordinary differential equations of any order with complicated boundary conditions in the presence of phase and integral constraints are an important issue.

Keywords : principle of immersion, an optimization problem, minimizing sequences, integral equation, Sturm-Liouville problem.

С.Ә. Айсағалиев
Жай дифференциалдық теңдеулер үшін параметрлі шекаралық есепті шешу туралы

Фазалық және интегралдық шектеулері бар параметрлі шекаралық есепті шешу әдістері ұсынылады. Жай дифференциалдық теңдеулер үшін параметрлі шекаралық есептің шешімінің бар болуының қажетті және жеткілікті шарттары алынған. Минимумдаушы тізбектер құру жолымен параметрлі және шектеулері бар шекаралық есептің шешімін құру әдісі қарастырылған. Берілген шекаралық есепті шешу әдісінің негізі - батыру қагидасы болып табылады. Батыру қагидасы бірінші текті Фредгольмнің интегралдық теңдеулерінің бір классының жалпы шешімін құру арқылы жүзеге асырылады. Мысал ретінде берілген аралықтагы параметр мәндері үшін Штурм-Лиувилль есебінің шешімі көрсетілген. Ұсынылған әдістің түбекейлі өзгешелігі параметрлі және шектеулері бар шеттік есептің шешімділігі мен шешімін тұргызу компьютерлік техниканы пайдалануга бағытталған минимумдаушы тізбектер тұргызу арқылы бірге жүзеге асырылады. Шеттік есептің шешімділігі мен шешімін тұргызу тиімділік есебін шешу арқылы анықталады. Фазалық және интегралдық шектеулері мен күрделі шекаралық шарттары бар кез келген ретті қарапайым дифференциалдық теңдеулер үшін параметрлі шеттік есептердің жалпы теориясын құру өзекті мәселе болып табылады.

Түйін сөздер: батыру қагидасы, тиімділік есеп, минимумдаушы тізбек, интегралдық теңдеулер, Штурм-Лиувилль есебі.

1. Постановка задачи

Рассмотрим следующую краевую задачу с параметром

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)f(x, \lambda, t) + \mu(t), \quad t \in I = [t_0, t_1], \quad (1)$$

с краевыми условиями

$$(x(t_0)) = x_0, x(t_1) = x_1 \in S \subset R^{2n}, \quad (2)$$

при наличии фазовых ограничений

$$x(t) \in G(t) : G(t) = \{x \in R^n / \omega(t) \leq F(x, \lambda, t) \leq \varphi(t), \quad t \in I\}, \quad (3)$$

а также интегральных ограничений

$$g_j(u(x_0, x_1, \lambda)) \leq c_j, \quad j = \overline{1, m_1}; \quad g_j(x_0, x_1, \lambda) = c_j, \quad j = \overline{m_1 + 1, m_2}, \quad (4)$$

$$g_j(x_0, x_1, \lambda) = \int_{t_0}^{t_1} f_{0j}(x(t), x_0, x_1, \lambda, t) dt, \quad j = \overline{1, m_2}. \quad (5)$$

с параметром

$$\lambda \in \Lambda \subset R^s, \quad \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_s). \quad (6)$$

Здесь $A(t)$, $B(t)$ – матрицы с кусочно-непрерывными элементами соответственно порядков $n \times n$, $n \times m$, вектор функция $f(x, \lambda, t) = (f_1(x, \lambda, t), \dots, f_r(x, \lambda, t))$ непрерывна по совокупности переменных $(x, \lambda, t) \in R^n \times R^s \times I$, удовлетворяет условию Липшица по переменной x , т.е.

$$|f(x, \lambda, t) - f(y, \lambda, t)| \leq l(t)|x - y|, \quad \forall (x, \lambda, t), (y, \lambda, t) \in R^n \times R^s \times I \quad (7)$$

и условию

$$|f(x, \lambda, t)| \leq c_0(|x| + |\lambda|^2) + c_1(t), \quad \forall(x, \lambda, t), \quad (8)$$

где $l(t) \geq 0$, $l(t) \in L_1(I, R^1)$, $c_0 = const > 0$, $c_1(t) \geq 0$, $c_1(t) \in L_1(I, R^1)$. Заметим, что при выполнении условий (7), (8) дифференциальное уравнение (1) при фиксированных $x_0 = x(t_0) \in R^n$, $\lambda \in R^s$ имеет единственное решение для значений $t \in I$. Вектор функция $F(x, \lambda, t) = (F_1(x, \lambda, t), \dots, F_S(x, \lambda, t))$ непрерывна по совокупности переменных $(x, \lambda, t) \in R^n \times I$. Функция $f_0(x(t), x_0, x_1, \lambda, t) = f_{01}(x, x_0, x_1, \lambda, t), \dots, f_{0m_2}(x, x_0, x_1, \lambda, t)$ непрерывна по совокупности переменных и удовлетворяет условию

$$\begin{aligned} |f_0(x, x_0, x_1, \lambda, t)| &\leq c_2(|x| + |x_0| + |x_1| + |\lambda|^2) + c_3(t), \\ \forall(x, x_0, x_1, \lambda, t) &\in R^n \times R^n \times R^n \times R^s \times I, \\ c_2 &= const \geq 0, \quad c_3(t) \geq 0, \quad c_3(t) \in L_1(I, R^1). \end{aligned}$$

$\omega(t), \varphi(t), t \in I$ – заданные r – мерные непрерывные функции. S – заданное ограниченное выпуклое замкнутое множество из R^{2n} , Λ – заданное ограниченное выпуклое замкнутое множество из R^s , моменты времени t_0, t_1 – фиксированы, $t_1 > t_0$. Заметим, что если $A(t) \equiv 0$, $m = n$, $B(t) = I_n$, где I_n – единичная матрица порядка $n \times n$, то уравнение (1) запишется в виде

$$\dot{x} = f(x, \lambda, t) + \mu(t), \quad t \in I. \quad (9)$$

Поэтому полученные ниже результаты остаются верными для уравнения вида (9) при условиях (2) – (6). В частности, множество S определяется соотношением

$$S = \{(x_0, x_1) \in R^{2n} / H_j(x_0, x_1) \leq 0, j = \overline{1, p}; \langle a_j, x_0 \rangle + \langle b_j, x_1 \rangle - e_j = 0, j = \overline{p+1, s_1}\},$$

где $H_j(x_0, x_1)$, $j = \overline{1, p}$ – выпуклые функции относительно переменных (x_0, x_1) , $x_0 = x(t_0)$, $x_1 = x(t_1)$, $a_j \in R^n$, $b_j \in R^n$, $e_j \in R^1$, $j = \overline{p+1, s}$ – заданные векторы и числа $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение. В частности, множество

$$\Lambda = \{\lambda \in R^s / h_j(\lambda) \leq 0, j = \overline{1, p_1}; \langle \bar{a}_j, \lambda \rangle - \bar{e}_j = 0, j = \overline{p_1+1, s_1}\},$$

где $h_j(\lambda)$, $j = \overline{1, p_1}$ – выпуклые функции относительно λ , $\bar{a}_j \in R^s$, $\bar{e}_j \in R^1$, $j = \overline{p_1+1, s_1}$ – заданные векторы и числа. Ставятся следующие задачи: **Задача 1.** Найти необходимые и достаточные условия существования решения краевой задачи (1) – (6). **Задача 2.** Построить решение краевой задачи (1) – (6). Как следует из постановки задачи, необходимо доказать существование пары $(x_0, x_1) \in S$ и параметра $\lambda \in \Lambda$ таких, что решение системы (1) исходящее из точки x_0 в момент времени t_0 , проходит через точку x_1 в момент времени t_1 , при этом вдоль решения системы (1), где $x(t) = x(t; x_0, t_0, \lambda)$, $t \in I$, $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$, для каждого момента времени выполняется фазовое ограничение (3), и интегралы (5) удовлетворяют условиям (4). В частности, из краевой задачи (1) – (6) при отсутствии фазовых и интегральных ограничений следует задача Штурма-Лиувилля. Применение метода Фурье к решению задач математической физики приводит к решению следующей задачи [1]: найти такие значения параметра λ , при которых в конечном промежутке $[t_0, t_1]$ существует отличное от нуля решение однородного уравнения

$$L[y] + \lambda r(t)y(t) \equiv 0, \quad (10)$$

удовлетворяющее на концах условиям:

$$\alpha_1 y(t_0) + \alpha_2 \dot{y}(t_0) = 0, \quad \beta_1 y(t_1) + \beta_2 \dot{y}(t_1) = 0, \quad (11)$$

где $L[y] = \frac{d}{dt}[p(t)\dot{y}(t)] - q(t)y(t)$, $p(t) > 0$, $t \in [t_0, t_1]$.

Вводя обозначения $y(t) = x_1(t)$, $\dot{x}_1(t) = x_2(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, уравнение (10) можно представить в виде

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)f(x_1, \lambda, t), \quad t \in I = [t_0, t_1], \quad (12)$$

где

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{q(t)}{p(t)} & -\frac{\dot{p}(t)}{p(t)} \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{r(t)}{p(t)} \end{pmatrix}, \quad f(x_1, \lambda, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda x_1 \end{pmatrix}.$$

Границное условие (11) запишется в виде

$$\alpha_1 x_{10} + \alpha_2 x_{20} = 0, \quad \beta_1 x_{11} + \beta_2 x_{21} = 0, \quad (13)$$

где $x(t_0) = (x_{10}, x_{20})$, $x(t_1) = (x_{11}, x_{21})$. Параметр $\lambda \in R^1$. Уравнение (12), краевое условие (13), $\lambda \in R^1$ являются частными случаями (1), (2), (6) соответственно. Как известно [2], решение задачи Штурма-Лиувилля сводится к решению однородного интегрального уравнения Фредгольма второго рода.

$$y(t) = -\lambda \int_{t_0}^{t_1} G(t, \xi) r(\xi) y(\xi) d\xi, \quad (14)$$

где $G(t, \xi)$ – функция Грина. Заметим, что построение функции Грина $G(t, \xi)$ и решение интегрального уравнения (14) довольно сложны. Поэтому представляет интерес разработка новых методов исследования решения краевых задач (1) – (6). В работах [3-5] делаются попытки распространить методы исследования краевых задач, созданных для линейных систем второго порядка на системы высоких порядков и на нелинейные системы со сложными граничными условиями. В работе [3] для двухточечной однородной краевой задачи для системы, состоящей из двух нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, предлагаются достаточные условия ее разрешимости и получены априорные оценки решений. В статье [4] рассматриваются задачи на собственные значения и собственные функции для квазилинейного дифференциального уравнения второго порядка. Исследуются требования, налагаемые на нелинейность, при которых задача имеет кратные собственные значения. Исследованию нелинейных задач на собственные значения для оператора Штурма-Лиувилля посвящена работа [5]. Для задачи на обоих концах интервала краевые условия зависят от спектрального параметра, устанавливается существование системы собственных функций образующей базис в пространстве $L_p(0, 1)$, $p > 1$. Во многих случаях на практике исследуемый процесс описывается уравнением вида (1) в области фазового пространства системы определяемой фазовым ограничением вида (3). Вне указанной области процесс описывается совершенно другими уравнениями либо исследуемый процесс не существует. В частности, такие

явления имеют место в исследованиях динамики ядерных и химических реакторов (вне области (3) реактор не существует). Интегральные ограничения вида (4) характеризуют суммарные нагрузки, испытываемые элементами и узлами системы (например, суммарная перегрузка космонавтов), которые не должны превосходить заданных величин, а равенства вида (4) соответствуют суммарным ограничениям, налагаемых на систему (например, расход топлива равен заданной величине). Основой предлагаемого метода решения краевой задачи с параметром является принцип погружения. Суть принципа погружения состоит в том, что исходная краевая задача с ограничениями заменяется на равносильную задачу оптимального управления со свободным правым концом траектории. Такой подход стал возможным благодаря нахождению общего решения одного класса интегральных уравнений Фредгольма первого рода. Далее, выяснение существования решения исходной задачи и построение ее решения осуществляется путем решения задачи оптимального управления специального вида. При таком подходе необходимые и достаточные условия существования решения краевой задачи (1) – (6) могут быть получены из условия достижения нижней грани функционала на заданном множестве, а решение исходной краевой задачи определяется по предельным точкам минимизирующих последовательностей. В этом заключается принципиальное отличие предлагаемого метода от известных методов исследования. Данная работа является продолжением научных исследований изложенных в [6-12].

2. Принцип погружения

Рассмотрим интегральные ограничения (4), (5). Путем введения дополнительных переменных $d = (d_1, \dots, d_{m_1}) \in R^{m_1}$, $d \geq 0$, соотношения (4), (5) можно представить в виде

$$g_j(x_0, x_1, \lambda) = \int_{t_0}^{t_1} f_{0j}(x(t), x_0, x_1, \lambda, t) dt = c_j - d_j, \quad j = \overline{1, m_1},$$

где $d \in \Gamma = \{d \in R^{m_1} / d \geq 0\}$. Пусть вектор $\bar{c} = (\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_{m_2})$, где $\bar{c}_j = c_j - d_j$, $j = \overline{1, m_1}$, $\bar{c}_j = c_j$, $j = \overline{m_1 + 1, m_2}$.

Введем вектор функцию $\eta(t) = (\eta_1(t), \dots, \eta_{m_2}(t))$, $t \in I$ где

$$\eta(t) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x(\tau), u(\tau), x_0, x_1, \tau) d\tau, \quad t \in I.$$

Отсюда следует, что

$$\dot{\eta}(t) = f_0(x(t), x_0, x_1, \lambda, t) d\tau, \quad t \in I = [t_0, t_1].$$

Тогда

$$\dot{\eta} = f_0(x(t), x_0, x_1, \lambda, t), \quad t \in I,$$

$$\eta(t_0) = 0, \quad \eta(t_1) = \bar{c}, \quad d \in \Gamma.$$

Теперь исходная краевая задача (1) – (6) запишется в виде

$$\dot{\xi} = A_1(t)\xi + B_1(t)f(P\xi, \lambda, t) + B_2f_0(P\xi, x_0, x_1, \lambda, t) + B_3\mu(t), \quad t \in I, \quad (15)$$

$$\xi(t_0) = \xi_0 = (x_0, O_{m_2}), \quad \xi(t_1) = \xi_1 = (x_1, \bar{c}), \quad (16)$$

$$(x_0, x_1) \in S, \quad d \in \Gamma, \quad P\xi(t) \in G(t), \quad t \in I, \quad \lambda \in \Lambda, \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} \xi &= \begin{pmatrix} x(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix}, \quad A_1(t) = \begin{pmatrix} A(t) & O_{n,m_2} \\ O_{m_2,n} & O_{m_2,m_2} \end{pmatrix}, \quad B_1(t) = \begin{pmatrix} B(t) \\ O_{m_2,m} \end{pmatrix}, \\ B_2(t) &= \begin{pmatrix} I_n \\ O_{m_2,n} \end{pmatrix}, \quad B_3(t) = \begin{pmatrix} O_{n,m_2} \\ I_{m_2} \end{pmatrix}, \quad P = (I_n, O_{n,m_2}), \quad P\xi = x, \end{aligned}$$

где $O_{j,k}$ – матрица порядка $j \times k$ с нулевыми элементами, $O_q \in R^q$ – вектор $q \times 1$ с нулевыми элементами, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n, \xi_{n+1}, \dots, \xi_{n+m_2})$.

Основой предлагаемого метода решения задач 1, 2 являются следующие теоремы о свойствах решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода вида

$$Ku = \int_{t_0}^{t_1} K(t_0, t)u(t)dt = a, \quad (18)$$

где $K(t_0, t) = \|K_{ij}(t_0, t)\|$, $i = \overline{1, n_1}$, $j = \overline{1, s_1}$ – известная матрица порядка $n_1 \times s$ с кусочно-непрерывными элементами по t при фиксированном t_0 , $u(\cdot) \in L_2(I, R^{s_1})$ – искомая функция, $I = [t_0, t_1]$, $a \in R^{n_1}$ – заданный n_1 – мерный вектор.

Теорема 1 Интегральное уравнение (18) при любом фиксированном $a \in R^{n_1}$ имеет решение тогда и только тогда, когда матрица

$$C(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} K(t_0, t)K^*(t_0, t)dt, \quad (19)$$

порядка $n_1 \times n_1$ является положительно определенной, где $(*)$ – знак транспонирования.

Теорема 2 Пусть матрица $C(t_0, t_1)$ определяемая по формуле (19) положительно определенная. Тогда общее решение интегрального уравнения (18) имеет вид

$$u(t) = K^*(t_0, t)C^{-1}(t_0, t_1)a + v(t) - K^*(t_0, t)C^{-1}(t_0, t_1) \int_{t_0}^{t_1} K(t_0, t)v(t)dt, \quad t \in I, \quad (20)$$

где $v(\cdot) \in L_2(I, R^{s_1})$ – произвольная функция, $\in R^{n_1}$ – любой вектор.

Доказательство теорем 1, 2 приведены в работах [6, 7]. Приложение теоремы 1, 2 для решения задачи управляемости и оптимального управления изложены в [8-10], а решения краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений приведены в [11, 12].

Наряду с дифференциальным уравнением (15) с краевыми условиями (16), рассмотрим линейную управляемую систему

$$\dot{y} = A_1(t)y + B_1(t)w_1(t) + B_2w_2(t) + \mu_1(t), \quad t \in I, \quad (21)$$

$$y(t_0) = \xi_0 = (x_0, O_{m_2}), \quad y(t_1) = \xi_1 = (x_1, \bar{c}), \quad (22)$$

$$w_1(\cdot) \in L_2(I, R^m), \quad w_2(\cdot) \in L_2(I, R^{m_2}), \quad (23)$$

$$(x_0, x_1) \in S, \quad d \in \Gamma, \quad (24)$$

где $\mu_1(t) = B_3\mu(t)$, $t \in I$.

Пусть матрица $\bar{B}(t) = (B_1(t), B_2)$ порядка $(n + m_2) \times (m_2 + m)$, а вектор функция $w(t) = (w_1(t), w_2(t)) \in L_2(I, R^{m+m_2})$. Легко убедиться в том, что управление $w(\cdot) \in L_2(I, R^{m+m_2})$, которое переводит траекторию системы (21) из любого начального состояния ξ_0 в любое желаемое конечное состояние ξ_1 , является решением интегрального уравнения

$$\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t) \bar{B}(t) w(t) dt = a, \quad (25)$$

где $\Phi(t_0, t) = \theta(t)\theta^{-1}(\tau)$, $\theta(t)$ – фундаментальная матрица решений линейной однородной системы $\dot{\zeta} = A_1(t)\zeta$, вектор

$$a = a(\xi_0, \xi_1) = \Phi(t_0, t_1)[\xi_1 - \Phi(t_1, t_0)\xi_0] - \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t)\mu_1(t)dt.$$

Как следует из (18), (25) интегральное уравнение (25) совпадает с (18), если матрица $K(t_0, t) = \Phi(t_0, t)\bar{B}(t)$. Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} W(t_0, t_1) &= \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t) \bar{B}(t) \bar{B}^*(t) \Phi^*(t_0, t) dt \\ W(t_0, t) &= \int_{t_0}^t \Phi(t_0, \tau) \bar{B}(\tau) \bar{B}^*(\tau) \Phi^*(t_0, \tau) dt \\ W(t_1, t_0) &= W(t_0, t_1) - W(t_0, t), \quad E(t) = \bar{B}^* \Phi^*(t_0, t) W^{-1}(t_0, t_1), \\ \mu_2(t) &= -E(t) \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t) \mu_1(t) dt, \quad E_1(t) = \Phi(t, t_0) W(t_1, t_0) W^{-1}(t_0, t_1), \\ E_2(t) &= \Phi(t, t_0) W(t_0, t) W^{-1}(t_0, t_1) \Phi(t_0, t_1), \\ \mu_3(t) &= \Phi(t_0, t_1) \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, \tau) \mu_1(\tau) d\tau - E(t) \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, t) \mu_1(t) dt. \end{aligned}$$

Вычислим функции $\lambda_1(t, \xi_0, \xi_1)$, $\lambda_2(t, \xi_0, \xi_1)$, $N_1(t)$, $N_2(t)$ по формулам:

$$\lambda_1(t, \xi_0, \xi_1) = E(t)a = T_1(t)\xi_0 + T_2(t)\xi_1 + \mu_2(t),$$

$$\lambda_2(t, \xi_0, \xi_1) = E_1(t)\xi_0 + E_2(t)\xi_1 + \mu_3(t),$$

$$N_1(t) = -E(t)\Phi(t_0, t_1), \quad N_2(t) = -E_2(t), \quad t \in I.$$

Теорема 3 Пусть матрица $W(t_0, t_1) > 0$. Управление $w(\cdot) \in L_2(I, R^{m+m_2})$ переводит траекторию системы (21) из любой начальной точки $\xi_0 \in R^{n+m_2}$ в конечное состояние $\xi_1 \in R^{n+m_2}$ тогда и только тогда, когда

$$w(t) \in W = \{w(\cdot) \in L_2(I, R^{m+m_2}) / w(t) = v(t) + \lambda_1(t, \xi_0, \xi_1) + N_1(t)z(t_1, v), \quad t \in I, \quad \forall v(\cdot) \in L_2(I, R^{m+m_2})\}, \quad (26)$$

где функция $z(t) = z(t, v)$, $t \in I$ является решением дифференциального уравнения

$$\dot{z} = A_1 z + \bar{B}(t)v(t), \quad z(t_0) = 0, \quad t \in I, \quad v(\cdot) \in L_2(I, R^{m+m_2}). \quad (27)$$

Решение дифференциального уравнения (21), соответствующее управлению $w(t) \in W$, определяется по формуле

$$y(t) = z(t) + \lambda_2(t, \xi_0, \xi_1) + N_2(t)z(t_1, v), \quad t \in I, \quad (28)$$

Доказательство. Как следует из теоремы 1, для существования решения интегрального уравнения (25) необходимо и достаточно, чтобы матрица $W(t_0, t_1) = C(t_0, t_1) > 0$, где $C(t_0, t) = \Phi(t_0, t)\bar{B}(t)$. Теперь соотношение (20) запишется в виде (26). Решение системы (21), соответствующее управлению (26), определяется по формуле (28), где $z(t) = z(t, v)$, $t \in I$ – решение дифференциального уравнения (27). Теорема доказана.

Лемма 1 Пусть матрица $W(t_0, t_1) > 0$. Тогда краевая задача (1) – (6) (либо (15) – (17)) равносильна следующей задаче

$$w(t) = (w_1, w_2) \in W, \quad w_1(t) = f(Py(t), \lambda, t), \quad w_2(t) = f_0(Py(t), x_0, x_1, \lambda, t), \quad (29)$$

$$\dot{z} = A_1(t)z + B_1(t)v_1(t) + B_2v_2(t), \quad z(t_0) = 0, \quad t \in I, \quad (30)$$

$$v(t) = (v_1(t), v_2(t)), \quad v_1(\cdot) \in L_2(I, R^m), \quad v_2(\cdot) \in L_2(I, R^{m_2}), \quad (31)$$

$$(x_0, x_1) \in S, \quad \lambda \in \Lambda, \quad d \in \Gamma, \quad Py(t) \in G(t), \quad t \in I, \quad (32)$$

где $v(\cdot) = (v_1(\cdot), v_2(\cdot)) \in L_2(I, R^{m+m_2})$ – произвольная функция, $y(t)$, $t \in I$ определяется по формуле (28).

Доказательство. При выполнении соотношений (29) – (32), функция $y(t) = \xi(t)_0$, $t \in I$, $Py(t) = P\xi(t) \in G(t)$, $t \in I$, $w(t) = (w_1(t), w_2(t)) \in W$. Лемма доказана.

Рассмотрим следующую оптимизационную задачу: минимизировать функционал:

$$\begin{aligned} J_1(v_1, v_2, p, d, x_0, x_1, \lambda) &= \int_{t_0}^{t_1} [|w_1(t) - f(Py(t), \lambda, t)|^2 + \\ &+ |w_2(t) - f_0(Py(t), x_0, x_1, \lambda, t)|^2 + |p(t) - F(Py(t), \lambda, t)|^2] dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} F_0(t, v_1(t), v_2(t), p(t), d, x_0, x_1, \lambda, z(t), z(t_1)) dt \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (33)$$

при условиях

$$\dot{z} = A(t)z + B_1(t)v_1(t) + B_2v_2(t), \quad z(t_0) = 0, \quad t \in I, \quad (34)$$

$$v_1(\cdot) \in L_2(I, R^m), v_2(\cdot) \in L_2(I, R_2^m), (x_0, x_1) \in S, \lambda \in \Lambda, d \in \Gamma, \quad (35)$$

$$p(t) \in V(t) = \{\omega(t) \leq p(t) \leq \varphi(t), t \in I\}, \quad (36)$$

где

$$w_1(t) = v_1(t) + \lambda_{11}(t, \xi_0, \xi_1) + N_{11}(t)z(t_1, v), \quad t \in I, \quad (37)$$

$$w_2(t) = v_2(t) + \lambda_{12}(t, \xi_0, \xi_1) + N_{12}(t)z(t_1, v), \quad t \in I, \quad (38)$$

$$N_1(t) = (N_{11}(t), N_{12}(t)), \quad \lambda_1(t, \xi_0, \xi_1) = (\lambda_{11}(t, \xi_0, \xi_1), \lambda_{12}(t, \xi_0, \xi_1)).$$

Обозначим через

$$\begin{aligned} X &= L_2(I, R^{m+m_2}) \times V(t) \times \Gamma \times S \times \Lambda \subset H = L_2(I, R^m) \times L_2(I, R^{m_2}) \times \\ &\times L_2(I, R^r) \times R^{m_1} \times R^n \times R^n \times R^s, \quad J_* = \inf_{\theta \in X} J(\theta), \\ \theta &= (v_1, v_2, p, d, x_0, x_1, \lambda) \in X, \quad X_* = \{\theta_* \in X | J(\theta_*) = 0\}. \end{aligned}$$

Теорема 4 Пусть матрица $W(t_0, t_1) > 0$, $X_* \neq \emptyset$, \emptyset – пустое множество. Для того, чтобы краевая задача (1) – (6) имела решение, необходимо и достаточно, чтобы значение $J(\theta_*) = 0 = J_*$, где $\theta_* = (v_1^*, v_2^*, p_*, d_*, x_0^*, x_1^*, \lambda_*) \in X$ – оптимальное управление для задачи (33) – (36).

Если $J_* = J(\theta_*) = 0$, то функция

$$x_*(t) = P[z(t, v_1^*, v_2^*) + \lambda_2(t, \xi_0^*, \xi_1^*) + N_2(t)z(t_1, v_1^*, v_2^*)], \quad t \in I$$

решение краевой задачи (1) – (6). Если $J_* > 0$, то краевая задача (1) – (6) не имеет решения.

Доказательство. Необходимость. Пусть краевая задача (1) – (6) имеет решение. Тогда, как следует из леммы 1, значение $w_1^*(t) = f(Py_*(t), \lambda_*, t)$, $w_2^*(t) = f_0(Py_*(t), x_0^*, x_1^*, \lambda_*, t)$, где $w_*(t) = (w_1^*(t), w_2^*(t)) \in W$, $y_*(t)$, $t \in I$ определяется по формуле (28), $\xi_0^* = (x_0^*, O_{m_2})$, $\xi_1^* = (x_1^*, \bar{c}_*)$, $\bar{c}_* = (c_j - d_j^*)$, $j = \overline{1, m_1}$; c_j , $j = \overline{m_1 + 1, m_2}$. Включение $Py_*(t) \in G(t)$, $t \in I$ равносильно тому, что $p_*(t) = F(Py_*(t), \lambda_*, t)$, $t \in I$, где $\omega(t) \leq p_*(t) = F(Py_*(t), \lambda_*, t) \leq \varphi(t)$, $t \in I$. Следовательно, значение $J(\theta_*) = 0$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $J(\theta_*) = 0$. Это возможно тогда и только тогда, когда $w_1^*(t) = f(Py_*(t), \lambda_*, t)$, $w_2^*(t) = f_0(Py_*(t), x_0^*, x_1^*, \lambda_*, t)$, $p_*(t) = F(Py_*(t), \lambda_*, t)$, $(x_0^*, x_1^*) \in S$, $v_1^*(\cdot) \in L_2(I, R^m)$, $v_2^*(\cdot) \in L_2(I, R_2^m)$. Достаточность доказана. Теорема доказана.

Переход от краевой задачи (1) – (6) к задаче (33) – (36) называется принципом погружения.

3. Оптимизационная задача

Рассмотрим решение оптимизационной задачи (33) – (36). Заметим, что функция

$$\begin{aligned} F_0(t, v_1, v_2, p, d, x_0, x_1, \lambda) &= |w_1(t) - f(Py(t), \lambda, t)|^2 + |w_2(t) - f_0(Py(t), x_0, x_1, \lambda, t)|^2 + \\ &+ |p(t) - F(Py(t), \lambda, t)|^2 = F_0(t, q), \quad q = (\theta, z, \bar{z}), \end{aligned}$$

где w_1 , w_2 определяются формулами (37), (38) соответственно, функция

$$y = z + \lambda_2(t, x_0, x_1, d) + N_2(t)\bar{z}, \quad Py = x.$$

Теорема 5 Пусть матрица $W(t_0, t_1) > 0$, функция $F_0(t, q)$ определена и непрерывна и дифференцируема по $q = (\theta, z, \bar{z})$, и выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned} |F_{0z}(t, \theta + \Delta\theta, z + \Delta z, \bar{z} + \Delta\bar{z}) - F_{0z}(t, \theta, z, \bar{z})| &\leq L(|\Delta z| + |\Delta\bar{z}| + |\Delta\theta|), \\ |F_{0\bar{z}}(t, \theta + \Delta\theta, z + \Delta z, \bar{z} + \Delta\bar{z}) - F_{0\bar{z}}(t, \theta, z, \bar{z})| &\leq L(|\Delta z| + |\Delta\bar{z}| + |\Delta\theta|), \\ |F_{0\theta}(t, \theta + \Delta\theta, z + \Delta z, \bar{z} + \Delta\bar{z}) - F_{0\theta}(t, \theta, z, \bar{z})| &\leq L(|\Delta z| + |\Delta\bar{z}| + |\Delta\theta|), \\ \forall \theta \in R^{m+m_2+r+m_1+2n+s}, \quad \forall z \in R^{n+m_2}, \quad \forall \bar{z} \in R^{n+m_2}. \end{aligned}$$

Тогда функционал (33) при условиях (34) – (36) непрерывен и дифференцируем по θ в любой точке $\theta \in X$, причем

$$J'(\theta) = (J'_{v_1}(\theta), J'_{v_2}(\theta), J'_p(\theta), J'_d(\theta), J'_{x_0}(\theta), J'_{x_1}(\theta), J'_\lambda(\theta)) \in H,$$

т.е.

$$\begin{aligned} J'_{v_1}(\theta) &= F_{0v_1}(t, q) - B_1^*(t)\psi(t), \quad J'_{v_2}(\theta) = F_{0v_2}(t, q) - B_2^*\psi(t), \quad J'_p(\theta) = F_{0p}(t, q), \\ J'_d(\theta) &= \int_{t_0}^{t_1} F_{0d}(t, q) dt, \quad J'_{x_0}(\theta) = \int_{t_0}^{t_1} F_{0x_0}(t, q) dt, \quad J'_{x_1}(\theta) = \int_{t_0}^{t_1} F_{0x_1}(t, q) dt, \\ J'_\lambda(\theta) &= \int_{t_0}^{t_1} F_{0\lambda}(t, q) dt, \quad q = (\theta, z(t), \bar{z}(t)), \end{aligned} \tag{39}$$

функция $z(t)$, $t \in I$ – решение дифференциального уравнения (34) при $v_1(\cdot) \in L_2(I, R^m)$, $v_2(\cdot) \in L_2(I, R^{m_2})$, а функция $\psi(t)$, $t \in I$ – решение сопряженной системы

$$\dot{\psi} = F_{0z}(t, q(t)) - A_1^*(t)\psi, \quad \psi(t_1) = - \int_{t_0}^{t_1} F_{0z}(t, q(t)) dt. \tag{40}$$

Кроме того, градиент $J'(\theta)$, $\theta \in X$ удовлетворяет условию Липшица

$$\|J'(\theta_1) - J'(\theta_2)\| \leq K\|\theta_1 - \theta_2\|, \quad \forall \theta_1, \theta_2 \in X, \tag{41}$$

т.е. $K > 0$ – постоянная Липшица.

Доказательство. Пусть $\theta, \theta + \Delta\theta \in X$, где $\Delta\theta = (\Delta v_1, \Delta v_2, \Delta p, \Delta d, \Delta x_0, \Delta x_1, \Delta \lambda)$. Можно показать, что

$$\Delta \dot{z} = A_1(t)\Delta z + B_1(t)\Delta v_1 + B_2\Delta v_2, \quad \Delta z(t_0) = 0,$$

приращение функционала

$$\begin{aligned} \Delta J &= J(\theta + \Delta\theta) - J(\theta) = < J'_{v_1}(\theta), \Delta v_1 >_{L_2} + < J'_{v_2}(\theta), \Delta v_2 >_{L_2} + < J'_p(\theta), \Delta p >_{L_2} + \\ &+ < J'_d(\theta), \Delta d >_{R^{m_1}} + < J'_{x_0}(\theta), \Delta x_0 >_{R_n} + < J'_{x_1}(\theta), \Delta x_1 >_{R_n} + < J'_\lambda(\theta), \Delta \lambda >_{R_s} + \\ &+ R, \quad R = \sum_{i=1}^7 R_i, \end{aligned}$$

где $|R| \leq c_* \|\Delta\theta\|_X^2$, $|R|/\|\Delta\theta\|_X \rightarrow 0$ при $\|\Delta\theta\|_X \rightarrow 0$, $c_* = \text{const} > 0$.

Отсюда следует соотношения (39), где $\psi(t)$, $t \in I$ – решение уравнения (40).

Пусть $\theta_1 = (v_1 + \Delta v_1, v_2 + \Delta v_2, p + \Delta p, d + \Delta d, x_0 + \Delta x_0, x_1 + \Delta x_1, \lambda + \Delta \lambda) \in X$, $\theta_2 = (v_1, v_2, p, d, x_0, x_1, \lambda)$. Поскольку

$$|J'(\theta_1) - J'(\theta_2)| \leq c_0 |\Delta q(t)| + c_1 |\Delta \psi(t)| + c_2 \|\Delta\theta\|,$$

$$\Delta \dot{\psi} = [F_{0z}(t, q + \Delta q) - F_{0z}(t, q)] - A_1^*(t) \Delta \psi,$$

$$\Delta \psi(t_1) = - \int [F_{0z(t_1)}(t, q + \Delta q) - F_{0z(t_1)}(t, q)] dt,$$

то верны оценки $\|\Delta q\| \leq c_3 \|\Delta\theta\|$, $|\Delta \psi(t)| \leq c_4 \|\Delta\theta\|$. Тогда

$$\|J'(\theta_1) - J'(\theta_2)\|^2 = \int_{t_0}^{t_1} |J'(\theta_1) - J'(\theta_2)|^2 dt \leq K \|\Delta\theta\|^2.$$

Теорема доказана.

Используя соотношения (39) – (41), строим последовательность $\{\theta_n\} = \{v_{1n}, v_{2n}, p_n, d_n, x_{0n}, x_{1n}, \lambda_n\} \subset X$ по следующим правилам:

$$\begin{aligned} v_{1n+1} &= v_{1n} - \alpha_n J'_{v_1}(\theta_n), \quad v_{2n+1} = v_{2n} - \alpha_n J'_{v_2}(\theta_n), \\ p_{n+1} &= P_V[p_n - \alpha_n J'_p(\theta_n)], \quad d_{n+1} = P_\Gamma[d_n - \alpha_n J'_d(\theta_n)], \\ x_{0n+1} &= P_S[x_{0n} - \alpha_n J'_{x_0}(\theta_n)], \quad x_{1n+1} = P_S[x_{1n} - \alpha_n J'_{x_1}(\theta_n)], \\ \lambda_{n+1} &= P_\Lambda[d_n - \alpha_n J'_\lambda(\theta_n)], \quad n = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \tag{42}$$

где $0 < \alpha_n = \frac{2}{K + 2\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, $K > 0$ – постоянная Липшица из (41). Введем следующие обозначения

$$M_0 = \{\theta \in X / J(\theta) \leq J(\theta_0)\}, \quad X_{**} = \{\theta_{**} \in X / J(\theta_{**}) = \inf_{\theta \in X} J(\theta)\},$$

где $\theta_0 = (v_{10}, v_{20}, p_0, d_0, x_{10}, x_{20}, \lambda_0) \in X$ – начальная точка итерационного процесса (42).

Теорема 6 Пусть выполнены условия теоремы 5, функционал $J(\theta)$, $\theta \in X$ ограничен снизу, последовательность $\{\theta_n\} \subset X$ определяется по формуле (42). Тогда

$$1) \quad J(\theta_n - J(\theta_{n+1})) \geq \varepsilon \|\theta_n - \theta_{n+1}\|^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \tag{43}$$

$$2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|\theta_n - \theta_{n+1}\| = 0. \tag{44}$$

Доказательство. Так как θ_{n+1} является проекцией точки $\theta_n - \alpha_n J'(\theta_n)$, то $\langle \theta_{n+1} - \theta_n + \alpha_n J'(\theta_n), \theta_n - \theta_{n+1} \rangle_H \geq 0$, $\forall \theta, \theta \in X$. Отсюда, с учетом того, что $J(\theta) \in C^{1,1}(X)$, получим

$$J(\theta_n) - J(\theta_{n+1}) \geq \left(\frac{1}{\alpha_n} - \frac{K}{2} \right) \|\theta_n - \theta_{n+1}\|^2 \geq \varepsilon \|\theta_n - \theta_{n+1}\|^2.$$

Следовательно, числовая последовательность $\{J(\theta_n)\}$ строго убывает, и верно неравенство (43). Равенство (44) следует из ограниченности снизу функционала $J(\theta)$, $\theta \in X$. Заметим, что $J(\theta) > 0$, $\forall \theta, \theta \in X$. Теорема доказана.

Теорема 7 Пусть выполнены условия теоремы 5, множество M_0 – ограничено и выполнено неравенство

$$\begin{aligned} & \langle F_{0q}(t, q_1) - F_{0q}(t, q_2), q_1 - q_2 \rangle_{R^N} \geq 0, \quad \forall q_1, q_2 \in R^N, \\ & N = m + m_2 + 2n + s + m_1 + r + 2(n + m_2). \end{aligned} \quad (45)$$

Тогда:

- 1) множество M_0 – слабо бикомпактно, $X_{**} \neq \emptyset$, \emptyset – пустое множество;
- 2) последовательность $\{\theta_n\}$ является минимизирующей, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(\theta_n) = J_* = \inf_{\theta \in X} J(\theta);$$

- 3) последовательность $\{\theta_n\} \subset M_0$ слабо сходится к точке $\theta_{**} \in X_{**}$;
- 4) справедлива следующая оценка скорости сходимости

$$0 \leq J(\theta_n) - J_* \leq \frac{c_1}{n}, \quad c_1 = \text{const} > 0, \quad n = 1, 2, \dots;$$

- 5) краевая задача (1) – (6) имеет решение тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(\theta_n) = J_* = \inf_{\theta \in X} J(\theta) = J(\theta_{**}) = 0;$$

6) если $J(\theta_{**}) = 0$, где $\theta_{**} = \theta_* = (v_1^*, v_2^*, p_*, d_*, x_0^*, x_1^*, \lambda_*) \in X_*$, то решение краевой задачи (1) – (6) является функцией

$$x_*(t) = P y_*(t), \quad y_*(t) = z(t, v_1^*, v_2^*) + \lambda_2(t, \xi_0^*, \xi_1^*) + N_2(t) z(t_1; v_1^*, v_2^*), \quad t \in I.$$

- 7) если $J(\theta_{**}) > 0$, то краевая задача (1) – (6) нет имеет решения.

Доказательство. Из условия (5) следует, что функционал $J(\theta) \in C^{1,1}(X)$ является выпуклым. Первое утверждение теоремы следует из того, что M_0 – ограниченное выпуклое замкнутое множество из рефлексивного банахово пространства H , а также из слабой полуунпрерывности снизу функционала $J(\theta)$ на слабо бикомпактном множестве M_0 . Второе утверждение следует из оценки $J(\theta_n) - J(\theta_{n+1}) \geq \varepsilon \|\theta_n - \theta_{n+1}\|^2$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Отсюда имеем $J(\theta_{n+1}) < J(\theta_n)$, $\|\theta_n - \theta_{n+1}\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, $\{\theta_n\} \subset M_0$. Тогда из выпуклости функционала $J(\theta)$, $\theta \in M_0$ следует, что $\{\theta_n\}$ минимизирующая. Третье утверждение следует из слабой бикомпактности множества M_0 , $\{\theta_n\} \subset M_0$. Оценка скорости сходимости следует из неравенства $J(\theta_n) - J(\theta_{**}) \leq c_1 \|\theta_n - \theta_{n+1}\|$. Утверждения 5), 6) следуют из теоремы 4. Теорема доказана.

Заметим, что если $f(x, \lambda, t)$, $f_{0j}(x, x_0, x_1, \lambda, t)$, $j = \overline{1, m_2}$, $F(x, \lambda)$ – линейные функции относительно переменных (x, x_0, x_1, λ) , то функционал $J(\theta)$ является выпуклым.

4. Решение задачи Штурма-Лиувилля на отрезке

Рассмотрим задачу Штурма-Лиувилля (10), (11). Обозначим $a_{21} = \frac{q(t)}{p(t)}$, $a_{22} = -\frac{\dot{p}(t)}{p(t)}$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2)$, $b_{22}(t) = \frac{r(t)}{p(t)}$. Теперь уравнение (10) и краевое условие (11) запишутся в виде

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + b_{22}(t)\lambda x_1, \quad \alpha x_0 = 0, \quad \beta x_1 = 0, \quad t \in I = [t_0, t_1].$$

Тогда в векторной форме задача (10), (11) имеет вид

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)\lambda x_1, \quad t \in I = [t_0, t_1], \quad \alpha x_0 = 0, \quad \beta x_1 = 0, \quad (46)$$

где

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ b_{22}(t) \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix}, \quad x_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix}.$$

Будем искать решения уравнения (46), когда $\lambda \in \Lambda = \{\lambda \in R^1 / \gamma \leq \lambda \leq \delta\}$, где γ, δ – заданные числа. Полагаем, что моменты времени $t_0, t_1, t_1 > t_0$ – фиксированные числа.

Для данного примера $\mu(t) \equiv 0, f(x, \lambda, t) \equiv \lambda x_1, f_0 \equiv 0, F \equiv 0, t \in I$. Тогда $\xi(t) = x(t), t \in I, A_1(t) = A(t), B_1(t) = B(t), B_2 = 0, B_3 = 0$. Следовательно, линейная управляемая система (21) запишется в виде

$$\dot{y} = A(t)y + B(t)w_1(t), \quad y(t_0) = x_0, \quad y(t_1) = x_1, \quad w_1(\cdot) \in L_2(I, R^1). \quad (47)$$

Решение дифференциального уравнения (47) имеет вид

$$y(t) = \Phi(t, t_0)y(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)w_1(\tau)d\tau, \quad t \in I.$$

Так как $y(t_1) = x_1, y(t_0) = x_0$, то интегральное уравнение (25) для данного примера запишется так

$$\int_{t_0}^t \Phi(t_0, \tau)B(\tau)w_1(\tau)d\tau = a = \Phi(t_0, t_1)[x_1 - \Phi(t_1, t_0)x_0], \quad (48)$$

где $\Phi(t, \tau) = \theta(t)\theta^{-1}(\tau)$, $\theta(t)$ – фундаментальная матрица решений дифференциального уравнения $\dot{\zeta} = A(t)\zeta$. Так как $\dot{\theta} = A(t)\theta, t \in I, \theta(t_0) = I_2$, где I_2 – единичная матрица порядка 2×2 , то элементы матрицы $\theta(t), t \in I$ являются решениями дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_{11}(t) &= \theta_{21}(t), \quad \theta_{11}(t_0) = 1; \quad \dot{\theta}_{12}(t) = \theta_{22}(t), \quad \theta_{12}(t_0) = 0; \quad \dot{\theta}_{21}(t) = a_{21}(t)\theta_{11}(t) + \\ &+ a_{22}(t)\theta_{21}(t), \quad \theta_{21}(t_0) = 0; \quad \dot{\theta}_{22}(t) = a_{21}(t)\theta_{12}(t) + \\ &+ a_{22}(t)\theta_{22}(t), \quad \theta_{22}(t_0) = 1. \end{aligned} \quad (49)$$

Из решения дифференциальных уравнений (49) могут быть найдены элементы матрицы $\theta(t) = \|\theta_{ij}(t)\|, i, j = 1, 2$. Обратная матрица

$$\theta^{-1}(\tau) = \frac{1}{\Delta(\tau)} \begin{pmatrix} \theta_{22}(\tau) & -\theta_{12}(\tau) \\ -\theta_{21}(\tau) & \theta_{11}(\tau) \end{pmatrix}, \quad \Delta(\tau) = \theta_{11}(\tau)\theta_{22}(\tau) - \theta_{12}(\tau)\theta_{21}(\tau).$$

Заметим, что $\Phi(t_0, t) = \theta(t_0)\theta^{-1}(t) = \theta^{-1}(t)$. Поскольку

$$\Phi(t_0, t)B(t) = \frac{1}{\Delta(t)} \begin{pmatrix} -\theta_{12}(t)b_{22}(t) \\ \theta_{11}(t)b_{22}(t) \end{pmatrix},$$

то матрица

$$W(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t) B(t) B^*(t) \Phi^*(t_0, t) dt = \begin{pmatrix} W_{11}(t_0, t_1) & W_{12}(t_0, t_1) \\ W_{12}(t_0, t_1) & W_{22}(t_0, t_1) \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} W_{11}(t_0, t_1) &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{\Delta^2 t} \theta_{12}^2(t) b_{22}^2(t) dt, \quad W_{12}(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{\Delta^2 t} \theta_{11}(t) \theta_{12}(t) b_{22}^2(t) dt, \\ W_{22}(t_0, t_1) &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{\Delta^2 t} \theta_{11}^2(t) b_{22}^2(t) dt, \quad W_{12}(t_0, t_1) = W_{21}(t_0, t_1). \end{aligned}$$

Обратная матрица

$$W^{-1}(t_0, t_1) = \frac{1}{\Delta_1(t_0, t_1)} \begin{pmatrix} W_{22}(t_0, t_1) & -W_{12}(t_0, t_1) \\ -W_{12}(t_0, t_1) & W_{11}(t_0, t_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{W}_{11}(t_0, t_1) & \overline{W}_{12}(t_0, t_1) \\ \overline{W}_{12}(t_0, t_1) & \overline{W}_{22}(t_0, t_1) \end{pmatrix},$$

где $\Delta_1(t_0, t_1) = W_{11}(t_0, t_1)W_{22}(t_0, t_1) - W_{12}^2(t_0, t_1)$. Матрицы

$$W(t, t_1) = \begin{pmatrix} W_{11}(t, t_1) & W_{12}(t, t_1) \\ W_{12}(t, t_1) & W_{22}(t, t_1) \end{pmatrix}, \quad W(t_0, t) = \begin{pmatrix} W_{11}(t_0, t) & W_{12}(t_0, t) \\ W_{12}(t_0, t) & W_{22}(t_0, t) \end{pmatrix},$$

где $\overline{W}_{11}(t_0, t_1) = \frac{1}{\Delta_1(t_0, t_1)} W_{22}(t_0, t_1)$, $\overline{W}_{12}(t_0, t_1) = -\frac{1}{\Delta_1(t_0, t_1)} W_{12}(t_0, t_1)$, $\overline{W}_{22}(t_0, t_1) = \frac{1}{\Delta_1(t_0, t_1)} W_{11}(t_0, t_1)$. Можно показать, что $W(t_0, t_1) = W^*(t_0, t_1) > 0$.

Так как векторы a , $E(t)$ равны

$$a = \Phi(t_0, t_1)x_1 - x_0 = \theta^{-1}(t_1)x_1 - x_0 = \begin{pmatrix} -x_{10} + \frac{1}{\Delta(t_1)} \theta_{22}(t_1)x_{11} - \frac{1}{\Delta(t_1)} \theta_{12}(t_1)x_{12} \\ -x_{20} + \frac{1}{\Delta(t_1)} \theta_{21}(t_1)x_{11} - \frac{1}{\Delta(t_1)} \theta_{11}(t_1)x_{12} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} E(t) &= B^*(t)\Phi^*(t_0, t)W^{-1}(t_0, t_1) = \frac{1}{\Delta(t)} (-\overline{W}_{11}(t_0, t_1)\theta_{12}(t)b_{22}(t) + \overline{W}_{12}(t_0, t_1)\theta_{11}(t)b_{22}(t); \\ &\quad -\overline{W}_{12}(t_0, t_1)\theta_{12}(t)b_{22}(t) + \overline{W}_{22}(t_0, t_1)\theta_{11}(t)b_{22}(t)), \end{aligned}$$

то

$$\lambda_1(t, x_0, x_1) = E(t)a = T_{11}(t)x_{10} + T_{12}x_{20} + T_{21}(t)x_{11} + T_{22}(t)x_{12}, \quad (50)$$

где

$$T_{11}(t) = \frac{1}{\Delta(t)} [\overline{W}_{11}(t_0, t_1)\theta_{12}(t)b_{22}(t) - \overline{W}_{12}(t_0, t_1)\theta_{11}(t)b_{22}(t)],$$

$$T_{12}(t) = \frac{1}{\Delta(t)} [\overline{W}_{12}(t_0, t_1)\theta_{12}(t)b_{22}(t) - \overline{W}_{22}(t_0, t_1)\theta_{11}(t)b_{22}(t)],$$

$$\begin{aligned}
T_{21}(t) &= \frac{\theta_{22}(t_1)}{\Delta(t)\Delta(t_1)}[-\bar{W}_{11}(t_0, t_1)\theta_{12}(t)b_{22}(t) + \bar{W}_{12}(t_0, t_1)\theta_{11}(t)b_{22}(t)] + \\
&\quad + \frac{\theta_{21}(t_1)}{\Delta(t)\Delta(t_1)}[-\bar{W}_{12}(t_0, t_1)\theta_{12}(t)b_{22}(t) + \bar{W}_{22}(t_0, t_1)\theta_{11}(t)b_{22}(t)] \\
T_{22}(t) &= -\frac{\theta_{12}(t_1)}{\Delta(t)\Delta(t_1)}[-\bar{W}_{11}(t_0, t_1)\theta_{12}(t)b_{22}(t) + \bar{W}_{12}(t_0, t_1)\theta_{11}(t)b_{22}(t)] - \\
&\quad - \frac{\theta_{11}(t_1)}{\Delta(t)\Delta(t_1)}[-\bar{W}_{12}(t_0, t_1)\theta_{12}(t)b_{22}(t) + \bar{W}_{22}(t_0, t_1)\theta_{11}(t)b_{22}(t)]
\end{aligned}$$

Матрица $N_1(t)$ порядка 2×1 равна

$$\begin{aligned}
N_1(t) &= -E(t)\Phi(t_0, t_1) = -E(t)\theta^{-1}(t_1) = \\
&= \left(\begin{array}{l} \frac{\theta_{22}(t_1)}{\Delta(t)\Delta(t_1)}[-\bar{W}_{11}(t_0, t_1)\theta_{12}(t)b_{22}(t) + \bar{W}_{12}(t_0, t_1)\theta_{11}(t)b_{22}(t)] + \\ -\frac{\theta_{12}(t_1)}{\Delta(t)\Delta(t_1)}[-\bar{W}_{11}(t_0, t_1)\theta_{12}(t)b_{22}(t) + \bar{W}_{12}(t_0, t_1)\theta_{11}(t)b_{22}(t)] - \\ + \frac{\theta_{21}(t_1)}{\Delta(t)\Delta(t_1)}[-\bar{W}_{12}(t_0, t_1)\theta_{12}(t)b_{22}(t) + \bar{W}_{22}(t_0, t_1)\theta_{11}(t)b_{22}(t)] \\ - \frac{\theta_{11}(t_1)}{\Delta(t)\Delta(t_1)}[-\bar{W}_{12}(t_0, t_1)\theta_{12}(t)b_{22}(t) + \bar{W}_{22}(t_0, t_1)\theta_{11}(t)b_{22}(t)] \end{array} \right) = \\
&= \begin{pmatrix} N_{11}(t) \\ N_{12}(t) \end{pmatrix}, \quad t \in I.
\end{aligned} \tag{51}$$

Тогда функция (см. (50), (51))

$$\begin{aligned}
w_1(t) &= v_1(t) + \lambda_1(t, x_0, x_1) + N_1(t)z(t_1, v_1) = v_1(t) + T_{11}(t)x_{10} + T_{12}(t)x_{20} + \\
&\quad + T_{21}(t)x_{11} + T_{22}(t)x_{12} + N_{11}(t)z_1(t_1, v_1) + N_{12}(t)z_2(t_1, v_1), \quad t \in I,
\end{aligned} \tag{52}$$

где функция $z(t) = z(t, v_1)$, $t \in I$ – решение дифференциального уравнения

$$\dot{z} = A(t)z + B(t)v_1(t), \quad z(t_0) = 0, \quad t \in I, \quad v_1(\cdot) \in L_2(I, R^1). \tag{53}$$

Аналогичным путем вычисляются матрицы $E_1(t)$, $E_2(t)$, $N_2(t)$:

$$\begin{aligned}
E_1(t) &= \Phi(t, t_0)W(t, t_1)W^{-1}(t_0, t_1) = \theta(t)W(t, t_1)W^{-1}(t_0, t_1) = \\
&= \begin{pmatrix} e_{11}(t) & e_{12}(t) \\ e_{21}(t) & e_{22}(t) \end{pmatrix}, \quad E_2(t) = \Phi(t, t_0)W(t_0, t)W^{-1}(t_0, t_1)\Phi(t_0, t_1) = \\
&= \theta(t)W(t_0, t)W^{-1}(t_0, t_1)\theta^{-1}(t_1) = \begin{pmatrix} c_{11}(t) & c_{12}(t) \\ c_{21}(t) & c_{22}(t) \end{pmatrix}, \quad N_2(t) = -\begin{pmatrix} c_{11}(t) & c_{12}(t) \\ c_{21}(t) & c_{22}(t) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Тогда функция

$$\begin{aligned}
y(t) &= \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} z_1(t, v_1) + e_{11}(t)x_{10} + e_{12}x_{20} + c_{11}(t)x_{11} + c_{12}(t)x_{12} - \\ z_2(t, v_1) + e_{21}(t)x_{10} + e_{22}x_{20} + c_{21}(t)x_{11} + c_{22}(t)x_{12} - \\ -c_{11}(t)z_1(t_1, v_1) - c_{12}(t)z_2(t_1, v_1) \\ -c_{21}(t)z_1(t_1, v_1) - c_{22}(t)z_2(t_1, v_1) \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{54}$$

Теперь оптимизационная задача (33) для данного примера запишется в виде: минимизировать функционал

$$\begin{aligned} J(v_1, x_{10}, x_{20}, x_{11}, x_{12}, \lambda) &= \int_{t_0}^{t_1} |w_1(t) - \lambda y_1(t)|^2 dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} |v_1(t) + T_1(t)x_0 + T_2(t)x_1 + N_1(t)z(t_1, v_1) - \lambda[z_1(t, v_1) + e_1(t)x_0 + \\ &\quad + c_1(t)x_1 + N_{21}(t)z(t_1, v_1)]|^2 dt = \int_{t_0}^{t_1} F_0(t, q) dt \rightarrow \inf \end{aligned} \quad (55)$$

при условиях

$$\dot{z} = A(t)z + B(t)v_1(t), \quad z(t_0) = 0, \quad t \in I, \quad (56)$$

$$v_1(\cdot) \in L_2(I, R^1), \quad x_0 \in S_0, \quad x_1 \in S_1, \quad \lambda \in \Lambda, \quad (57)$$

где $T_1(t) = (T_{11}(t), T_{12}(t))$, $T_2(t) = (T_{21}(t), T_{22}(t))$, $e_1(t) = (e_{11}(t), e_{12}(t))$, $c_1(t) = (c_{11}(t), c_{12}(t))$, $N_{31}(t) = (-c_{11}(t), -c_{12}(t))$, $S_0 = \{x_0 \in R^2 / \alpha x_0 = 0\}$, $S_1 = \{x_1 \in R^2 / \beta x_1 = 0\}$, $S_0 \times S_1 = S \subset R^4$, $q = (v_1, x_0, x_1, \lambda, z(t), z(t_1))$.

Функции $w_1(t)$, $y_1(t)$, $t \in I$ определяются формулами (52), (54), функция $z(t)$, $t \in I$ – решение дифференциального уравнения (53). Заметим, что $\theta(v_1, x_0, x_1, \lambda) \in X = L_2(I, R^1) \times S_0 \times S_1 \times \Lambda \subset H = L_2(I, R^1) \times R^2 \times R^2 \times R^1$,

Функция

$$\begin{aligned} F_0(q, t) &= |v_1(t) + T_1(t)x_0 + T_2(t)x_1 + N_1(t)z(t_1, v_1) - \lambda[z_1(t, v_1) + e_1(t)x_0 + \\ &\quad + c_1(t)x_1 + N_{21}(t)z(t_1, v_1)]|^2, \quad N_{21}(t) = (-c_{11}(t), -c_{12}(t)). \end{aligned}$$

Частные производные

$$\begin{aligned} F_0(t, q) &= 2\bar{w}_1(t), \quad \bar{w}_1(t) = v_1(t) + T_1(t)x_0 + T_2(t)x_1 + N_1(t)z(t_1, v_1) - \\ &\quad - \lambda[z_1(t, v_1) + e_1(t)x_0 + c_1(t)x_1 + N_{21}(t)z(t_1, v_1)], \\ F_{0x_0}(t, q) &= [2T_1^*(t) - 2\lambda e_1^*(t)]\bar{w}_1(t), \\ F_{0x_1}(t, q) &= [2T_2^*(t) - 2\lambda c_1^*(t)]\bar{w}_1(t), \\ F_{0z_1} &= -2\lambda\bar{w}_1(t), \quad F_{0z_2}(t, q) = 0, \quad F_{0z_1}(t, q) = [2N_1^* - 2\lambda N_{21}^*(t)]\bar{w}_1(t), \\ F_{0z}(t, q) &= \begin{pmatrix} -2\lambda\bar{w}_1(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F_{0\lambda}(t, q) = -2[z_1(t) + e_1(t)x_0 + c_1(t)x_1 + N_{21}(t)z(t_1, v_1)]\bar{w}_1(t). \end{aligned}$$

Согласно формуле (39), производная Фреше функционала (55) при условиях (56), (57) определяется по формуле

$$J'(\theta) = (J'_{v_1}(\theta), J'_{x_0}(\theta), J'_{x_1}(\theta), J'_\lambda(\theta)) \in H,$$

где

$$\begin{aligned} J'_{v_1}(\theta) &= F_{0v_1}(t, q) - B^*(t)\psi(t), \quad J'_{x_0}(\theta) = \int_{t_0}^{t_1} F_{0x_0}(t, q)dt, \\ J'_{x_1}(\theta) &= \int_{t_0}^{t_1} F_{0x_1}(t, q)dt, \quad J'_\lambda(\theta) = \int_{t_0}^{t_1} F_{0\lambda}(t, q)dt. \end{aligned}$$

функция $z(t, v_1)$, $t \in I$ – решение дифференциального уравнения (56), а функция $\psi(t)$, $t \in I$ – решение сопряженной системы

$$\dot{\psi} = F_{0z}(t, q) - A^*(t)\psi, \quad \psi(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} F_{0z}(t_1)(t, q)dt. \quad (58)$$

Для данного примера уравнение (56) имеет вид

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad \dot{z}_2 = a_{21}(t)z_1 + a_{22}(t)z_2 + b_{22}(t)v_1(t), \quad z_1(t_0) = 0, \quad z_2(t_0) = 0.$$

Уравнение (58) запишется в виде

$$\dot{\psi}_1 = -2\lambda\bar{w}_1(t) - a_{21}(t)\psi_2, \quad \dot{\psi}_2 = -\psi_1 - a_{22}(t)\psi_2, \quad \psi(t_1) = \begin{pmatrix} \psi_1(t_1) \\ \psi_2(t_1) \end{pmatrix} = - \int_{t_0}^{t_1} F_{0z}(t_1)(t, q)dt.$$

Как следует из формулы (42), для данного примера последовательность $\{\theta_n\} = \{v_{1n}, x_{0n}, x_{1n}, \lambda_n\} \subset X$, где

$$\begin{aligned} v_{1n+1} &= v_n - \alpha_n J'_{v_1}(\theta_n), \quad x_{0n+1} = P_{S_0}[x_{0n} - \alpha_n J'_{x_0}(\theta_n)], \\ x_{1n+1} &= P_{S_1}[x_{1n} - \alpha_n J'_{x_1}(\theta_n)], \\ \lambda_{n+1} &= P_\Lambda[\lambda_n - \alpha_n J'_\lambda(\theta_n)], \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \alpha_0 > 0 \end{aligned} \quad (59)$$

Следует отметить, что:

$$\begin{aligned} x_{0n+1} &= P_{S_0}[x_{0n} - \alpha_n J'_{x_0}(\theta_n)] = [x_{0n} - \alpha_n J'_{x_0}(\theta_n)] - \frac{\alpha^* \alpha}{|\alpha|^2} [x_{0n} - \alpha_n J'_{x_0}(\theta_n)], \\ x_{1n+1} &= P_{S_1}[x_{1n} - \alpha_n J'_{x_1}(\theta_n)] = [x_{1n} - \alpha_n J'_{x_1}(\theta_n)] - \frac{\beta^* \beta}{|\beta|^2} [x_{1n} - \alpha_n J'_{x_1}(\theta_n)], \\ \lambda_{n+1} &= P_\Lambda[\lambda_n - \alpha_n J'_\lambda(\theta_n)] = \begin{cases} \gamma, & \text{если } \lambda_n - \alpha_n J'_\lambda(\theta_n) < \gamma \\ \lambda_n - \alpha_n J'_\lambda(\theta_n), & \text{если } \gamma \leq \lambda_n - \alpha_n J'_\lambda(\theta_n) \leq \delta, \\ \delta, & \text{если } \lambda_n - \alpha_n J'_\lambda(\theta_n) > \delta. \end{cases} \end{aligned}$$

Вдоль последовательности $(\theta_n) \subset X$, определяемая по формуле (59) числовая последовательность $\{J(\theta_n)\}$ строго убывает, $J(\theta) \geq 0$, $\forall \theta, \theta \in X$. Если $v_{1n} \rightarrow \text{сл}v_{1*}$, $x_{0n} \rightarrow x_0^*$, $x_{1n} \rightarrow x_1^*$, $\lambda_n \rightarrow \lambda_*$ при $n \rightarrow \infty$ и значение $J(\theta_*) = 0$, где $\theta_* = (v_{1*}, x_0^*, x_1^*, \lambda_*)$, то решением задачи Штурма-Лиувилля является функция $x_*(t) = y_*(t) = z(t, v_{1*}) + E_1(t)x_0^* + E_2(t)x_1^* + N_2(t)z(t, v_1^*)$, $t \in I$ соответствующее значению $\lambda_* \in \Lambda$.

5. Заключение

Разработан метод решения краевой задачи с параметром для обыкновенных дифференциальных уравнений при наличии фазовых и интегральных ограничений. Основой предлагаемого является принцип погружения. Суть принципа погружения состоит в том, что исходная краевая задача с параметром при наличии фазовых и интегральных ограничений заменяется на равносильную начальную задачу оптимального управления. Такой подход стал возможным благодаря нахождению общего решения одного класса интегральных уравнений Фредгольма первого рода. Существование решения краевой задачи с параметром и ограничениями сведено к построению минимизирующему последовательности и определению значения нижней грани функционала.

В качестве примера приведено решение задачи Штурма-Лиувилля. В общем случае оптимационная задача (33) – (36) может иметь бесконечное множество решений $\{\theta_*\} \subset X$, для которых $J(\{\theta_*\}) = 0$. В зависимости от выбора начального приближения минимизирующие последовательности сходятся к какому-либо элементу множества $\{\theta_*\}$. Пусть $\theta_* = (v_{1*}, x_0^*, x_1^*, \lambda_*)$, где $J(\theta_*) = 0$ – некоторое решение. Здесь $x_0^* = x(t_0)$, $x_1^* = x(t_1)$, $(x_0^*, x_1^*) \in S_0 \times S_1 = S$, $\lambda_* \in \Lambda$, где x_0^* – начальное состояние системы. В постановке задачи приведены требования (7), (8), налагаемые на правую часть дифференциального уравнения (1) при выполнении которых начальная задача Коши имеет единственное решение. Следовательно, дифференциальное уравнение (1) с начальным состоянием $x_0^* = x(t_0)$ при $\lambda = \lambda_* \in \Lambda$ имеет единственное решение для значений $t \in [t_0, t_1]$. Более того, $x_1^* = x(t_1)$ и выполнены все ограничения (2) – (6). Независимо от того, какое решение выделяется итерационной процедурой, в случае, $J(\theta_*) = 0$, находим соответствующее решение краевой задачи (1) – (6).

Принципиальное отличие предлагаемого метода состоит в том, что разрешимость и построение решения краевой задачи с параметром и ограничениями решаются в едином, путем построения минимизирующих последовательностей, ориентированных на применении компьютерной техники. Разрешимость и построение решения краевой задачи определяются путем решения оптимационной задачи (33) – (36), где $\lim_{n \rightarrow \infty} J(\theta_n) = \inf_{\theta \in X} J(\theta) = 0$ дает условия разрешимости, а через предельные точки последовательности $\{\theta_m\}$ равные θ_* определяются решение краевой задачи.

Литература

- [1] Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. 4. Ч. II (6-е изд.), – М.: Наука, 1981, 550 с.
- [2] Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Светников А.Г. Дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1985, 231 с.
- [3] Клоков Ю.А. О некоторых краевых задачах для систем двух уравнений второго порядка. // Дифференциальные уравнения, 2012, т. 48, № 10, с. 1368-1373.
- [4] Колмогоров Д.П., Шейка Б.А. Задача о кратных собственных и положительных собственных функциях для однородного квазилинейного уравнения второго порядка. // Дифференциальные уравнения, т. 48, № 9, с. 1475-1486.
- [5] Макин А.С., Томпсон Г.В. О разложениях по собственным функциям нелинейного оператора Штурма-Лиувилля с краевыми условиями зависящими от спектрального параметра. // Дифференциальные уравнения, т. 27, № 8, с. 1096-1104.
- [6] Айсагалиев С.А. Управляемость некоторой системы дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1991, т.27, №9, с. 1475-1486.

- [7] Айсагалиев С.А. Общее решение одного класса интегральных уравнений // Математический журнал. – 2005. – т.5, №14(18).
- [8] Айсагалиев С.А., Белогуров А.П. Управляемость и быстродействие процесса, описываемого параболическим уравнением с ограниченным управлением. Сибирский математический журнал, январь–февраль, 2011, т.53, №1, с.20–37.
- [9] Айсагалиев С.А., Кабидолданова А.А. Об оптимальном управлении линейными системами с линейным критерием качества и ограничениями // Дифференциальные уравнения. 2012. т.48, №6, с.826–838.
- [10] Айсагалиев С.А., Кабидолданова А.А. оптимальное управление динамических систем. Palmarium Academic Publishing (Verlag, Германия). –2012. –288с.
- [11] Айсагалиев С.А., Калимольдаев М.Н., Жунусова Ж.Х. Принцип погружения для краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений // Математический журнал. 2012. Т.12. №2(44). С. 5-22.
- [12] С.А. Айсагалиев, М.Н. Калимольдаев, Е.М. Поздеева К краевой задаче обыкновенных дифференциальных уравнений. – ISSN 1563-0285. Вестник КазНУ, сер. мат., мех., инф. 2012, №2(76), с. 5-24.

References

- [1] Smirnov V.I. Kurs vyisshey matematiki. T. 4. Ch. II (6-e izd.), – M.: Nauka, 1981, 550 s.
- [2] Tihonov A.N., Vasileva A.B., Svetnikov A.G. Differentsialnyie uravneniya. – M.: Nauka, 1985, 231 s.
- [3] Klokov Yu.A. O nekotoryih kraevyih zadachah dlya sistem dvuh uravneniy vtorogo poryadka. // Differentsialnyie uravneniya, 2012, t. 48, No 10, s. 1368-1373.
- [4] Kolmogorov D.P., Sheyka B.A. Zadacha o kratnyih sobstvennyih i polozhitelnyih sobstvennyih funktsiyah dlya odnorodnogo kvazilineynogo uravneniya vtorogo poryadka. // Differentsialnyie uravneniya, t. 48, No 9, s. 1475-1486.
- [5] Makin A.S., Tompson G.V. O razlozheniyah po sobstvennym funktsiyam nelineynogo operatora Shturma-Liuvillya s kraevymi uloviyami zavisyaschimi ot spektralnogo parametra. // Differentsialnyie uravneniya, t. 27, No 8, s. 1096-1104.
- [6] Aisagaliev S.A. Upravlyayemost nekotoroy sistemyi differentsialnyih uravneniy // Differentsialnyie uravnniya. 1991, t. 27, No 9. s. 1475–1486.
- [7] Aisagaliev S.A. Obschee reshenie odnogo klassa integralnyih uravneniy // Matematicheskiy zhurnal. – 2005. – t. 5, № 14(18).
- [8] Aisagaliev S.A., Belogurov A.P. Upralyaemost i byistrodeystvie protsessa, opisyivaemogo parabolicheskim uravneniem s ogranicennyim upravleniem. Sibirskiy matematicheskiy zhurnal, yanvar–fevral, 2011, t. 53, № 1, s. 20–37.
- [9] Aisagaliev S.A., Kabidoldanova A.A. Ob optimalnom upravlenii lineynyimi sistemami s lineynyim kriteriem kachestva i ograniceniyami // Differentsialnyie uravneniya. 2012. t. 48, № 6, s. 826–838.
- [10] Aisagaliev S.A., Kabidoldanova A.A. optimalnoe upravlenie dinamicheskikh sistem. Palmarium Academic Publishing (Verlag, Germaniya). –2012. –288 s.
- [11] Aisagaliev S.A., Kalimoldaev M.N., Zhunusova Zh.H. Printsip pogruzheniya dlya kraevyih zadach obyiknovennyih differentsialnyih uravneniy // Matematicheskiy zhurnal. 2012. Т. 12. № 2(44). s. 5-22.
- [12] С.А. Аисагалиев, М.Н. Калимольдаев, Е.М. Поздеева К краевой задаче обикновенных дифференциальных уравнений. – ISSN 1563-0285. Вестник КазНУ, сер. мат., мех., инф. 2012, №2(76), с. 5-24.

УДК 517.946

Г.Б.Баканов *, Т.Б.Дильман

Кызылординский государственный университет имени Коркыт ата, Республика Казахстан,
г. Кызылорда

* E-mail: Gbakan58@mail.ru

Единственность решения задачи интегральной геометрии для некоторого семейства кривых

В данной статье рассматривается следующий класс задач интегральной геометрии: о восстановлении функции, заданной интегралами по некоторому семейству кривых. Эти задачи связаны с многочисленными приложениями. В целях изучения внутреннего строения земных недр на поверхности Земли производится серия взрывов. Для каждого взрыва на системе приборов измеряются режимы колебаний земной поверхности. Цель исследования - по показаниям приборов определить внутри Земли распределение физических параметров, связанных с законами распространения сейсмических волн. Наиболее четкий функционал в показаниях приборов - время прихода сейсмической волны, именно он служит основой в практике интерпретации. Известно, что линеаризованная задача интерпретации данных сейсморазведки есть задача интегральной геометрии. К интегральной геометрии сводятся задачи, связанные с просвечиванием, в частности, задачи интерпретации рентгеновских снимков. Потемнение рентгеновской пленки функционально связано с интегралом поглощения вдоль рентгеновского луча от источника до точки на пленке. Таким образом, задача определения пространственного распределения коэффициента поглощения есть задача интегральной геометрии - требуется определить функцию, если заданы интегралы от этой функции по семейству лучей. В работе исследуется задача интегральной геометрии для семейства плоских кривых типа параболы. Доказывается теорема единственности решения рассматриваемой задачи интегральной геометрии.

Ключевые слова: интегральная геометрия, семейство кривых, устойчивость, единственность, решение, интеграл, область, функция, уравнение, задача.

Bakanov G.B., Dilman T.B.

Uniqueness theorem of solution the integral geometry problem for the family curves

In this article the following class of integral geometry problems is considered: about the function reconstruction, shaped by the integrals on some set of curves. These problems are correlated with several applications. In order to study the internal earth structure, the multiple explosions are held on Earth surface. Then, the fluctuation regimes of earth surface are measured on equipment for each explosion. The goal of research is to determine the distribution of physical parameters inside the Earth according to equipment measurements, correlated with laws on dissemination of seismic waves. The most clear functional of such equipment is the arrival time of seismic wave, which exactly serves as a base for interpretation practice. It is known that lineriazed problem of seismic-exploration data interpretation is actually the integral geometry problem. An integral geometry also includes the problems related to the radiography, particularly the interpretation problem of X-ray examination. For instance, a X-ray film darkening functionally correlated with the absorption integral along the X-ray from the source to point on the film. Thus, determination problem of spatial distribution for the absorption coefficient is also actually an integral geometry problem. In this case, it is required to determine the function if the integrals of this function on set of rays were set. The integral geometry problem is studied in this work. The solution uniqueness theorem is proved for the considered integral geometry problem.

Key words: integral geometry, family curves, stability, uniqueness, solution, integral, domain, function, equation, problem.

Г.Б.Баканов, Т.Б.Дильман.
**Қисықтар үйірі үшін интегралдық геометрия
есебі шешімінің жалғыздығы**

Бұл мақалада интегралдық геометрия есептерінің келесі класы қарастырылады: белгілі бір қисықтар үйірі бойынша алынған интегралдар арқылы интеграл астындағы функция ізделінеді. Бұл есептер қолданыстағы көптеген есептермен тығыз байланысты. Сейсмобарлаудың нәтижелерін интерпретациялау есебінде жердің ішкі құрылымын зерттеу үшін Жер бетінде жарылыстар жасалынады. Әрбір жарылыс үшін құралдар жүйесінде Жер бетінде пайда болған тербелістер өлшенеді. Зерттеу мақсаты - құралдар көрсеткіштері бойынша сейсмикалық толқындардың тараулу заңдылыктарымен байланысты физикалық параметрлердің тараулуын анықтау. Құрал көрсеткіштерінің негізгі функционалды ретінде сейсмикалық толқынның келу уақыты алынады. Сейсмобарлаудың нәтижелерін интерпретациялаудың сызыктандырылған есебі интегралдың геометрия есебі екені белгілі. Қарастырылып отырган интегралдың геометрия есептеріне рентгендік түсірілімдерді интерпретациялау есептері келтіріледі. Рентгендік плеканың қоюлануы қайнар көзінен плекадағы нүктеге дейінгі рентгендік сәуле бойынша алынған жұтылу интегралымен функционалды байланысты болады. Сонымен кеңістіктері жұтылу коэффициентін анықтау есебі келесі интегралдың геометрия есебінде келтіріледі: сәулелер үйірі бойынша алынған интегралдар арқылы интеграл астындағы функцияны табу керек. Бұл жұмыста парабола типтес жазық қисықтар үшін интегралдық геометрия есебі зерттеледі. Қарастырылған интегралдың геометрия есебі шешімінің жалғыздықы туралы теорема дәлелденеді.

Түйін сөздер: интегралдық геометрия, қисықтар үйірі, орнықтылық, жалғыздық, шешім, интеграл, облыс, функция, теңдеу, есеп.

Рассмотрим следующую задачу интегральной геометрии. В области $0 \leq z \leq H$ трехмерного пространства x, y, z задано семейство плоских кривых $L(x, y, z, \alpha)$ типа параболы с вершинами в точках (x, y, z) и опирающихся двумя концами на плоскость $z = 0$. Плоскости, содержащие кривые из $L(x, y, z, \alpha)$, предполагаются перпендикулярными плоскости $z = 0$. Пусть (ξ_k, η_k, ζ) – текущие координаты кривой из семейства $L(x, y, z, \alpha)$:

$$\xi_k = x + (-1)^k \sqrt{z - \zeta} [1 + \varphi(x, y, \sqrt{z - \zeta}, \alpha)] \cos \alpha,$$

$$\eta_k = y + (-1)^k \sqrt{z - \zeta} [1 + \varphi(x, y, \sqrt{z - \zeta}, \alpha)] \sin \alpha,$$

$$0 \leq \zeta \leq z.$$

В задаче интегральной геометрии [1] по заданной функции $f(x, y, z, \alpha)$ из уравнения

$$f(x, y, z, \alpha) = \int_0^{r(x, y, z, 0, \alpha)} \sum_{k=1}^2 u(\xi_k, \eta_k, \zeta) d\zeta$$

нужно определить функцию $u(x, y, z)$.

Здесь $r = r(x, y, z, \zeta, \alpha) = \sqrt{z - \zeta} [1 + \varphi(x, y, \sqrt{z - \zeta}, \alpha)]$ означает длину проекции кривой из заданного семейства на плоскости $z = 0$.

Аналогичная постановка задачи интегральной геометрии, когда кривые инвариантны к сдвигу по переменным x и y , исследована в работе [2]. В данной работе рассматриваются кривые инвариантны к сдвигу лишь по переменной z . Доказывается теорема единственности решения.

Теорема 1 Пусть функция $\varphi(x, y, \tau, \alpha)$ трижды непрерывно дифференцируема по всем переменным и удовлетворяет условиям

$$\varphi(x, y, -\tau, \alpha) = \varphi(x, y, \tau, \alpha), \varphi(x, y, 0, \alpha) = 0,$$

$$\|\tau_1 \varphi(x, y, \tau_1, \alpha) - \tau_2 \varphi(x, y, \tau_2, \alpha)\|_C \leq q \|\tau_1 - \tau_2\|_C, q < 1.$$

Тогда решение рассматриваемой задачи интегральной геометрии единственно в достаточной малой области в классе финитных функций $u(x, y, z)$ с носителем $\Omega = \{(x, y)\} \subset R^2$, принадлежащих $L_2(\Omega)$ по x, y , а по переменной z удовлетворяющей условию $|u(x, y, z)| \leq M e^{az}$, если $z \geq 0$; $u(x, y, z) \equiv 0$, если $z < 0$, постоянные $M > 0$, $a > 0$.

Доказательство.

Исходное уравнение преобразуем к виду

$$f(x, y, z, \alpha) = \int_0^z \frac{R(x, y, \sqrt{z - \zeta}, \alpha)}{2\sqrt{z - \zeta}} \sum_{k=1}^2 u(\xi_k, \eta_k, \zeta) d\zeta,$$

где

$$R(x, y, \sqrt{z - \zeta}, \alpha) = 1 + \varphi(x, y, \sqrt{z - \zeta}, \alpha) + \sqrt{z - \zeta} \varphi'_{(3)}(x, y, \sqrt{z - \zeta}, \alpha).$$

Далее, к функции $f(x, y, z, \alpha)$ применяем преобразование Лапласа по переменной z :

$$\begin{aligned} F(x, y, p, \alpha) &\equiv \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-pz} f(x, y, z, \alpha) dz = \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-p\tau^2} R(x, y, \tau, \alpha) d\tau \int_0^{+\infty} e^{-pz} \sum_{k=1}^2 u(\xi_k, \eta_k, \zeta) d\zeta, \end{aligned}$$

где

$$R(x, y, \tau, \alpha) = 1 + \varphi(x, y, \tau, \alpha) + \varphi'_{\tau}(x, y, \tau, \alpha) \tau,$$

$$\xi_k = x + (-1)^k \tau [1 + \varphi(x, y, \tau, \alpha)] \cos \alpha,$$

$$\eta_k = y + (-1)^k \tau [1 + \varphi(x, y, \tau, \alpha)] \sin \alpha, \kappa = 1, 2.$$

Следовательно,

$$F(x, y, p, \alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-p\tau^2} R(x, y, \tau, \alpha) d\tau \sum_{k=1}^2 U(\xi_k, \eta_k, p) d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p\tau^2} R(x, y, \tau, \alpha) U(x + \tau(1 + \varphi(x, y, \tau, \alpha)) \cos \alpha, y + \tau(1 + \varphi(x, y, \tau, \alpha)) \sin \alpha, p) d\tau,$$

где U – преобразование Лапласа от функции u по переменной z . В силу четности функции $\varphi(x, y, \tau, \alpha)$ по переменной τ функция $\varphi'_\tau(x, y, \tau, \alpha)$ является нечетной, а $R(x, y, \tau, \alpha)$ – нечетной.

Интегрируя $F(x, y, p, \alpha)$ по переменной α от $\alpha=0$ до $\alpha=2\pi$, получаем двойной интеграл по всей плоскости τ, α :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} F(x, y, p, \alpha) d\alpha &= \int_0^{2\pi} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p\tau^2} R(x, y, \tau, \alpha) U(x + \\ &+ \tau(1 + \varphi(x, y, \tau, \alpha)) \cos \alpha, y + \tau(1 + \varphi(x, y, \tau, \alpha)) \sin \alpha, p) d\tau. \end{aligned} \quad (1)$$

Сделаем следующую замену переменных:

$$x + \tau(1 + \varphi(x, y, \tau, \alpha)) \cos \alpha = \xi, y + \tau(1 + \varphi(x, y, \tau, \alpha)) \sin \alpha = \eta. \quad (2)$$

Отсюда найдем τ, α рассматривая x, y как параметры. Далее, вычислим якобиан

$$J(\xi, \eta) = \begin{vmatrix} \tau'_\xi & \tau'_\eta \\ \alpha'_\xi & \alpha'_\eta \end{vmatrix}.$$

Нетрудно из системы (2) найти

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{\eta - y}{\xi - x}. \quad (3)$$

Лемма 1 При условиях теоремы 1, τ из системы (2) определяется в виде

$$\tau = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2} + \omega(x, y, \xi, \eta). \quad (4)$$

Пользуясь формулами (3), (4) вычислим якобиан

$$J(\xi, \eta) = \frac{1 + G(x, y, \xi, \eta)}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}},$$

где функция

$$G(x, y, \xi, \eta) = \frac{(\xi - x)\omega'_\xi + (\eta - y)\omega'_\eta}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}}$$

дважды непрерывно дифференцируема по переменным x, y .

Таким образом, после замены переменных, вместо уравнения (1) имеем

$$\int_0^{2\pi} F(x, y, p, \alpha) d\alpha =$$

$$= \int_{R^2} \frac{e^{-p[\sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2} + \omega(x,y,\xi,\eta)]^2} \bar{R}(x,y,\xi,\eta)[1 + G(x,y,\xi,\eta)]U(\xi,\eta,p)d\xi d\eta}{\sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2}},$$

где

$$\bar{R}(x,y,\xi,\eta) = R(x,y, \sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2} + \omega(x,y,\xi,\eta), \arctg \frac{\eta-y}{\xi-x}).$$

В силу финитности функции $U(\xi,\eta,p)$ по первым двум аргументам в ограниченной области $\Omega \subset R^2$:

$$\int_0^{2\pi} F(x,y,p,\alpha)d\alpha = \iint_{\Omega} \frac{U(\xi,\eta,p)}{\sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2}}d\xi d\eta + \iint_{\Omega} \frac{K(x,y,\xi,\eta,p)U(\xi,\eta,p)}{\sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2}}d\xi d\eta,$$

где

$$K(x,y,\xi,\eta,p) = e^{-p[\sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2} + \omega(x,y,\xi,\eta)]^2} \bar{R}(x,y,\xi,\eta)[1 + G(x,y,\xi,\eta)] - 1$$

достаточно гладкая функция. К обеим частям последнего уравнения применяем оператор усреднения по кругу $S(\lambda, \mu; h)$ радиуса h с центром в точке (λ, μ) :

$$W(\lambda, \mu; h) = \iint_{S(\lambda, \mu; h)} \frac{\int_0^{2\pi} F(x, y, p, \alpha) dx dy}{\sqrt{(\lambda - x)^2 + (\mu - y)^2}} = \iint_{\Omega} F(\lambda, \mu, \xi, \eta, p) U(\xi, \eta, p) d\xi d\eta, \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} F(\lambda, \mu, \xi, \eta, p) &= \iint_{S(\lambda, \mu; h)} \frac{dx dy}{\sqrt{(\lambda - x)^2 + (\mu - y)^2} \sqrt{(\xi - x)^2 + \sqrt{(\eta - y)^2}}} + \\ &+ \iint_{S(\lambda, \mu; h)} \frac{K(x, y, \xi, \eta, p)}{\sqrt{(\lambda - x)^2 + (\mu - y)^2} \sqrt{(\xi - x)^2 + \sqrt{(\eta - y)^2}}} dx dy. \end{aligned}$$

С помощью полярных координат r, α с центром в точке (λ, μ) изучим первое слагаемое функции $F(\lambda, \mu, \xi, \eta, p)$:

$$\begin{aligned} &\iint_{S(\lambda, \mu; h)} \frac{dx dy}{\sqrt{(\lambda - x)^2 + (\mu - y)^2} \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - \mu)^2}} = \left| \begin{array}{l} x = \lambda + r \cos \alpha, \\ y = \mu + r \sin \alpha \end{array} \right| = \\ &= \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^h \frac{dr}{\sqrt{[r - (\xi - \lambda) \cos \alpha - (\eta - \mu) \sin \alpha]^2 + (\xi - \lambda)^2 + (\eta - \mu)^2 - [(\xi - \lambda) \cos \alpha + (\eta - \mu) \sin \alpha]^2}} = \\ &= \int_0^{2\pi} \ln |h - (\xi - \lambda) \cos \alpha - (\eta - \mu) \sin \alpha + \\ &+ \sqrt{h^2 - 2h[(\xi - \lambda) \cos \alpha + (\eta - \mu) \sin \alpha] + (\xi - \lambda)^2 + (\eta - \mu)^2}| d\alpha - \\ &- \int_0^{2\pi} \ln \left| -\frac{(\xi - \lambda) \cos \alpha + (\eta - \mu) \sin \alpha}{\sqrt{(\xi - \lambda)^2 + (\eta - \mu)^2}} + 1 \right| d\alpha - 2\pi \ln \sqrt{(\xi - \lambda)^2 + (\eta - \mu)^2}. \end{aligned}$$

Поэтому уравнение (5) запишем в виде

$$W(\lambda, \mu, p) = -2\pi \iint_{\Omega} \sqrt{(\xi - \lambda)^2 + (\eta - \mu)^2} U(\xi, \eta, p) d\xi d\eta + \iint_{\Omega} F_1(\lambda, \mu, \xi, \eta, p) U(\xi, \eta, p) d\xi d\eta, \quad (6)$$

где $F_1(\lambda, \mu, \xi, \eta, p)$ - известная функция.

К уравнению (6) применяем оператор Лапласа по переменным λ, μ :

$$\Delta_{\lambda\mu} W(\lambda, \mu, p) = -4\pi^2 U(\lambda, \mu, p) + \iint_{\Omega} \Delta_{\lambda\mu} F_1(\lambda, \mu, \xi, \eta, p) U(\xi, \eta, p) d\xi d\eta. \quad (7)$$

Исследуем ядро уравнения (7). Если ввести полярные координаты ρ, β с центром в точке (ξ, η) , то

$$F_1(\xi + \rho \cos \beta, \eta + \rho \sin \beta, \xi, \eta, p) = F_2(\rho, \beta, \xi, \eta, p),$$

следовательно, ядро уравнения (7) имеет вид

$$\Delta_{\lambda\mu} F_1(\lambda, \mu, \xi, \eta, p) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_2}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 F_2}{\partial \beta^2}. \quad (8)$$

Заметим, что

$$F_1(\lambda, \mu, \xi, \eta, p) = \Phi(\rho) + \Psi(\rho, \beta, \xi, \eta, p)$$

где

$$\Phi(\rho) = \int_0^{2\pi} \ln \left| h + \rho \cos \theta + \sqrt{h^2 + 2h\rho \cos \theta + \rho^2} \right| d\theta - \int_0^{2\pi} \ln |\cos \theta + 1| d\theta,$$

$$\Psi(\rho, \beta, \xi, \eta, p) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\rho \cos \theta + \sqrt{h^2 - \rho^2 \sin^2 \theta}} \frac{K(\xi + r \cos(\theta + \beta), \eta + r \sin(\theta + \beta), \xi, \eta, p)}{\sqrt{\rho^2 + r^2 - 2r\rho \cos \theta}} dr. \quad (9)$$

При $\rho \leq diam \Omega \leq h$ функция $\Phi(\rho)$ является достаточно гладкой функцией, так как $\int_0^{2\pi} \ln |\cos \theta + 1| d\theta$ - сходящийся несобственный интеграл второго рода. Следовательно, задача оценки ядра уравнения (7) сводится к задаче исследования гладкости функции $\Psi(\rho, \beta, \xi, \eta, p)$ по переменным ρ, β .

При достаточно малых ρ можно всегда выбрать $\delta > 0$ так, чтобы было

$$\rho(1 + \delta) < \rho \cos \theta + \sqrt{h^2 - \rho^2 \sin^2 \theta}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Внутренний интеграл в формуле (9) разбиваем на 2 интеграла: один по отрезку $[0, \rho(1 + \delta)]$, другой по отрезку $[\rho(1 + \delta), \rho \cos \theta + \sqrt{h^2 - \rho^2 \sin^2 \theta}]$, тогда

$$\Psi(\rho, \beta, \xi, \eta, p) = \Psi_1(\rho, \beta, \xi, \eta, p) + \Psi_2(\rho, \beta, \xi, \eta, p).$$

В первом слагаемом введем новую переменную, тогда

$$\Psi_1(\rho, \beta, \xi, \eta, \rho) = \int_0^{2\pi} \frac{K[\xi + \rho \cdot t \cos(\theta + \beta), \eta + \rho \cdot t \sin(\theta + \beta), \xi, \eta, p]}{\sqrt{1+t^2 - 2t \cos \theta}} dt$$

- достаточно гладкая функция. Для оценки функции $\Psi_2(\rho, \beta, \xi, \eta, \rho)$ и ее производных порядка $n \leq 2$ запишем ее в виде

$$\Psi_2(\rho, \beta, \xi, \eta, \rho) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\rho(1+\delta)}^{\rho \cos \theta + \sqrt{h^2 - \rho^2 \sin^2 \theta}} \frac{K(\xi + r \cos(\theta + \beta), \eta + r \sin(\theta + \beta), \xi, \eta, p)}{r} \Phi_1\left(\frac{\rho}{r}, \theta\right) dr,$$

где для функции

$$\Phi_1\left(\frac{\rho}{r}, \theta\right) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{r}\right)^2 + 1 - 2\left(\frac{\rho}{r}\right) \cos \theta}}$$

справедливо неравенство [1, стр. 205]

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial \rho^k} \Phi_1\left(\frac{\rho}{r}, \theta\right) \right| \leq \frac{C}{r^k}, \quad r \geq \rho(1 + \delta), \quad C = \text{const.} \quad (10)$$

При вычислении производных $\frac{\partial^k}{\partial \rho^k} D_{\xi \eta \beta}^l$, $l + k \leq 2$ от функции $\Psi_2(\rho, \beta, \xi, \eta, \rho)$ можно внести символ дифференцирования $D_{\xi \eta \beta}^l$ под знак внутреннего интеграла. В силу достаточной гладкости функции

$$K(\xi + r \cos(\theta + \beta), \eta + r \sin(\theta + \beta), \xi, \eta, p)$$

и функция $\frac{K(\xi + r \cos(\theta + \beta), \eta + r \sin(\theta + \beta), \xi, \eta, p)}{r^k}$ будет достаточно гладкой в $\Psi_2(\rho, \beta, \xi, \eta, \rho)$. Вычисление производной $\frac{\partial^k}{\partial \rho^k}$ от внутреннего интеграла функции $\Psi_2(\rho, \beta, \xi, \eta, \rho)$ приводит к появлению ряда слагаемых за счет вычисления производных по верхнему и нижнему пределам и интеграла за счет дифференцирования подынтегральной функции. Первые из этих слагаемых ограничены, так как функция $\Phi_1\left(\frac{\rho}{r}, \theta\right)$ на нижнем пределе ограничена и не зависит от ρ , а на верхнем пределе совпадает с аналитической функцией $\frac{\rho \cos \theta + \sqrt{h^2 - \rho^2 \sin^2 \theta}}{h}$. Интеграл, возникающий при дифференцировании подынтегрального выражения в силу неравенства (10) оценивается интегралом

$$\int_{\rho(1+\delta)}^{\rho \cos \theta + \sqrt{h^2 - \rho^2 \sin^2 \theta}} \frac{dr}{r^k} = \left\{ \begin{array}{l} \ln \frac{\cos \theta + \sqrt{(\frac{h}{\rho})^2 - \sin^2 \theta}}{1+\delta}, \quad k = 1, \\ \frac{-1}{\rho \cos \theta + \sqrt{h^2 - \rho^2 \sin^2 \theta}} + \frac{1}{\rho(1+\delta)}, \quad k = 2 \end{array} \right\}.$$

Отсюда вытекает следующая оценка

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial \rho^k} D_{\xi \eta \beta}^l F_2(\rho, \beta, \xi, \eta, p) \right| \leq C \left\{ \begin{array}{l} \ln \rho, \quad k = 1, \\ \frac{1}{\rho}, \quad k = 2 \end{array} \right\}, \quad k + l \leq 2,$$

которая справедлива в окрестности точки $\rho = 0$. Вне этой окрестности функция $F_2(\rho, \beta, \xi, \eta, p)$ непрерывна и ограничена вместе с производными до порядка 2.

По известной лемме Адамара [3]

$$F_2(\rho, \beta, \xi, \eta, p) = F_2(0, \beta, \xi, \eta, p) + \rho G(\rho, \beta, \xi, \eta, p),$$

где гладкость функции $G(\rho, \beta, \xi, \eta, p)$ на единицу меньше гладкости самой функции $F_2(\rho, \beta, \xi, \eta, p)$. Заметим, что справедливо $\frac{\partial^2 F_2}{\partial \beta^2} = \rho \frac{\partial^2 G}{\partial \beta^2}$, отсюда

$$\left| \frac{\partial^2 F_2}{\partial \beta^2} \right| \leq C\rho, \quad C = const. \quad (11)$$

Используя неравенства (10), (11) на основе формулы (8) оценим ядро интегрального уравнения второго рода (7) в окрестности $\rho = 0$:

$$|\Delta_{\lambda\mu} F_1(\lambda, \mu, \xi, \eta, p)| \leq C_0 \frac{\ln \rho}{\rho}, \quad C_0 = const.$$

Таким образом, мы показали, что интегральное уравнение (7) является уравнением типа Фредгольма с особенностью вида $\frac{\ln \rho}{\rho}$. Учитывая, что $\rho^k \ln \rho \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 0$ и $k > 0$, а также подбирая $0 < k < 1$ получаем

$$|\ln \rho| \leq \frac{C}{\rho^k}.$$

Следовательно, интегральное уравнение (7) является уравнением со слабой особенностью в окрестности точки (λ, μ) , а вне окрестности (7) имеет ограниченное ядро, то есть является интегральным уравнением Фредгольма второго рода. Как известно, такое уравнение при фиксированных $p, Rep > a$ (a – показатель степени роста функции $u(x, y, z)$ по переменной z) имеет единственное решение $U(x, y, p)$, приадлежащее пространству L_2 по переменным x, y , если только диаметр области Ω достаточно мал [4]. В силу условий теоремы, по образу Лапласа $U(x, y, p)$ однозначно восстанавливается оригинал $u(x, y, z)$.

Литература

- [1] Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. – М.: Наука, 1980. – 286 с.
- [2] Алексеев А.А. Об одной задаче интегральной геометрии в трехмерном пространстве // Единственность и устойчивость и методы решения некорректных задач математической физики и анализа. – Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1984, с. 3-15.
- [3] Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.:Физматгиз, – 1959. – 296 с.
- [4] Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. М.:Физматгиз, – 1959. – 232 с.

References

- [1] Lavrentev M.M., Romanov V.G., Shishatskij S.P. Nekorrektne zadachi matematicheskoy fiziki i analiza. – M.: Nauka, 1980. – 286 s.
- [2] Alekseev A.A. Ob odnoy zadache integralnoy geometrii v trehmernom prostranstve // Edinstvennost i ustoychivost i metodyi resheniya nekorrektnyih zadach matematicheskoy fiziki i analiza. – Novosibirsk: VTs SO AN SSSR, 1984, s. 3-15.
- [3] Petrovskiy I.G. Lektsii po teorii obyknovennyih differentialnyih uravneniy. – M.:1984. – 296 s.
- [4] Mihlin S.G. Lektsii po lineynyim integralnym uravneniyam. M.:Fizmatgiz, – 1959. – 232 s.

УДК 517.984.52

*G. Dildabek, **A. Tengayeva

*Al-Farabi Kazakh National University, Respublika Kazakhstan, Almaty

**Kazakh National Agrarian University, Respublika Kazakhstan, Almaty

E-mail: *dildabek.g@gmail.com, **aijan0973@mail.ru

Constructing a basis from systems of eigenfunctions of one not strengthened regular boundary value problem

In the present work we investigate a nonlocal boundary value spectral problem for an ordinary differential equation in an interval. Such problems arise in solving the nonlocal boundary value for partial equations by the Fourier method of variable separation. For example, they arise in solving nonstationary problems of diffusion with boundary conditions of Samarskii-Ionkin type. Or they arise in solving problems with stationary diffusion with opposite flows on a part of the interval. The boundary conditions of this problem are regular but not strengthened regular. The principal difference of this problem is: the system of eigenfunctions is complete but not forming a basis. Therefore the direct applying of the Fourier method is impossible. Based on these eigenfunctions there is constructed a special system of functions that already forms the basis. However the obtained system is not already the system of the eigenfunctions of the problem. In the paper we demonstrate how this new system of functions can be used for solving a nonlocal boundary value equation on the example of the Laplace equation.

Key words: nonlocal boundary conditions; regular but not strengthened regular conditions; basis; eigenfunctions; biorthogonal system.

Г. Дилдабек, А.А. Тенгаева

Построение базиса из системы собственных функций одной неусиленно регулярной краевой задачи

В настоящей работе мы исследуем нелокальную граничную спектральную задачу для обыкновенного дифференциального уравнения на отрезке. Задачи подобного вида возникают при решении методом разделения переменных Фурье нелокальной краевой задачи для уравнений в частных производных. Например, при решении нестационарных задач диффузии с краевыми условиями типа Самарского-Ионкина. Или при решении задач стационарной диффузии с противоположными потоками на части границы. Граничные условия этой задачи являются регулярными, но не усиленно регулярными. Принципиальным отличием этой задачи является то, что система собственных функций является полной и минимальной, но не образует базиса. Поэтому прямое применение метода Фурье оказывается невозможным. Основываясь на этих собственных функциях в работе построена специальная система функций, которые уже образует базис. Однако полученная система уже не является системой собственных функций задачи. В работе демонстрируется, как эта новая система функций может быть использована для решения нелокальной краевой задачи на примере уравнения Лапласа.

Ключевые слова: нелокальные граничные условия; регулярные, но не усиленно регулярные краевые условия; базис; собственные функции; биортогональная система.

Г. Ділдәбек, А.А. Тенгаева

Бір қатаң емес регуляр шеттік есептің меншікті функциялар жүйесінен базис құру

Бұл жұмыста кесіндідегі жәй дифференциалдық теңдеу үшін бейлокал шекаралық спектралды есебі зерттелінеді. Мұндай есептер дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер үшін бейлокал шеттік есептерді Фурьенің айнымалыны ажырату әдісімен шешу кезінде пайдалады. Мысалы, Самарский-Ионкин текстес шеттік шартпен берілген диффузияның бейстационар есептерін шешу кезінде. Немесе шекараның бөлігінде қарама-қарсы ағынмен берілген диффузияның стационар есептерін шешу кезінде.

Бұл есептің шекаралық шарты регуляр, бірақ қатаң емес регуляр болып табылады. Бұл есептің айрықша ерекшелілігі, оның меншікті функциялар жүйесі базис құрамайды. Соңдықтан Фурье әдісін тікелей қолдану мүмкін емес. Осы меншікті функцияларды негізге ала отырып, базис құрайтын арнайы функциялар жүйесі құрылған. Бірақ алынған жүйе берілген есептің меншікті функциялар жүйесі болмайды. Жұмыста осы алынған жаңа функциялар жүйесінің қолданылуына мысал ретінде Лаплас теңдеуі үшін бейлокал шеттік есепті шешілуі көрсетілген.

Түйін сөздер: бейлокал шекаралық шарт, регуляр, бірақ қатаң емес регуляр шеттік шарт, меншікті функциялар, биортогонал жүйе.

Introduction

Investigations on spectral theory of ordinary differential operators begun from classical papers of J. Liouville and Sh. Sturm. Fundamental works in the spectral theory of differential operators were the papers by Birkhoff of 1908, where he introduced regular boundary conditions for the first time. The theory was significantly developed by Tamarkin and Stone. These works led to a new wide scientific direction having an enormous literature. We refer to [1, 2] for the extensive bibliography and the obtained results.

Despite the apparent simplicity, the spectral theory of ordinary differential operators is far from complete. This applies even to the case of a second-order operator

$$Lu = u''(x) + q(x)u$$

on the finite interval $x \in (a, b)$ which is called Sturm-Liouville operator. Brief survey of results in the spectral theory of the Sturm-Liouville operator is given in the recent paper by Makin [3].

It is known that boundary conditions can be divided into three classes [4]:

- strengthened regular conditions;
- regular but not strengthened regular conditions;
- irregular conditions.

If the boundary conditions are strengthened regular then the system of root functions forms a Riesz basis in $L_2(a, b)$. This statement was proved in [5, 6] and [7, Chapter XIX].

In the other cases the basis property of the systems of root functions is not guaranteed. The final definition of classes of the boundary conditions for an operator of second order when the system of eigen- and associated functions forms the basis, was given in [8].

In the present work we consider one model spectral problem for an operator of multiple differentiation. Boundary conditions of the problem are regular but not strengthened regular. The system of eigenfunctions of the problem is complete, minimal, almost normed, but does not form a basis in L_2 . On the basis of these eigenfunctions we construct a special system having basis property in L_2 .

Statement of the problem

Consider the spectral problem

$$\begin{aligned} -u''(x) &= \lambda u(x), \quad 0 < x < \pi; \\ u(0) &= 0, \quad u'(0) + u'(\pi) + \alpha u(\pi) = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

where $\alpha > 0$ is a fixed parameter.

This problem arises while solving a nonlocal boundary value problem for the Laplace equation by the method of separation of variables. Let $D = \{(r, \theta) : 0 < r < 1, 0 < \theta < \pi\}$ be a half-disc. Our goal is to find a function $u(r, \varphi) \in C^0(\bar{D}) \cap C^2(D)$ satisfying in D the equation

$$\Delta U = 0 \quad (2)$$

with the boundary conditions

$$U(1, \theta) = f(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad (3)$$

$$u(r, 0) = 0, \quad r \in [0, 1], \quad (4)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta}(r, 0) + \frac{\partial U}{\partial \theta}(r, \pi) + \alpha U(r, \pi) = 0, \quad r \in (0, 1). \quad (5)$$

The difference of this problem is the impossibility of direct applying of the Fourier method (separation of variables). Because the corresponding spectral problem for the ordinary differential equation has the system of eigenfunctions not forming a basis. For $\alpha = 0$ the problem (2) - (5) was considered in [9].

One method of constructing the basis, based on the system of eigenfunctions of the problem

$$-\vartheta''(x) = \lambda \vartheta(x), \quad 0 < x < \pi;$$

$$\vartheta(0) = 0, \quad \vartheta'(0) = \vartheta'(\pi) + \alpha \vartheta(\pi)$$

was suggested in [11].

The boundary conditions of this problem are regular but not strengthened regular conditions. And the system of its eigenfunctions does not form the basis. But a special system of functions built with help of these eigenfunctions will form the basis. And this fact is applied for the solution of a nonlocal initial-boundary problem for the heat equation.

The goal of the present work is to construct the basis from the system of the eigenfunctions of the problem (1).

Preliminaries

Let us present briefly the main definitions and facts which will be used in what follows. Let B be a Banach space with the norm $\|\cdot\|_B$, and let B^* be its dual with the norm $\|\cdot\|_{B^*}$.

A system of elements $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ is said to be closed in B if the linear span of this system is everywhere dense in B ; that is, any element of the space B can be approximated by a linear combination of elements of this system with any accuracy in the norm of the space B .

A system of elements $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ is said to be minimal in B if none of its elements belongs to the closure of the linear span of the other elements of this system.

It is well known that a system $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ is minimal if and only if there exists a biorthogonal system dual to it, that is, a system of linear functionals $\{\psi_k\}_{k=0}^{\infty}$ from B^* such that

$$(\varphi_k, \psi_j) = \delta_{k,j}$$

for all $k, j \in \mathbb{N}$. Moreover, if the initial system is simultaneously closed and minimal in B , then the system biorthogonally dual to it is uniquely defined.

We say that a system $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ is uniformly minimal in B , if there exists $\gamma > 0$ such that for all $k \in \mathbb{N}$,

$$\text{dist}\{\varphi_k, B_k\} \geq \gamma \|\varphi_k\|_B,$$

where B_k is the closure of the linear span of all elements φ_l with serial numbers $l \neq k$.

It is also well known that a closed and minimal system $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ is uniformly minimal in B if and only if:

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \|\varphi_k\|_B \|\psi_k\|_{B^*} < \infty.$$

A system $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ forms a basis of the space B if, for any element $f \in B$, there exists a unique expansion of it in the elements of the system, that is, the series $\sum_{k=0}^{\infty} f_k \varphi_k$ convergent to f in the norm of the space B .

Any basis is a closed and minimal system in B , and, therefore, we can uniquely find its biorthogonal dual system $\{\psi_k\}_{k=0}^{\infty}$, and hence the expansion of any element of f with respect to the basis $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ coincides with its biorthogonal expansion, that is, $f_k = (f, \psi_k)$ for all $k \in \mathbb{N}$.

On eigenvalues and eigenfunctions of the problem

In a whole the constructing eigenvalues and eigenfunctions of the problem (1) is a simple task. Therefore we omit some details of the calculations and present the main facts which we will use further.

We look for eigenvalues of the problem. Note that $\lambda = 0$ is not an eigenvalue, since problem (1) for this value of λ has only the trivial solution.

Let $\lambda \neq 0$. The eigenfunction should have the form $u(x) = \sin(\sqrt{\lambda}x)$. By taking into account the nonlocal boundary condition, we obtain two equations

$$\cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}\right) = 0, \quad \cot\left(\frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}\right) = -\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}.$$

Solutions of the first equation form a series of eigenvalues and eigenfunctions of the problem (1) of the form

$$\lambda_k^{(1)} = (2k+1)^2, \quad u_{k1}(x) = \sin((2k+1)x), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

The second equations can be represented as

$$\cot(\beta\pi) = -\frac{\alpha}{2\beta}, \quad \beta = \frac{\sqrt{\lambda}}{2}.$$

By β_k denote roots of this equation. It is easy to show that they satisfy the inequalities $2k+1 < 2\beta_k < 2k+2$, $k = 0, 1, 2, \dots$, and two-side estimates are carried out for $\delta_k = \beta_k - k - 1/2$ where k is large enough

$$\frac{\alpha}{\pi(2k+1)} \left(1 - \frac{1}{2k+1}\right) < \delta_k = \alpha \left|O\left(\frac{1}{k}\right)\right| < \frac{\alpha}{\pi(2k+1)}. \quad (6)$$

Consequently there exists a second series of eigenvalues and eigenfunctions of the form

$$\lambda_k^{(2)} = (2\beta_k)^2, \quad u_{k2}(x) = \sin(2\beta_k x), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Lemma 1. *The system of eigenfunctions $\{u_{k1}, u_{k2}\}_{k=0}^{\infty}$ of the problem (1) is complete and minimal, almost normed but does not form even an ordinary basis in $L_2(0, \pi)$.*

Proof. The completeness and minimality of the system follow from the regularity of boundary conditions of the spectral problem (1). The limitation of norms is easily checked by direct calculation. However the properties of the completeness and minimality are not enough for the basis property.

Really, consider scalar multiplications of pairs of eigenfunctions (u_{k1}, u_{k2}) . By direct calculation, we find

$$(u_{k1}, u_{k2}) = \int_0^\pi \sin((2k+1)t) \sin(2\beta_k t) dt = \frac{\pi}{2} \frac{\sin(2\delta_k \pi)}{2\delta_k \pi} \frac{2k+1}{2k+1+\delta_k}.$$

Taking into account that $\|u_{k1}\| = \sqrt{\pi/2}$, and $\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_{k2}\| = \sqrt{\pi/2}$, we get that the angle between the normed eigenvectors tends to zero:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{u_{k1}}{\|u_{k1}\|}, \frac{u_{k2}}{\|u_{k2}\|} \right)_{L_2(0, \pi)} = 1. \quad (7)$$

Such systems can not form the unconditional basis. We show it more detailed.

The problem

$$\begin{aligned} -v''(x) &= \bar{\lambda}v(\theta), \quad 0 < x < \pi; \\ v(0) + v(\pi) &= 0, \quad v'(\pi) + \alpha v(\pi) = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

is conjugated to the problem (1). The system of the eigenfunctions of this problem is biorthogonal to the system $\{u_{k1}, u_{k2}\}_{k=0}^{\infty}$:

$$\begin{aligned} v_{k1}(x) &= \frac{2}{\pi} \left\{ \sin((2k+1)x) - \frac{2k+1}{\alpha} \cos((2k+1)x) \right\} & k = 0, 1, 2, \dots \\ v_{k2}(x) &= C_{k2} \left\{ \sin(2\beta_k x) - \frac{2\beta_k}{\alpha} \cos(2\beta_k x) \right\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (9)$$

The constant C_{k2} are taken from the biorthogonal relations $(u_{k2}, v_{k2}) = 1$. Since we will not use the explicit form of the biorthogonal system, then we do not present here the explicit form of constant C_{k2} .

Due to biorthogonality of the system, the equations

$$(u_{k1}, v_{k1}) = 1, \quad (u_{k2}, v_{k1}) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

are valid.

It follows that $(u_{k1} - u_{k2}, v_{k1}) = 1$. Using the Cauchy-Bunyakovsky inequality, we get the estimate from the bottom

$$\|v_{k1}\| \geq (\|u_{k1} - u_{k2}\|)^{-1}.$$

Since $\|u_{k1}\| = \sqrt{\pi/2}$, and $\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_{k2}\| = \sqrt{\pi/2}$, then from here and from (7) it is easy to obtain

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_{k1}\| \|v_{k1}\| = \infty.$$

That is, the necessary condition of the basis property does not hold.

Lemma is proved.

It is necessary to note the fact, that the system of eigenfunctions $\{u_{k1}, u_{k2}\}_{k=0}^{\infty}$ does not have the basis, also follows from more general facts [8].

Forming the basis

Now from elements of the system $\{u_{k1}, u_{k2}\}_{k=0}^{\infty}$ we construct a new system which will be a basis in $L_2(0, \pi)$. We introduce new functions

$$\begin{aligned} \varphi_{2k}(x) &= u_{k1}(x), & k = 0, 1, 2, \dots \\ \varphi_{2k+1}(x) &= (u_{k2}(x) - u_{k1}(x))(2\delta_k)^{-1}, \end{aligned} \tag{10}$$

Let us show that the constructed system is a Riesz basis in $L_2(0, \pi)$.

The biorthogonal system to (10) has the form:

$$\begin{aligned} \psi_{2k}(x) &= v_{k2}(x) + v_{k1}(x), \\ \psi_{2k+1}(x) &= 2\delta_k v_{k2}(x), \quad k = 0, 1, 2, \dots. \end{aligned}$$

This system is constructed from the eigenfunctions of the problem (8) conjugated to (1).

Let us show that the constructed additional system has the basis property.

Lemma 2. *The system of functions $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ forms a Riesz basis in $L_2(0, \pi)$.*

Proof. Since this system is constructed from the eigenfunctions of the problem with regular boundary conditions and with the help of non-degenerated linear combinations, then the completeness and minimality of the system do not change.

Let us prove asymptotic quadratic closeness of the system $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ to the system forming the Riesz basis. As such we choose the system of eigen- and associated functions of a problem of the Samarskii-Ionkin type:

$$-w''(x) = \lambda w(x), \quad 0 < x < \pi;$$

$$w(0) = 0, \quad w'(0) + w'(\pi) = 0.$$

The boundary conditions of this problem are not strengthened regular. All the eigenvalues of this problem, except zero values, are multiple: $\lambda_k^{(1)} = \lambda_k^{(2)} = (2k+1)^2$, $k = 0, 1, 2, \dots$. The eigenfunctions w_{2k} and the associated functions w_{2k+1} of the problem form the Riesz basis in $L_2(0, \pi)$ and have the form:

$$w_{2k}(x) = \sin((2k+1)x), \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad w_{2k+1}(x) = x \cos((2k+1)x).$$

We need to show that the series converges

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|\varphi_k - w_k\|^2 < \infty.$$

It is evident that $\varphi_{2k} - w_{2k} = 0$. For odd numbers we have:

$$\varphi_{2k+1}(x) = \frac{\sin(2\beta_k x) - \sin((2k+1)x)}{2\delta_k} = \frac{\sin(\delta_k x)}{\delta_k x} x \cos((2k+1+\delta_k)x).$$

Thus it is not difficult to get the estimate $|\varphi_{2k+1}(x) - w_{2k+1}(x)| \leq C\delta_k$. From here and from the asymptotics (6) for δ_k we have the asymptotic inequality $|\varphi_{2k+1} - w_{2k+1}| \leq C_1/k$ where C_1 does not depend on k .

The obtained inequality provides the quadratic closeness of the system $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ and the Riesz basis $\{w_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$. Lemma is proved.

Further on, by standard methods it is not difficult to justify that if the function $f(x) \in C^2[0, \pi]$ and satisfies the boundary conditions of the problem (1), then its Fourier series by the system $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ converges uniformly.

We can calculate that

$$\begin{aligned} -\varphi''_{2k}(x) &= \lambda_k^{(1)} \varphi_{2k}(x), \\ -\varphi''_{2k+1}(x) &= \lambda_k^{(2)} \varphi_{2k+1}(x) + \frac{\lambda_k^{(2)} - \lambda_k^{(1)}}{2\delta_k} \varphi_{2k}(x). \end{aligned} \tag{11}$$

Using these formulas, it is possible to apply the method of separation of variables for solving problems of the type (2) - (5).

Use for solving of the nonlocal boundary equation

We can write any solution of problem (2) - (5) in the form of a biorthogonal series

$$u(r, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} R_k(r) \varphi_k(\theta), \tag{12}$$

where

$$R_k(r) = (u(r, \cdot), \psi_k(\cdot)) \equiv \int_0^\pi u(r, \theta) \psi_k(\theta) d\theta.$$

Functions (12) satisfy the boundary conditions (4) and (5).

Substituting (12) into equation (2) and the boundary conditions (3), taking into account (11), for finding unknown functions $R_k(r)$ we obtain following problems:

$$\begin{aligned} r^2 R''_{2k+1}(r) + r R'_{2k+1}(r) - \lambda_k^{(2)} R_{2k+1}(r) &= 0, \\ r^2 R''_{2k}(r) + r R'_{2k}(r) - \lambda_k^{(1)} R_{2k}(r) &= \frac{\lambda_k^{(2)} - \lambda_k^{(1)}}{2\delta_k} R_{2k+1}(r), \end{aligned} \tag{13}$$

with the boundary conditions $R_k(1) = f_k$, where f_k are the Fourier coefficients of the expansion of the function $f(\theta)$ into the biorthogonal series by $\{\varphi_k(\theta)\}_{k=0}^{\infty}$.

The regular solution of (13) exists, is unique and can be written in the explicit form:

$$\begin{aligned} R_{2k+1}(r) &= f_{2k+1} r \sqrt{\lambda_k^{(2)}}, \\ R_{2k}(r) &= f_{2k} r \sqrt{\lambda_k^{(1)}} + f_{2k+1} \frac{1}{2\delta_k} \left(r \sqrt{\lambda_k^{(2)}} - r \sqrt{\lambda_k^{(1)}} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Substituting (14) into (12), we obtain a formal solution of the problem:

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= \sum_{k=0}^{\infty} f_{2k} r^{2k+1} \sin((2k+1)\theta) + \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} f_{2k+1} \frac{1}{2\delta_k} [r^{2\beta_k} \sin(2\beta_k \theta) - r^{2k+1} \sin((2k+1)\theta)]. \end{aligned} \quad (15)$$

Theorem *If $f(\theta) \in C^2[0, \pi]$, $f(0) = 0$, $f'(0) = -f'(\pi) + \alpha f(\pi)$, then there exists a unique classical solution $u(r, \theta) \in C^0(\bar{D}) \cap C^2(D)$ of the problem (2)-(5).*

Proof. The uniqueness of the classical solution of the problem follows from the maximum principle and the Zaremba-Giraud principle for the Laplace equation. The formal solution of the problem is shown in the form of (15). In order to make sure that these functions are really the desired solutions we need to verify the applicability of the superposition principle. For it we need to show the convergence of the series, the possibility of termwise differentiation, and to prove the continuity of these functions on the boundary of the half-disk.

The possibility of differentiating the series (15) any number of times at $r < 1$ is an obvious consequence of the convergence of power series and two-sided estimates (6) for δ_k . Let us justify the uniform convergence of the series (12) at $r \leq 1$. For this we use the sign of the uniform convergence of Weierstrass.

By direct calculation it is easy to see that the series (15) is majorized by the series $C_1(|f_0| + |f_1| + |f_2| + \dots)$. This series converges due to the requirements of the theorem imposed on $f(\theta)$. Since all the terms of the series (15) are continuous functions, then the function $u(r, \theta)$ is continuous in the boundary domain \bar{D} .

The proof of the theorem is complete.

Conclusion

Thus, in the present work we investigated a nonlocal boundary spectral problem (1) for an ordinary differential equation in an interval $(0, \pi)$. The boundary conditions of this problem are regular but not strengthened regular. The difference of this problem is: the system of eigenfunctions $\{u_{k1}, u_{k2}\}_{k=0}^{\infty}$ of the problem (1) is complete and minimal, almost normed but does not form even an ordinary basis in $L_2(0, \pi)$.

Based on these eigenfunctions $\{u_{k1}, u_{k2}\}_{k=0}^{\infty}$ there we constructed a special system of functions $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ that already forms a Riesz basis in $L_2(0, \pi)$.

This fact is used for solving of the nonlocal boundary equation (2) - (5).

Acknowledgements

The authors express their gratitude to T.Sh. Kalmenov and M.A. Sadybekov for valuable advices during the work.

This work was supported by the grant 0824/GF4 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

References

- [1] *Il'in V.A.; Kritskov L.V.* Properties of spectral expansions corresponding to non-self-adjoint differential operators // Journal of Mathematical Sciences. Vol.116, No.5, p.3489-3550, (2003)
- [2] *Locker J.* Spectral Theory of Non-Self-Adjoint Two-Point Differential Operators. V.192 of Mathematical Surveys and Monographs. Amsterdam: North-Holland, 2003.
- [3] *Makin A.S.* On Summability of Spectral Expansions Corresponding to the Sturm-Liouville Operator // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. Vol.2012, Article ID 843562, p.1-13, doi:10.1155/2012/843562, (2012)
- [4] *Naimark M.A.* Linear Differential Operators. New York: Ungar, 1967.
- [5] *Mihailov V.P.* On Riesz bases in $L_2(0, 1)$ // Doklady Akademii Nauk SSSR. Vol.144, No.5, p.981-984, (1962) (in Russian)
- [6] *Kesel'man G.M.* On the unconditional convergence of eigenfunction expansions of certain differential operators // Izv. Vuzov. Mat.. Vol.2, No.39, p.82-93, (1964) (in Russian)
- [7] *Dunford N.; Schwartz J.T.* Linear Operators, Part III. New York: John Wiley & Sons, 1971.
- [8] *Lang P.; Locker J.* Spectral theory of two-point differential operators determined by D^2 . II. Analysis of case // Journal of Mathematical Analysis and Applications. Vol.146, No.1, p.148-191, (1990)
- [9] *Moiseev E.I.; Ambartsumyan V.E.* On the solvability of nonlocal boundary value problem with the equality of flows at the part of the boundary and conjugated to its problem // Differential Equations. Vol.46, No.5, p.718-725, (2010)
- [10] *Moiseev E.I.; Ambartsumyan V.E.* On the solvability of nonlocal boundary value problem with the equality of flows at the part of the boundary and conjugated to its problem // Differential Equations. Vol.46, No.6, p.892-895, (2010)
- [11] *Mokin A.Yu.* On a family of initial-boundary value problems for the heat equation // Differential Equations. Vol.45, No.1, p.126-141, (2009)

Поступила в редакцию 27 февраля 2015 года

УДК 004.421

А.Т. Нуртай

Назарбаев Университет, Республика Казахстан, г. Астана

E-mail: anel.nurtay@nu.edu.kz

Алгоритм поиска освещенных участков многогранных пересекающихся поверхностей в плоскопараллельном световом потоке

В данной статье представлен метод поиска освещенных/обдуваемых участков выпуклых пересекающихся многогранников. Ограничение на выпуклость следует из ограничений в алгоритмах Б.Шазеля [3] и С.Хертела [4] поиска линий пересечений многогранников, использованных при подготовке данных для представленного алгоритма. Разработанный алгоритм определяет освещенность областей объектов, основываясь на взаимном расположении проекций контурных циклов и линий пересечений. При этом не ставится ограничения на выпуклость объектов в этапе определения освещенных участков по известным линиям пересечений. Это является большим плюсом, так как при дальнейших исследованиях позволяет снять ограничение на выпуклость многогранников, изменив лишь этап поиска линий пересечений. Разработанный алгоритм прост в понимании и гибок в реализации. Имеет логически обоснованное разделение на этапы, в том числе и пригодные для параллелизации вычислений. Для задач реального времени возможность параллельных вычислений является одним из ключевых характеристик алгоритма.

Ключевые слова: алгоритм, поток, параллельных вычислений.

A.T. Nurtay

An algorithm for sun illuminated surface areas of intersecting convex polyhedra

This paper presents a method for finding lighted / windy areas of intersecting convex polyhedra. The constraints in B. Chazelle [3] and S.Hertel [4] algorithms for search intersection lines of polyhedra used in the preparation of data for the presented algorithm imply the restriction on the convexity. The developed algorithm determines the sun lighting of the subject based on the mutual arrangement of the projections of contour cycles and intersections lines. There is no restriction on the convexity in the stage of defining lighted areas with the known lines of intersections. This is a great advantage, since further research allows to remove the restriction on a convexity by changing only the step of searching the intersection lines of surfaces. The developed algorithm is easy to understand and flexible to implement. It has logically justified division into stages, including suitable parts for concurrency management. The possibility of parallel computing is one of the key characteristics of the algorithm for real-time tasks.

Key words: algorithm, areas, parallel computing.

Ә.Т Нұртай .

Қылышатын көпжақты дene беттерінің өзара параллель күн сәулелері түскен аймақтарын анықтау алгоритмі

Бұл мақалада дәңес, қылышатын көпжақты денелердің параллель күн сәулесі түскен не параллель ауа ағынымен үрленген бөліктерін табатын алгоритм көрсетілген. Дәңестікке байланысты шектеу Б.Шазель [3] мен С.Хертелдің [4] көпжақты дene беттерінің қылышысы сызықтарын табу барысында қойылған болатын. Құрастырылған алгоритм жарықтандырылған аймақты денелердің сұлба тізбектері мен қылышысы сызығының проекцияларының өзара орналасуына қарай анықтайды. Қылышысы сызықтарын табатын әдісті өзгертсек, дәңестікке қойылған шектеу жойылады, себебі макалада ұсынылған алгоритмде ондай шектеу жоқ. Бұл алгоритм түсінгенге оңай болғанымен қоймай, оның программалық жүзеге асырылуы да женел. Логикалық негізделген этаптарға бөлініп, параллель есептеуге де икемделген. Мезет сайын есептің жауабын керек ететін мәселелер үшін амалдың параллелденуі алгоритмнің басты сипаттамаларының бірі болып табылады.

Түйін сөздер: алгоритм, ағым, параллельді есептеулер.

История и прикладная значимость

Задача поиска освещенных областей трехмерных объектов успешно решается при помощи различных методов компьютерной графики, например метод карты глубины, и сводится к задаче удаления невидимых поверхностей, которая является классической задачей компьютерной графики, и еще в 70-х годах были предложены алгоритмы для ее решения. Методы удаления невидимых граней делятся на растровые и векторные, а также на методы, заметающие в картинной плоскости, и на методы, работающие в объемном пространстве. Упомянутый метод карты глубины принадлежит к растровым методам. Он решает задачу на картинной плоскости, вследствие чего фактически теряется информация о форме объектов, сохраняется лишь порядок расположения объектов относительно друг друга и плоскости проектирования. В практике встречается ряд прикладных задач, которые близки по формулировке к вышеописанной. Ключевым различием является необходимость получения данных в объемном пространстве при помощи эффективного векторного метода. Например, на космический аппарат, совершающий полет по околоземной орбите, среди прочих действуют сила аэродинамического сопротивления. Сила аэродинамического сопротивления играет одну из ключевых ролей при моделировании вращательного движения, так как необходимо вычислить силы и моменты относительно центра масс космического аппарата. Отдельно необходимо отметить силу светового давления, действующую, например, на геостационарный искусственный спутник. В этом случае говорим об освещенности солнечных батарей, снабжающие энергией сами станции. Известно, что для обоих случаев необходимо использовать интегралы по участкам поверхностей, обдуваемых потоком частиц, либо освещаемых Солнцем. В этих целях производится поиск освещенных/обдуваемых участков поверхностей в трехмерном пространстве. Векторный метод для решения задач в объемном пространстве был предложен в работе В.В.Сазонова [1]. Задача была поставлена для непересекающихся объектов. В данной работе ограничение на непересекаемость объектов снимается, и предлагается новая идея для вычисления освещенных/обдуваемых областей. Для поиска пересечения выпуклых объектов рассматриваются наиболее быстрые известные методы. Один из них является простым для понимания и реализации, второй - более сложным как в понимании, так и в реализации. Объединяет эти два метода условие на выпуклость рассматриваемых объектов. Предложенная идея поиска освещенных/обдуваемых участков поверхностей основывается на анализе взаимно-однозначной привязки образа и проекции на плоскость перпендикулярной направлению света для случая поиска светового давления или направлению движения космического аппарата для случая вычисления сил аэродинамического сопротивления. В результате получен метод, применимый для поиска освещенных/обдуваемых областей пересечения невыпуклых многогранников при условии известной линии пересечения.

Описание алгоритма и постановка задачи

Рассматриваются объекты, ограниченные многогранными поверхностями с треугольными гранями. Поверхности объектов считаются замкнутыми и двухсторонними. Каждой грани поверхности объекта соответствуют два вектора нормали: внешний и внутренний. Выбирая внешний вектор нормали, мы задаем ориентацию поверхности и её ребер (ребро грани ориентировано так, что при движении вдоль ребра рассматриваемая грань располагается слева, если наблюдать из конца вектора нормали). Сценой будем

называть совокупность объектов, расположенных произвольным образом. Задача состоит в построении освещенных участков поверхностей объектов с учетом их возможного затенения при освещении сцены бесконечно удаленным точечным источником света. Будем называть грань лицевой, если её нормаль образует острый угол с направлением на источник света, и нелицевой в противном случае. Ребро будем называть лицевым, если оно принадлежит двум лицевым граням, нелицевым, если оно принадлежит двум нелицевым граням, и граничным, если оно является общим ребром лицевой и нелицевой граней. Считаем, что каждое ребро принадлежит ровно двум граням. Говоря в дальнейшем о проектировании, будем подразумевать ортогональное проектирование на плоскость, ортогональную направлению светового потока. Желательно заранее определить "отдаленность плоскости от наблюдателя то есть договориться о том, что все фигуры сцены находятся с одной стороны этой плоскости и, например, о том, что проектирование осуществляется по тому же вектору, что и вектор направления светового потока. Границы называются смежными, если они имеют общее ребро. Будем считать, что две лицевые грани связаны, если можно переместиться с одной грани на другую, двигаясь только по лицевым граням поверхности. Под лицевой поверхностью будем понимать множество лицевых граней, каждая из которых связана со всеми другими гранями этого множества. Будем называть вершину поверхности точкой сборки (Рисунок. 1), если при обходе всех инцидентных данной вершине ребер от ребра к ребру вдоль поверхности по часовой стрелке сумма проекций на, ортогональную направлению светового потока, плоскость, всех плоских углов было больше 2π .

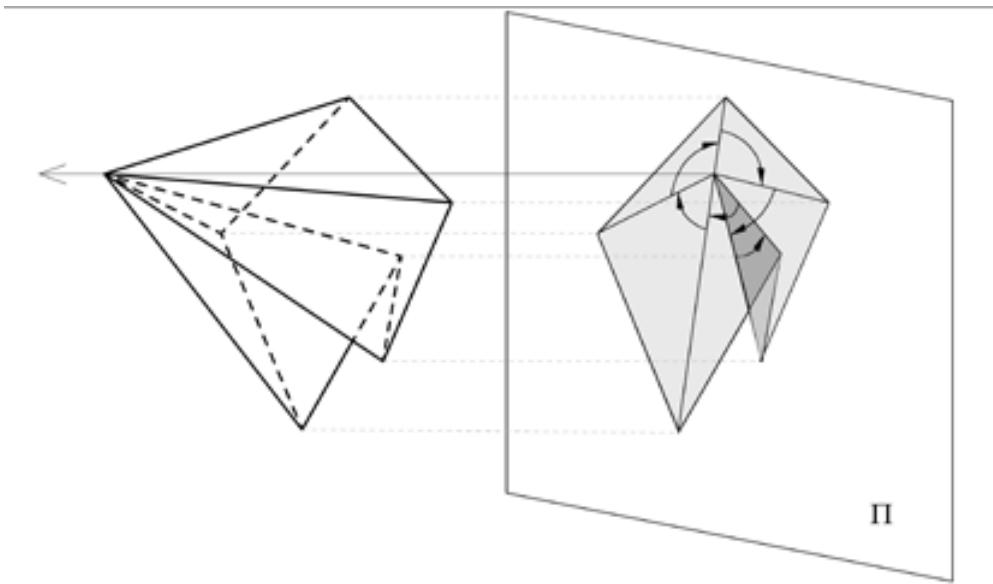


Рисунок 1 – Точка сборки 1

Индексом затенения точки называется количество лицевых граней, которые закрывают данную точку от источника света. Ясно, что точка поверхности освещена тогда и только тогда, когда её индекс затенения равен нулю. Нелицевые грани не освещены, и поэтому из рассмотрения их следует исключить. Индекс затенения является аналогией индекса количественной невидимости, используемого в алгоритме Аппеля удале-

ния невидимых линий [2]. Граница лицевой поверхности состоит из граничных ребер, образующих цикл, который будем называть контурным циклом. Ориентация каждого контурного цикла определяется ориентацией поверхности. Необходимо вычислить индекс затенения для лицевых поверхностей объектов. Найти области в которых индекс затенения равен нулю. Объединить участки с одинаковым индексом затенения.

Способ решения задачи

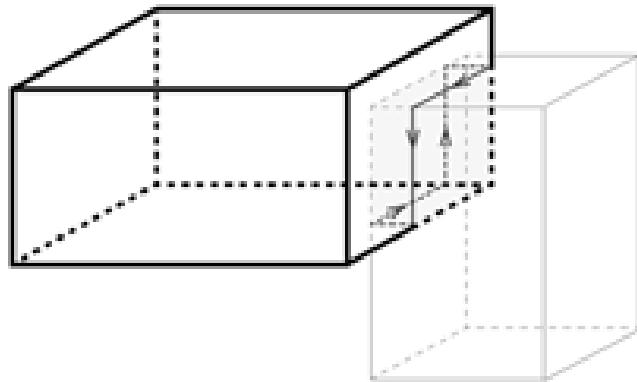
Индекс затенения является кусочно-постоянной функцией, заданной на лицевых поверхностях объектов. Рассмотрим точку Р проекции граничного ребра одной лицевой поверхности на другую. Очевидно, в ?-окрестности точки Р индекс затенения принимает различные значения, и эта точка является точкой разрыва 1-го рода функции индекса затенения. Будем считать, что в самой точке Р эта функция принимает значение, равное максимальному значению индекса затенения из ?-окрестности этой точки. Предложенный в работе Сазонова В.В. [1], алгоритм состоит в разбиении поверхности объекта на области, в каждой из которых индекс затенения постоянен, и в выделении тех областей, в которых он равен нулю. Для разбиения, непересекающихся друг с другом, поверхностей на области постоянства индекса затенения необходимо: 1) найти граничные ребра всех поверхностей объектов сцены; 2) найти ортогональные проекции всех граничных ребер на лицевые поверхности объектов сцены; 3) разбить лицевые поверхности на области постоянства индекса затенения; 4) определить индексы затенения внутренних точек областей постоянства. Для применения данного способа для случая сцен с пересекающимися объектами, необходимо модернизировать алгоритм. Вводятся два, промежуточно-параллельных к вышеуказанным этапам, процесса: 1) поиск пересечения ломаной, по которой пересекаются многогранники; 2) анализ взаимного расположения этой ломаной и контурных циклов.

Контурные циклы

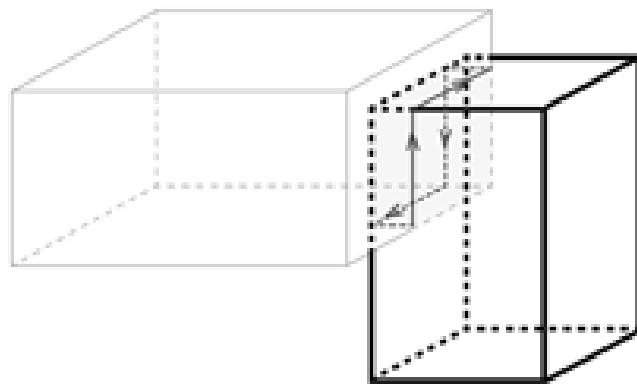
Рассмотрим многогранную поверхность объекта, входящего в состав сцены. Она содержит одну или несколько лицевых поверхностей. Граница лицевой поверхности состоит из граничных ребер, образующих цикл, который будем называть контурным циклом. Ориентация каждого контурного цикла определяется ориентацией лицевой поверхности. Количество контурных циклов, ограничивающих лицевую поверхность, зависит от формы поверхности рассматриваемого объекта и его положения в пространстве. У сферы лицевая поверхность всегда будет ограничена одним контурным циклом, а у тора существует положение, при котором лицевая поверхность ограничена двумя контурными циклами. Как уже отмечалось выше, индекс затенения является кусочно-постоянной функцией, заданной на лицевых поверхностях объектов. Точками разрыва этой функции являются точки проекций граничных ребер на рассматриваемую лицевую поверхность, поэтому для нахождения участков постоянства индекса затенения необходимо найти все граничные ребра и контурные циклы поверхностей сцены.

Линия пересечения

Ориентированную и замкнутую ломаную, состоящую из общих для пары пересекающихся многогранников отрезков назовем линией пересечения. Для дальнейшего пояснения алгоритма необходимо ввести ряд договоренностей, не являющихся строгими опре-



а)



б)

Рисунок 2 а и б – Ориентация линии пересечения в зависимости от исследуемого (пересекающего) объекта

делениями, и используемых лишь для краткости дальнейших пояснений и наглядности. Во-первых, объекты исследуются попарно. То есть в случае пересечения одновременно более чем двух многогранников, необходимо пересмотреть их пересечение последовательно: сначала любых двух, затем этот объединенный многогранник с третьим, и так далее. Таким образом, далее можем говорить лишь о паре пересекающихся многогранников, какой бы сложной ни была сцена. Во-вторых, каждый многогранник исследуется со своим набором данных. Это означает, что одна и та же линия пересечения может иметь разное направление в процессе анализа сцены, в зависимости от того, освещенность которого из пары исследуемых многогранников мы вычисляем (Рисунок.2 а и б).

Все, найденные в процессе поиска линии пересечения, отрезки должны быть включены в направленный цикл. Подробнее о классификации подобных структур написано в работах [3], [4]. Мы же будем считать, что отрезок принадлежит тому многограннику, который на момент анализа является пересекаемым, то есть не принадлежит многограннику, чей контурный цикл анализируется именно на тот момент. В-третьих, в

трехмерном представлении линии пересечения ориентированы так, что ограничивают область поверхности пересекающего многогранника, которая остается внутри пересекаемого, сохраняя ориентацию поверхности пересекающего многогранника (Рисунок.2 а и б). В-четвертых, проекции линий пересечения имеют ту же ориентацию, что и их прообраз в трехмерном пространстве, с учетом, как уже отмечалось выше, принадлежности прообраза к пересекаемому многограннику. В-пятых, линии пересечения, полностью принадлежащие нелицевым граням, не учитываются в анализе индекса затенения контурного цикла, так как никак не влияют на изменение индекса затенения. В-шестых, случаи налегания или касания фигур не рассматриваются в следующем разделе. Все подобные случаи выявляются при поиске линий пересечения многогранников, и обрабатываются в соответствии с взаимным расположением многогранников - объединяются или из сцены исключается содержащиеся в других многогранниках внутренние многогранники. Алгоритм анализа пересекающихся по линии пересечения многогранников представлен ниже.

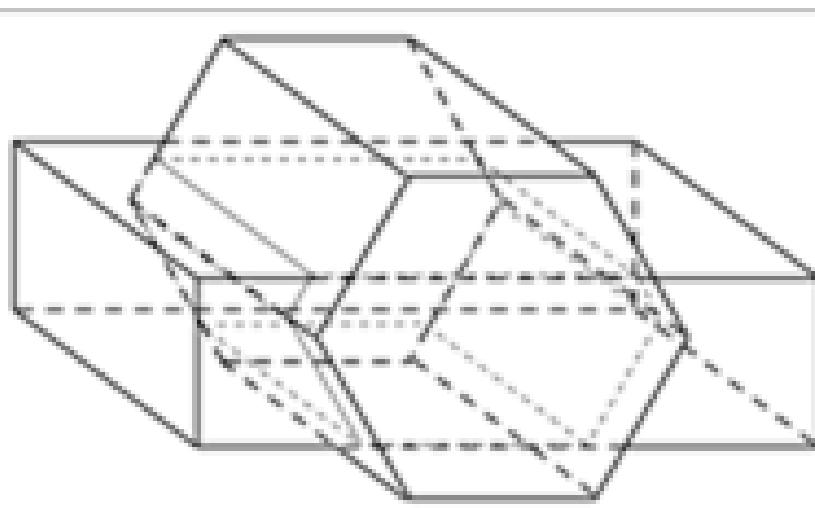


Рисунок 3 – Параллелепипед и шестиугольная призма

Задача поиска освещенных участков

Опишем поэтапно поиск освещенных областей пересекающихся многогранников. Возьмем пересекающихся шестиугольную призму и параллелепипед как на рисунке 3.

Их линия пересечения выделена на рисунке 4. Этап 1. Проектируемые контурные циклы каждой пары многогранников и линии пересечения на общую плоскость. Проектирование объектов на плоскость - сюръективное отображение. Это нужно учитывать при отображении участков проекций, с найденными индексами затенения, контурных циклов на соответствующие участки многогранников. Для этого предлагается хранить проектированный образ циклов в отдельных структурах, с однозначной привязкой к прообразу. Этап 2. Находим точки пересечения проекций контурных циклов друг с другом и каждого из них с проекциями линий пересечений. Это можно сделать при помощи алгоритма Бентли-Оттмана [5]. Заметим, что, при движении вдоль проекции контурного цикла, индекс затенения его прообраза может изменяться лишь в точках пересечения об-

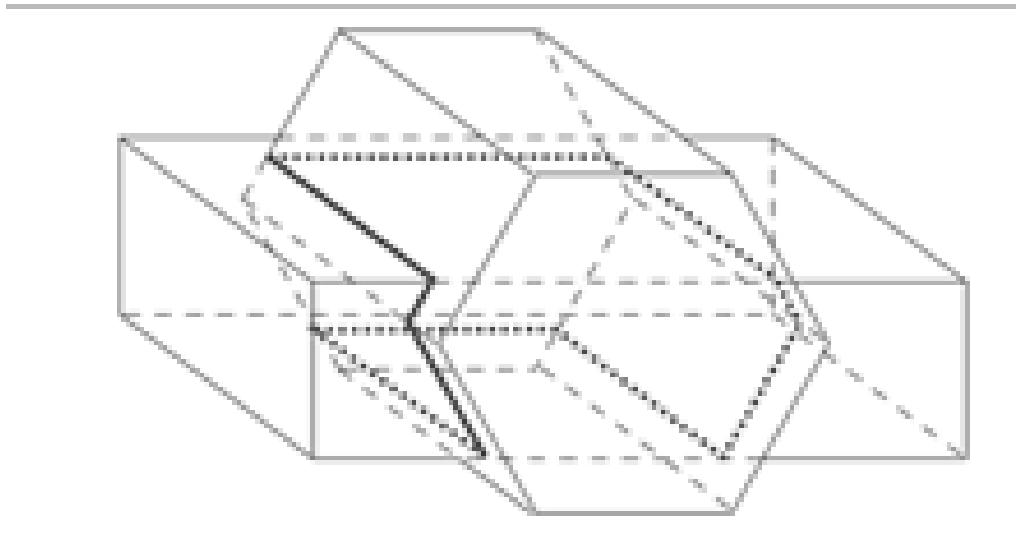


Рисунок 4 – Линия пересечения

раза с проекциями других ломаных и точках сборки. Рассмотрим, каким образом может изменяться индекс затенения в этих точках. Этап 3.1. Случай пересечения проекции контурного цикла с линией пересечения. Берутся вершины на поверхности пересекаемого многогранника, которые являются прообразом точек пересечения проекций контурных циклов и линий пересечений (Рисунок 5). Запишем векторы направления контурного цикла в вершине I_1 в последовательность вершин V . Вершина I_2 не изменяет индекса затенения, так как принадлежит нелицевой грани. Все точки пересечения проекций контурного цикла и линии пересечения, прообразы которых принадлежат нелицевым граням, исключаются из анализа. Ищем инцидентные вершины I_1 ребра, удовлетворяющие условиям: 1) ребра принадлежат пересекаемому многограннику; 2) проекции ребер лежат в области проекции пересекающего многогранника. Находят все грани, смежные по этим ребрам.

В рисунке 6 для вершины I_1 таковыми гранями являются: ABCDEF, ALKB, AFGL. Запишем внешние векторы нормалей этих граней во множество N . Если вершин типа I_1 несколько, то необходимо делать привязку граней к соответствующим вершинам. Этап 3.2. Вычисляются углы между векторами из множеств V и N , являющимися инцидентными одной и той же вершине, и сравниваются с 90° . Если угол между векторами из множества V и множества N больше 90° , то индекс затенения последующего отрезка контурного цикла увеличивается на единицу (Рисунок 7). Иначе, уменьшается на единицу. Это соответствует "вхождению" одного из многогранников в область другого и "выход" из общей области, соответственно. Случай, когда векторы перпендикулярны и никакой другой информации для заданной вершины нет, соответствует касанию или налеганию многогранников. Замечание. Составим плоскости из всевозможных пар векторов из множества N . Для каждой такой плоскости есть два полупространства. Если все, не участвовавшие в построении плоскости, векторы находятся в одном полупространстве, то, в силу прохождения через эту точку линии пересечения, индекс затенени может измениться лишь в сторону убывания. Если хотя бы один вектор располагается

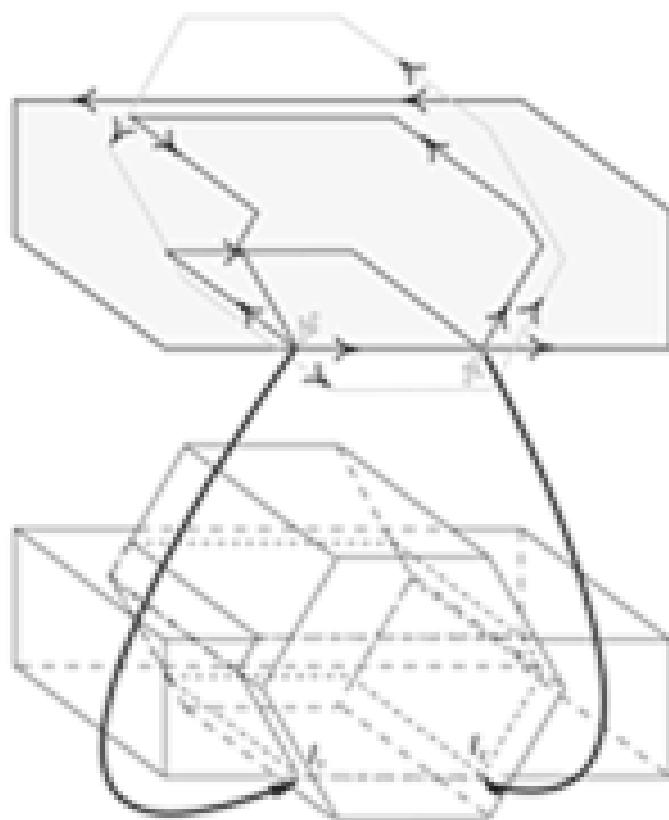


Рисунок 5 – Желтые стрелки указывают на точки пересечения проекций исследуемого контурного цикла параллелепипеда и линии пересечения. Указатели синего цвета, переносят из двухмерного пространства проекций в трехмерное пространство, и показывают на местоположение соответствующих точек (I_1 и I_2) на поверхности пересекаемой шестиугольной призмы.

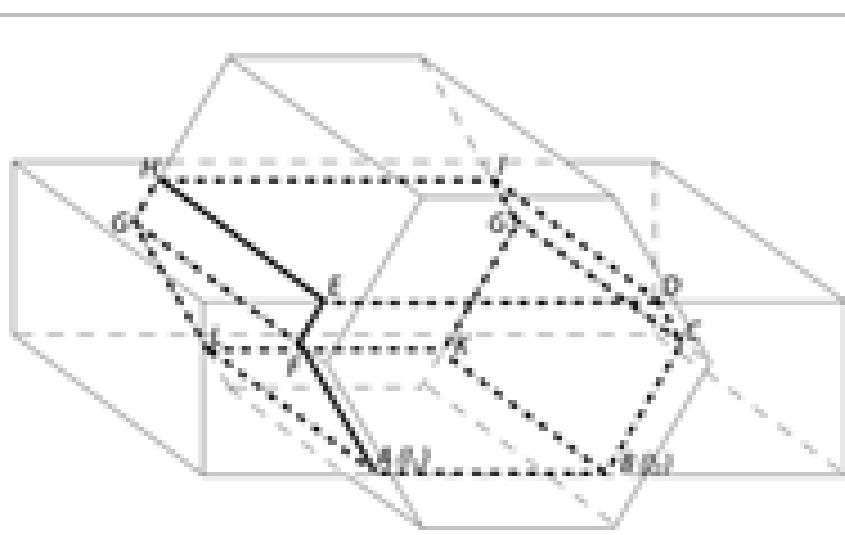


Рисунок 6 – Общая область двух многогранников

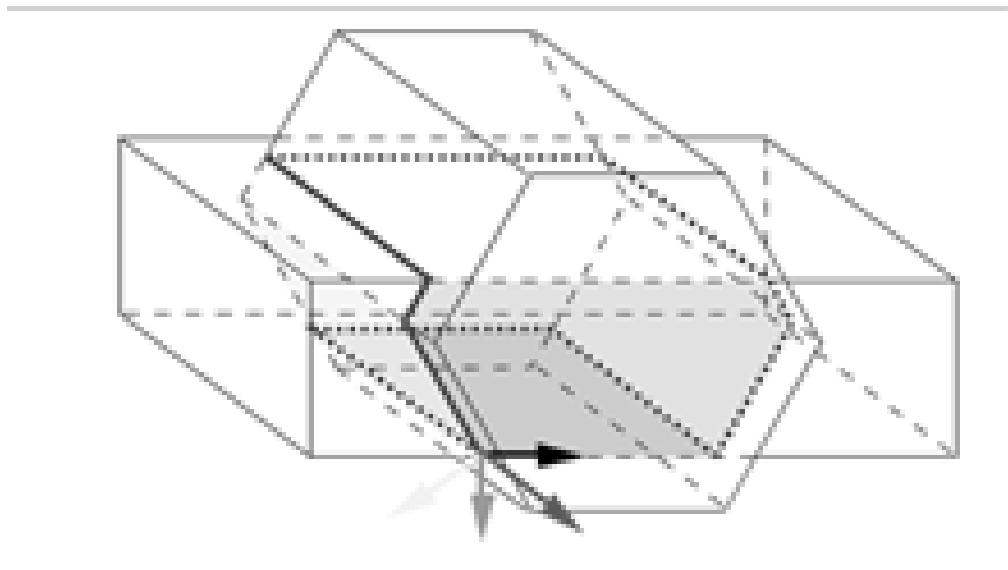
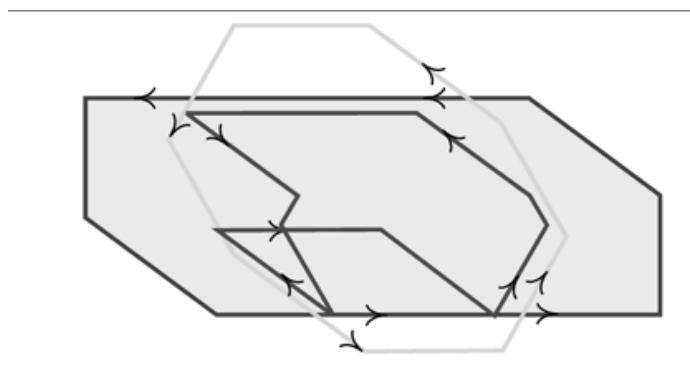
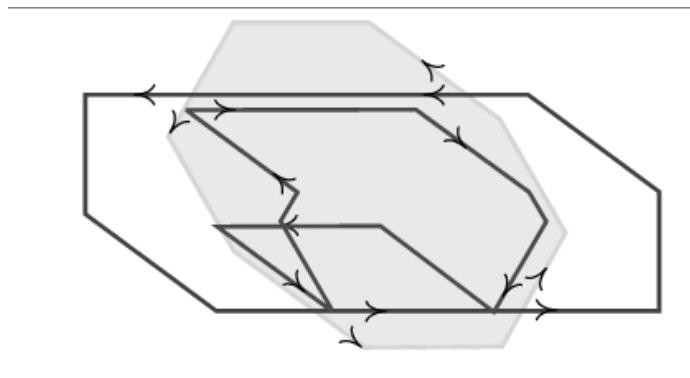


Рисунок 7 – Границы и их векторы нормалей, отмеченные одинаковым цветом. Черная стрелка принадлежит множеству V , цветные стрелки - множеству N .



a) Ориентация линии пересечения при проходе по контурному циклу параллелепипеда



b) Ориентация линии пересечения при проходе по контурному циклу шестиугольной призмы

Рисунок 8 – Ориентация линии пересечения при проходе по контурному циклу

в другой полуплоскости, то можно говорить об увеличении индекса затенения. Этап 4. Случай пересечения проекций двух контурных циклов. Напомним, что мы храним проекции в однозначном соответствии с их прообразами. То есть в любой момент времени можно найти точку на поверхности многогранника, соответствующей точке на проекции контурных циклов или линий пересечений. Как изменяется индекс затенения в точках пересечения проекций двух контурных циклов? Ответ на этот вопрос дается обычным вычислением расстояний от точек, соответствующих точке пересечения контурных циклов, на многогранниках до плоскости проектирования. Если точка, соответствующая исследуемому контуру находится дальше от плоскости проектирования, чем точка пересекаемого контура, тогда индекс затенения остается неизменным. Если точка, соответствующая исследуемому контуру находится ближе к плоскости проектирования, чем точка пересекаемого контура, тогда осуществляется следующая проверка. Ключевой момент. Пусть v_1 - вектор обхода проекции исследуемого контурного цикла. v_2 - вектор направления проекции пересекаемого контурного цикла. Пусть n - вектор направления светового потока. Рассмотрим тройку (v_1, v_2, n) . Если тройка (v_1, v_2, n) - правая, тогда индекс затенения для исследуемого контурного цикла увеличивается на единицу (Рисунок 8 а и б), если тройка - левая, то уменьшается на единицу.

Литература

- [1] Сazonov Bac.B. Применение вычислительной геометрии в задачах моделирования вращательного движения космических аппаратов // Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук.
- [2] JAppel A. The Notion of Quantitative Invisibility and Machine Rendering of Solids // Proc. of ACM National Conference. - Thompson Book, 1967. - pp. 387.
- [3] Chazelle B. An optimal algorithm for intersecting three-dimensional convex polyhedral // Society for Industrial and Applied Mathematics. - SIAM J.Comput.- Vol.21. - No. 4.- pp. 671-696
- [4] Bentley J. L. andOttmann T. A. Algorithms for reporting and counting geometric intersections // IEEE Transactions on Computers, 1979. -C-28 (9): 643-647, doi:10.1109/TC.1979.1675432

References

- [1] Sazonov Bac.B. Primenenie vichislitelnoi geometrii v zadachax modelirovanya vrashatelnogo cosmichescix apparatov //Dissertaciya na soiscanie uchenoi stepeni candidat
- [2] JAppel A. The Notion of Quantitative Invisibility and Machine Rendering of Solids // Proc. of ACM National Conference. - Thompson Book, 1967. - pp. 387.
- [3] Chazelle B. An optimal algorithm for intersecting three-dimensional convex polyhedral // Society for Industrial and Applied Mathematics. - SIAM J.Comput.- Vol.21. - No. 4.- pp. 671-696
- [4] Bentley J. L. andOttmann T. A. Algorithms for reporting and counting geometric intersections // IEEE Transactions on Computers, 1979. -C-28 (9): 643-647, doi:10.1109/TC.1979.1675432

УДК 517.52

А.Б. Муканов

Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Казахстан, Астана
E-mail: mukanov.askhat@gmail.com

Об одном примере к теореме Боаса

В этой работе изучается связь между суммируемостью заданной числовой последовательности, стремящейся к нулю, и интегрируемостью соответствующего ей тригонометрического ряда. Точнее, в статье рассматривается вопрос об обобщении теоремы Боаса о коэффициентах Фурье монотонных функций. Согласно указанной теореме норма монотонной функции в пространстве Лоренца $L_{p,q}[0, 1]$, $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ эквивалентна норме последовательности коэффициентов Фурье функции в дискретном пространстве Лоренца $l_{p',q}$, где $p' = \frac{p}{p-1}$. Для заданного $0 < \alpha \leq 1$ введен класс α -монотонных функций, содержащий класс абсолютно непрерывных, невозрастающих функций. α -монотонная функция определяется как функция, обладающая абсолютно непрерывным, невозрастающим правосторонним дробным интегралом Римана-Лиувилля порядка $1 - \alpha$. Вопрос о возможности обобщения теоремы Боаса на класс α -монотонных функций представляет для нас большой интерес. В работе построен пример α -монотонной функции, который показывает, что теорема Боаса неверна для α -монотонных функций в случае $p < \frac{1}{\alpha}$. Из этого вытекает, что теорему Боаса для α -монотонных функций стоит исследовать в случае $p \geq \frac{1}{\alpha}$.

Ключевые слова: коэффициенты Фурье, монотонные функции α -монотонные функции, пространства Лоренца, дробный интеграл.

A.B. Mukanov
On example to the Boas theorem

In this work we study the relation between summability properties of a sequence tending to zero and integrability properties of the corresponding trigonometric series. More precisely, in this paper is considered the problem of generalizing of Boas' theorem on the Fourier coefficients of monotone functions. According to that theorem the norm of monotone function in the Lorentz space $L_{p,q}[0, 1]$, $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ is equivalent to the norm of the Fourier coefficients of the function in the discrete Lorentz space $l_{p',q}$. We define the class of α -monotone functions ($0 < \alpha \leq 1$) that contains the class of non-increasing absolutely continuous functions. The α -monotone function is defined as function which has non-increasing absolutely continuous right-side fractional Riemann-Liouville integral of order $1 - \alpha$. A problem of generalizing of Boas' theorem to the class of α -monotone function is very interesting for us. We give an example of α -monotone function which show impossibility of Boas' theorem in the case $p < \frac{1}{\alpha}$. It follows that Boas' theorem for the α -monotone functions should be investigated in the case $p \geq \frac{1}{\alpha}$.

Key words: Fourier coefficients, monotone functions α -monotone functions, Lorentz spaces, fractional integral.

А.Б. Муканов
Боас теоремасына мысал туралы

Бұл жұмыста нөлге үмтұлатын берілген санды тізбектің қосылануы қасиеттерімен оған сәйкес тригонометриялық қатардың интегралдану қасиеттерімен арасындағы байланыс зерттеледі. Нақты айтқанда бұл жұмыста монотондық функциялардың Фурье коэффициенттері туралы Боас теоремасының жалпылану есебі қарастырылады. Айтылған теорема бойынша монотондық функцияның Лорентц кеңістігінде $L_{p,q}[0, 1]$, $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ нормасы функцияның Фурье коэффициенттерінің дискреттік кеңістігіндегі $l_{p',q}$ нормасына эквивалентті.

Абсолютті үзіліссіз өспейтін функцияларды қамтитын α -монотонды ($0 < \alpha \leq 1$) функциялардың классы енгізілген. α -монотонды функция Риман-Лиувилль он жақты бөлшекті интегралы абсолютті үзіліссіз өспейтін функциясы ретінде анықталады. Боас теоремасын α -монотонды функциялар үшін жалпылануы есебі біз үшін қызықты болып табылады. Осы жұмыста Боас теоремасы α -монотонды функциялар үшін $p < \frac{1}{\alpha}$ жағдайында орындалмайтының көрсететін α -монотонды функцияның мысалы курастырылған. Сондыктан Боас теоремасы α -монотонды функциялар үшін $p \geq \frac{1}{\alpha}$ жағдайында зерттелу керек.

Түйін сөздер: Фурье коэффициенттері, монотонды функциялар, α -монотонды функциялар, Лоренц кеңістіктері, бөлшекті интеграл.

Введение

В этой работе мы изучаем связь между суммируемостью заданной последовательности $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ и интегрируемостью соответствующего тригонометрического ряда

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos \pi kx, \quad x \in [0, 1].$$

Одним из первых результатов, описывающих подобные связи является известная теорема Харди и Литтлвуда ([1], [2, XII, §6], [3, §6]).

Теорема А Пусть $1 < p < \infty$ и $a = \{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ — невозрастающая, неотрицательная последовательность, т.ч. $a_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Тогда

$$\|f\|_{L_p(0,1)} \sim \left(\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^{p-2} a_k^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Всюду в работе через C будем обозначать положительную константу, различную в различных ситуациях. Кроме того, выражение $T \sim S$ означает, что существует такая C , что выполнены неравенства $\frac{1}{C}S \leq T \leq CS$. Существует большое количество обобщений теоремы А. В частности, Й. Загер [4] заменил условие монотонности последовательности на квазимонотонность. В работах [5] Е.Д. Нурсултанов, [6] и [7] М.И. Дьяченко и С.Ю. Тихонов обобщали этот результат ослабив условие монотонности. Также М.И. Дьяченко в работе [8] доказал похожий результат для кусочно-монотонных функций многих переменных. Двойственным результатом к теореме А является следующая теорема Харди и Литтлвуда ([2, XII, §6], [3, §6]).

Теорема В Пусть $1 < p < \infty$, $f(x)$ — неотрицательная, невозрастающая интегрируемая функция на $[0, 1]$. Тогда верно следующее соотношение

$$\|a\|_{l_p} \sim \left(\int_0^1 x^{p-2} (f(x))^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Похожие проблемы рассматривались и в терминах пространств Лоренца. Приведем определения указанных пространств. Пусть μ — мера Лебега на $[0, 1]$, f — μ -измеримая функция на $[0, 1]$, тогда через f^* мы обозначим невозрастающую перестановку функции f , т.е.,

$$f^*(t) = \inf \{ \sigma : \mu\{x \in [0, 1] : |f(x)| > \sigma\} \leq t \}.$$

Определение 1 Пусть $0 < p \leq \infty$ и $0 < q \leq \infty$. Тогда пространством Лоренца $L_{p,q}$ называется множество всех μ -измеримых функций, для которых конечен следующий функционал

$$\|f\|_{L_{p,q}} := \begin{cases} \left(\int_0^1 \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} & \text{для } 0 < p < \infty \text{ и } 0 < q < \infty, \\ \sup_t t^{\frac{1}{p}} f^*(t) & \text{для } 0 < p \leq \infty \text{ и } q = \infty. \end{cases}$$

Через $l_{p,q}$ будем обозначать аналогично определенные пространства последовательностей. Аналоги теоремы А для пространств Лоренца были доказаны Й. Загером [4], М.И. Дьяченко и Е.Д. Нурсултановым [9] (см. также [10]) и Б. Бутоном [11]. В работе [9] авторы рассматривали тригонометрические ряды с α -монотонными коэффициентами. Данные ряды ввел М.И. Дьяченко в работе [12] (см. также [13]). Соответствующий аналог теоремы В для пространств Лоренца был сформулирован в книге Р.П. Боаса [3, с. 36] и был доказан в [14]. **Теорема С** Пусть $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ и $f(x)$ — неотрицательная, невозрастающая, интегрируемая функция на $[0, 1]$. Тогда

$$\|a\|_{l_{p,q}} \sim \|f\|_{L_{p',q}},$$

где $p' = \frac{p}{p-1}$. Похожий результат был доказан в работе [15] для обобщенно монотонных функций из обобщенных пространств Лоренца. Нам потребуется следующее определение

Определение 2 Пусть $f(x) \in L_1(0, 1)$, $0 < \alpha < 1$. Тогда выражение

$$I^\alpha f(x) = (I_{1-}^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^1 \frac{f(t)}{(t-x)^{1-\alpha}} dt \quad \text{для } x < 1.$$

называется дробным интегралом Римана-Лиувилля (см. [16]) функции f порядка α .

Замечание 1 Если $\alpha = 0$, тогда под дробным интегралом I^0 будем понимать: $I^0 f(x) := f(x)$.

Определение 3 Пусть $0 < \alpha \leq 1$. Будем говорить, что неотрицательная функция f α -монотонна (или принадлежит классу M_α), если $I^{1-\alpha} f(x)$ является невозрастающей, абсолютно непрерывной функцией на $[0, 1]$.

Интересным представляется вопрос: сохранится ли утверждение теоремы С если заменить в ней условие монотонности на условие α -монотонности? В данной работе мы покажем, что, вообще говоря, это не так. Имеет место следующая

Теорема 1 Пусть $\alpha \in (0, 1)$ и $1 < p < \frac{1}{\alpha}$. Тогда существует функция $f \in M_\alpha$ такая, что

$$\left(\int_0^1 \left(t^{\frac{1}{p'}} \bar{f}(t) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

и $a = \{a_n\}_{n=0}^\infty \notin l_{p,q}$, где

$$a_n(f) = \int_0^1 f(x) \cos \pi n x dx.$$

Вспомогательные утверждения

Лемма 1 Пусть $\beta \in (0, 1)$, $y \in (0, 1)$ и

$$a_n = \int_0^y \frac{\cos \pi n x}{x^\beta} dx, \quad b_n = \int_0^y \frac{\sin \pi n x}{x^\beta} dx$$

для $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$a_n \sim \frac{C_1(\beta)}{n^{1-\beta}}, \quad b_n \sim \frac{C_2(\beta)}{n^{1-\beta}} \quad \text{as } n \rightarrow +\infty,$$

где $C_1(\beta), C_2(\beta) \neq 0$.

Доказательство. Мы докажем утверждение леммы для последовательности a_n . Доказательство для последовательности b_n аналогично. Заменяя nx на t получим

$$a_n = n^{\beta-1} \int_0^{ny} \frac{\cos \pi t}{t^\beta} dt.$$

Применим известную формулу

$$\int_0^\infty \frac{\cos \pi t}{t^\beta} dt = \frac{\pi^\beta}{2\Gamma(\beta) \cos \frac{\pi\beta}{2}},$$

и положим $C_1(\beta) := \frac{\pi^\beta}{2\Gamma(\beta) \cos \frac{\pi\beta}{2}}$.

Лемма 2 Пусть $\alpha \in (0, 1)$ и функция $g(t) \in L(0, 1)$ такая, что $\text{supp } g \subseteq [\frac{1}{2}, 1]$. Пусть также $f(x) = \int_x^1 \frac{g(t)}{(t-x)^\alpha} dt$ и $a_n(f) = \int_0^1 f(x) \cos \pi n x dx$. Тогда

$$a_n(f) = a_n(g)\gamma_n + b_n(g)\delta_n + \xi_n + \zeta_n,$$

где $\gamma_n \sim \frac{C_1(\alpha)}{n^{1-\alpha}}$, $\delta_n \sim \frac{C_2(\alpha)}{n^{1-\alpha}}$ as $n \rightarrow \infty$, and $|\xi_n + \zeta_n| \leq \frac{C(g,\alpha)}{n}$.

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \int_0^1 \cos \pi n x \int_x^1 \frac{g(t)}{(t-x)^\alpha} dt dx \\ &= \int_0^1 g(t) \int_0^t \frac{\cos \pi n x}{(t-x)^\alpha} dx dt = \int_0^1 g(t) \int_0^t \frac{\cos \pi n(t-y)}{y^\alpha} dy dt \\ &= \int_0^1 g(t) \cos \pi n t \int_0^t \frac{\cos \pi n y}{y^\alpha} dy dt + \int_0^1 g(t) \sin \pi n t \int_0^t \frac{\sin \pi n y}{y^\alpha} dy dt \\ &= \int_0^1 g(t) \cos \pi n t \int_0^1 \frac{\cos \pi n y}{y^\alpha} dy dt - \int_0^1 g(t) \cos \pi n t \int_t^1 \frac{\cos \pi n y}{y^\alpha} dy dt \\ &\quad + \int_0^1 g(t) \sin \pi n t \int_0^1 \frac{\sin \pi n y}{y^\alpha} dy dt - \int_0^1 g(t) \sin \pi n t \int_t^1 \frac{\sin \pi n y}{y^\alpha} dy dt \\ &= a_n(g)\gamma_n + \xi_n + b_n(g)\delta_n + \zeta_n. \end{aligned}$$

Из леммы 1 получим $\gamma_n \sim \frac{C_1(\alpha)}{n^{1-\alpha}}$, $\delta_n \sim \frac{C_2(\alpha)}{n^{1-\alpha}}$ при $n \rightarrow \infty$. Теперь так как $\text{supp } g \subseteq [\frac{1}{2}, 1]$, то

$$\begin{aligned} |\xi_n| &= \left| \int_{\frac{1}{2}}^1 g(t) \cos \pi n t \int_t^1 \frac{\cos \pi n y}{y^\alpha} dy dt \right| \leq \int_{\frac{1}{2}}^1 |g(t)| \left| \int_t^1 \frac{\cos \pi n y}{y^\alpha} dy \right| dt \\ &\leq \frac{C(\alpha)}{n} \int_{\frac{1}{2}}^1 |g(t)| dt = \frac{C(g, \alpha)}{n}. \end{aligned}$$

Аналогично неравенство верно и для последовательности ζ_n . Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 1

Обозначим через $g(x)$ 1-периодическую функцию

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{для } x \in [0, \frac{1}{2}], \\ \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^{1-\delta}} & \text{для } x \in (\frac{1}{2}, 1), \end{cases}$$

где $\delta \in (0, \frac{1}{p} - \alpha)$ подберем позднее. Положим $f(x) = \int_x^1 \frac{g(t)}{(t-x)^{1-\alpha}} dt$ где $x \in [0, 1]$. Тогда используя неотрицательность $g(t)$ и следующее равенство

$$\begin{aligned} \int_u^1 \frac{f(x)}{(x-u)^\alpha} dx &= \int_u^1 g(t) \int_u^t \frac{dx}{(x-u)^\alpha (t-x)^{1-\alpha}} dt \\ &= \int_u^1 g(t) \int_0^1 \frac{dv}{v^\alpha (1-v)^{1-\alpha}} dt = C(\alpha) \int_u^1 g(t) dt, \end{aligned}$$

мы заключим, что $I^{1-\alpha} f(x)$ — неотрицательная функция. Также из [16, с. 43, Т. 2.3.] мы получим, что $I^{1-\alpha} f(x)$ — абсолютно непрерывная функция. Значит, $f(x) \in M_\alpha$. Из леммы 2 следует, что $a_n(f) = a_n(g)\gamma_n + b_n(g)\delta_n + \xi_n + \zeta_n$, где $\gamma_n \sim \frac{C_1(\alpha)}{n^\alpha}$, $\delta_n \sim \frac{C_2(\alpha)}{n^\alpha}$ при $n \rightarrow \infty$, и $|\xi_n + \zeta_n| \leq \frac{C(g, \alpha)}{n}$.

Теперь применяя лемму 1, имеем

$$\begin{aligned} a_n(g) &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \cos \pi n t \frac{dt}{(t-\frac{1}{2})^{1-\delta}} = \int_0^{\frac{1}{2}} \cos \pi n \left(u + \frac{1}{2}\right) \frac{du}{u^{1-\delta}} \\ &= \cos \frac{\pi n}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\cos \pi n u}{u^{1-\delta}} du - \sin \frac{\pi n}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin \pi n u}{u^{1-\delta}} du \sim \frac{C(\alpha)}{n^\delta} \end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$.

Следовательно, если $\alpha + \delta < 1$, тогда $|a_n(f)| \geq \frac{C}{n^{\alpha+\delta}}$ для достаточно больших n . Теперь мы выберем $\delta \in (0, 1)$ так чтобы $p < \frac{1}{\alpha+\delta}$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{\frac{1}{p}} |a_n(f)| \right)^q \frac{1}{n} \geq C(p, q, \alpha) \sum_{n=n_0}^{\infty} n^{q(\frac{1}{p}-\alpha-\delta)-1} \geq C(p, q, \alpha) \sum_{n=n_0}^{\infty} n^{-1} = \infty,$$

т.е., $\{a_n(f)\} \notin l_{pq}$.

С другой стороны $f(x)$ — ограниченная функция. Действительно, пусть $0 \leq x \leq \frac{1}{4}$ тогда

$$0 \leq f(x) = \int_x^1 \frac{g(t)}{(t-x)^{1-\alpha}} dt \leq \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{g(t)}{(t-x)^{1-\alpha}} dt \leq 4^{1-\alpha} \int_{\frac{1}{2}}^1 g(t) dt = C(\alpha, g).$$

Значит неравенство

$$f^*(t) \leq C(g, \alpha),$$

выполняется для всех $t \in [0, 1]$. Следовательно,

$$\left(\int_0^1 \left(t^{\frac{1}{p'}} f^*(t) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \leq C(g, \alpha) \left(\int_0^1 t^{\frac{q}{p'} - 1} dt \right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

Доказательство теоремы 1 завершено.

Заключение

Из теоремы 1 следует, что теорема С если и будет верна для α -монотонных функций, то только при $p \geq \frac{1}{\alpha}$.

Литература

- [1] Hardy G.H. and Littlewood J.E. Notes on the theory of series (XIII): Some new properties of Fourier constants // J. Lond. Math. Soc. - 1931. - S1-6, 1. - P. 3-9.
- [2] Зигмунд А. Тригонометрические ряды, Т. 1,2 - Москва:Мир, 1965.
- [3] Boas R.P. Jr. Integrability theorems for trigonometric transforms - New-York: Springer, 1967.
- [4] Sagher Y. An application of interpolation theory to Fourier series // Stud. Math. - 1972. - 41. - P. 169-181.
- [5] Nursultanov E.D. Interpolation properties of some anisotropic spaces and Hardy-Littlewood type inequalities // East J. Approx. - 1998. - V. 4, 2. - P. 243-275.
- [6] Tikhonov S.Yu. Trigonometric series with general monotone coefficients // J. Math. Anal. Appl. - 2007. - V. 326, 1. - P. 721-735.
- [7] Dyachenko M., S.Tikhonov Integrability and continuity of functions represented by trigonometric series: coefficients criteria // Stud. Math. - 2009. - V. 193, 3. - P. 285-306.
- [8] Дьяченко М.И. Кусочно монотонные функции многих переменных и теорема Харди-Литтлвуда // Изв. АН СССР. Сер. матем. - 1991. - Т. 55, 6. - С. 1156-1170.
- [9] Дьяченко М.И., Нурсултанов Е.Д. Теорема Харди-Литтлвуда для тригонометрических рядов с α -монотонными коэффициентами // Матем. сб. - 2009. - Т. 200, 11. - С. 45-60.
- [10] Nursultanov E., Tikhonov S. Net spaces and boundedness of integral operators // J. Geom. Anal. - 2011. - V. 21, 4. - P. 950-981.
- [11] Brooton B. General monotone sequences and trigonometric series // Math. Nachr. - 2014. - V. 287, Is. 5-6. - P. 518-529.
- [12] Дьяченко М.И. Тригонометрические ряды с обобщенно-монотонными коэффициентами // Изв. вузов. Матем.- 1986. - 7. - С. 39-50.
- [13] Дьяченко М.И. Теорема Харди-Литтлвуда для тригонометрических рядов с обобщенно-монотонными коэффициентами // Изв. вузов. Матем. - 2008. - 5. - С. 38-47.
- [14] Sagher Y. Some remarks on interpolation of operators and Fourier coefficients // Stud. Math. - 1972. - 44. - P. 239-252.

- [15] Копежанова А.Н., Нұрсұлтанов Е.Д., Перссон Л.-Е. О неравенствах для преобразования Фурье функций из пространств Лоренца // Матем. заметки. - 2011. - Т. 90, 5. - С. 785-788.
- [16] Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения - Минск: Наука и техника, 1987. - 688 с.

References

- [1] Hardy G.H. and Littlewood J.E. Notes on the theory of series (XIII): Some new properties of Fourier constants // J. Lond. Math. Soc. - 1931. - S1-6, 1. - P. 3-9.
- [2] Zygmund A. Trigonometricheskie ryady, T. 1,2 - Moskva:Mir, 1965.
- [3] Boas R.P. Jr. Integrability theorems for trigonometric transforms - New-York: Springer, 1967. -
- [4] Sagher Y. An application of interpolation theory to Fourier series // Stud. Math. - 1972. - 41. - P. 169-181.
- [5] Nursultanov E.D. Interpolation properties of some anisotropic spaces and Hardy-Littlewood type inequalities // East J. Approx. - 1998. - V. 4, 2. - P. 243-275.
- [6] Tikhonov S.Yu. Trigonometric series with general monotone coefficients // J. Math. Anal. Appl. - 2007. - V. 326, 1. - P. 721-735.
- [7] Dyachenko M., Tikhonov S. Integrability and continuity of functions represented by trigonometric series: coefficients criteria // Stud. Math. - 2009. - V. 193, 3. - P. 285-306.
- [8] Dyachenko M.I. Kusoshno monotonnye funcii mnogikh peremenniy i teorema Hardy-Littlewooda // Izv. AN SSSR. Ser. matem. - 1991. - T. 55, 6. - C. 1156-1170.
- [9] Dyachenko M.I., Nursultanov E.D. Teorema Hardy-Littlewooda dlya trigonometricheskikh ryadov s α -monotonnymi koeficientami // Matem. sb. - 2009. - T. 200, 11. - C. 45-60.
- [10] Nursultanov E., Tikhonov S. Net spaces and boundedness of integral operators // J. Geom. Anal. - 2011. - V. 21, 4. - P. 950-981.
- [11] Booton B. General monotone sequences and trigonometric series // Math. Nachr. - 2014. - V. 287, Is. 5-6. - P. 518-529.
- [12] Dyachenko M.I. Trigonometricheskie ryady s obobshenno-monotonnymi koeficientami // Izv. vuzov. Matem.- 1986. - 7. - P. 39-50.
- [13] Dyachenko M.I. Teorema Hardy-Littlewooda dlya trigonometricheskikh ryadov s obobshenno-monotonnymi koeficientami // Izv. vuzov. Matem. - 2008. - 5. - P. 38-47.
- [14] Sagher Y. Some remarks on interpolation of operators and Fourier coefficients // Stud. Math. - 1972. - o 44. - P. 239-252.
- [15] Kopezhanova A.N., Nursultanov E.D., Persson L.-E. O neravenstvah dlya preobrazovaniy Fourier funcii iz prostranstv Lorentza // Matem. zametki. - 2011. - Т. 90, 5. - P. 785-788.
- [16] Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ih prilozheniya - Minsk: Nauka i technika, 1987. - 688 p.

УДК 517.956

Р.К. Керімбаев *, Ж.А. Ахметова **

Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, механика-математика факультеті, Іргелі
математика кафедрасы, Қазақстан Республикасы, қ. Алматы

E-mail: * ker_im@mail.ru; ** ja_mila@list.ru

Керіленетін көпмүшелер

Мақалада якобиан проблемасының бір өлшемді аналогы қарастырылады. Көпмүшелер ра-
ционал сандар ерісінде алгебра болып таблатын коммутативті сақинада қарастырылады.
Көпмүшелердің суперпозиция амалы бойынша керілену жағдайы келтірілген. Туындысы
керіленген жағдайда гана көпмүше суперпозиция амалы бойынша керіленетін көрсетілген
Сонымен бірге суперпозиция амалы бойынша кері көпмүшені табу алгоритмі келтірілген.
Негізінде, якобиан проблемасы өріс үстіндегі қарастырылады. Сонымен бірге, харakterисти-
касы нөлден үлкен өрістерде бұл проблема орындалмайды. Бұл жағдайда якобиан пробле-
масының шешімі басқаша болады. Харakterистикасы нөл өріс үстіндегі бір өлшемді якобиан
проблемасының шешілуі оңай. Бұл кезде тек бірінші дәрежелі көпмүшелердің суперпозиция
амалы бойынша кері көпмүшелері бар болады. Дәлірек айтсақ, x айнымалыларының коэф-
фициенттері нөлден өзгеше болуы керек те, ал қалған бос емес коэффициенттері нөлге тең
болуы керек. Қазіргі уақытта якобиан проблемасы екі және одан көп айнымалы көпмүшелер
сақинасы үшін шешілмеген.

Негізгі нәтіже осы проблеманың шешілуі сзызықты және үшінші дәрежелі біртекті компо-
ненталары бар көпмүшелер үшін шешүге әкеліп тіреледі. Келлер көпмүшелерінен құралған
полиномиалды бейнелеу инъективті болған жағдайда якобиан проблемасы шешілетіні бел-
гілі. Бұл жағдайда якобиан проблемасы шешілуі үшін негізгі өріс алгебралық түйік болуы
керек.

Түйін сөздер: Келлер эндоморфизмі, автоморфизм, якобиан.

R.K. Kerimbayev, Zh.A. Akhmetova
Reversible polynomials

In this paper we consider a one-dimensional analogue of Jacobian Conjecture. Here polynomials are considered over commutative ring. We have shown that the polynomial is reversible with respect to superposition if and only if its derivative is reversible in the ring of polynomials with respect to usual operation.

Usually Jacobian Conjecture is considered over a field. When the characteristic is positive, there exist a counter example to Jacobian Conjecture. Over the field of zero characteristic, analogue of Jacobian Conjecture is solved easily. In this case Jacobian Conjecture holds for polynomials of the first order, to be more precise, x coefficient must be different from zero, but other non-free coefficients must be equal to zero. Currently Jacobian Conjecture for polynomials of two and more variables is still open.

The main result is that we have reduced the Jacobian Conjecture to the Jacobian Conjecture for polynomials with components of linear or third degree. For Keller polynomial mappings Jacobian Problem is reduced to Injection of polynomial mappings. In this case in order to solve the Jacobian Conjecture, the main field is required to be algebraically closed.

Key words: Keller endomorphism, automorphism, jacobian.

Р.К. Керимбаев, Ж.А. Ахметова
Обратимые многочлены

В данной статье рассматривается одномерный аналог проблемы якобиана. Здесь многочлены рассматриваются над коммутативным кольцом являющимся алгеброй над полем рациональных чисел. Приведено условие, когда многочлен обратим относительно операции суперпозиции. Показано, что многочлен обратим относительно операции суперпозиции тогда и только тогда, когда его производная обратима в кольце многочленов относительно обычной операции.

Обычно, проблема якобиана рассматривается над полем. Когда характеристика поля положительна, есть контрпример к проблеме якобиана. Над полем характеристики ноль одномерный аналог проблемы якобиана решается легко. В этом случае проблема якобиана верна для многочленов первой степени, точнее коэффициент при x должен быть отличен от нуля, а остальные несвободные коэффициенты равны нулю. Данное время проблема якобиана для многочленов от двух или более переменных не решена.

Основной результат состоит в том, что решение проблемы якобиана сведено к решению проблемы якобиана для многочленов с компонентами линейной и кубической степени. Для келлеровых полиномиальных отображений решение проблемы якобиана равносильно инъективности полиномиальных отображений. В этом случае для решения проблемы якобиана необходимо, чтобы основное поле было алгебраически замкнутый.

Ключевые слова: Эндоморфизм Келлера, автоморфизм, якобиан.

Негізгі нәтиже

$K - Q$ - алгебра болатын коммутативті сақина болсын. $K[x]$ – көпмүшелер сақинасы. $f(x) \in K[x]$ – осы сақинада берілген қандайда бір көпмүшесі. Егер $f(x) \cdot g(x) = 1$ болатын $g(x) \in K[x]$ көпмүшесі табылса, онда $g(x) = f(x)^{-1}$ деп белгілеп $g(x)$ көпмүшесін $f(x)$ көпмүшесіне $K[x]$ сақинасындағы кері көпмүшесі деп атайды. Егер $f(h(x)) = x = h(f(x))$ болатын $h(x) \in K[x]$ көпмүшесі табылса, онда $h(x) = f^{-1}(x)$ деп белгілеп, оны $f(x)$ көпмүшесінің суперпозиция бойынша кері көпмүшесі деп атайды. Келесі тұжырым көшпілікке белгілі.

Тұжырым. $f(x)$ көпмүшесі $K[x]$ сақинасында керіленуі үшін оның еркін коэффициенті K сақинасында керіленіп, ал қалған коэффициенттері K сақинасында нильпотенетті болуы қажетті және жеткілікті.

Тұжырымың дәлелі Атья-Макдональд [1] кітабында келтірілген.

Теорема. $f(x) \in K[x]$ көпмүшесінің суперпозиция бойынша кері көпмүшесі бар болуы үшін оның $f'(x)$ туындысы $K[x]$ сақинасында керіленуі қажетті және жеткілікті.

Дәлелі. Қажеттілік. $f^{-1}(x)$ көпмүшесі бар болсын. Онда $f^{-1}(f(x)) = x$ теңдігін туындылай отырып $f^{-1}(f(x))' \cdot f'(x) = 1$ теңдігін аламыз. Яғни $f'(x)$ көпмүшесі $K[x]$ сақинасында керіленеді.

Жеткіліктілік. Енді $f'(x)^{-1}$ көпмүшесі бар болсын дейік. Онда $f(x)$ көпмүшесі $K[x]$ сақинасында базис екенін көрсетеміз. Шынында да, $P(x) \in K[x]$ көпмүшесі $P(f(x)) = 0$ теңдігін қанағаттандыратын дәрежелі ең кіші көпмүше болсын. Олай болса, $P'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$ болады. $f'(x)^{-1}$ бар болғандықтан $P'(f(x)) = 0$ болады. Бірақ $\deg P'(x) < \deg P(x)$ болғандықтан $P'(x) \equiv 0$. Ендеше $P(x) \equiv \text{const}$. Қайшылық. Енді $x \in K[f(x)]$ екенін көрсетеміз: $f(x) = x + ax^2 + bx^3 + \dots + cx^n$ болсын. $f'(x)^{-1}$ бар болғандықтан, тұжырым бойынша, a, b, \dots, c коэффициенттері K сақинасында нильпотенетті болады. Сонда

$$x = f(x) - ax^2 - bx^3 - \dots - cx^n$$

деп алып x –тің орнына қайтадан осы өрнекті қойып келесі тендеуі аламыз.

$$\begin{aligned} x &= f(x) - a(f(x) - ax^2 - bx^3 - \dots - cx^n)^2 - \\ &\quad - b(f(x) - ax^2 - bx^3 - \dots - cx^n)^3 - \dots \\ &\quad \dots - c(f(x) - ax^2 - bx^3 - \dots - cx^n)^n = \\ &= f(x) - af(x)^2 - bf(x)^3 - \dots - cf(x)^n - h(x). \end{aligned}$$

$h(x)$ көпмүшесінің коэффициенттерінің нильпотентті индекстері төмендейді. Осы итерацияны жалғастыра отырып, біз, ең соңында тек қана $f(x)$ көпмүшесіне байланысты көпмүше аламыз. Яғни $x \in K[f(x)]$.

Сонымен, кез келген $g(x) \in K[x]$ көпмүшесі үшін $g(x) = h(f(x))$ турінде болатын жалғыз ғана $h(x) \in K[x]$ көпмүшесі табылады. Яғни $f(x)$ көпмүшесі $K[x]$ сақинасында базис болады. Енді $f^{-1}(x)$ көпмүшесін табу үшін келесі алгоритмді қолданамыз.

Кері көпмүшени табу алгоритмі.

- 1) $f'(x)$ көпмүшесін табамыз;
- 2) $f'(x)^{-1}$ көпмүшесін табамыз;
- 3) $f'(x)^{-1} = g'(f(x))$ болатында $g' \in K[x]$ көпмүшесін табамыз. Сонда
- 4) $f^{-1}(x) = g(x) = \int g'(x)dx, g(0) = 0$.

Шынымен де, $f^{-1}(f(x)) = g(f(x))$ болады.

Екі жағын туындылап, 3) бойынша

$$(f^{-1}(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$$

екенін көреміз. Оны интегралдан

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

екенін көреміз. Теорема дәлелденді.

Мысал

Біз енді $K[x]$ сақинасындағы $f(x) = x + ax^n$ көпмүшесі үшін $f^{-1}(x)$ бар болған жағдайда оның формуласын есептеп шығарамыз. Ол үшін $f(x)^{-1}$ бар болуы керек, яғни a нильпотентті болуы керек.

Сөйлем. $K[x]$ сақинасында $f(x) = x + ax^n$ көпмүшесі берілсін, ал $a \in K$ нильпотентті индексі m –ге тең болсын. Сонда $f(x) = x + ax^n$ көпмүшесінің суперпозиция бойынша кері $f^{-1}(x)$ көпмүшесі келесі формуламен есептелінеді:

$$\begin{aligned} f^{-1}(x) &= x - ax^n + \frac{n}{1} \binom{2n-1}{0} a^2 x^{2n-1} - \\ &\quad - \frac{n}{2} \binom{3n-1}{1} a^3 x^{3n-2} + \frac{n}{3} \binom{4n-1}{2} a^4 x^{4n-3} + \\ &(-1)^i \frac{n}{i-1} \binom{in-1}{i-2} a^i x^{in-i+1} + \dots + (-1)^{m-1} \frac{n}{m-2} \binom{(m-1)n-1}{m-3} a^{m-1} x^{(m-1)(n-1)+1}. \end{aligned}$$

Бұл сөйлемнің дәлелі келесі леммага негізделеді.

Лемма. а) $i \in N$ натурал саны үшін $0 \leq k \leq i-2$ болғанда $S(k, i) = \sum_{j=1}^i (-1)^j \binom{i-1}{j-1} j^k$ қосындысы нөлге тең.

б) $i \in N$ натурал саны үшін $0 \leq k \leq i-3$ болғанда $R(k, i) = \sum_{j=2}^i (-1)^j \binom{i-2}{j-2} j^k$ қосындысы нөлге тең.

с) $S(k, i)$ және $R(k, i)$ қосындыларының арасында келесі байланыс бар:

$$S(k, i+1) - S(k, i) = R(k, i+1).$$

Дәлелі. с) жағдайынан бастайық

$$\begin{aligned} S(k, i+1) - S(k, i) &= \sum_{j=1}^{i+1} (-1)^j \binom{i}{j-1} j^k - \sum_{j=1}^i (-1)^j \binom{i-1}{j-1} j^k = \\ &= \sum_{j=2}^i (-1)^j \binom{i-1}{j-2} j^k + (-1)^{i+1} \binom{i-1}{i-1} (i+1)^k = \\ &= \sum_{j=2}^{i+1} (-1)^j \binom{i-1}{j-2} j^k = R(k, i+1). \end{aligned}$$

с) жағдайы дәлелденді. а) мен б) жағдайларын қатар дәлелдейміз. Дәлелді k бойынша индукциямен жүргіземіз. $k := 0$ болғанда $S(0, i) = 0 = R(0, i)$ екені белгілі. $k := k$ үшін $S(k, i) = 0$ деп алсақ, онда с) жағдайын пайдаланып $k := k$ үшін $R(k, i) = 0$ екенін көреміз. Енді $S(k+1, i) = 0$ екенін көрсетейік.

$$\begin{aligned} S(k+1, i) &= \sum_{j=1}^i (-1)^j \binom{i-1}{j-1} j^{k+1} = \sum_{j=1}^i (-1)^j \binom{i-1}{j-1} j^k + \\ &+ \sum_{j=1}^i (-1)^j \binom{i-1}{j-1} (j-1) j^k = S(k, i) + (i-1)R(k, i) = 0. \end{aligned}$$

Сонымен, Леммы толық дәлелденді.

Енді Сөйлемнің дәлелін келтірелік. Ол үшін бізге $f^{-1}(f(x)) = x = f(f^{-1}(x))$ екенін көрсетсек жеткілікті. Біз $f^{-1}(f(x)) = x$ екенін көрсетеміз. Сонымен Сөйлемдегі $f^{-1}(x)$ көпмүшесінің x аргументіне $f(x) = x + ax^n$ көпмүшесін қойып $f^{-1}(f(x))$ көпмүшесінің мүшелерінің жалпы формуласын аламыз.

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) &= x + ax^n - a(x + ax^n)^n + \frac{n}{1} \binom{2n+1}{0} a^2 (x + ax^n)^{2n-1} - \\ &- \frac{n}{2} \binom{3n-1}{1} a^3 (x + ax^n)^{3n-2} + \frac{n}{3} \binom{4n-1}{2} a^4 (x + ax^n)^{4n-3} + \dots \\ &\dots + \frac{(-1)^i n}{i-1} a^i (x + ax^n)^{in-i+1} + \dots + \end{aligned}$$

$$\dots + \frac{(-1)^{m-1}n}{m-2} \binom{(m-1)n-1}{m-3} a^{m-1} (x+ax^n)^{(n-1)(m-1)+1}.$$

Осы өрнекте біз $a^i x^{in-i+1}$ мүшесінің коэффициентін есептейміз. Ол келесіге тең:

$$\begin{aligned} & - \binom{n}{i-1} + n \binom{2n-1}{i-2} - \frac{n(3n-1)}{2} \binom{3n-2}{i-3} + \\ & + \frac{n}{3} \binom{4n-1}{2} \binom{4n-3}{i-4} + \dots + \frac{(-1)^i n}{i-1} \binom{in-1}{i-2}. \end{aligned}$$

Біздің мақсатымыз – осы коэффициенттің нөлге тең екенін көрсету. Ол үшін алғынған формуланы ашып жазамыз:

$$\begin{aligned} & - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\dots(n-i+2)}{(i-1)!} + \frac{n(2n-1)(2n-2)(2n-3)\dots(2n-i+2)}{(i-2)!} - \\ & - \frac{n(3n-1)(3n-2)(3n-3)\dots(3n-i+2)}{2 \cdot (i-3)!} + \frac{n(4n-1)(4n-2)(4n-3)\dots(4n-i+2)}{3 \cdot 2 \cdot (i-4)!} + \\ & + \dots + (-1)^i \frac{n(in-1)(in-2)(in-3)\dots(in-i+2)}{(i-1)(i-2)!}. \end{aligned}$$

Алғынған өрнекті n – нің дәрежесі бойынша жіктең, n^{k+1} дәрежесінің коэффициентін ортақ көбейткішке дейінгі дәлдікпен есептейміз, мұндағы $0 \leq k \leq i-2$.

$$-\frac{1}{(i-1)!} + \frac{2^k}{(i-2)!} - \frac{3^k}{2(i-3)!} + \frac{4^k}{3 \cdot 2 \cdot (i-4)!} + \dots + (-1)^i \frac{i^k}{(i-1)(i-2)!}.$$

Осы өрнекті $(i-1)!$ көбенйтіп, Леммадағы $S(k, i)$ қосындыны аламыз. Ол, Лемма бойынша нөлге тең. Сөйлем дәлелденді.

Салдар. $f(x) = x + ax^n$ көпмүшесі суперпозиция бойынша керіленуі үшін оның туындысы $f'(x) = 1 + nax^{n-1}$ $K[x]$ сакинасында креіленуі қажетті және жеткілікті.

Ескерту. Біз K сакинасын Q рационал сандар өрісінде алгебра болады деп есептедік. Егер K сакинасы Q - алгебра болмаса немесе K сакинасының сипаттамасы нөлден көп болса, онда біз $K[x]$ сакинасында жаңа көбейту амалын енгіземіз:

$$x^{(n)} \cdot x^{(m)} = \binom{n+m}{n} x^{n+m}, \quad x^{(n)} = \frac{x^n}{n!}.$$

Бұл жағдайда, егер $f(x) = x + ax^2 + bx^3 + \dots + cx^n$ болса, онда $f'(x) = 1 + ax + bx^2 + \dots + cx^{n-1}$ болады. Яғни a, b, \dots, c коэффициенттерінің нильпотенттігі сақталады. Берілген мысалдағы кері көпмүшенің дәрежесін біз кері көпмүшені табу алгоритмін қолдану арқылы байқадық.

Әдебиеттер

[1] Ат'я M., Макдональд И. Введение в коммутативную алгебру. М.: Мир, 1972.

References

[1] At'ja M., Makdonal'd I. Vvedenie v kommutativnuju algebru. M.: Mir, 1972.

УДК 517, 519.6, 519.8

М.Н. Кулбай *, Б.Г. Муканова, Д.К. Суйсинбаев

Казахский национальный университет имени аль-Фараби

Республика Казахстан, г. Алматы

* E-mail: makulbay@gmail.com

Численный метод решения обратной задачи для уравнения диффузии с нелокальными краевыми условиями

В настоящее время весьма активно изучаются и вызывает большой практический интерес исследования нелокальных краевых задач для параболических уравнений, из за того, что прикладные задачи механики, физики и биологии сводятся к таким уравнениям. В данной работе рассматривается одномерная обратная задача идентификации правой части для уравнения теплопроводности по финальным измерениям температуры при нелокальных краевых условиях. Задача решается методом регуляризации функционала невязки. Разработан и численно реализован метод коллокаций с регуляризатором. Разработанный метод позволил реализовать большое количество численных примеров и численно проводились расчеты для разных наборов параметров задачи, а именно, варьировали величины K – число членов в разложении, параметр регуляризации μ , а также входящие данные задачи: параметр α в граничных условиях, время наблюдений T и исследовали варианты с различным характером неизвестной функции $f(x)$. В зависимости от характера правой части, в ряде примеров удалось восстановить функции источника с точностью, близкой к компьютерной. Быстро осциллирующие и разрывные функции также восстанавливались удовлетворительной точностью.

Ключевые слова: обратная задача, уравнение теплопроводности, нелокальное граничное условие, спектральный метод, минимизация функционала невязки, метод коллокаций.

M.N. Kulbay, B.G. Mukanova, D.K. Suisinbayev

**Numerical method of solving inverse problem to diffusion equation
with nonlocal boundary condition**

The nonlocal boundary value problems for parabolic equations are actively studied and have great practical interests, because such equations describe applied problems of mechanics, physics and biology. In this paper we consider one-dimensional inverse problem of identifying the source function for the heat equation by the final temperature measurements with nonlocal boundary conditions. The problem is solved by the method of regularization of the residual functional. The method of collocation is developed and numerically implemented. The developed method allowed to implement a large number of numerical examples and were calculated for different sets of parameters such as the number of terms in the expansion K , the regularization parameter μ , the parameter α in the boundary conditions, observation time T . We also investigated the variants with different character of unknown source function $f(x)$ and reconstructed it with accuracy close to the computer. Fast oscillating and discontinuous functions also reconstructed with satisfactory accuracy.

Key words: inverse problem, the heat equation, nonlocal boundary conditions, spectral method, minimizing of the residual functional, collocation method.

М.Н. Кулбай, Б.Г. Муканова, Д.К. Суйсинбаев
**Локальді емес шекаралық шарттары бар диффузия тендеуіне арналған
 кері есепті сандық әдіспен шешу**

Казіргі таңда параболалық тендеулер үшін локальді емес шекаралық есептер қарқынды түрде дамуда. Себебі механиканың, физиканың және биологияның қолданбалы есептері жоғарыда айтылған тендеулермен сипатталады. Қарастырылып отырган жұмыста ақырлы температуралық өлшем бойынша локалді емес шекаралық шарттары бар бір өлшемді жылуоткізгіш тендеуінің оң жақта тұрган белгісіз көздерін айқындау кері есебі қарастырылған. Есеп бағалау функционалының регуляризация әдісімен табылады. Регуляризаторы бар коллокация әдісі құрылып сандық түрде жүзеге асырылған. Есептің әр түрлі параметрлерін, атап айтқанда K – гармоника санын, μ – регуляризация параметрін, соңдай-ақ шекаралық шарттағы α параметрін, T ақырлы уақыт өлшемін және $f(x)$ белгісіз функциясын өзгерте отырып құрылған әдіс бойынша ауқымды сандық эксперименттер жүргізілді. Оң жақтағы функцияның сипатына байланысты белгісіз көздерді айқындаپ тұрган функциялар компьютерлік дәлдікке сәйкес нақтылықпен қалпына келтірілді. Тез ауытқытын функциялар да қанагаттанарлық дәлдікпен қалпына келтірілді.

Түйін сөздер: кері есеп, жылуоткізгіш тендеуі, локальді емес шекаралық шарт, спектральді әдіс, бағалау функционалының минимизациясы, коллокация әдісі.

Введение

В данной работе требуется восстановить пространственную плотность источников тепла $f(x) \in L_2[0, 1]$ в следующей нелокальной краевой задаче для уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + f(x), & x \in (0, 1), \quad t \in (0, T) \\ u(x, 0) = 0, \\ u_x(0, t) = u_x(1, t) + \alpha u(1, t), \\ u(0, t) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

При этом известна дополнительная информация (финальные измерения температуры):

$$u(x, T) = \psi(x), \quad (2)$$

где параметр α – положительное число, а $\psi(x)$ – заданная функция.

Математическое моделирование диффузионных процессов описываются прямыми и обратными краевыми задачами для уравнений параболического типа [1,2]. Во многих практических приложениях исследователю доступны только финальные измерения диффундирующих величин, при этом необходимо восстановить распределение источников в среде, либо начальное распределение. Впервые постановка задачи с нелокальными условиями возникла в исследовании свойств плазмы и была сформулирована Самарским А.А. и Ионкиным Н.И. Нелокальное краевое условие выражало равенство потоков тепла на входе и выходе системы. Далее изучение задач с нелокальными условиями вылилось в отдельную ветвь исследований. В частности, для моделей диффузии такие задачи рассматривались в работах [3-6]. Однако, в указанных источниках приводятся теоретические результаты, численные расчеты этих задач не проводились.

Одномерная обратная задача идентификации правой части для уравнения теплопроводности по финальным измерениям температуры при нелокальных краевых условиях

также рассматривался нами в работе [7]. В этой работе численно реализован и исследован метод, описанный в работе [6] и показал удовлетворительные результаты только при больших значениях параметра α . Это означает, что нелокальные краевые условия задачи являются «почти локальными» и для получения приемлемого численного решения требуется разработка более эффективных методов.

В данной работе мы переформулировали задачу в терминах оптимального управления [8-9] и реализовали метод квазирешения. Для дискретизации функционала невязки мы применили идею метода, описанную в работе [10] и протестировали работоспособность метода для задачи с нелокальными краевыми условиями. В отличие от [10], в данной работе мы применяем метод к случаю финальных измерений и нелокальных краевых условий.

Решение прямой задачи

Применение метода Фурье для данной задачи приводит к спектральной задаче для оператора l , заданного дифференциальным выражением и краевыми условиями:

$$\begin{aligned} l(y) &\equiv -y''(x) = \lambda y(x), \quad 0 < x < 1, \\ y'(0) &= y'(1) + \alpha y(1), \quad y(0) = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

В работе [5] показано, что на основе собственных функций можно построить базис, позволяющий применить метод разделения переменных для решения начально - краевой задачи. Приведем необходимые результаты из [5,6]. Спектральная задача (3) имеет две серии собственных значений:

$$\begin{aligned} \lambda_k^{(1)} &= (2\pi k)^2, \quad k = 1, 2, \dots \\ \lambda_k^{(2)} &= (2\beta_k)^2, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь β_k – корни уравнения $\operatorname{tg}(\beta) = \alpha/2\beta$, $\beta > 0$, $\pi k < \beta_k < \pi k + \frac{\pi}{2}$, $k = 0, 1, \dots$

$$\delta_k = \beta_k - \pi_k$$

Собственные функции задачи (3) имеют вид:

$$\begin{aligned} y_k^{(1)}(x) &= \sin(2\pi kx), \quad k = 1, 2, \dots \\ y_k^{(2)}(x) &= \sin(2\beta_k x), \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{5}$$

Построенная из нее вспомогательная система записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} y_0(x) &= y_0^{(2)}(x)(2\beta_0)^{-1}, \\ y_{2k}(x) &= y_k^{(1)}(x), \\ y_0(x) &= (y_k^{(2)}(x) - y_k^{(1)}(x))(2\delta_k)^{-1}, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{6}$$

образует базис Рисса в $L_2(0, 1)$, а биортогональной к ней является система

$$v_0(x) = 2\beta_0 v_0^{(2)}(x), \quad v_{2k}(x) = v_k^{(2)}(x) + v_k^{(1)}(x), \quad v_{2k-1}(x) = 2\delta_k v_k^{(2)}(x) \quad k = 1, 2, \dots \tag{7}$$

построенная из собственных функций сопряженной к (3) задачи:

$$\begin{aligned} v_k^{(1)}(x) &= c_k^{(1)} \cos(2\pi kx + \gamma_k), \quad k = 1, 2, \dots \\ v_k^{(2)}(x) &= c_k^{(2)} \cos(\beta_k(1 - 2x)), \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (8)$$

где $\gamma_k = \arctan\left(\frac{\alpha}{2\pi k}\right)$, $k = 1, 2, \dots$

Здесь константы $c_k^{(1)}, c_k^{(2)}$ выбираются из соотношения биортогональности $(y_k^{(j)}, v_k^{(j)}) = 1$ $j = 1, 2$ и вычисляются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} c_k^{(1)} &= -\frac{1}{\int_0^1 \sin(2\pi kx) \cos(2\pi kx + \gamma_k) dx}, \\ c_k^{(2)} &= -\frac{1}{\int_0^1 \sin(2\beta_k x) \cos(\beta_k(1 - 2x)) dx}, \\ c_0^2 &= \frac{1}{\int_0^1 \sin(2\beta_0 x) \cos(\beta_0(1 - 2x)) dx}. \end{aligned} \quad (9)$$

В работе [6] построено формальное решение задачи (1) – (2) и обоснована гладкость формального решения и сходимость всех встречающихся рядов. Решение прямой задачи представляется в виде биортогональных рядов:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) y_k(x), \\ f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} f_k y_k(x), \end{aligned} \quad (10)$$

где,

$$u_k(t) = (u(x, t), v_k(x)), \quad f_k = (f(x), v_k(x)). \quad (11)$$

Подставляя (10) в уравнение (1) с учетом (6), для нахождения неизвестных функций $u_k(t)$ получаем следующие задачи:

$$\begin{aligned} u'_0(t) + \lambda_0^{(2)} u_0(t) &= f_0, \quad u_0(0) = 0, \\ u'_{2k-1}(t) + \lambda_k^{(2)} u_{2k-1}(t) &= f_{2k-1}, \quad u_{2k-1}(0) = 0, \\ u'_{2k}(t) + \lambda_k^{(1)} u_{2k}(t) &= -\frac{\lambda_k^{(2)} - \lambda_k^{(1)}}{2\delta_k} u_{2k-1}(t) + f_{2k}, \quad u_{2k}(0) = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Решая задачи (12) получаем формулы для функций $u_k(t)$:

$$\begin{aligned} u_0(t) &= \frac{f_0}{\lambda_0^{(2)}} (1 - e^{-\lambda_0^{(2)} t}), \\ u_{2k-1}(t) &= \frac{f_{2k-1}}{\lambda_k^{(2)}} (1 - e^{-\lambda_k^{(2)} t}), \\ u_{2k}(t) &= \frac{(\lambda_k^{(2)} - \lambda_k^{(1)})}{2\lambda_k^{(2)}\lambda_k^{(1)}\delta_k} f_{2k-1} (1 - e^{-\lambda_k^{(1)} t}) - \frac{f_{2k-1}}{2\lambda_k^{(2)}\delta_k} (e^{-\lambda_k^{(2)} t} - e^{-\lambda_k^{(1)} t}) + \\ &+ f_{2k} \frac{(1 - e^{-\lambda_k^{(1)} t})}{\lambda_k^{(1)}}, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (13)$$

Формулы (10), (13) будут использоваться для получения синтетических данных, а также для решения прямой задачи при построении итерационного процесса.

Применение метода коллокаций с регуляризатором для решения обратной задачи

Запишем решение прямой задачи (13) в следующем виде:

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \frac{y_0(x)f_0}{\lambda_0^{(2)}}(1 - e^{-\lambda_0^{(2)}t}) + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{y_{2k-1}(x)f_{2k-1}}{\lambda_k^{(2)}}(1 - e^{-\lambda_k^{(2)}t}) \right\} + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ y_{2k}(x) \left[\frac{f_{2k-1}(\lambda_k^{(2)} - \lambda_k^{(1)})}{2\lambda_k^{(1)}\lambda_k^{(2)}\delta_k} (1 - e^{-\lambda_k^{(1)}t}) - \frac{f_{2k-1}}{2\lambda_k^{(2)}\delta_k} (e^{-\lambda_k^{(2)}t} - e^{-\lambda_k^{(1)}t}) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{f_{2k}}{\lambda_k^{(1)}}(1 - e^{-\lambda_k^{(1)}t}) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Итак, мы имеем из формулы (14), что приближенное решение задачи при $t = T$ имеет вид:

$$\begin{aligned} u(x, T) = & \frac{y_0(x)f_0}{\lambda_0^{(2)}}(1 - e^{-\lambda_0^{(2)}T}) + \sum_{k=1}^M \left\{ \frac{y_{2k-1}(x)f_{2k-1}}{\lambda_k^{(2)}}(1 - e^{-\lambda_k^{(2)}T}) \right\} + \\ & + \sum_{k=1}^M \left\{ y_{2k}(x) \left[\frac{f_{2k-1}(\lambda_k^{(2)} - \lambda_k^{(1)})}{2\lambda_k^{(1)}\lambda_k^{(2)}\delta_k} (1 - e^{-\lambda_k^{(1)}T}) - \frac{f_{2k-1}}{2\lambda_k^{(2)}\delta_k} (e^{-\lambda_k^{(2)}T} - e^{-\lambda_k^{(1)}T}) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{f_{2k}}{\lambda_k^{(1)}}(1 - e^{-\lambda_k^{(1)}T}) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (15)$$

Подберем коэффициенты f_i , $i = 1, \dots, K$, так, чтобы выражение вида:

$$\begin{aligned} & \frac{y_0(x)f_0}{\lambda_0^{(2)}}(1 - e^{-\lambda_0^{(2)}T}) + \sum_{i=1}^K \left\{ \frac{y_{2i-1}(x)f_{2i-1}}{\lambda_i^{(2)}}(1 - e^{-\lambda_i^{(2)}T}) \right\} + \\ & + \sum_{i=1}^K \left\{ y_{2i}(x) \left[\frac{f_{2i-1}(\lambda_i^{(2)} - \lambda_i^{(1)})}{2\lambda_i^{(1)}\lambda_i^{(2)}\delta_i} (1 - e^{-\lambda_i^{(1)}T}) - \frac{f_{2i-1}}{2\lambda_i^{(2)}\delta_i} (e^{-\lambda_i^{(2)}T} - e^{-\lambda_i^{(1)}T}) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{f_{2i}}{\lambda_i^{(1)}}(1 - e^{-\lambda_i^{(1)}T}) \right] \right\} \equiv \sum_{i=0}^K f_i F_i(x) \end{aligned} \quad (16)$$

наилучшим образом в смысле квадратичной нормы приближало функцию $\psi(x)$. А в качестве приближенного решения обратной задачи используем функцию:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) = & \sum_{i=0}^K f_i y_i(x) = f_0 y_0^{(2)}(x)(2\beta_0)^{-1} + \\ & + \sum_{i=0}^K \left\{ f_{2i} y_{2i}^{(1)}(x) + f_{2i-1} (y_{2i-1}^{(2)}(x) - y_{2i-1}^{(1)}(x))(2\delta_{2i-1})^{-1} \right\}. \end{aligned} \quad (17)$$

Для решения обратной задачи будем реализовывать метод минимизации функции

нала невязки вида:

$$J(f_0, f_1, \dots, f_K) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\sum_{i=0}^K f_i F_i(x) - \psi(x) \right]^2 dx + \frac{\mu}{2} \sum_{i=0}^K f_i^2 \rightarrow \min_{\bar{f}} J(\bar{f}) \quad (18)$$

$$i = 0, 1, \dots, K$$

В данном случае функционал невязки представляет собой квадратичную форму многих переменных с коэффициентами, зависящими от пространственной переменной. Так как мы свели задачу к конечномерной, будем искать точки, подозрительные на экстремум, из необходимого условия минимума, а именно, приравняем нулю первые производные функционала по каждой переменной. Выпишем формулы для первых производных функционала:

$$\frac{\partial J(f_0, f_1, \dots, f_K)}{\partial f_j} = \sum_{i=0}^K f_i \int_0^1 F_i(x) F_j(x) dx - \int_0^1 \psi(x) F_j(x) dx + \mu f_j = 0 \quad (19)$$

$$i = 0, 1, \dots, K$$

Приравнивая выражения (19) нулю, получаем систему линейных уравнений для нахождения искомых коэффициентов f_0, f_1, \dots, f_K :

$$A \vec{f} = b, \quad (20)$$

где матрица A и правая часть b заданы выражениями:

$$A_{ij} = \mu \delta_{i,j} + \int_0^1 F_i(x) F_j(x) dx = 0, \quad (21)$$

$$b_j = \int_0^1 \psi(x) F_j(x) dx, \quad (22)$$

где $\delta_{i,j}$ – символ Кронекера.

Решая систему (20) при разных μ получим приближенное решение обратной задачи.

Численные результаты

Описанный выше метод был реализован нами численно для разных синтетических измеренных данных.

Алгоритм вычислений состоял из следующих шагов:

1. Задаются параметры задачи: α, T, μ
2. Вычисляются величины $\lambda_i^{(1)}, \lambda_i^{(2)}, i = 1, \dots, K$. Величину K мы брали равной 50.
3. Задается правая часть, и вычисляются синтетические данные по формуле (10) и (13).
4. Вычисляем коэффициенты матрицы A и правой части b по формулам (21) и (22).
5. Решаем систему уравнений (20) и находим f_0, f_1, \dots, f_K .

Из формулы (14) следует, что если искомая функция представлена лишь конечным числом гармоник, то ряд (14) также имеет конечное число членов и представляет собой аналитическое выражение для искомой правой части. Это обстоятельство позволяет использовать эти выражения для тестирования метода и проводить сравнения численных результатов с аналитически заданными функциями. Мы провели такого рода тестовые расчеты для случаев, когда искомая правая часть представляла собой первые две функции $y_k(x)$. На рисунке 1 показан результат расчета, когда искомая функция равнялась $y_1(x)$, а именно, задавалась формулой $f(x) = (\sin(2\beta_1 x) - \sin(2\pi x))(2\delta_1)^{-1}$, при параметрах расчета: $\beta_1 = 3.29$, $\delta_1 = 0.15$, $\alpha = 1$, $T = 1$, $K = 50$, $\mu = 1 \cdot 10^{-11}$. Точность восстановления составила 4.85%. На рисунке 2 в качестве искомой функции использована следующая функция базиса $y_2(x) = \sin(4\pi x)$ при этих же параметрах расчета. Точность восстановления составила 4.68%.

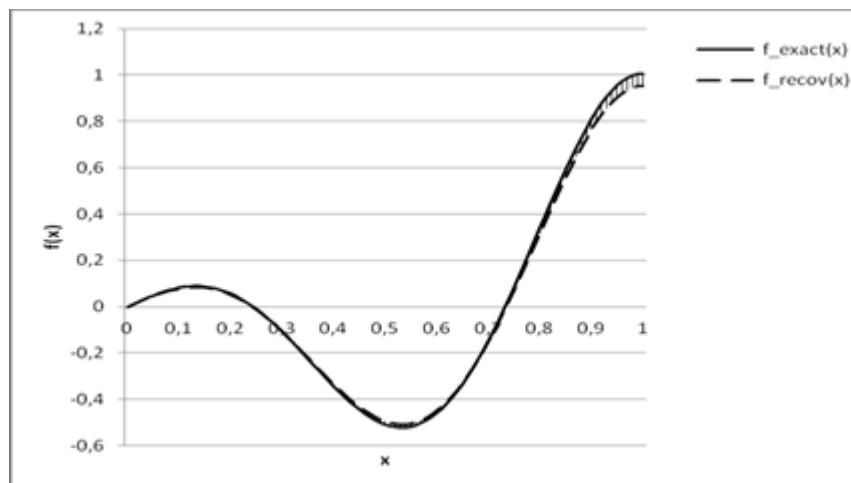


Рисунок 1 – Сравнение с аналитическим решением, правая часть задана формулой

$$f(x) = (\sin(2\beta_1 x) - \sin(2\pi x))(2\delta_1)^{-1}$$

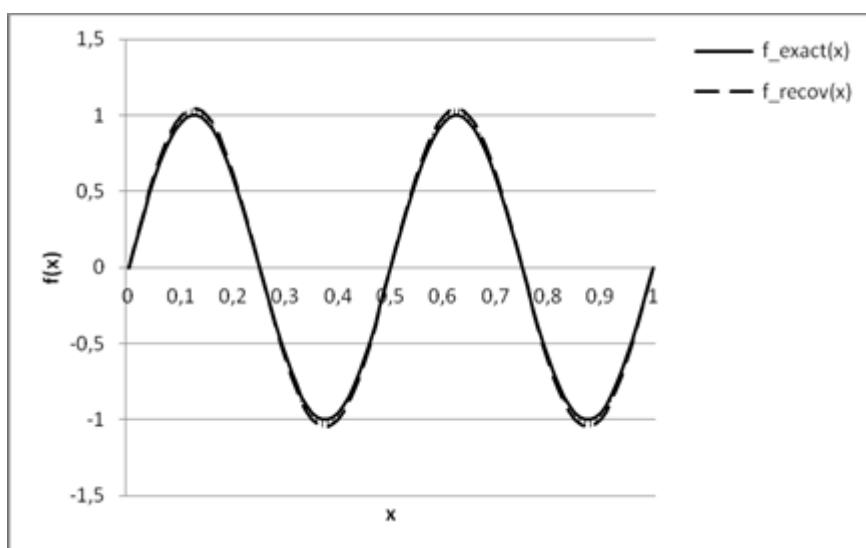


Рисунок 2 – Сравнение с аналитическим решением, правая часть задана формулой $f(x) = \sin(4\pi x)$

Для дальнейшего анализа и получения синтетических данных задачи мы рассмотрели функцию правой части заданной аналитически по формуле:

$$f(x) = A \exp\left(-\frac{(x - x_1)^2}{\omega}\right).$$

Для изучения влияния параметров регуляризации μ и числа гармоник K мы рассмотрели различные наборы параметров функции $f(x)$. На рисунке 3 мы показываем результат восстановления при параметрах расчетов: $\alpha = 10$, $T = 1$, $K = 50$, $\mu = 1 \cdot 10^{-5}$, $A = 1$, $x_1 = 0.5$, $\omega = 0.22$. Относительная точность восстановления оказалась равной 19%.

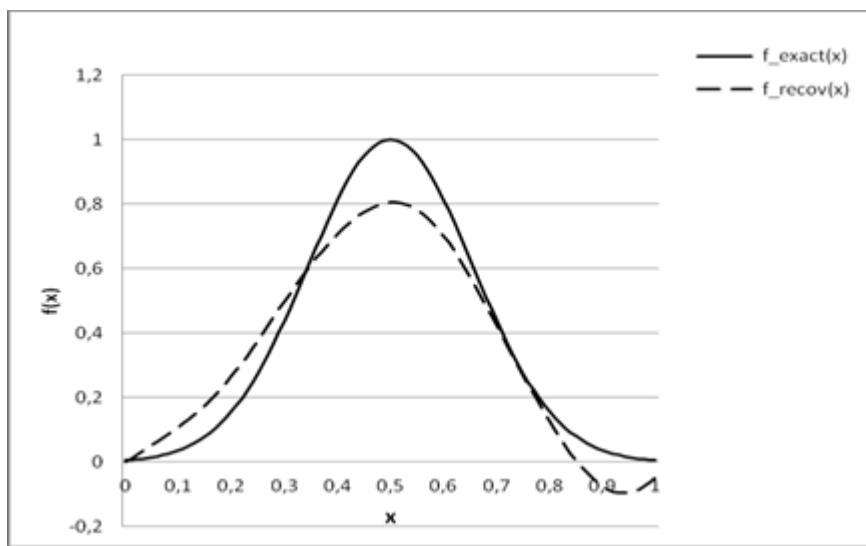


Рисунок 3 – Восстановление функции источника

На рисунке 4 показано уменьшение параметра регуляризации μ до $1 \cdot 10^{-11}$. Точность восстановления при этом составила 18%.

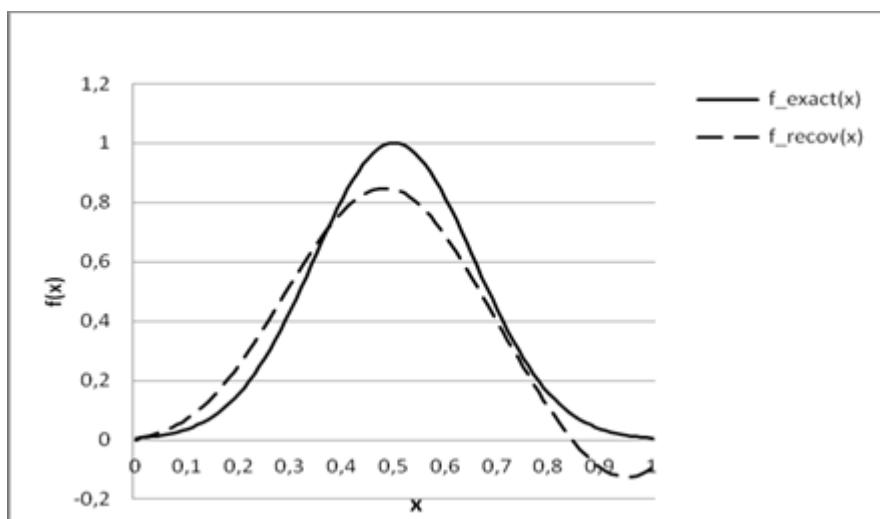


Рисунок 4 – Результат восстановления при уменьшении параметра регуляризации

Таким образом, расчеты показали необходимость положительного «не слишком малого» параметра регуляризации. В большинстве расчетов наиболее приемлемым оказалось значение μ , равное 10^{-11} . Кроме этого, мы рассмотрели влияние значения K на качество восстановления. Оказалось, что для гладких правых частей увеличение K существенно не влияет на точность восстановления. Расчеты были проведены с $K = 10, 20, 30, 50, 100$. Во всех этих случаях результаты имели одну и ту же относительную точность восстановления.

Попытки восстановить разрывную ступенчатую функцию не увенчались успехом. Во всех разумных сочетаниях параметров мы получали слаженную восстановленную функцию следующего вида:

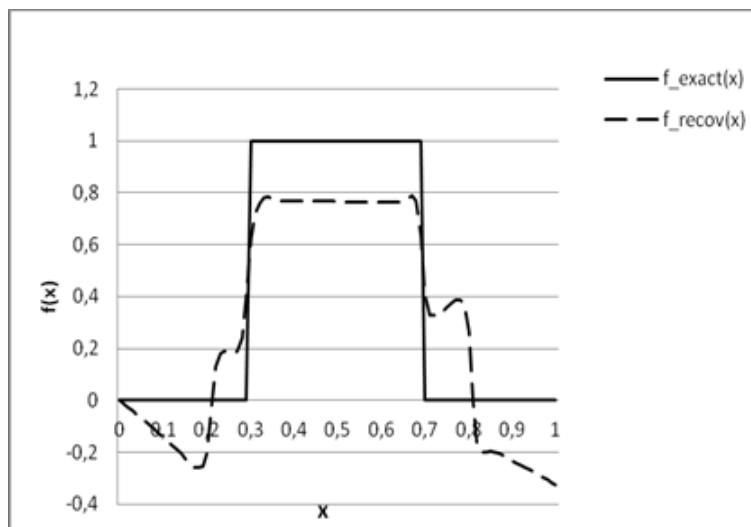


Рисунок 5 – Восстановление разрывной функции источника. Расчет выполнен при $\alpha = 1$, $T = 1$, $K = 50$, $\mu = 1 \cdot 10^{-9}$.

На рисунке 6 показано восстановление негладкой функции. Получен удовлетворительный результат при $\alpha = 10$, $T = 1$, $K = 50$, $\mu = 1 \cdot 10^{-11}$ с относительной ошибкой восстановления 10%.

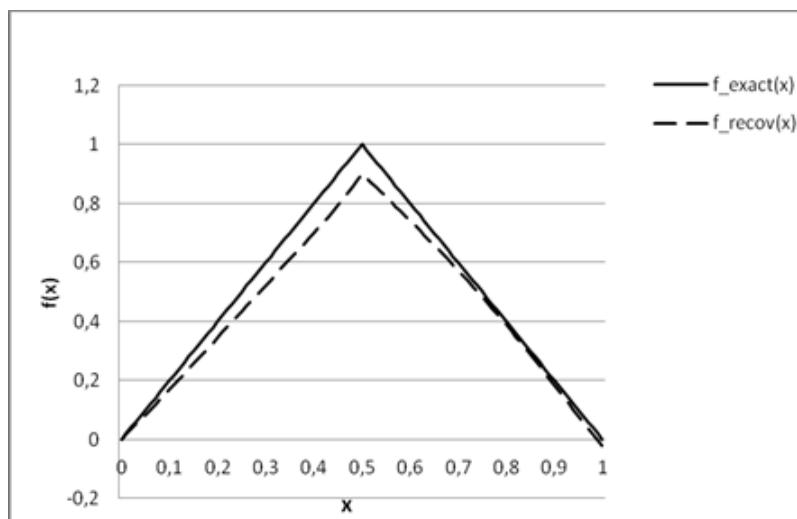


Рисунок 6 – Восстановление негладкой функции источника.

Таким образом, численные эксперименты с разнообразным поведением искомой функции показывают, что метод улавливает существенные особенности в поведении искомой функции – убывание, возрастание, области максимума, либо минимума.

Литература

- [1] *Alifanov O.M.* Inverse Heat Transfer Problems. – Springer-Verlag, 1994.– 348 p.
- [2] *Бек Дж., Блакуэлл Б., Сент-Клер Ч.* Некорректные обратные задачи теплопроводности. – М.: Мир, 1989. – 309 с.
- [3] *Ионкин Н.И.* Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием. // Дифференц. уравнения, 1977. – № 13, – с. 293–304.
- [4] *Мокин А.Ю.* Корректность семейства задач с неклассическим краевым условием. // Компьютерные исследования и моделирование, 2009. – Т. 1, № 2. – с. 139–146.
- [5] *Мокин А.Ю.* Об одном семействе начально-краевых задач для уравнения теплопроводности. // Дифференц. Уравнения, 2009. – 45(1). – с. 123–137.
- [6] *Оразов И., Садыбеков М.А.* Об одной нелокальной задаче определения температуры и плотности источников тепла. // Известия вузов. Математика, 2012. – № 2, – с. 70–75.
- [7] *Кулбай М.Н., Суйсинбаев Д.К.* Методика решения обратной задачи для уравнения диффузии. // Труды I научно-практической конференции «Интеллектуальные информационные технологии», – Астана, 2013. – с. 363–364.
- [8] *Понtryагин Л.С., Болтынский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1983. – 393 с.
- [9] *Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya.* Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1974. – 224 с.
- [10] *Муканова Б.Г.* Восстановление распределения источников тепла по граничным измерениям температуры: численный метод. – Вестник ЕНУ, Серия естественно-технических наук, - № 6(97) – 2013 г. – с. 12-17.

References

- [1] *Alifanov O.M.* Inverse Heat Transfer Problems. – Springer-Verlag, 1994.– 348 p.
- [2] *Bek Dzh., Blakuell B., Sent-Kler Ch.* Nekorrektnye obratnye zadachi teploprovodnosti. – M.: Mir, 1989. – 309 c.
- [3] *Ionkin N.I.* Reshenie odnoy kraevoy zadachi teorii teploprovodnosti s neklassicheskim kraevym usloviem. // Differents. uravneniya, 1977. – No 13, – s. 293–304.
- [4] *Mokin A.Yu.* Korrektnost semeystva zadach s neklassicheskim kraevym usloviem. // Kompyuternye issledovaniya i modelirovaniye, 2009. – T. 1, No 2. – s. 139–146.
- [5] *Mokin A.Yu.* Ob odnom semeystve nachalno-kraevyih zadach dlya uravneniya teploprovodnosti. // Differents. Uravneniya, 2009. – 45(1). – s. 123–137.
- [6] *Orazov I., Sadyibekov M.A.* Ob odnoy nelokalnoy zadache opredeleniya temperaturyi i plotnosti istochnikov tepla. // Izvestiya vuzov. Matematika, 2012. – № 2, – s. 70–75.
- [7] *Kulbay M.N., Suysinbaev D.K.* Metodika resheniya obratnoy zadachi dlya uravneniya diffuzii. // Trudy I nauchno-prakticheskoy konferentsii «Intellektualnye informatsionnye tehnologii», – Astana, 2013. – s. 363–364.
- [8] *Pontryagin L.S., Boltyanskiy V.G., Gamkrelidze R.V., Mischenko E.F.* Matematicheskaya teoriya optimalnyih protsessov. – M.: Nauka, 1983. – 393 s.
- [9] *Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya.* Metodyi resheniya nekorrektniyih zadach. – M.: Nauka, 1974. – 224 s.
- [10] *Mukanova B.G.* Vosstanovlenie raspredeleniya istochnikov tepla po granichnym izmereniyam temperaturyi: chislennyiy metod. – Vestnik ENU, Seriya estestvenno-tehnicheskikh nauk, - No 6(97) – 2013 g. – s. 12-17.

УДК 517.958

Д.М.Курманбаев

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Республика Казахстан, г. Алматы
 E-mail: kurmanbaev@gmail.com

Построение разрушающих решений модифицированного уравнения Веселова-Новикова с помощью поверхности Эннепера второго порядка

В данной статье построены разрушающие решения модифицированного уравнения Веселова-Новикова (являющегося двумеризацией модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза) с помощью инверсий минимальной поверхности Эннепера второго порядка. И эти решения имеют сингулярность в одной точке пространства-времени, аналогично работе [1]. Алгоритм решения модифицированного уравнения Веселова-Новикова был приведен в работе [2], и в работе [3] была получена геометрическая интерпретация преобразования Мутара. Оно задается решением уравнения Дирака $D\psi = 0$ и тремя вещественными константами. И любое решение этого уравнения определяет поверхность в трехмерном евклидовом пространстве, заданную с точностью до сдвигов, с помощью представления Вейерштрасса. Фиксируя три константы, мы полностью фиксируем поверхность. На этой поверхности задается конформный параметр, и потенциал U оператора Дирака является потенциалом представления этой поверхности. Применив к этой поверхности инверсию с центром вначале координат, мы получаем новую поверхность с тем же самым конформным параметром и новым потенциалом. Оказывается, что потенциал инверсированной поверхности и есть в точности потенциал, построенный с помощью преобразования Мутара по указанным данным [3]. В результате данной статьи этот потенциал был построен (теорема 1) для неизвестных пока решений линейной системы уравнений (8) с помощью алгоритма преобразования Мутара; была получена геометрическая интерпретация преобразования Мутара на примере поверхности Эннепера второго порядка, т.е. для явных решений данной линейной системы уравнений найдены потенциалы (теорема 2), которые удовлетворяют модифицированному уравнению Веселова-Новикова.

Ключевые слова: оператор Дирака, модифицированное уравнение Веселова-Новикова, преобразование Мутара, разрушающие решения, поверхность Эннепера.

D.M.Kurmanbaev

Construction blowing up solutions of modified Novikov-Veselov equation by second order Ennepер surface

In this paper, we constructed blowing-up solutions of the modified Veselov-Novikov equation (which is a two-dimensionalization of modified Korteweg-de Vries equation) using inversions of the second order Ennepér minimal surface. As [1] these solutions have a singularity at one point in space-time. Algorithm for solving the modified Veselov-Novikov equation was given in [2] and in [3] obtained a geometrical interpretation of Moutard transformation. It is given by the solution of the Dirac equation $D\psi = 0$ and three real constants. And any solution of this equation defines a surface in three-dimensional Euclidean space, given up accurate to translations, with the help of the Weierstrass representation. Fixing the three constants, we completely fix the surface. On this surface given a conformal parameter, and the potential U of the Dirac operator is the potential of representation of the surface. Applying inversion to this surface with center at the origin, we obtain a new surface with the same conformal parameter and new potential. It turns out that the potential of inverted surface is exactly the potential constructed by Moutard transformation from the data of [3]. In a result of this article, this potential has been built (theorem 1) for yet unknown solutions of a linear system of equations (8) by algorithm of Moutard transformations; was obtained geometric interpretation of Moutard transformations on the example of second order Ennepér surface, i.e, for explicit solutions of linear system of equations found potentials (theorem 2) that satisfy the modified Veselov-Novikov equation.

Key words: Dirac operator, modified Novikov-Veselov equation , Mutard transformation, blowing up solutions, Ennepér surface.

Д.М.Курманбаев

**Екінші ретті Эннепер бетінің көмегімен модификацияланған Веселов-Новиков
теңдеуінің жоюшы шешімдерін құрастыру**

Бұл мақалада модификацияланған Веселов-Новиков теңдеуінің (яғни, модификацияланған Кортевег-де Фриз теңдеуінің екіншілшемді жағдайы) жоюшы шешімдері құрастырылған және де бұл шешімдердің [1] жұмысындағы алынған нәтижелерге үқсас кеңістік-уақыттың бір нүктесінде сингулярлығы бар болады. Модификацияланған Веселов-Новиков теңдеуінің шешімінің алгоритмі [2] жұмысында келтірілген және де [3] жұмысында Мутар түрлендіруінің геометриялық мағынасы көрсетілген. Ол $D\psi = 0$ Дирак теңдеудің шешімін және де үш нақты түрақтылармен беріледі. Бұл теңдеудің кез келген шешімі Вейерштрасс көрсетімі көмегімен, берілген ығыстыруға дейінгі дәлдікпен болатында, үшілшемді евклидтік кеңістіктегі бетті анықтайды. Біз үш түрақтыны бекіту арқылы барлық бетті бекітуімізге болады. Яғни, бұл бетті конформды параметр берілген және Дирак операторының U потенциалы осы беттегі көрсетімнің потенциалы болады. Сонымен қатар, бұл бетке центрі координаттар басында болатын инверсияны қолдану арқылы біз дәл сондай конформды параметрімен берілген және жаңа потенциалымен жаңа бетті аладыз. Инверсияланған беттің потенциалы - Мутар түрлендіруінің көмегі арқылы (бұл түрлендіру [3] жұмыста көрсетілген нұсқаулармен берілген) құрастырылған потенциалдың дәл өзі болады екен. Бұл мақаланың нәтижесінде (8) сызықты теңдеулер жүйесінің әзірге белгісіз шешімдері үшін аталған потенциал Мутар түрлендіруінің көмегімен құрастырылған (1-теорема); сонымен қатар екінші ретті Эннепер бетінің мысалы арқылы Мутар түрлендіруінің геометриялық мағынасы алынған, яғни берілген сызықты теңдеулер жүйесінің айқын шешімдері үшін модификацияланған Веселов-Новиков теңдеуін қанагаттандыратын потенциалдар (2-теорема) табылған.

Түйін сөздер: Дирак операторы, модификацияланған Веселов-Новиков теңдеуі, Мутар түрлендіруі, жоюшы шешімдер, Эннепер беті.

1. Введение

Модифицированное уравнение Веселова- Новикова (мВН) было введено в работе [4] и имеет вид

$$U_t = U_{zzz} + 3U_z V + \frac{3}{2}UV_z + U_{\bar{z}\bar{z}} + 3U_{\bar{z}}\bar{V} + \frac{3}{2}U\bar{V}_{\bar{z}} \quad (1)$$

где $V_{\bar{z}} = (U^2)_z$

и $z = x + iy$, $U(z, \bar{z}, t)$ - вещественнозначная функция.

Уравнение мВН допускает представление в виде L,A,B - тройки Манакова [6]:

$$\mathcal{D}_t + [\mathcal{D}, \mathcal{A}] - \mathcal{B}\mathcal{D} = 0. \quad (2)$$

где \mathcal{D} - двумерный оператор Дирака:

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 0 & \partial \\ -\bar{\partial} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}$$

здесь обозначены через $\partial = \frac{\partial}{\partial z}$ и $\bar{\partial} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$.

Явные формулы для операторов \mathcal{A} , \mathcal{B} , из уравнений (2) имеют вид:

$$\mathcal{A} = \partial^3 + \bar{\partial}^3 + 3 \begin{pmatrix} V & 0 \\ U_z & 0 \end{pmatrix} \partial + 3 \begin{pmatrix} 0 & -U_{\bar{z}} \\ 0 & \bar{V} \end{pmatrix} \bar{\partial} + \frac{3}{2} \begin{pmatrix} V_z & 2U\bar{V} \\ -2UV & \bar{V}_{\bar{z}} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{B} = 3 \begin{pmatrix} -V & 0 \\ -2U_z & V \end{pmatrix} \partial + 3 \begin{pmatrix} \bar{V} & 2U_{\bar{z}} \\ 0 & -\bar{V} \end{pmatrix} \bar{\partial} + \frac{3}{2} \begin{pmatrix} \bar{V}_{\bar{z}} - V_z & 2U_{\bar{z}\bar{z}} \\ -2U_{zz} & V_z - \bar{V}_{\bar{z}} \end{pmatrix}.$$

2. Преобразование Мутара

Пусть $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ - решение уравнения Дирака, т.е.

$$\mathcal{D}\psi = 0 \quad (3)$$

тогда сопряженное к этому решению $\psi^* = \begin{pmatrix} -\bar{\psi}_2 \\ \bar{\psi}_1 \end{pmatrix}$ тоже является решением уравнения (3).

Составим из ψ, ψ^* матрицу $\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 & -\bar{\psi}_2 \\ \psi_2 & \bar{\psi}_1 \end{pmatrix}$ то получим, что $\mathcal{D}\Psi = 0$. Тоже самое можно проверить и для $\varphi = \psi^T$.

Чтобы применить преобразование Мутара для уравнения мВН, каждой паре решений ψ, φ уравнений (3) и $\mathcal{D}\varphi = 0$ сопоставим матрицы Ψ и $\Phi = \Psi^T$, а по ним составим матричную 1-форму:

$$\begin{aligned} \omega(\Phi, \Psi) = & -\frac{i}{2}(\Phi\sigma_3\Psi + \Phi\Psi)dz - \frac{i}{2}(\Phi\sigma_3\Psi - \Phi\Psi)d\bar{z} + \\ & + [-i((\Phi_{zz} + \Phi_{\bar{z}\bar{z}} - 2\Phi_{z\bar{z}})\sigma_3\Psi + \Phi\sigma_3(\Psi_{zz} + \Psi_{\bar{z}\bar{z}} - 2\Psi_{z\bar{z}}) - (\Phi_z - \Phi_{\bar{z}})\sigma_3(\Psi_z - \Psi_{\bar{z}})) - \\ & - 2U((\Phi_z - \Phi_{\bar{z}})\sigma_3\Psi - \Phi\sigma_2(\Psi_z - \Psi_{\bar{z}})) + \Phi \begin{pmatrix} iU^2 - 3iV & -i(U_z + U_{\bar{z}}) \\ -i(U_z + U_{\bar{z}}) & -iU^2 + 3i\bar{V} \end{pmatrix} \Psi]dt \end{aligned}$$

где $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ - матрицы Паули, для которых $Tr\sigma_i = 0, i = 1, 2, 3$.

Прямыми вычислениями доказывается, что 1-форма $\omega(\Phi, \Psi)$ замкнута, т.е. $d\omega(\Phi, \Psi) = 0$. Затем можно определить следующую симметричную матрицу:

$$\Omega(\Phi, \Psi) = \int_{(0,0,0)}^{(z,\bar{z},t)} \omega + \begin{pmatrix} a + bi & ci \\ ci & a - bi \end{pmatrix} \quad (4)$$

где a, b и c вещественные постоянные.

Пусть матрицы K и N определяются следующим образом:

$$K(\Psi) = \Psi\Omega^{-1}(\Psi^T, \Psi)\Gamma\Psi^T\Gamma^{-1} \quad (5)$$

$$N(\Psi) = \Gamma\Psi_y\Psi^{-1}\Gamma^{-1} = i\Gamma(\Psi_z - \Psi_{\bar{z}})\Psi^{-1}\Gamma^{-1} \quad (6)$$

Матрицы K и N удовлетворяют свойствам инволюции [2], являются симметричными и $\Gamma = i\sigma_2$.

В работе [7] показано, что уравнение мВН деформирует ядро оператора $L = \begin{pmatrix} \partial & -U \\ U & \bar{\partial} \end{pmatrix}$. Тогда оно деформирует и ядро оператора Дирака $\mathcal{D} = L\Gamma$ с помощью следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\Psi &= 0 \\ \Psi_t &= \mathcal{A}\Psi. \end{aligned} \tag{7}$$

Эта система эквивалентна следующей системе линейных уравнений

$$\begin{aligned} \Psi_x &= J\Psi_y + P\Psi \\ \Psi_t &= -J\Psi_{yy} - P\Psi_{yy} + Q\Psi_y + S\Psi \end{aligned} \tag{8}$$

где Ψ матричное решение данной системы и матрицы J, P, Q, S полученные из эквивалентности систем уравнений (7) и (8), тоже являются матрицами Паули.

Для обоснования алгоритма преобразования Мутара, получена одна важная теорема в работе [2] для заданных решений системы (8) при $U(z, \bar{z}, t) = 0, V(z, \bar{z}, t) = 0$. И эту теорему сформулируем и докажем для неизвестных пока решений системы (8) при любых потенциалах $U(z, \bar{z}, t)$ и $V(z, \bar{z}, t)$.

Теорема 1 Пусть Ψ_0 и Ψ – решения линейной системы (8) и $U(z, \bar{z}, t), V(z, \bar{z}, t)$ удовлетворяют уравнению (1) мВН. Если матрица $\Omega^{-1}(\Psi^T, \Psi)$ – невырожденная, тогда

1) новое решение системы (8)

$$\tilde{\Psi} = \Psi_0 - \Psi\Omega^{-1}(\Psi^T, \Psi)\Omega(\Psi^T, \Psi_0) \tag{9}$$

удовлетворяет уравнению Дирака $\tilde{\mathcal{D}}\tilde{\Psi} = 0$ оператора $\tilde{\mathcal{D}}$ с потенциалом

$$\tilde{U} = U + ik_{12}, \tag{10}$$

и уравнению $\tilde{\Psi}_t = \tilde{\mathcal{A}}\tilde{\Psi}$ оператора $\tilde{\mathcal{A}}$ с потенциалами \tilde{U} и

$$\tilde{V} = V - 2iUk_{12} + k_{11}^2 - 2(n_{12}k_{12} + n_{11}k_{11}) \tag{11}$$

где k_{11}, k_{12} и n_{11}, n_{12} элементы матриц K, N соответственно и $U(z, \bar{z}, t), V(z, \bar{z}, t)$ – вещественнозначные потенциалы.

2) новые потенциалы $\tilde{U}(z, \bar{z}, t)$ и $\tilde{V}(z, \bar{z}, t)$ удовлетворяют уравнению (1) мВН .

Доказательство.

Пусть $\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 & -\bar{\psi}_2 \\ \psi_2 & \bar{\psi}_1 \end{pmatrix}$ - решение линейной системы (8) и в формуле (9) для определенности возьмем $\Psi_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. По алгоритму преобразования Мутара, сначала вычислим матрицу $\Omega(\Psi^T, \Psi)$ (берется криволинейный интеграл и его значение не зависит от пути интегрирования) по формуле (5) с учетом формулы 1-формы $\omega(\Psi^T, \Psi)$:

$$\begin{aligned} \Omega_{11}(z, \bar{z}, t) &= -i \int_0^z \psi_1^2(l, 0, 0) dl + i \int_0^{\bar{z}} \psi_2^2(z, l, 0) dl + \\ &+ i \int_0^t [\psi_{1z}(z, \bar{z}, l)^2 - 2\psi_1(z, \bar{z}, l)\psi_{1zz}(z, \bar{z}, l) - 3\psi_1^2(z, \bar{z}, l)V(z, \bar{z}, l)] dl - \\ &- i \int_0^t [\psi_{2\bar{z}}(z, \bar{z}, l)^2 - 2\psi_2(z, \bar{z}, l)\psi_{2\bar{z}\bar{z}}(z, \bar{z}, l) - 3\psi_2^2(z, \bar{z}, l)\bar{V}(z, \bar{z}, l)] dl + a + bi, \\ \Omega_{12}(z, \bar{z}, t) &= \Omega_{21}(z, \bar{z}, t) = i \int_0^z \psi_1(l, 0, 0) \overline{\psi_2}(l, 0, 0) dl + i \int_0^{\bar{z}} \overline{\psi_1}(z, l, 0) \psi_2(z, l, 0) dl + \\ &+ i \int_0^t \overline{\psi_2}(z, \bar{z}, l) \psi_{1zz}(z, \bar{z}, l) dl + \overline{\psi_{1\bar{z}\bar{z}}}(z, \bar{z}, l) \psi_2(z, \bar{z}, l) dl + \\ &+ i \int_0^t \overline{\psi_1}(z, \bar{z}, l) \psi_{2\bar{z}\bar{z}}(z, \bar{z}, l) dl + \psi_1(z, \bar{z}, l) \overline{\psi_{2zz}}(z, \bar{z}, l) dl + \\ &+ i \int_0^t [3\overline{\psi_1}(z, \bar{z}, l)\psi_2(z, \bar{z}, l)\bar{V}(z, \bar{z}, l) + 3\psi_1(z, \bar{z}, l)\overline{\psi_2}(z, \bar{z}, l)V(z, \bar{z}, l)] dl + ci, \\ \Omega_{22}(z, \bar{z}, t) &= -i \int_0^z \overline{\psi_2}^2(l, 0, 0) dl + \int_0^{\bar{z}} \overline{\psi_1}^2(z, l, 0) dl - \\ &- i \int_0^t [\overline{\psi_{1\bar{z}}}^2(z, \bar{z}, l) - 2\overline{\psi_1(z, \bar{z}, l)}\overline{\psi_{1\bar{z}\bar{z}}(z, \bar{z}, l)} - 3\overline{\psi_1^2(z, \bar{z}, l)V(z, \bar{z}, l)}] dl + \\ &- i \int_0^t [\overline{\psi_{2\bar{z}}}^2(z, \bar{z}, l) - 2\overline{\psi_2(z, \bar{z}, l)}\overline{\psi_{2\bar{z}\bar{z}}(z, \bar{z}, l)} - 3\overline{\psi_2^2(z, \bar{z}, l)V(z, \bar{z}, l)}] dl + a - bi. \end{aligned}$$

Далее выпишем элементы матриц K, N (из формул (5), (6)) в следующем виде:
 $k_{11}(z, \bar{z}, t) = \frac{1}{|\Omega(z, \bar{z}, t)|} (\psi_1^2 \Omega_{22}(z, \bar{z}, t) + \psi_1 \bar{\psi}_2 (\Omega_{12}(z, \bar{z}, t) + \Omega_{21}(z, \bar{z}, t)) + \bar{\psi}_2^2 \Omega_{11}(z, \bar{z}, t)),$
 $k_{12}(z, \bar{z}, t) = \frac{1}{|\Omega(z, \bar{z}, t)|} (\psi_1 \psi_2 \Omega_{22}(z, \bar{z}, t) + |\psi_2|^2 \Omega_{21}(z, \bar{z}, t) - |\psi_1|^2 \Omega_{12}(z, \bar{z}, t) + \bar{\psi}_1 \bar{\psi}_2 \Omega_{11}(z, \bar{z}, t)),$
 $n_{11}(z, \bar{z}, t) = \frac{1}{|\Psi(z, \bar{z}, t)|} (\bar{\psi}_1 \psi_{1z} - \psi_2 \bar{\psi}_{2z} - 2U(z, \bar{z}, t) \bar{\psi}_1 \psi_2),$
 $n_{12}(z, \bar{z}, t) = \frac{i}{|\Psi(z, \bar{z}, t)|} (\psi_{1z} \bar{\psi}_2 + \psi_1 \bar{\psi}_{2z} + U(z, \bar{z}, t) (|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2))$

здесь $|\Omega(z, \bar{z}, t)|$, $|\Psi(z, \bar{z}, t)|$ - определители матриц $\Omega(z, \bar{z}, t)$, $\Psi(z, \bar{z}, t)$ соответственно.

Подставляя эти элементы в формулы (10),(11), мы получим новые потенциалы, которые удовлетворяют уравнению (1) мВН . Чтобы наглядно увидеть доказательство этой теоремы, приведем пример.

Пример

Для того чтобы объяснить геометрический смысл преобразования Мутара, сначала введем следующую поверхность, полученный из (4) умножением на матрицу Γ :

$$\tilde{S}(\Phi, \Psi) = \Gamma\Omega(\Phi, \Psi),$$

введем следующие обозначения:

$$v = \psi_{1z}^2 - \psi_{2\bar{z}}^2 - 2(\psi_1\psi_{1zz} - \psi_2\psi_{2\bar{z}\bar{z}}), w = \psi_{1z}\bar{\psi}_{2z} + \bar{\psi}_{1\bar{z}}\psi_{2\bar{z}} - \psi_{1zz}\bar{\psi}_2 - \psi_1\bar{\psi}_{2zz} - \bar{\psi}_{1\bar{z}\bar{z}}\psi_2 - \bar{\psi}_1\psi_{2\bar{z}\bar{z}},$$

$$S_0 = \begin{pmatrix} iu^3 & -x^1 - ix^2 \\ u^1 - ix^2 & -ix^3 \end{pmatrix}.$$

Тогда получим поверхность \tilde{S} с помощью представления Вейершрасса [1,8]:

$$\tilde{S} = S_0 + i \int_0^t \begin{pmatrix} w & \bar{v} \\ v & -w \end{pmatrix} d\tau + \begin{pmatrix} ci & a - bi \\ -a - bi & -ci \end{pmatrix} \quad (12)$$

Поверхность Эннепера является минимальной поверхностью, которая задается представлением Вейершрасса следующей вектор-функцией:

$$\psi_1 = z^2, \psi_2 = 1.$$

Теперь подставляя данные ψ_1, ψ_2 , получим

$$\begin{aligned} x^1(z, \bar{z}) &= \frac{i}{2} \left(\left(\frac{1}{5}(z^5 - \bar{z}^5) + z - \bar{z} \right) + x_0^1, \right. \\ x^2(z, \bar{z}) &= -\frac{1}{10}(z^5 + \bar{z}^5) + \frac{1}{2}(z + \bar{z}) + x_0^2, \\ x^3(z, \bar{z}) &= \frac{1}{3}(z^3 + \bar{z}^3) + x_0^3, \end{aligned}$$

где $X_0 = (x_0^1, x_0^2, x_0^3)$ начало координат при $x = y = 0$.

Для получения разрушающегося решения уравнения мВН выберем начало координат в следующих точках:

$$x_0^1 = a, x_0^2 = c, x_0^3 = b,$$

полагая здесь

$$c = -b.$$

Подставляя в формуле (12) вместо $c = -b$ вычислим \tilde{S} и v, w :

$$\tilde{S} = \begin{pmatrix} \frac{i}{3}(z^3 + \bar{z}^3 + 12t) & i(\frac{\bar{z}^5}{5} - z) \\ i(\frac{z^5}{5} - \bar{z}) & -\frac{i}{3}(z^3 + \bar{z}^3 + 12t) \end{pmatrix}$$

$$v = 0, w = -4.$$

Формулу (5) перепишем в виде:

$$K = \begin{pmatrix} z^2 & -1 \\ 1 & \bar{z}^2 \end{pmatrix} \tilde{S}^{-1} \begin{pmatrix} \bar{z}^2 & 1 \\ -1 & z^2 \end{pmatrix}$$

и по формуле (6) вычислим элементы $k_{11}(z, \bar{z}, t), k_{12}(z, \bar{z}, t), n_{11}(z, \bar{z}, t), n_{22}(z, \bar{z}, t)$:

$$k_{11}(z, \bar{z}, t) = \frac{30i(5z^3 + z^2\bar{z}^5 + z^5\bar{z}^2 + 30z^2\bar{z}^2t + 5\bar{z}^3 - 30t)}{Q(z, \bar{z}, t)},$$

$$k_{12}(z, \bar{z}, t) = \frac{15i(-8z^5 + 3z^4\bar{z}^5 + 10z^2\bar{z}^3 + 120z^2t + 15\bar{z})}{Q(z, \bar{z}, t)},$$

так как данные ψ_1, ψ_2 не зависят от t , поэтому

$$n_{11}(z, \bar{z}) = -\frac{2iz^2\bar{z}}{z^2\bar{z}^2 + 1},$$

$$n_{12}(z, \bar{z}) = -\frac{2i\bar{z}}{z^2\bar{z}^2 + 1},$$

где

$$Q(z, \bar{z}, t) = 20z^6 - 50z^3\bar{z}^3 - 600z^3t + 20\bar{z}^6 - 600\bar{z}^3t - 3600t^2 - 225z\bar{z} - 9\bar{z}^5z^5.$$

$\psi_1 = z^2, \psi_2 = 1$ удовлетворяют уравнению (7) только при $U(z, \bar{z}, t) = 0, V(z, \bar{z}, t) = 0$, поэтому определим $\tilde{U}(z, \bar{z}, t), \tilde{V}(z, \bar{z}, t)$ по формулам (10), (11) соответственно в следующем виде:

$$\tilde{U}(z, \bar{z}, t) = \frac{30(5z^3 + z^2\bar{z}^5 + z^5\bar{z}^2 + 30z^2\bar{z}^2t + 5\bar{z}^3 - 30t)}{Q(z, \bar{z}, t)},$$

$$\tilde{V}(z, \bar{z}, t) = \frac{-15(240z^3\bar{z}^{11} + 27z^8\bar{z}^{10} + 400z\bar{z}^9 - 1650z^4\bar{z}^6 + 1440z^6\bar{z}^5t - 43200z^3\bar{z}^5t^2 + 36000z^4\bar{z}^3t + 5400z\bar{z}^5 - 864000zt^3 + P(z, \bar{z}, t))}{Q^2(z, \bar{z}, t)},$$

$$\text{где } P(z, \bar{z}, t) = 160z^{10} + 3375\bar{z}^5 + 120(z^6\bar{z}^8 - z^9\bar{z}^5) + 216000zt^2(z^3 - \bar{z}^3) - 7200z\bar{z}t(z^2\bar{z}^7 + \bar{z}^5).$$

Основным результатом данной статьи является следующая теорема:

Теорема 2 Для поверхности Эннепера второго порядка $\psi_1 = z^2, \psi_2 = 1$, функции $\tilde{U}(z, \bar{z}, t), \tilde{V}(z, \bar{z}, t)$:

- 1) удовлетворяют модифицированному уравнению Веселова-Новикова;
- 2) убывают при $r \rightarrow \infty$, $\tilde{U} = O(\frac{1}{r^3}), \tilde{V} = O(\frac{1}{r^2}), z = re^{i\varphi}, |z| = r$;
- 3) являются вещественно-аналитическими при $t \neq 0$; и имеют особенности в точке $x = y = 0, t = 0$ при $c = -b$. Потенциал $\tilde{U}(z, \bar{z}, t)$ в этой точке не определен и имеет конечное предельное значение

$$\lim_{r \rightarrow 0, \varphi = const} \tilde{U}(z, \bar{z}, 0) = 16 \frac{2}{3} \cos 3\varphi.$$

Доказательство.

Утверждения 1-2 данной теоремы вытекают из теоремы 1 и после подстановки вместо переменных $z = re^{i\varphi}, \bar{z} = re^{-i\varphi}, t = 0$ новых потенциалов $\tilde{U}(z, \bar{z}, t), \tilde{V}(z, \bar{z}, t)$.

Утверждение 3 вытекает из явного вида нового потенциала $\tilde{U}(z, \bar{z}, t)$ при $t = 0$, переходом на полярные координаты (r, φ) и подстановкой $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ в следующем виде:

$$\tilde{U}(r, \varphi) = \frac{60r \cos\varphi (4\cos^3\varphi - 3)(r^4 + 5)}{80r^4 \cos^2\varphi (4\cos^2\varphi - 3)^2 - 9(r^4 + 5)^2}.$$

Применением правила Лопитала несколько раз в пределе от последнего потенциала, полностью доказывается теорема 2.

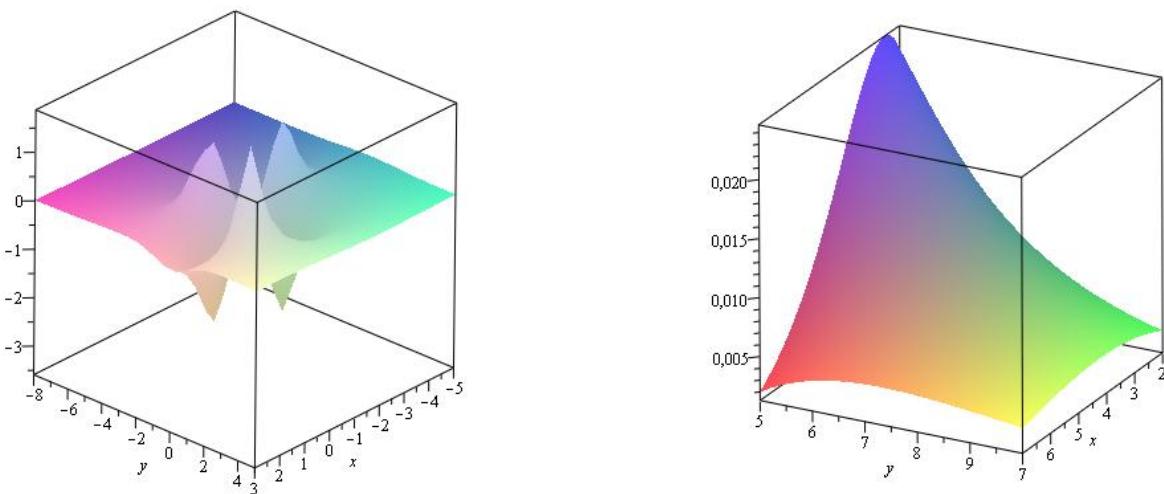


Рисунок 1 - Потенциал $\tilde{U}(x, y, t)$ для поверхности Эннепера 2-го порядка, который проходит через особую точку $x \in [-5, 3], y \in [-8, 5], t \in [0, 10]$ и вне промежутка особой точки $x \in [2, 7], y \in [5, 10], t \in [4, 7]$.

3. Заключение

Поверхность Эннепера большого порядка ($k \geq 3$) будет жестко двигаться, когда потенциал имеет особенность в точке $x = 0, y = 0, t = const > 0$ при условии, что начальную точку поверхности можно выбрать $X_0 = (a, -b, b)$. На рис.1 (справа) видно, что поверхность Эннепера второго порядка будет изгибаться вне промежутка особой точки $x = y = 0, t = 0$ (и большего порядка вне $x = 0, y = 0, t = const > 0$).

Литература

- [1] И.А. Тайманов Разрушающиеся решения модифицированного уравнения Веселова–Новикова и минимальные поверхности. // Теор. и матем. физика. 2015. Т. 182, №. 2. С. 213–222.
- [2] Delong Yu, Q.P. Liu, and Shikun Wang Darboux transformation for the modified Veselov-Novikov equation. // J. of Physics A 35 (2001), 3779-3785.
- [3] И.А. Тайманов Преобразование Мутара двумерных операторов Дирака и геометрия Мебиуса. // Матем. заметки. 2015. Т. 97, вып. 1, С. 129–141.
- [4] Bogdanov L. V. Veselov-Novikov equation as a natural two-dimensional generalization of the Korteweg-de Vries equation. // Theor. Math. Phys. 70 (1987), 309-314.
- [5] Л. В. Богданов О двумерной задаче Захарова-Шабата. // ТМФ, 72:1 (1987), 155-159.
- [6] Manakov S. V. Method of inverse scattering and two-dimensional evolution equations. // Uspekhi matematicheskikh nauk 31 (5) (1976), 245-246. (Russian).
- [7] I. A. Taimanov Modified Novikov-Veselov equation and differential geometry of surfaces. // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 179 (1997), 133-151.
- [8] Taimanov, I.A. Two-dimensional Dirac operator and the theory of surfaces. // Russian Math. Surveys 61 (2006), no. 1, 79-159.

References

- [1] Taimanov, I.A. Blowing up solutions of the modified Novikov-Veselov equation and minimal surfaces. // Theoret. and Math. Phys. 182:2 (2015), 173-181.
- [2] Delong Yu, Q.P. Liu, and Shikun Wang Darboux transformation for the modified Veselov-Novikov equation. // J. of Physics A 35 (2001), 3779-3785.
- [3] Taimanov, I.A. The Moutard transformation of two-dimensional Dirac operators and the Möbius geometry. // Math. Notes 97:1 (2015), 124–135.
- [4] Bogdanov L. V. Veselov-Novikov equation as a natural two-dimensional generalization of the Korteweg-de Vries equation. // Theor. Math. Phys. 70 (1987), 309-314.
- [5] Bogdanov L. V. About two dimensional Zakharov-Shabat problem. // Theor. Math. Phys., 72:1 (1987), 155-159.
- [6] Manakov S. V. Method of inverse scattering and two-dimensional evolution equations. // Uspekhi matematicheskikh nauk 31 (5) (1976), 245-246. (Russian).
- [7] I. A. Taimanov Modified Novikov-Veselov equation and differential geometry of surfaces. // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 179 (1997), 133-151.
- [8] Taimanov, I.A. Two-dimensional Dirac operator and the theory of surfaces. // Russian Math. Surveys 61 (2006), no. 1, 79-159.

УДК 004.421

Б.А. Урмашев *, Д.Б. Айтмукаш, А.А. Ниязбаев, Е.А. Куралов, А.Т. Турсынбай

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Республика Казахстан, г. Алматы

* E-mail: baidaulet.urmashев@kaznu.kz

Моделирование горения пропана-кислородной смеси с использованием систематических процедур упрощения кинетических механизмов

Теоретически исследовано влияние стехиометрии пропано-кислородной смеси на скорость производства окислов углеводорода. Для разработки кинетического механизма при горении богатых смесей пропан - кислород, были выбраны такие механизмы, как GRI- 3.0 Mechanism, n-Butane/oxygen/argon Mechanism, Saudi Aramco 1.3 Mechanism. Экспериментальные данные были взяты из [3] и были сравнены с результатами расчетов при помощи вышеуказанных механизмов. И среди этих трех механизмов к экспериментальным данным были близки данные, полученные с использованием механизма GRI-3.0. Разработан редуцированный механизм, позволяющий описывать горение пропана в богатых смесях при повышенных давлениях. Полученный после редуцирования кинетический механизм, состоящий из 33 веществ и 138 реакций(из них 9 необратимые и 129 обратимые) будет называться далее скелетным. Дан- ный механизм описывает кинетику горения пропана и образования загрязняющих веществ при температурах 1200-2000 К, стехиометрическом соотношении пропан/кислород ($\phi = 2$) и давлении до 8 бар. Проведено тестирование модели на экспериментальных данных по времени задержки воспламенения, по конверсии пропана при высокотемпературном окислении, по изменению концентраций компонентов. Тестирование модели выполнено при начальных температурах смеси 1200-2000 К, давлении $p_0 = 8$ бар и стехиометрическом соотношении топливо/кислород $\phi = 2$.

Ключевые слова: Горение, стехиометрия, редуцирование, пропан, кислород, механизм, индекс важности.

B.A. Urmashев, D.B. Aytmukash, A.A. Niyazbayev, E.A. Kuralov, A.T. Tursunbay
Modeling of combustion a propane-oxygen mixture using the systematic facilitation procedures of kinetic mechanisms

Theoretical research of effect of stoichiometry's propane-oxygen mixture on the rate of production of hydrocarbon oxides. Mechanisms were selected such as GRI-3.0 Mechanism, n-Butane / oxygen / argon Mechanism, Saudi Aramco 1.3 Mechanism for developing the kinetic mechanism in combustion of wealthy mixtures propane - oxygen. Experimental data were taken from [3] and have been compared with the results of calculations by means of the aforementioned mechanisms. Among these three mechanisms were close to the data to experimental data that have been obtained with the use of GRI-3.0. Was developed by the reduced mechanism to describe the combustion propane in wealthy mixtures at high pressures. Obtained after the reduction kinetic mechanism (hereinafter - Skeletal mechanism) consists of 33 substances and 138 reactions (9 of them irreversible and 129 are reversible). Skeletal mechanism describes the kinetics of combustion a propane and formation of polluting substances at temperatures of 1200-2000 K, a stoichiometric ratio of propane / oxygen ($\phi = 2$) and a pressure of 8 bar. A model testing was conducted on of the experimental data on the ignition delay time, the conversion of propane at high temperature oxidation, change component concentrations. Testing the model is fulfilled for the initial mixture temperature 1200-2000K, for the pressure $p_0 = 8$ bar and a stoichiometric fuel / oxygen $\phi = 2$.

Key words: Combustion, stoichiometry, reduction, propane, oxygen, mechanism, importance index.

**Б.А. Урмашев , Д.Б. Айтмұқаш, А.А. Ниязбаев, Е.А. Құралов, А.Т. Тұрсынбай
Пропан - оттегі қоспасының жануын кинетикалық механизмдерді жөнілдетудің
жүйелік рәсімдерін қолдану арқылы модельдеу**

Пропан-оттек қоспасы стехиометриясының көмірсүтек тотықтарының өндірілу жылдамдығына әсері теориялық түргыда зерттелді. Пропан-оттек отынга бай қоспасының жануы кезіндең кинетикалық механизмді әзірлеу үшін келесідей механизмдер таңдал алынды: GRI-3.0 Mechanism, n-Butane/oxygen/argon Mechanism, Saudi Aramco 1.3 Mechanism. Тәжірибелік мәліметтер [3]-тен алынды және жогарыда аталған механизмдер көмегімен алынған есептеулердің нәтижелерімен салыстырылды. Аталған үш механизмнің ішінен тәжірибе нәтижелеріне ең жақын нәтиже GRI-3.0 механизмі көмегімен алынды. Отынга бай қоспалардағы пропанның жоғары қысымда жануын сипаттауга мүмкіндік беретін редукцияланған механизм жасап шыгарылды. Редукциялаудан кейін алынған механизм (бұдан былай – Қаңқалы механизм) 33 заттекten және 138 реакциядан (оның ішінде 9-ы қайтымсыз, 129-ы қайтымды) тұрады. Қаңқалы механизм пропаның жануының кинетикасын және 1200-2000 К температурада пропан мен оттектің ($\phi = 2$) стехиометриялық қатынасында, 8 бар-ға дейінгі қысымда ластаушы заттардың пайда болуын сипаттайды. Тұтану кідрісінің уақыты бойынша, жоғары температуралық тотығу кезінде пропаның конверсиялануы бойынша және компоненттердің концентрацияларының өзгеруі бойынша тәжірибелік мәліметтерде үлгінің тестіленуі жүргізілді. Үлгінің тестіленуі қоспаның 1200-2000 К бастапқы температуралында, $p_0 = 8$ бар қысымда және отын/оттек қоспасының $\phi = 2$ стехиометриялық қатынасында жүргізілді.

Түйін сөздер: Жану, стехиометрия, редукциялау, пропан, оттегі, механизм, маңыздылық индексі.

1. Введение

Горение углеводородов - это очень быстро проходящий и очень сложный процесс. При горении углеводородов образуется очень много различных веществ. Все эти вещества по возможности должны входить в состав детального кинетического механизма. Детальные кинетические механизмы для описания окисления углеводородов могут состоять из десятков/сотен веществ и сотен/тысяч элементарных реакций. По увеличению числа веществ и реакции увеличивается вычислительная сложность. Кинетические модели, основанные на детальных механизмах сложных химических реакций, как правило, представляют собой системы дифференциальных уравнений большой размерности. Размерность определяется списком веществ, который часто превышает $10^2 - 10^3$ реагентов (например, нефтехимические процессы, некоторые реакции горения). Для анализа механизма реакций большой размерности требуется точное описание поведения лишь нескольких веществ, которые называются целевыми. Возникает задача замены исходной системы системой меньшей размерности, в каком – то смысле эквивалентной исходной, сохраняющей при этом изменение концентраций целевых веществ[1]. Задача совместного моделирования гидродинамики и химических превращений может быть успешно решена в случае использования значительно упрощенного «редуцированного» механизма, полученного из детального механизма и описывающего процесс горения с требуемой точностью для выбранного диапазона составов, температур и давлений.

2. Выбор кинетического механизма образования окислов углерода при горении пропана в богатых смесях

Для разработки кинетического механизма, его редуцирования и проверки использовался программный пакет для физико-химического моделирования Chemical Workbench[2],

содержащей множество процедур и функций, облегчающих постановку задач, связанных с исследованием химической кинетики газофазных и гетерогенных процессов, их решение и анализ. Для разработки кинетического механизма при горении богатых смесей пропан - кислород, были выбраны такие механизмы, как GRI- 3.0 Mechanism, n-Butane/oxygen/argon Mechanism, Saudi Aramco 1.3 Mechanism. Экспериментальные данные были взяты из [3] и были сравнены с результатами расчетов при помощи вышеуказанных механизмов. И среди этих трех механизмов к экспериментальным данным были близки данные, полученные с использованием механизма GRI-3.0(Рисунок 1).

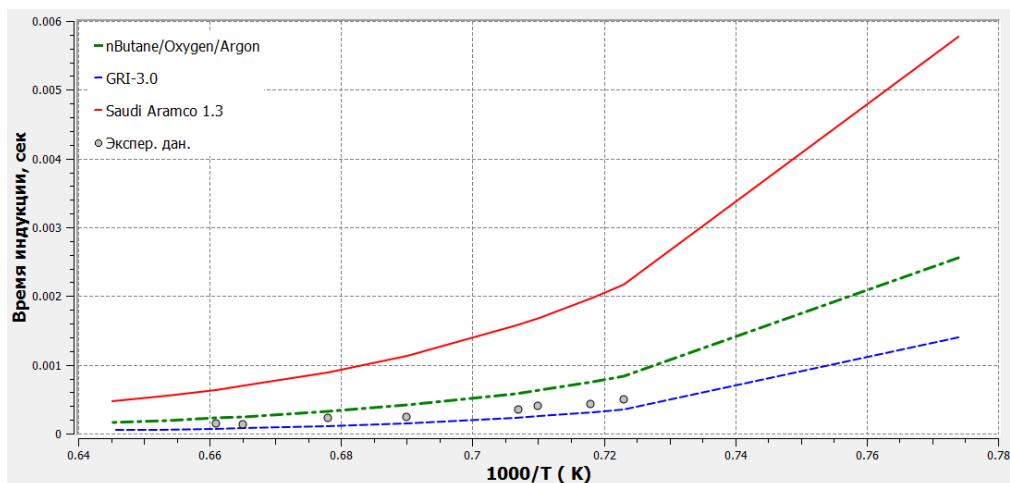


Рисунок 1 – Зависимость времени индукции от входной температуры: линия – Saudi Aramco 1.3, пунктир с точкой – n-Butane/Oxygen/Argon, пунктир – GRI – 3.0, круги – экспериментальные данные.

GRI - 3.0 – оптимизированный механизм, разработанный, чтобы моделировать сгорание природного газа. Он содержит 325 реакций и 53 вещества. Редуцированный механизм был получен с помощью модуля, входящего в состав CWB Reduction Module. Редуцирование кинетического механизма проводилось в три этапа. На первом и втором этапе детальный механизм, описывающий горение пропана, уменьшался до скелетного механизма, который описывает такое же поведение данного процесса, как и детальный, но имеет значительно меньше реакций и веществ, причем все реакции элементарные. На третьем этапе редуцирования из скелетного механизма был получен редуцированный механизм, который имеет такое же описание поведения окисления пропана для богатых смесей, как и детальный, но количество реакций и веществ должно быть таким, чтобы его можно было использовать как в модели разряда, так и в CFD.

3. Разработка скелетного механизма горения пропана

При упрощении механизмов до скелетного применяются математические алгоритмы выбора наиболее важных веществ и элементарных стадий для правильного описания процесса. Для получения скелетного механизма из детального, который описывает те же свойства и поведение процесса горения пропана в следующем диапазоне начальных условий:

- Начальная температура: 1200 – 2000К

- Начальное давление: 8 бар
- Стехиометрическое соотношение пропан/кислород $\phi = 2$

решаем следующие задачи:

- Идентифицировать и удалить ненужные вещества с помощью метода DRG(Direct Relation Graph – граф прямых связей)[4].
- Идентифицировать и удалить ненужные реакции с помощью метода CSP(Calculation Singular Perturbation – вычисление сингулярных возмущений)[4].
- Идентифицировать и удалить дополнительные ненужные вещества и реакции с помощью метода DSA(Direct Sensitive Analysis – прямой анализ чувствительности)[5].

Использованные методы считаются наиболее эффективными и простыми подходами[5]. При получении упрощенного механизма по разными методами используется одна и та же процедура. Алгоритм ставит в соответствие к каждой реакции число (веществу в случае DRG и реакцию в случае CSP) – индекс важности. Для DRG и CSP индекс важности нормирован и принимает значение от нуля до единицы. Для метода DSA он не нормирован, принимает любые неотрицательные значения, и чем больше это число, тем важнее реакция(вещества). В упрощенный механизм входят только те вещества(реакции), для которых индекс важности выше порогового значения. Через него можно контролировать число веществ и реакций в упрощенном механизме, и следовательно, влиять на точность описания процесса упрощенным механизмом. Меняя значение порогового индекса можно управлять степенью упрощения механизма и получать механизмы разных размеров и разной точности. Если пороговый индекс слишком мал, не удается упростить механизм – из него просто ничего не может быть исключено. Если пороговый индекс слишком велик, то в механизме не останется путей превращения реагентов в продукты и химический процесс просто перестанет идти. Поэтому упрощение механизма отдельно взятым методом сводится к нахождению оптимального значения порогового индекса, при котором механизм уменьшен настолько, что дальнейшее увеличение порогового индекса приведет к слишком большой погрешности. Размеры механизмов, полученных разными методами при начальной температуре 1500 К и давлении 8 бар приведены в таблице 1.

4. Результаты

После расчета с использованием детального и редуцированного (после метода DRG) механизмов, можно увидеть зависимость времени индукции от начальной температуры на рисунке 2 и изменение температуры по времени при заданной входной температуре на рисунок 3, и надо отметить, что на графике линии вполне совпадают. Значит полученным редуцированным механизмом можно исследовать горение пропана с кислородом как в детальном механизме.

После применения метода DRG в механизме осталось 33 вещества и 210 реакции. Этот механизм дальше оптимизируем методом CSP(Рисунок 4 и 5).

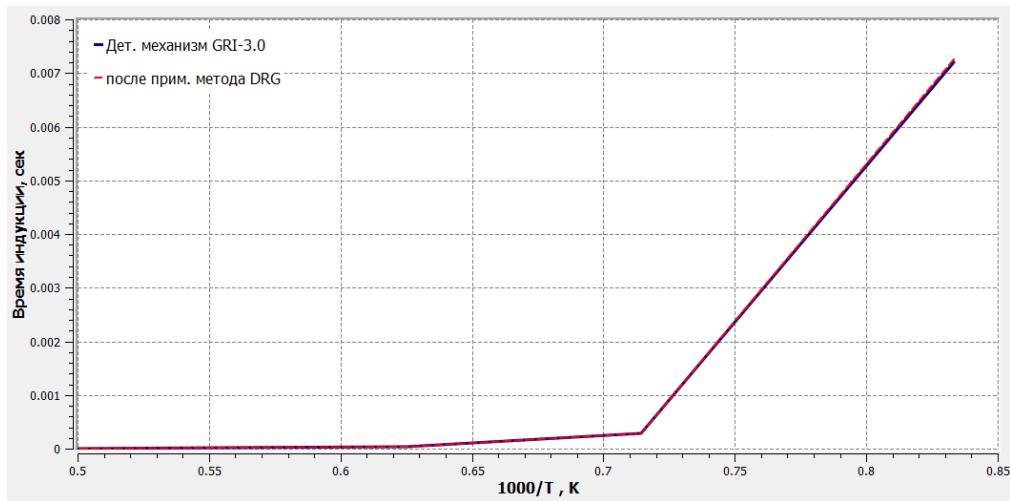


Рисунок 2 – Зависимость времени индукции от входной температуры

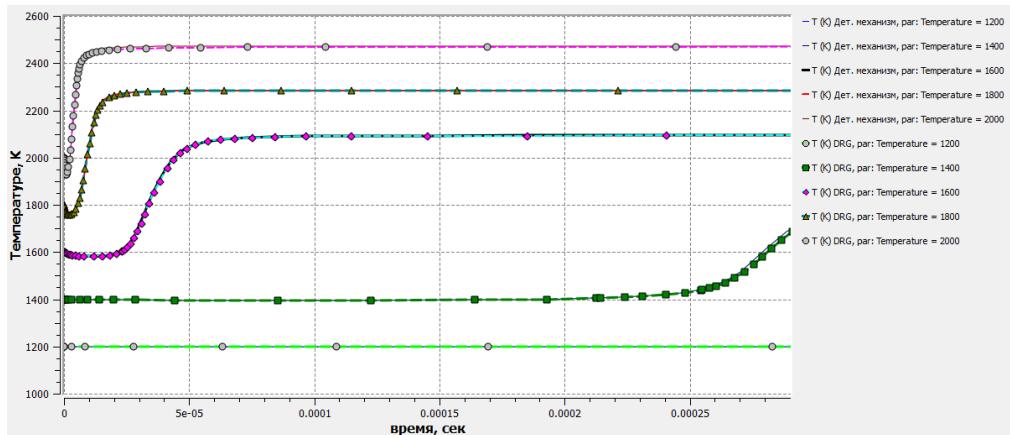


Рисунок 3 – Изменение температуры по времени при заданной входной температуре

После применения метода редуцирования CSP в механизме осталось 33 вещества и 185 реакций. Для получения более оптимизированного механизма в последнюю очередь применяем метод DSA(рисунок 6 и 7).

После применения метода DSA получили скелетный механизм горения пропана в кислороде. Здесь линиями обозначены изменения температуры во времени и пунктирной линией обозначены изменения температуры во времени после метода DSA.

В графике заметно несовпадение линии с пунктирной линией. Это из – за упрощения механизма. Несовпадение показывает насколько упрощена детальный механизм.

Полученный после редуцирования кинетический механизм, состоящий из 33 веществ и 138 реакций(из них 9 необратимые и 129 обратимые) будет называться далее скелетным. Данный механизм описывает кинетику горения пропана и образования загрязняющих веществ при температурах 1200-2000 К, стехиометрическом соотношении пропан/кислород ($\phi = 2$) и давлении до 8 бар.

Скелетный механизм горения пропана является еще довольно большим. Поэтому для редуцирования скелетного механизма используем экспертный анализ.

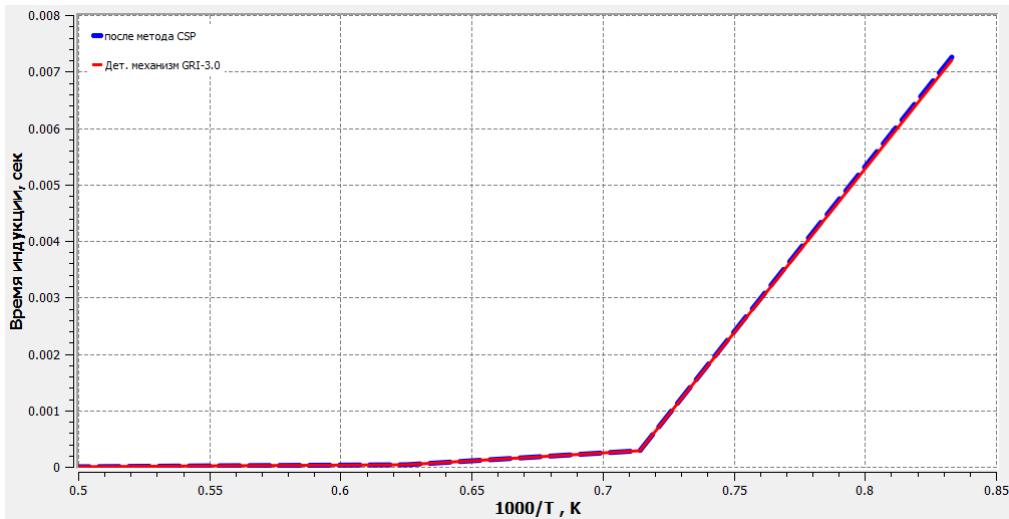


Рисунок 4 – Зависимость времени индукции от входной температуры

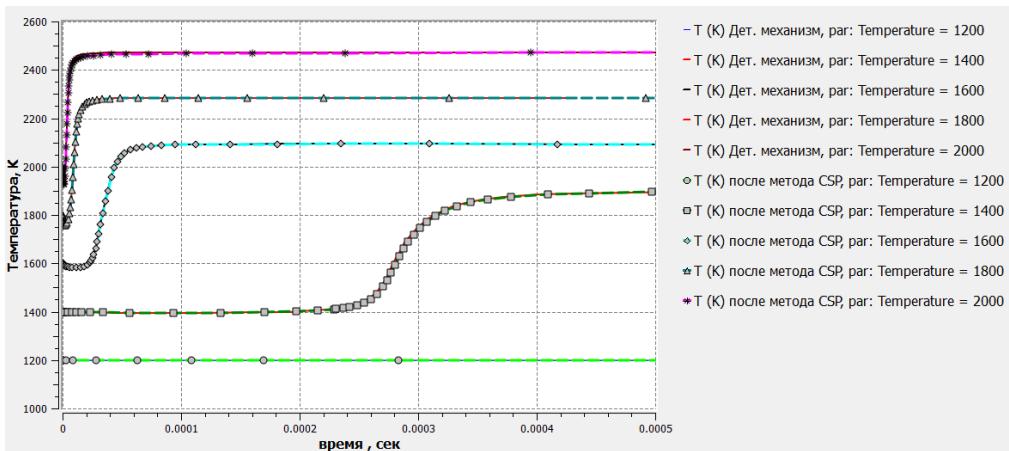


Рисунок 5 – Изменение температуры по времени при заданной входной температуре

Таблица 1. – Размеры механизмов, полученных после редуцирования реакций стехиометрического горения пропана в кислороде ($\phi = 2$) с начальной температурой 1500 К при давлении 8 бар.

Механизм	Вещества	Реакций
Детальный	53	325
DRG	33	210
CSP	33	185
DSA	33	138

Для этого используем диаграмму путей реакций в каждый момент времени горения пропана при начальной температуре 1500 К и давлении 8 бар[6]. По этой диаграмме были определены основные пути гибели исходных веществ и образования продуктов.

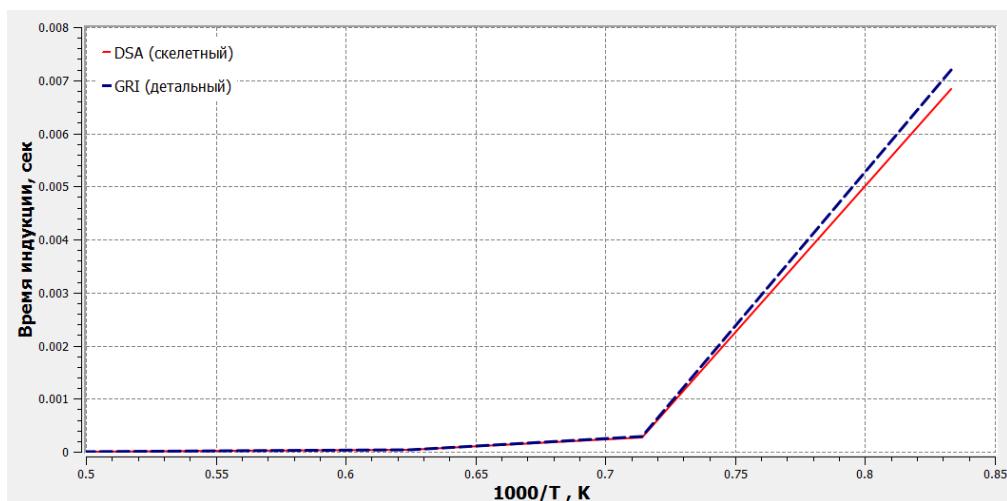


Рисунок 6 – Зависимость времени индукции от входной температуры

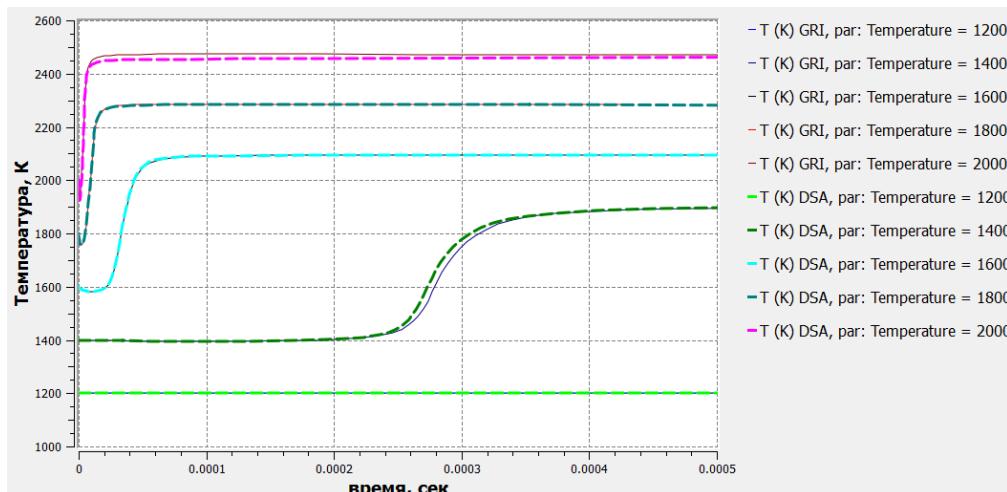
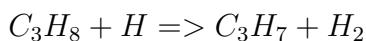


Рисунок 7 – Изменение температуры по времени при заданной входной температуре

На рисунке 9 можно заметить, что пропан в основном разлагается на реагенты $C_3H_7, C_2H_5, CH_3, CH_4$ и с участием кислорода появляются очень много разных промежуточных веществ. Рассмотрим из диаграммы один путь разложения пропана:



Теперь, для того чтобы исключить промежуточные стадии из механизма, надо определить, в каких главных реакциях образуется радикал C_3H_7 . На рисунке 9 видно что основная реакция гибели пропана в рассматриваемый момент времени, это



Аналогичным образом выделяются и другие реакции из цепи разложения пропана,

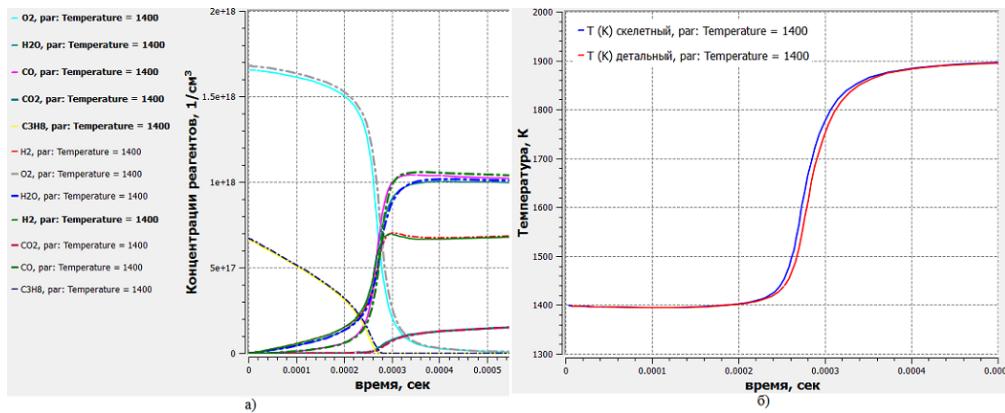


Рисунок 8 – Поведение основных концентраций а) и температуры б) в процессе горения смеси пропан – килород ($\text{C}_3\text{H}_8 : \text{O}_2 = 2:1$), полученных с использованием GRI-3.0 механизма(жирный шрифт и пунктирная линия с точками) и редуцированного механизма в процессе горения пропана реакции для давления 8 бар. и начальной температуре 1500 К.

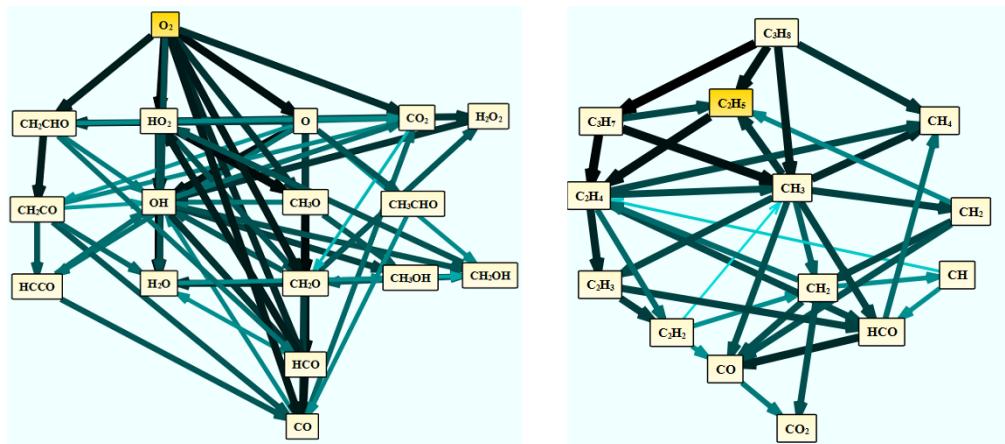
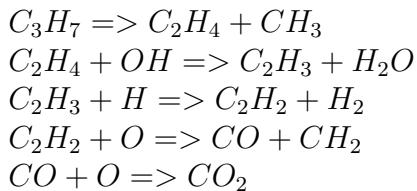
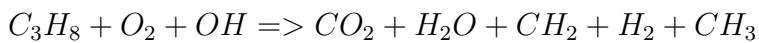


Рисунок 9 – Диаграмма путей реакций гибели исходных веществ в момент времени в процессе горения пропана при давлении 8 бар и начальной температуре 1500 К.



которые дают одну глобальную реакцию, описывающую всю эту цепь:



По истечению времени появляются различные вещества и некоторые из них объединяется в одно вещество. Все эти реакции проходят в течение некоторой милли/микро секунды и у этих реакциях скорость прохождения очень высокая. На рисунке 10 наблюдается скорость образования монооксида углерода по времени. Самая высокая скорость

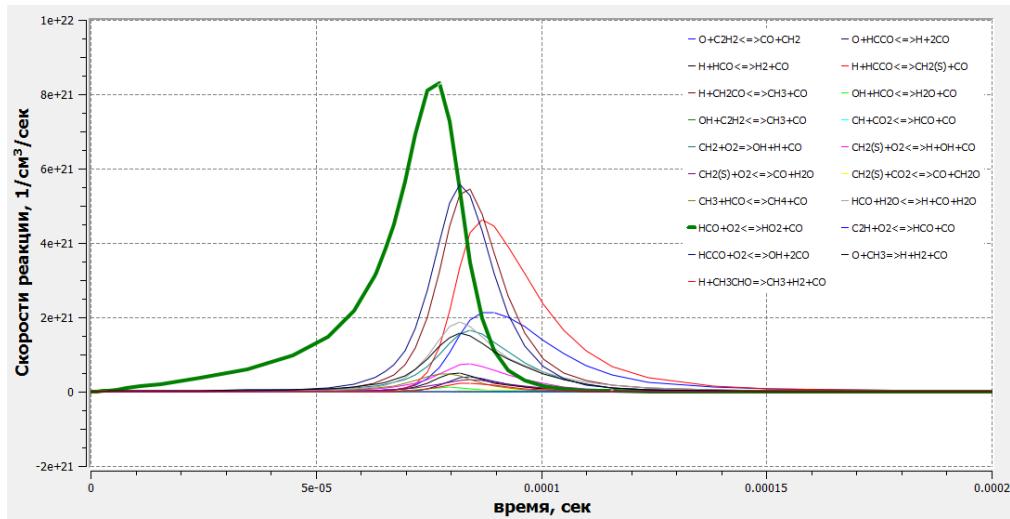


Рисунок 10 – Скорости реакции образования газа в процессе горения пропана при давлении 8 бар и начальной температуре 1500 К.

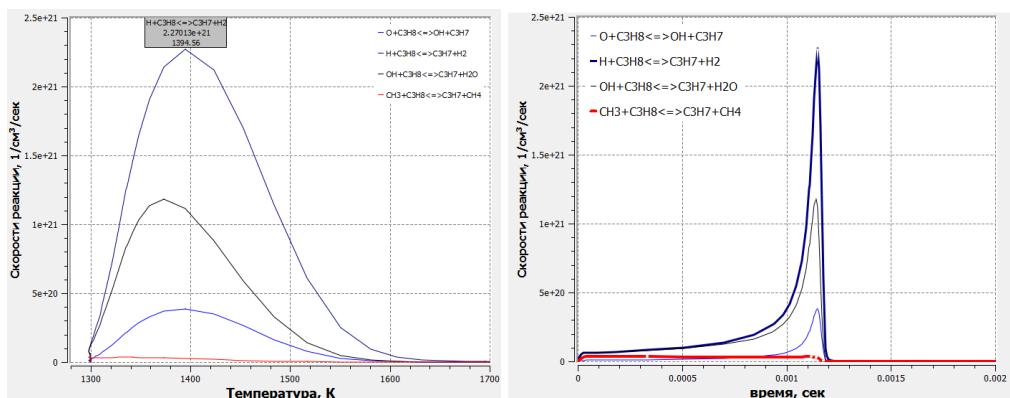


Рисунок 11 – Скорости реакции разложение пропана в процессе горения при давлении 8 бар и начальной температуре 1300 К.

наблюдается в реакции $HCO + O_2 \rightleftharpoons HO_2 + CO$ и время прохождения этой реакции самое большое. На рисунке 11 показана скорость реакции разложения пропана по времени и по температуре. По истечению времени скорость реакции замедляется и соответственно концентрация монооксида углерода уменьшается.

5. Заключение

Для исследования горения пропано - кислородных смесей разработан редуцированный механизм, позволяющий описывать горение пропана в богатых смесях при давлении 8 бар. Еще одним достоинством разработанного механизма является его способность правильно предсказывать такие интегральные характеристики, как время задержки воспламенения и скорость распространения ламинарного пламени для смесей легких углеводородов и для смеси пропилена с кислородом. На основе анализа чувствительно-

сти установлено, что степень влияния различных реакций на скорость распространения ламинарного пламени пропано - кислородной смеси существенно зависит от ее состава. Были показаны основные пути разложения пропана через диаграмму путей реакции. Были определены скорости реакций образования CO и CO_2 .

Литература

- [1] Е.В.Степашина, А.И.Байтимерова, С.А. Мустафина Программный комплекс автоматизации процедуры уточнения механизма химической реакции на основе DRGEP-метода. – Башкирский химический журнал. –2011. Том 18. №3 –4 с.
- [2] Deminsky M., Chorkov V., Belov G., Cheshigin I., Knizhnik A., Shulakova E., Shulakov M., Iskandarova I., Alexandrov V., Petrusev A., Kirillov I., Strelkova M., Umanski S., B. Potapkin. Chemical Workbench – Integrated Environment for Material Science. –28. 169, –2003.
- [3] Crina I. Heghes, Chem. Eng. C1-C4 Hydrocarbon Oxidation Mechanism. // Heidelberg, September –2006. –119 p.
- [4] М.А. Деминский, А.С. Петрусёв, М.И. Стрелкова и Б.В. Потапкин Влияние стехиометрии смеси на скорость производства NOx при использовании равновесных типов разрядов для стабилизации горения метан – воздушных смесей // www.chemphys.edu.ru/pdf/2013-09-24-001.pdf –2013. –14 с.
- [5] Лебедев А.В., Окунь М.В., Баранов А.Е., Деминский М.А., Потапкин Б.В. Систематическая процедура упрощения кинетических механизмов химических процессов // www.chemphys.edu.ru/pdf/2010-09-06-001.pdf –2010. –21 с.
- [6] Хорьков В. А., Стрелкова М. И., Токарь П.М., Окунь М.В., Плаксин В.А. , Потапкин Б.В. Визуализация и анализ сложных кинетических механизмов. // www.sv-journal.org/2011-2/02/index.html , –2011. Том 3. №2 –12-26 с.

References

- [1] E.B. Stepashina, A.I. Baytimerova, S.A. Mustafina Programmnyi kompleks avtomatizatsii protsedury utochneniya mehanizma himicheskoi reaktsyi na osnove DRGEP - metoda. –Bashkirskii khimicheskii zhurnal. –2011. Tom 18. №3 –4 s.
- [2] Deminsky M., Chorkov V., Belov G., Cheshigin I., Knizhnik A., Shulakova E., Shulakov M., Iskandarova I., Alexandrov V., Petrusev A., Kirillov I., Strelkova M., Umanski S., B. Potapkin. Chemical Workbench – Integrated Environment for Material Science. –28. 169, –2003.
- [3] Crina I. Heghes, Chem. Eng. C1-C4 Hydrocarbon Oxidation Mechanism. // Heidelberg, September –2006. –119 p.
- [4] M.A. Deminsky, A.S. Petrusev, M.I. Strelkova i B.V. Potapkin Vliyanie stehiometrii smesi na skorost' proizvodstva NOx pri ispol'zovaniyu ravnovesnyh tipov razryadov dlya stabilizasyi gorenija metan - vozдушnyx smesei // www.chemphys.edu.ru/pdf/2013-09-24-001.pdf –2013. –14 s.
- [5] Lebedev A.V., Okun' M.V., Baranov A.E., Deminsky M.A., Potapkin B.V. Sistematischekaya protsedura uproscheniya kineticheskikh mehanizmov himicheskikh prosessov // www.chemphys.edu.ru/pdf/2010-09-06-001.pdf –2010. –21 s.
- [6] Chorkov V.A., Strelkova M.I., Tokar' P.M., Okun' M.B., Plaksin B.V. Vizualizatsiya i analiz slozhnykh kineticheskikh mekhanismov. //www.sv-journal.org/2011-2/02/index.html , –2011. Том 3. №2 –12-26 с.

1- бөлім
Механика

Раздел 1
Механика

Section 1
Mechanics

УДК 532.5

¹ М.Б. Кошумбаев, Д.Е. Туралина, Д.Ж. Босинов *

¹ "Академик Ш.Ш. Шокин атындағы КазФЗ институты" Акционерлік қоғамы, Республика
Казахстан, г. Алматы

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Республика Казахстан, г. Алматы
* E-mail: dansho.91@mail.ru

**Бөгетсіз ГЭС-терде қолданылатын бір бағыттағы ағыс гидротурбинасының
тиімді параметрлерін анықтау мақсатында жүргізілген теориялық және
тәжірибелік зерттеулер**

Бұл мақалада бөгетсіз ГЭС-терге арналған бір бағыттағы ағыс гидротурбинасының тиімді параметрлерін анықтау мақсатында жүргізілген теориялық және тәжірибелік зерттеулер нәтижесі баяндалады.

Теориялық және тәжірибелік зерттеулер жүргізуіндің мақсаты гидротурбинаның электр куатын өндіруін арттыру болып табылады.

Теориялық зерттеулер нәтижесінде гидротурбина роторында орналастырылатын қалақшалардың саны есептелінді. Қалақшалардың санына байланысты қалақшалардың қалыңдықтары анықталынды. Гидротурбина роторында орналастырылатын қалақшалардың әр түрлі пішіндері COMSOL Multiphysics бағдарламасында салынып, солардың ішіндегі ең тиімдісі анықталынды. Тиімді деп таңдалған қалақшаның орналасу бұрышына сәйкес оның бойындағы судың жылдамдығының өзгерісі, судың қалақшага түсіретін қысымы зерттелінді. Зерттеу нәтижесінде ең тиімді деп саналатын қалақшаның орналасу бұрышы анықталды, су қалақшаны ағып өткен кезінде құйын және кавитация процесі пайда болатындығына көз жеткізілді. Есеп сығылмайтын сүйкіткіштерге арналған Навье-Стокс теңдеуіне Direct Numerical Simulation (DNS) әдісі қолданылып COMSOL Multiphysics бағдарламасында шыгарылды.

Тәжірибелік зерттеулер академик Ш.Ш. Шокин атындағы КазФЗ энергетика институтының гидротехникалық құрылыштар менсу электр станциясы зертханасында жүргізілді. Тәжірибелік зерттеуде судың шығынының өзгерісіне байланысты гидротурбина роторының минутына қанша айналым жасайтыны және қанша электр қуатын өндіретіні зерттелді.

Түйін сөздер: қайта жаңааратын энергия көздері, гидротурбина, қалақша, ротор, бөгетсіз ГЭС, генератор, COMSOL Multiphysics.

M.B. Koshumbaev, D.E. Turalina, D.Zh. Bossinov

Theoretical and experimental investigations to define optimal parameters of straight-flow turbine for damless hydro power station

In the article there are theoretical and experimental investigations presented with regards to determination of optimal parameters of straight-flow turbine for damless hydro power stations. The goal for conducting theoretical and experimental investigations is to increase electric power of hydro turbines. Upon the results of the theoretical research, the amount of blades located in the rotor of the hydro turbine was calculated. The measures of blade thickness were undertaken depending on their overall number. To define the most optimal profile (shape), different blade profiles located in the rotor of the hydro turbine were preliminarily put into the COMSOL Multiphysics software.

Regarding the blade defined as the most optimal in accordance with its angle of location, calculations of inner flown water velocity changes along with water pressures experienced by the blade were produced. As a result of the research outcomes, the most optimal angle for blade location was calculated, it was possible to observe the processes of vortex and cavitation during water flows through the blade. The calculations with regards to incompressible liquids were measured with the help of COMSOL Multiphysics software through application of Direct Numerical Simulation (DNS) method on the base of Navier-Stokes equation. The experimental investigations were conducted in the Laboratory of Hydro Power Stations and Hydro Power Constructions within the Kazakh Scientific Research Institute of Energy named after Sh. Chokin. In the framework of the experimental investigations there were defined a number of revolutions per minute with regards to the rotor of the hydro turbine depending on changes of water withdrawals as well as the amount of electric power generation.

Key words:renewable energy sources (renewables), hydro turbine, blade, rotor, hydro power station, generator, COMSOL Multiphysics.

М.Б. Кошумбаев, Д.Е. Туралина, Д.Ж. Босинов

Теоретические и экспериментальные исследования по определению оптимальных параметров прямоточной гидротурбины для бесплотинной ГЭС

В данной статье представлены результаты теоретических и экспериментальных исследований по определению оптимальных параметров прямоточной гидротурбины для бесплотинной ГЭС. Целью проведения теоретических и экспериментальных исследований является повышение электрической мощности гидротурбины. По результатам теоретических исследований было определено оптимальное количество лопастей, располагаемых в роторе гидротурбины. В зависимости от их количества была найдена толщина лопасти. Для определения наиболее оптимального варианта, различные профили лопастей, располагаемых в роторе гидротурбины, были предварительно спроектированы (построены) в программе COMSOL Multiphysics. В отношении лопасти, определенной в качестве наиболее оптимальной, в соответствии с ее углом расположения были исследованы изменения скорости воды, проходящей через нее, а так же давление воды, оказываемое на лопасть. По результатам исследования был рассчитан самый оптимальный угол расположения лопасти, наблюдалось образования вихря и кавитационного процесса во время протекания воды через лопасть. Расчеты проводились с помощью программы COMSOL Multiphysics для уравнения Навье-Стокса для несжимаемых жидкостей с применением метода Direct Numerical Simulation (DNS).

Экспериментальные исследования проводились в лаборатории гидроэлектростанций и гидроэлектрических сооружений КазНИИ Энергетики имени академика Ш.Ч.Чокина. В рамках экспериментальных исследований были определены количество оборотов в минуту ротора гидротурбины в зависимости от изменения расходов воды, а так же количество выработки электрической мощности.

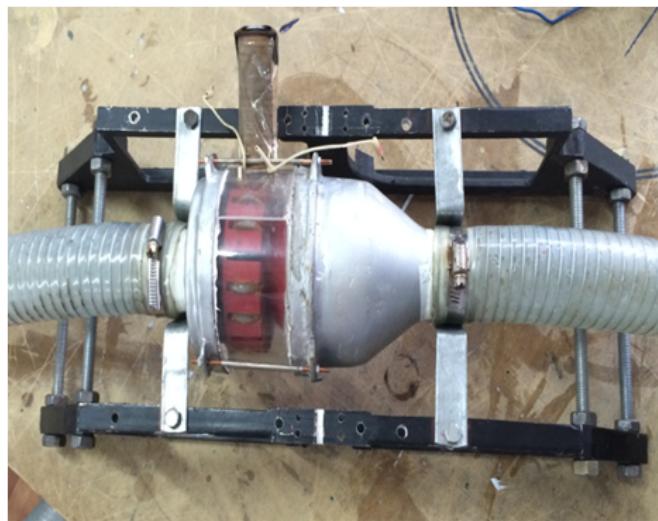
Ключевые слова: возобновляемые источники энергии, гидротурбина, лопасть, ротор, бесплотинная ГЭС, генератор, COMSOL Multiphysics.

Электр энергиясын өндірудің құнын тәмендету қазіргі таңда негізгі мәселелердің бірі болып табылады. Электр энергиясын алғатын дәстүрлі жылу станцияларында қолданылатын қатты, сүйық және газ тәріздес отындардың бағасы күннен күнге артуымен қоса, оның қоршаған ортага зияны да көп болып отыр. Бұл станциялардың экологиялық қауіпсіздігін қамтамасыз ету үшін үлкен қаржы жұмсалуымен қоса, күткен тиімділікті алғып келмейді. Соңдықтан да қайта жақаралын энергия көздерін қолданған тиімді болады [4]. Соның бірі 1 суреттегі бөгетсіз ГЭС-терден электр қуатын өндіретін гидротурбина болып келеді [7]. Осы гидротурбинаның негізі бөлшегінің бірі қалақша болып табылады. Қалақша пішінінің ең тиімдісін берген жағдайда, гидротурбина роторының айналымы артып, ол өз кезегінде генератор орамында электр қуатының өндірілуін арттырады. Әр түрлі қалақшалардың пішіндері COMSOL Multiphysics бағдарламасында

салынды. Ең тиімді деп таңдалған қалақшаның орналасу бұрышы 0^0 , 30^0 , 45^0 болған кездеңі судың жылдамдығы мен қысым эпюрасының өзгерістеріне байланысты графиктер алынды. Соган сәйкес қалақшаның ең тиімді орналасу бұрышы анықталды. Сонымен қоса бұл мақалада қалақшалардың санына байланысты қалақша қалындығы анықталды. Қарастырылған қалақшалардың ішіндегі ең тиімді деп саналған қалақша пішіні гидротурбина роторына орналастырылды. Соган байланысты гидротурбинада тәжірибелік зерттеулер академик Ш.Ш. Шокин атындағы КазГЗ энергетика институтының гидротехникалық құрылыштар мен су электр станциясы зертханасында жүргізілді.

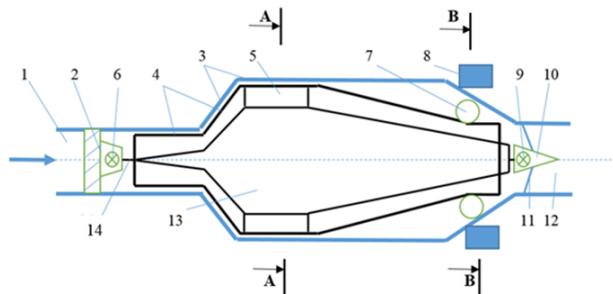
Гидротурбина түсінігі

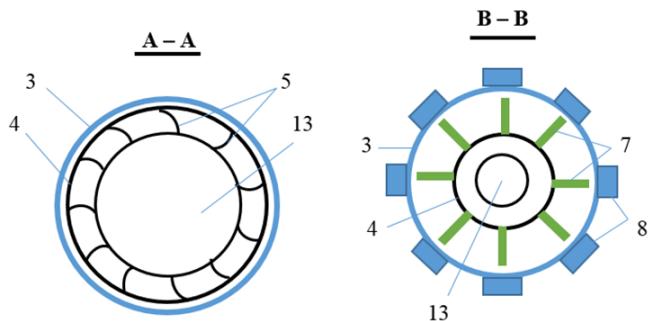
Гидротурбина - бұл өзіне алып келетін ағынның энергиясын гидротурбина роторындағы механикалық энергияга түрлендіретін гидравликалық қозгалтқыш. Ротор арқылы бұл қозгалтқыш гидрогенераторға жалғанады және олар гидроагрегат құрайды [7]. Осылайша, гидравликалық энергия гидротурбинада механикалық энергияға және одан кейін гидрогенераторда электр энергиясына түрленеді [1]. Біз қарастырып отырган бөгетсіз ГЭС-терде қолданылатын бір бағыттағы ағыс гидротурбинасы 1 суретте көрсетілген.



1 сурет – Бір бағыттағы ағыс гидротурбинасының жалпы түрі

Бір бағыттағы ағыс гидротурбинасының сыйбасы мен $A - A$ және $B - B$ қималары 2 суретте көрсетілген.





2 сурет – Бір бағыттағы ағыс гидротурбинасының сыйбасы

Гидротурбина келесі түрде жұмыс атқарады. Судың ағыны 1 су таратқыштан қозғала отырып, 2 құйындағатқышқа кіріп, 13 роторды айнала ағады. Судың ағыны 5 қалақшаларга әсер етіп, сальнигі бар 6, 9 подшипниктерге бекітілген роторды өзінің 14 білігі бойында айналдырады. Ротордың айналымы 7 магниттерді қозғалысқа келтіруінің арқасында, 8 генератор орамында электр тоғын тудырады. Гидротурбинаны ағып өткен 12 су бағыттауышқа барады (2 сурет). Гидроагрегат 1 су таратқыштан, ағын ортасын 2 құйындағатқыштан, 3 көлденең цилиндрлі қаптамадан, 4 диффузорлы-конфузорлық корпустың кескін үйлесімнен, 5 қалақшалардан, сальнигі бар 6, 9 подшипниктерден, 7 магниттерден, 8 генератор орамынан, 10 кавитацияны азайтқыш құрылғыдан, 11 подшипниктерді бекіткіштен, 12 су бағыттауыштан, 13 ротордан, ротордың айналу 14 білігінен тұрады [7].

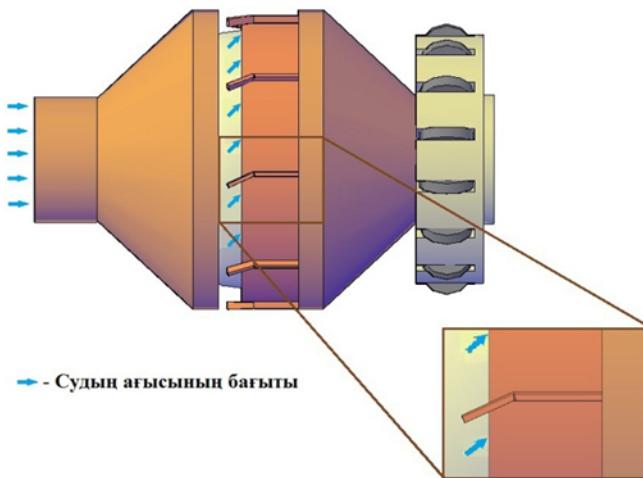
Математикалық моделі

Қалақша бойындағы судың жылдамдығы мен қысым эпюрасының өзгерісі COMSOL Multiphysics бағдарламасындағы сұйықта арналған Навье-Стокс теңдеуіне Direct Numerical Simulation (DNS) әдісі қолданылып шығарылды [2]. Сұйықта арналған Навье-Стокс теңдеулер жүйесі қозғалыс және үзіліссіздік теңдеулерін тұрады [2, 3, 5]:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \nabla \cdot [-p \mathbf{I} + \mu(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)] + \mathbf{F}$$

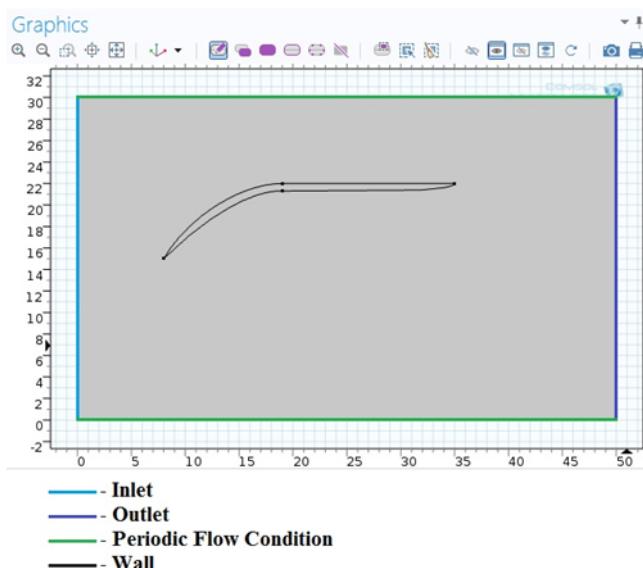
$$\rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

Үзіліссіздік теңдеуі – массаның сақталу заңына, ал қозғалыс теңдеуі – импульстің сақталу заңына негізделген [5]. Есепті COMSOL Multiphysics бағдарламасында шығарубарысында гидротурбина роторында орналасқан қалақша бөлігі таңдал алынды (3 сурет).



3 сурет – Гидротурбина роторында орналасқан қалақша бөлігі

COMSOL Multiphysics бағдарламасында есепті сандық түрде шыгару үшін екі өлшемді ауданға қалақша салынды (4 сурет).

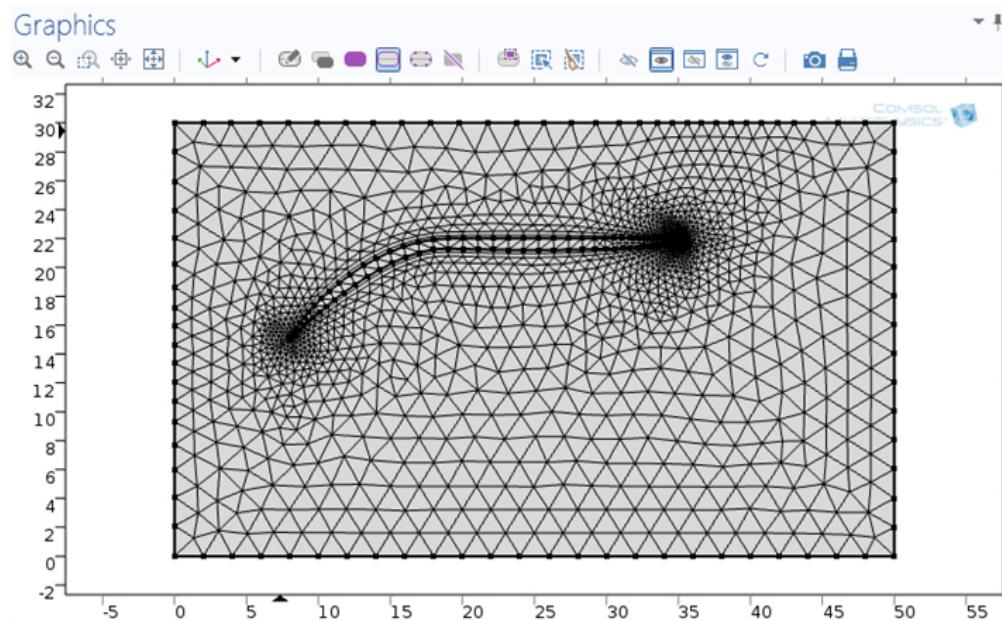


4 сурет – Есеп шыгарылатын аудан

Inlet: $u = u_0$

Outlet: $[-p\mathbf{I} + \mu(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T)]\mathbf{n} = -\hat{p}_0\mathbf{n}$, $\hat{p}_0 \leq p_0$

Periodic flow condition: $\mathbf{u}_{source} = \mathbf{u}_{dest}$, $p_{source} = p_{dest}$ **Wall:** $u = 0$ Судың құбыры арқылы гидротурбинаға кіре беріс бөлігінде бағыттауштар орналасқан, сол арқылы судың ағысы қалақшага 45° – пен бағытталады. Соган сәйкес судың бастапқы жылдамдық өрісін x және y бағытында 1 м/с деп бердік. Шекаралық шарттарға Periodic Flow Condition берген себебіміз қарастырылып отырган қалақшага төменгі және жоғарыда орналасқан қалақшалар бойындағы судың жылдамдығының өзгерісі әсер етеді. Есеп шыгарылатын аудандағы тордың жиілігі 5 суретте көрсетілген.



5 сурет – Қалақша пішіні бойындағы тордың сызбасы

Есеп шығарылатын тіктөртбұрыштың биіктігі 30 мм, ал ұзындығы 50 мм деп алынды. Қалақшаның ұзындығын 25 мм деп берілді. Есепті уақытқа тәуелді деп, арадан 20 с өткен кездегі судың жылдамдығы мен қысымның өзгерісінің графигі қалақшаның орналасу бұрышы 0° , 30° , 45° болған жағдайында есептелінді (6-11 суреттер). Мұнда қызыл түсті бағыт көрсеткіштер (стрелкалар) арқылы су ағысының бағыты бейнеленді. Су жылдамдығының өзгерісі қанық көк түстен қанық қызыл түс аралығында өзгеруі суреттің оң жақ баганында көрсетілген. Судың түсі қанық көк болған жағдайда құйын мен кавитация процессин көрсетеді, ал қанық қызыл болған жағдайда жылдамдықтың барынша артқанын сипаттайды. Қысымның таралуына келсек, судың түсі қанық көктен қанық қызылға өзгерген кезде қысым барынша жоғарғы мәнге ие болады.

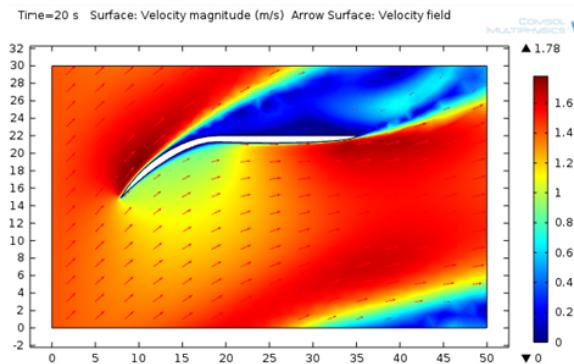
Қалақшаның орналасу бұрышы 0° болған жағдай

Қалақшаның орналасу бұрышы 0° болған кездегі судың жылдамдығының өзгерісі мен қалақша бойындағы қысымның таралуы 6, 7 суреттерде көрсетілген. Судың қалақшаны ағып өткен кезінде пайды болған құйын мен кавитация процессинің аз екені байқалады. Судың жылдамдығы 1 м/с-тан 1.78 м/с-қа дейін артты. Қысымның қалақша бойында таралуы 196-197 кПа аралығында болды.

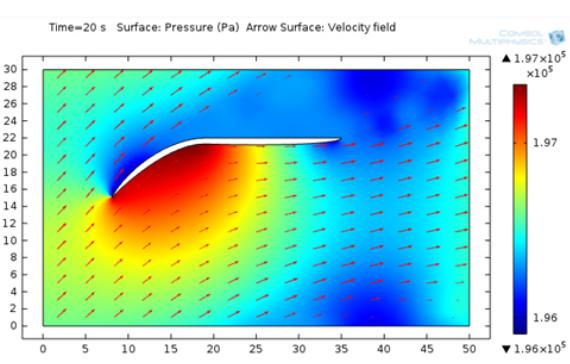
Қалақшаның орналасу бұрышы 30° болған жағдай

Қалақшаның орналасу бұрышын 30° деп алған кездегі судың жылдамдығының қозғалысы 8 суретте бейнеленген. Судың қалақшаны ағып өткен кезінде құйын мен кавитация процессин артқаның көреміз. Ол өз кезегінде гидротурбина да дірілді арттырып, қалақшаның тозуына алып келеді [6]. Қалақшаның бұрышы 30° болған жағдайдагы қысымның таралуы 9 суретте көрсетілген. Бұл суретте қысымның ең жоғарғы шегі 199 килопаскальға дейін жеткені байқалады.

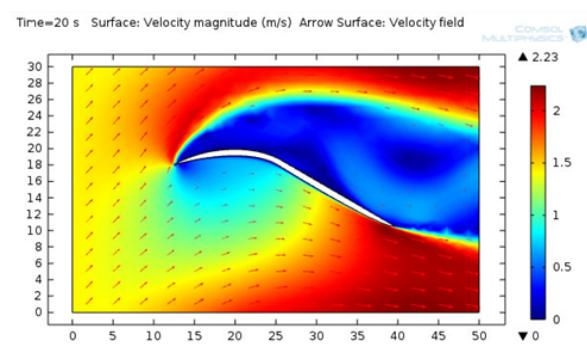
Қалақшаның орналасу бұрышы 45° болған жағдай



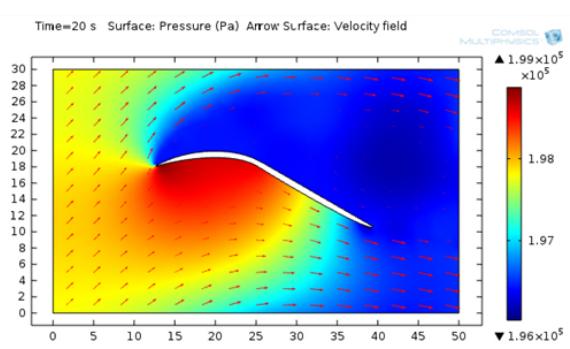
6 сурет – Судың жылдамдығының өзгерісі



7 сурет – Қысымның таралуы

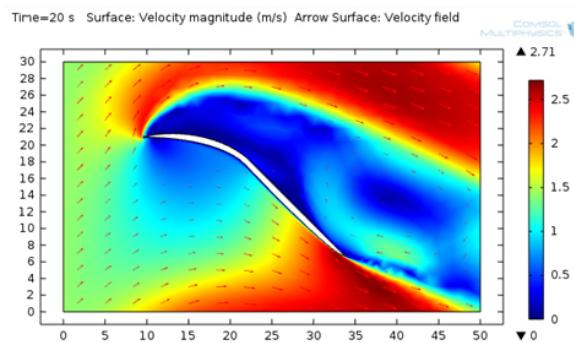


8 сурет – Судың жылдамдығының өзгерісі

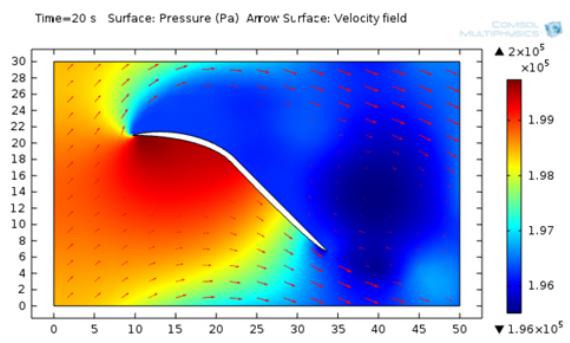


9 сурет – Қысымның таралуы

Қалақшаның бұрышын 45^0 деп қарастырган кездеңі судың жылдамдығының қозғалысы 10 суретте көрсетілген. Бұл суретте қалақша бойындағы құйын мен кавитация процессинің максималды шегіне жеткені бейнеленген. Ол өз кезеңінде гидротурбинаның жұмыс істеуіне кері әсерін тигізді [6]. Судың жылдамдығының өзгерісі 2.71 м/с-қа дейін артқаны көрсетілген. Судың жылдамдығы қалақша бойында тұрақсыз екеніне байқалды. Қалақшаның бұрышын 45^0 деп берген кездеңі қысымның таралуы 11 суретте көрсетілген. Қысымның ең жоғарғы шегі 200 килопаскальга дейін жетті.



10 сурет – Судың жылдамдығының өзгерісі



v11 сурет – Қысымның таралуы

Қалақша бойындағы қысымдардың таралуы 196 -200 кПа аралығында болды. Салыстырмалы түрде қалақша бойына түсетін қысымдар айтартықтай өзгермеген соң, қалақшаны көтеруші күштінде әсері аса қатты өзгермейді. Қорыта келгенде, қарасты-

рылған қалақша бұрыштарының ішінен 0^0 болған жағдай тиімді деп табылды. Қалақшаның орналасу бұрышы 0^0 болған жағдайда, қалақша бойында құйын мен кавитация процесі басқа орналасу бұрыштары мен салыстырганда төмен екені байқалды. Сол себептен қалақшалардың кавитация процесінен закымдануы азаяды. Соған байланысты гидротурбинаның жұмыс жасау уақыты да артады. Қалақша бұрышының 0^0 болған жағдайы гидротурбина роторына орналастырылып (12 сурет), сол бойынша гидротурбинада тәжірибелік зерттеулер жүргізілді (1 кесте).

Қалақша қалындығын анықтау

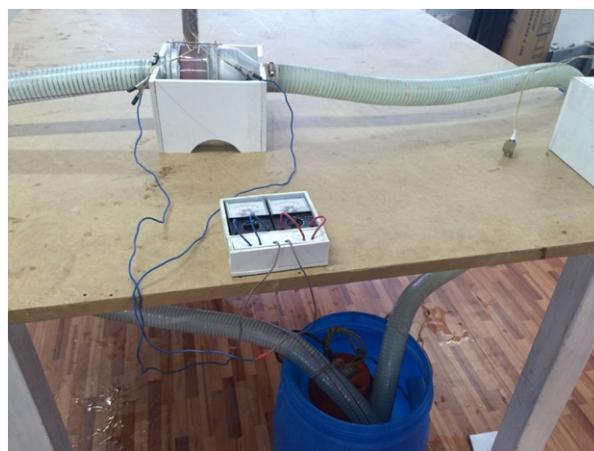
Корыта айтар болсақ, гидротурбина қалақшаларының саны артқан сайын қалақша қалындығы азая түседі. Егер гидротурбина роторында 12 қалақша болатын болса, онда қалақшалар қалындығы 2,4 мм болады. Ал егер 8 қалақша болса, онда қалақша қалындығы 2,5 мм тең, ал қалақша саны 6 болған жағдайда, онда қалақша қалындығы 2,8 мм болады екен. Гидротурбинаға 6 қалақша орналастырсақ, онда гидротурбина роторының айналымы минутына 110-115 айналым аралығында болады. Егер 9 қалақша болса, онда гидротурбина роторының айналымы минутына 155 айналымға дейін артады. Қалақша саны 12 болған жағдайда гидротурбина роторының айналымы 120-ға дейін төмендейді. Қалақша санын шексіз арттырған жағдайда, гидротурбинадан судың ағып өтуі кезінде кедергі туып, ротордың айналымына кері әсерін тигізеді. Бұдан байқайтынымыз – қалақша саны 9 болған жағдай ең тиімді болып саналады. Гидротурбина роторының бойындағы қалақшалар 12 суретте көрсетілген.



12 сурет – Гидротурбина роторының бойындығы қалақшалардың жалпы түрі

Гидротурбинада тәжірибелік зерттеулер жүргізу

Тәжірибелік қондырғы құбырдан, су қоймадан, бір бағыттағы ағыс гидротурбинасынан, генератор орамынан, сорғыдан, судың арыны мен шығының өзгереттін ілмекті арматурадан, гидротурбина роторының айналымын есептейтін мультиметрден, электр тоғының күшін өлшейтін амперметрден және кернеуді өлшейтін тестер аспабтарынан тұрады. Тәжірибелік қондырғы 13 суретте көрсетілген.



13 сурет – Зерттеу жүргізіп жатқан кездегі тәжірибелік қондырғы

Бір бағыттағы ағыс гидротурбинасында жүргізілген тәжірибелік зерттеулердің қорытындысы 1 кестеде көрсетілген.

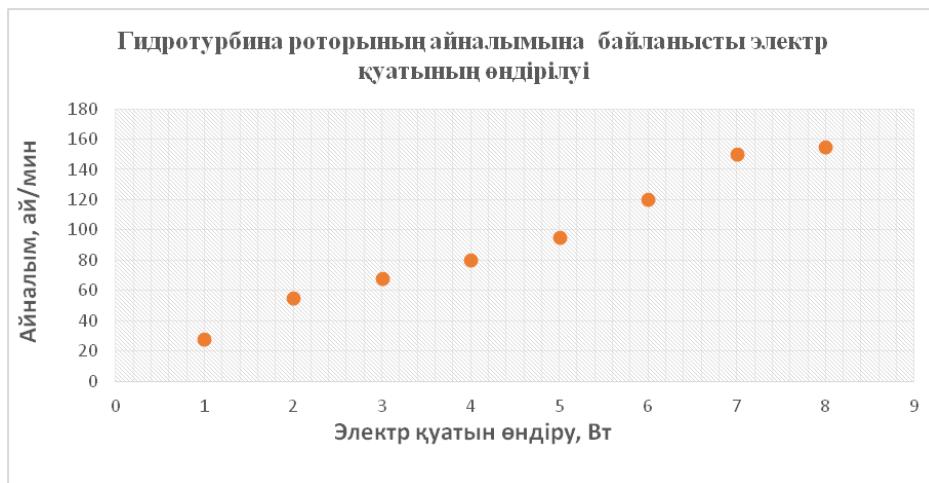
№	Судың шығыны, л/с	Гидротурбина роторының минуттағы айналымы	Электр қуатының ендірілуі, Вт
1	1.3	28	0.5
2	1.8	55	0.7
3	2.2	68	1.4
4	2.8	80	4.5
5	3	95	5
6	4.2	120	6.2
7	5	150	8
8	6.2	155	8.1

1 кесте – Судың шығынына байланысты гидротурбинаның көрсеткіші

Судың шығынының өзгерісіне байланысты бір бағыттағы ағыс гидротурбинасының айналым саны мен қанша электр қуатын өндіретіні 14, 15 суреттерде көрсетілген.



14 сурет – Гидротурбина роторының судың шығынына байланысты айналымы



15 сурет – Гидротурбина роторының айналымына байланысты электр қуатының өндірілуі

Тәжірибелік зерттеу көрсеткендегі бір бағыттағы ағыс гидротурбинасы судың шығының өзгерісінің барлық ауқымында жұмыс жасайды. Сорғы суды су қоймадан сорып, құбыр арқылы гидротурбинаға береді. Судың ағысының арқасында гидротурбина роторы айналып, гидротурбинадан өткен су құбыр арқылы қайта су қоймага беріледі.

Корытынды

Бұл мақалада бөгетсіз ГЭС-терде қолданылатын бір бағыттағы ағыс гидротурбинасының электр қуатын өндіруін арттыру мақсатында теориялық және тәжірибелік зерттеулер жүргізілді. Теориялық зерттеулер нәтижесі бойынша гидротурбина роторына орналастырылатын қалақшалардың ең тиімді пішіні COMSOL Multiphysics бағдарламасында анықталынды. Тиімді деп таңдалған қалақшаны 0° , 30° , 45° аралықтарында өзгерте отырып, орналасу бұрышына сәйкес оның бойындағы судың жылдамдығының өзгерісі, судың қалақшага түсіретін қысымы зерттелінді. Зерттеу нәтижесінде ең тиімді деп саналатын қалақшаның орналасу бұрышы анықталды, су қалақшаны ағып өткен кезінде құйын және кавитация процесsei пайда болатындығына көз жеткізілді. Гидротурбина роторына орналастырылатын қалақшалардың ең тиімді саны есептелініп, сол бойынша қалақшалардың қалындықтары анықталды. Бір бағыттағы ағыс гидротурбинасында тәжірибелік зерттеулер академик Ш.Ш. Шокин атындағы КазФЗ энергетика институтының гидротехникалық құрылыштар мен су электр станциясы зертханасында жүргізілді. Судың шығының ілмекті арматура арқылы өзгерте отырып, гидротурбина роторының минутына қанша айналым жасайтыны мультиметр аспабының көмегімен анықталды. Гидротурбина роторының минуттағы айналымы бойынша қанша электр қуатын өндіретіні Ом заңы арқылы есептелінді. Алынған нәтижелер бойынша "Гидроагрегат" атты өнертабысқа Қазақстан Республикасының инновациялық патентін алуға арналған өтінім жасалды [7].

Әдебиеттер тізімі

[1] Барлут В.В. Гидравлические турбины. Киев.: Вища школа, 1977. – 390 с.

[2] COMSOL Multiphysics User's Guide May 2012. – 1292 p.

- [3] *Turbulent Flows by Stephen B. Pope* Cambridge University Press: Cornell University, 2000. – 773 p.
- [4] *Куашнинг Фолькер* Системы возобновляемых источников энергии: учебник / Пер. с немецкого. - Астана: Фолиант, 2013. – 432 с.
- [5] *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газов. – 6-е изд. – М.: Наука, 1987. – 840 с.
- [6] *Пылаев Н.И., Эдель Ю.У.* Кавитация в гидротурбинах. – М.: Машиностроение, 1974. – 256 с.
- [7] *Кошумбаев М.Б., Босинов Д.Ж. и др.* Заявка на инновационный патент № 2015/0277.1. Гидроагрегат. Дата регистрации: 26 февраля 2015 года.

References

- [1] *Barlit V.V.* Gidravlicheskie turbiny. Kiev.: Vishcha shkola, 1977. – 390 s.
- [2] *COMSOL Multiphysics User's Guide* May 2012. – 1292 p.
- [3] *Turbulent Flows by Stephen B. Pope* Cambridge University Press: Cornell University, 2000. – 773 p.
- [4] *Volker Quaschning* Sistemy vozobnovlyayemyx istochnikov energii. – Astana: Foliant, 2013. – 432 s.
- [5] *Loitsyanskii, L.G.* Mehanika zhidkosti i gazov, – 6-e izd. – M.: Nauka, 1987. – 840 s.
- [6] *Pylaev N.I., Edel Ju.U.* Kavitsiya v gidroturbinax. – M.: Mashinastroenie, 1974. – 256 s.
- [7] *Koshumbaev M.B., Bossinov D.Zh. i dr.* Zayavka na innovatsionnyi patent № 2015/0277.1. Gidroagregat. Data registratsii: 26 fevralya 2015 goda.

УДК 519.63: 681.51: 539.5

А.М. Полатов

Национальный университет Узбекистана им.М.Улугбека, Республика Узбекистан, г. Ташкент
E-mail: asad3@yandex.ru

Автоматизация исследования упругопластического деформирования волокнистых композитных материалов

В работе рассматриваются вопросы компьютерного моделирования упругопластического деформирования однонаправленных волокнистых композитных материалов. С этой целью разработаны эффективные алгоритмы: формирования конечно-элементной сетки элементарных подобластей; объединения подобластей; определения начального фронта и упорядочения номеров узлов на основе модифицированного фронтального метода; построения коэффициентов матрицы жесткости конечных элементов; формирования разрешающей системы уравнений на основе принципа построчной подготовки данных для каждого узла в отдельности; решения системы уравнений модифицированным методом квадратных корней с учетом симметрично-ленточной структуры матрицы коэффициентов; отображения на экране монитора картины напряженно-деформированного состояния исследуемого объекта. Разработан инструментарий для автоматизации процесса проектирования новых волокнистых композитных материалов и конструкций с заранее заданными механическими свойствами. Для достижения этой цели разработаны автоматизированные системы: построения конечно-элементной сетки областей (препроцессор); решения задачи упругопластического деформирования композитов (процессор); визуализации результатов расчета (постпроцессор). Такая структура позволяет: проводить вычислительные эксперименты при проектировании новых композитных материалов и конструкций; исследовать влияние конструкционных особенностей материала на прочность конструкции; представить рекомендации по повышению несущей способности и снижению материоемкости элементов конструкций. Технология расчета, вычислительные алгоритмы и специализированный программный комплекс в совокупности образуют концепцию прогнозирования структурных параметров проектируемых волокнистых композитных материалов и прочности элементов конструкций. Описывается структура и функционирование специализированного программного комплекса. Представлены результаты анализа упругопластического состояния волокнистых композитных материалов.

Ключевые слова: компьютерная модель, алгоритм, программный комплекс, вычислительный эксперимент, волокнистый композит, упругопластическое состояние, прочность. олокнистый композит, упругопластическое состояние, прочность.

A.M.Polatov

Research automation of fibrous composite materials elastic-plastic deformation

This paper describes the computer simulation of unidirectional fiber composite materials elastic-plastic deformation. To this end, developed efficient algorithms: formation of finite element mesh of elementary sub-areas; association sub- areas; determining the initial front and ordering numbers of nodes based on a modified front method; constructing the coefficients of the stiffness matrix of finite elements; forming resolving a system of equations on the basis of the progressive training data for each node individually; solving systems of equations by method of square roots with the symmetrically-band structure of the coefficient matrix; display on the screen a picture of the stress-strain state of the object. A set of tools to automate the process of designing new fiber composite materials and structures with predetermined mechanical properties is developed. To achieve this goal developed Computer Aided Engineering; building a finite element mesh areas (pre-processing); solving the problem of elastic-plastic deformation of composites (processing); visualization of calculation results (post-processing).

This structure allows: to conduct computational experiments in the design of new composite materials and structures; investigate the effect of structural features on the structural strength of the material; to make recommendations to improve the bearing capacity and reduction of material structural elements. Technology calculation, computational algorithms and specialized software package together form the concept of predicting the structural parameters of the designed fiber composite materials and the strength of structural elements. Described the structure and functioning of specialized software. Composite materials elastic-plastic analysis results are presented.

Key words: computer model, algorithm, software, computer experiment, fiber composite, elastic-plastic state, toughness.

А.М. Полатов

Талшықты композициялық серпімді-пластикалық деформациялау зерттеулерін автоматтандыру

Бұл мақалада бір талшықты композициялық материалдарды серпімді-пластикалық деформациялауды компьютерлік модельдеу қарастырылады. Осы мақсатта тиімді алгоритмдер әзірленген: бастауыш қосалқы аумақтарды ақырлы элементтер қалыптастыру; ішкі дөмөндер: бастапқы және жүйелердің нөмерлерін анықтау; ақырлы элементтер қаттылығы матрица коэффициенттер салу; құрлымымен шаршы әдісімен тендеулер шешу. Алдын ала меканикалық қасиеттері бар жаңа композициялық материалдар мен конструкцияларды жобалау процесін автоматтандыруға дамыған құралдар. Осы мақсатқа жету үшін автоматтандырылған жүйелер әзірленді: соңғы элемент тор бағыттарын құру; компазиттер серпімді-пластикалық деформация мәселесін шешу; есептеу інтижелерін визуализациялау. Бұл құрылым жаңа композициялық материалдар мен конструкцияларды жобалау есептеу жүргізу; материалдардың құрылымдық ерекшеліктерін зерттеу; материалдардың құрылымдық зе-лементтер материалдардың құрылымдық қбматериалдардың құрылымдықлетматериалдардың құрылымдық жақсарту. Есептеу технологиясы, есептеу алгоритмдер материалдардың құрылымдық және мамандандырылған бағдарламалық пакет бірге әзірленген талшықты композициялық материалдар және құрылымдылық параметрлерін болжауды қалыптастырады. Мамандандырылған бағдарламалық қамтамасыз ету құрылымы мен жұмыс істеуін сипаттайды.

Түйін сөздер: компьютерлік модель, алгоритм, талшықты композиция, серпінді-пластикалық қалып күй, бағдарламалық кешен есептеу эксперимент.

Введение

В настоящее время в различных областях техники и строительства широко используются элементы конструкций, изготовленные из современных композитных материалов. Особый интерес представляют односторонние волокнистые композиты или трансверсально-изотропные материалы. Для автоматизации проектирования конструкций требуется разработка расчетных моделей и методов, учитывающих анизотропию материала и конфигурацию. Проблема усложняется, если материал обладает упруго-пластическими свойствами. Для эффективного учета преимуществ конструкционных материалов необходим комплексный подход к решению задач, связанных с определением рациональной структуры материала. Совместная работа волокна и матрицы дает эффект, равносильный созданию нового материала, свойства которого отличаются от свойств его составляющих. В связи с вышесказанным, разработка компьютерного моделирования процесса деформирования элементов конструкций, изготовленных из композитных материалов, является весьма актуальной. Проблема приобретает особую важность при оценке прочности композитных элементов конструкций в таких областях, как автомобильстроение, авиастроение, космонавтика, энергетика, машиностроение и т.п. и

способствует развитию исследований в области анизотропной теории пластичности. Создание специализированного программного комплекса для исследования упругопластических процессов деформирования конструкционных материалов представляет особую актуальность и, вместе с тем, является теоретической и прикладной проблемой, имеющей важное народно-хозяйственное значение. Большой научный интерес представляют разработка эффективных систем автоматизации проектирования новых композитных материалов и оценка надежности разрабатываемых элементов конструкций. В вычислительных экспериментах используется численная модель, с помощью которой получают новые знания о моделируемом объекте. Для предоставления пользователю удобного интерфейса при описании реального процесса и проведении вычислительных экспериментов, необходимо разработать вычислительные алгоритмы, на базе которых строится программный комплекс. Проведение вычислительных экспериментов дает возможность автоматизировать процесс проектирования композитных материалов с заранее заданными механическими свойствами, исследовать влияние объемного соотношения и механических параметров волокна и матрицы на прочность конструкции. Существенной особенностью технологии компьютерного моделирования и вычислительного эксперимента является возможность проведения серии расчетов по определению необходимых механических и геометрических параметров проектируемых композитных материалов. Востребованность исследований характеризуется тем, что для обеспечения прочностных характеристик и широкого внедрения конструкционных материалов в производство, необходимо автоматизировать процесс их проектирования. Методика компьютерного моделирования, применяемая при решении прикладных задач, определяется построением модели, отражающей реальный процесс, и вычислительным экспериментом, выявляющим приемлемые параметры функционирования процесса. Существенный вклад в развитие численного моделирования внес академик А. А. Самарский [1]. Им предложена триада “модель-алгоритм-программа”, разработаны методология вычислительного эксперимента и технология компьютерного моделирования. В работах А. Н. Коновалова, Н. Н. Яненко рассмотрен модульный принцип построения пакетов программ [2]. Алгоритмический подход к решению прикладных задач предложен в исследованиях В.К. Кабулова и его учеников [3]. Такой подход отличается высокой степенью формализации при решении широкого класса задач и автоматизацией процесса решения. Широкое использование на практике различных композитных материалов способствовало развитию исследований в области анизотропной теории пластичности. Для описания процесса упругопластического деформирования материалов предложены различные варианты теории пластичности, основанные на методе осреднения, при котором композитный материал заменяется однородной анизотропной средой [4,5, 6]. В последнее время для решения задач деформирования композитных материалов используется метод конечных элементов [7]. Для проведения инженерных расчетов в настоящее время существует ряд вычислительных программ и систем, к которым можно отнести пакеты программ ЛИРА, ФРОНТ, COSMOS/M, ANSYS, NASTRAN и другие. Несмотря на достигнутые успехи, проблему разработки компьютерного моделирования, вычислительных алгоритмов и программных комплексов для решения задач упругопластического деформирования конструкционных материалов нельзя считать завершенной. Недостаточное внимание уделено вопросам, связанным с повышением эффективности вычислительных алгоритмов, специализированных программных комплексов для автоматизации процесса

проведения вычислительных экспериментов при проектировании новых композитных материалов и конструкций с заранее заданными механическими свойствами. В неполной мере изучено воздействие на прочность конструкций структурных особенностей, таких как анизотропия материала, объемное содержание волокна в материалах, а также конструкционных неоднородностей. Исследование нового направления в решении проблемы автоматизации проектирования конструкционных материалов предполагает разработку и модификацию широкого спектра методов, алгоритмов и специализированных программных комплексов для конструирования волокнистых композитов, научно-методические основы которых способствуют развитию существующих технологий.

Технология решения задачи

Исследуется упругопластическая среда, которая представляет собой неоднородный сплошной материал, состоящий из двух компонент: армирующих элементов и матрицы (или связующей), которая обеспечивает совместную работу армирующих элементов. Известно, что волокнистый материал и трансверсально-изотропная среда являются эквивалентными понятиями. При этом замена неоднородной среды адекватной ей анизотропной средой с эффективными механическими параметрами дает возможность учитывать неоднородность композитных материалов. В связи с этим, при решении задачи упругопластического деформирования волокнистых композитов применяется теория малых упругопластических деформаций для трансверсально-изотропной среды, предложенная проф. Б.Е.Победря [8]. Вычисление эффективных характеристик волокнистых композитов выполняется на основе выражений, полученных асимптотическими методами, что дает возможность учитывать радиальное взаимодействие компонентов, вызванное различием коэффициентов Пуассона матрицы и волокна [9,10]. Упругопластический расчет выполняется на основе итерационного процесса метода упругих решений А.А.Ильюшина. Для построения разрешающей системы уравнений используется метод конечных элементов в перемещениях. Решение системы уравнений осуществляется методом квадратных корней, с учетом симметрично-ленточной структурой матрицы коэффициентов.

Структура программного комплекса

Как правило, многие современные пакеты содержат в себе препроцессор (программа, осуществляющая построение расчетной модели, подготовку данных для дальнейших вычислений), процессор (программа, осуществляющая вычисления) и постпроцессор (программа, осуществляющая визуализацию вычислений) [11,12]. Целью данной работы является создание инструментария для автоматизации процесса проектирования новых волокнистых композитных материалов и конструкций с заранее заданными механическими свойствами. Для достижения этой цели разработаны автоматизированные системы:

- построения конечно-элементной сетки областей (препроцессор);
- решения задачи упругопластического деформирования композитов (процессор);
- визуализации результатов расчета (постпроцессор).

Такая структура позволяет проводить вычислительные эксперименты по уменьшению временных и материальных затрат при проектировании новых композитных ма-

териалов и конструкций, исследовать влияние конструкционных особенностей материала на прочность конструкций, представить рекомендации по повышению несущей способности и снижению материалоемкости элементов конструкций. Технология расчета, вычислительные алгоритмы и специализированный программный комплекс в совокупности образуют концепцию прогнозирования структурных параметров проектируемых волокнистых композитных материалов и прочности элементов конструкций.

Препроцессор. Для автоматизации процесса построения конечно-элементной сетки разработана технология представления области сложной конфигурации посредством объединения или удаления “элементарных” подобластей [13]. Для этого вводится определение, согласно которому область называется “элементарной”, если существует алгоритм построения ее конечно-элементной сетки. Конечно-элементная сетка области описывается множеством

$$\Omega = \{N, M, MK, MN\},$$

где N – число узлов; M – количество конечных элементов; MK – массив координат узлов; MN – массив номеров узлов по конечным элементам. Далее приводится соотношение, которое позволяет посредством объединения или удаления элементарных подобластей формировать конечно-элементную сетку области сложной конфигурации:

$$\Omega = \sum_{i=1}^{k_1} \Omega_i^I - \sum_{j=1}^{k_2} \Omega_j^{II},$$

где Ω_i^I и Ω_j^{II} – соответствующие элементарные подобласти, k_1 – число подобластей, подлежащих объединению, k_2 – количество удаляемых подобластей.

С этой целью разработаны: вычислительные алгоритмы формирования конечно-элементной сетки элементарных подобластей; объединения и удаления подобластей; определения начального фронта и упорядочения номеров узлов на основе модифицированного фронтального метода, позволяющего минимизировать ширину ленты ненулевых коэффициентов разрешающей системы уравнений.

Процессор. Автоматизация процесса построение и решение системы разрешающих уравнений метода конечных элементов и реализация итерационного процесса метода упругих решений А.А.Ильюшина [14]. Разработаны алгоритмы: построения коэффициентов матрицы жесткости конечных элементов; формирования разрешающей системы уравнений на основе принципа построчной подготовки данных для каждого узла в отдельности. Он отражает суть суммирования и обеспечивает построение ленточной системы алгебраических уравнений высокого порядка с учетом симметричности ее коэффициентов; решения системы уравнений модифицированным методом квадратных корней с учетом симметрично-ленточной структуры матрицы коэффициентов.

Так как в преобразованиях метода в основном используется операция умножения матрицы на вектор, то разработан соответствующий алгоритм для случая, когда заданы только коэффициенты ленты нижней треугольной матрицы. Эти коэффициенты построчно располагаются в прямоугольной матрице S_{ij} с размерами $n \times l$, где n – порядок системы уравнений, l – половинная ширина ленты ненулевых коэффициентов, включая диагональные элементы. Причем диагональные элементы исходной матрицы располагаются на последнем l -ом столбце матрицы S_{ij} . В этом случае для умножения

матрицы S_{ij} на вектор x_j используется соотношение (1):

$$y_i = \sum_{j=1}^p S_{i,j} x_r + \sum_{j=1}^m S_{j,i+1} x_j , \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} p &= \begin{cases} i-1, & 1 \leq i \leq l \\ l-1, & \text{иначе} \end{cases}, \quad q = \begin{cases} l+i-1, & 1 \leq i \leq l \\ j, & \text{иначе} \end{cases}, \quad r = \begin{cases} j, & 1 \leq i \leq l \\ i-l+j, & \text{иначе} \end{cases}, \\ m &= \begin{cases} i+l-1, & 1 \leq i \leq n-l+1 \\ n, & \text{иначе} \end{cases}. \end{aligned}$$

Приведенное соотношение позволяет при реализации метода квадратных корней, с использованием только коэффициентов ленты нижней треугольной матрицы и диагонали.

Постпроцессор. Для визуализации результирующих параметров разработаны алгоритмы, позволяющие отобразить на экране монитора картину напряженно-деформированного состояния исследуемого объекта. Так как значения перемещений малы по сравнению с размерами конструкции, в алгоритме используются не реальные перемещения, а их значения, помноженные на корректирующий коэффициент $k : (u', v', w') = k(u, v, w)$. Этот коэффициент подбирается пользователем в зависимости от решаемой задачи. Чтобы обеспечить наглядную визуализацию, значения координат узлов также умножаются на корректирующий множитель. Соответствие между параметром и цветом заливки определяется из следующего соотношения (2):

$$c = C \begin{cases} \begin{cases} \frac{p}{p_{max}}, & p \geq 0 \\ \frac{p}{p_{min}}, & p < 0 \end{cases} & (2), \\ \begin{cases} c_1, & p < i_1 \\ c_2, & p < i_2 \\ \dots & \dots \\ c_n, & p < i_n \\ c_*, & p \geq i_n \end{cases} & (3), \end{cases}$$

где p_{min}, p_{max} – соответственно, минимальное и максимальное значение параметра, C – машинно-зависимая функция, линейно отображающая числовой отрезок $[-1; +1]$ в пространство цветов от темно-синего до темно-красного. После чего начинается процесс градиентной заливки. Только при этом зависимость между значениями параметра и цвета задаётся соотношением (3), где n – количество изолиний, c_1, \dots, c_n – значения цветов, которыми будут закрашены области сечения. Оставшаяся область сечения будет закрашена цветом c^* . Для удобства пользователя цвет задается в виде чисел от -100 до +100.

Функционирования программного комплекса

Для проведения вычислительного эксперимента в среде Delphi разработан специализированный программный комплекс АРПЭК. Комплекс имеет модульную структуру,

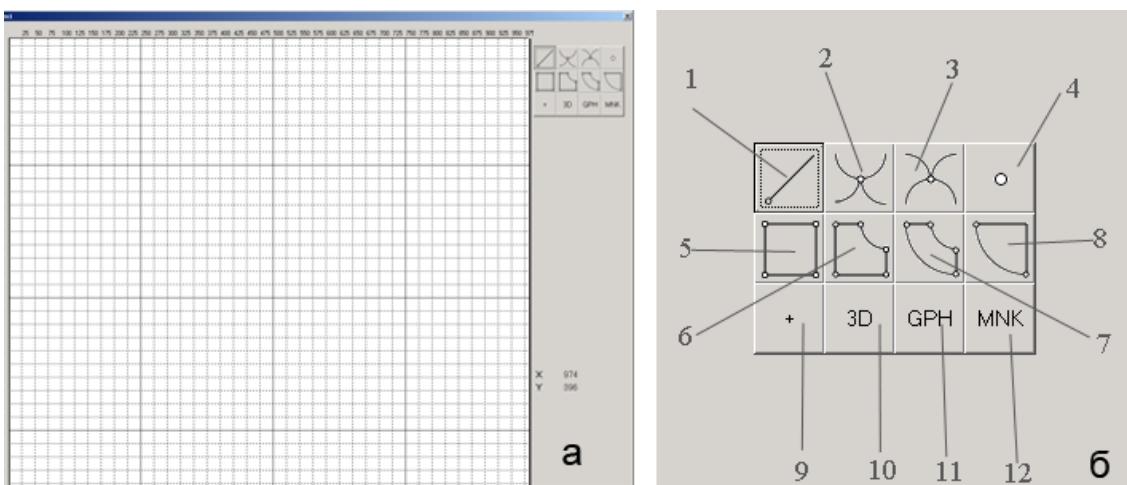


Рисунок 1 – Рабочая область пользователя на мониторе и набор инструментов

обмен данными между модулями осуществляется через конфигурационные файлы и файлы данных.

Автоматизация процесса построения конечно-элементной сетки трехмерной конструкции призматической формы сложной конфигурации выполняется в программном модуле АПКЭМ. Визуализация результатов выполняется с использованием возможностей библиотеки программного интерфейса OpenGL [15]. С помощью указателя мыши на экране монитора вычерчивается проекция конструкции. Трехмерное представление конструкции формируется путем операции выдавливания, применяемой к поверхности проекции. Для работы пользователя на экране формируется рабочая область (рис.1.а). Началом координат рабочей области служит точка в ее верхнем левом углу. В верхнем правом углу представлена панель инструментов (рис.1.б), а в правом нижнем – отображаются фактические координаты указателя мыши. Основные инструменты, используемые для генерации конечно-элементного представления конструкции, применяются следующим образом: 1-4 – для вычерчивания границы и фиксации опорных вершин (рис.2.а); 5-8 – для конечно-элементного представления элементарных подобластей; 9 (+) – для последовательного объединения (швивания) элементарных подобластей.

Инструмент 10 (3D) применяется для формирования трехмерной конечно-элементной сетки конструкции на основе ее проекции. При этом указателем мыши фиксируется одна из вершин, которая далее растягивается на требуемое расстояние. Причем, на заданном расстоянии от исходной поверхности формируется параллельный след и образуется трехмерное представление конструкции (рис.2.б, в). Для визуализации конструкции используется инструмент 11 (GPH). При его активизации открывается окно, в левой части которого располагается общий вид конечно-элементной сетки конструкции, а в правой части – инструмент для всестороннего просмотра (рис.2.г). Инструмент 12 (MNK) активизируется для сохранения информации о конечно-элементном представлении конструкции.

Функционирование расчетных модулей программного комплекса АРПЭК (рис.3) осуществляется следующим образом. Далее выполняются расчетные модули программного модуля НЕРПЭК. Вычисление эффективных механических параметров материала вы-

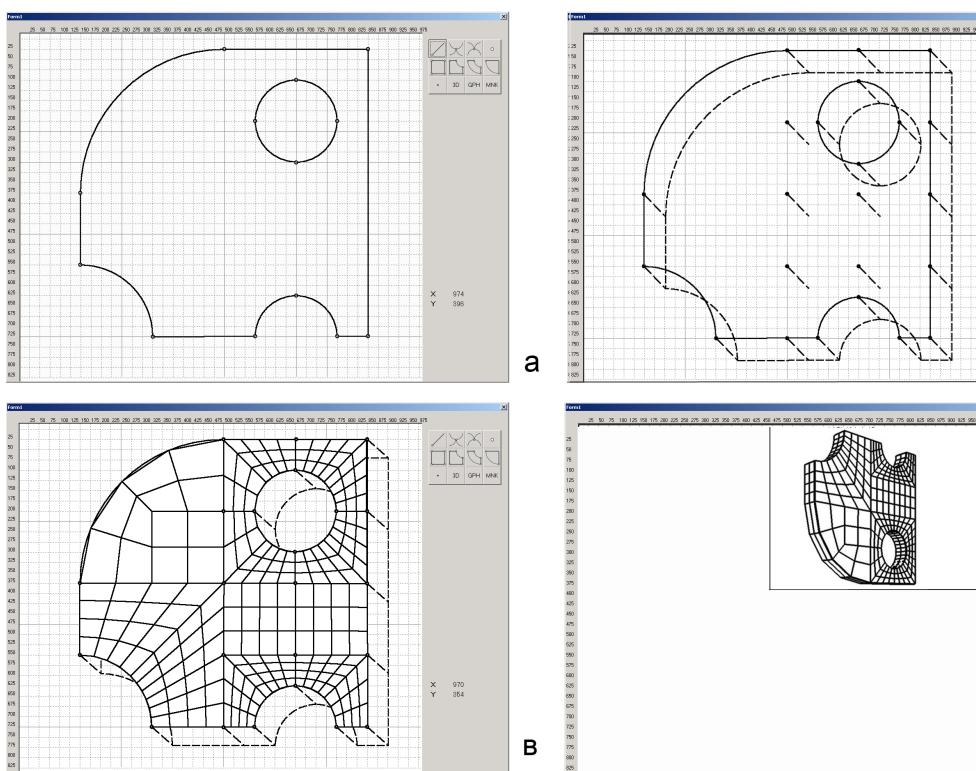


Рисунок 2 –Этапы формирования конечно-элементной сетки

полняется посредством модуля ЭФФЕКТ. Формирование разрешающей системы уравнений МКЭ выполняется в модуле RAM10. Для решения системы уравнений применяется метод квадратных корней, модифицированный для систем уравнений с симметрично-ленточной структурой. Процесс решения состоит из двух этапов: на первом – модуль RAM12 выполняет вычисления в соответствии с алгоритмом прямого, на втором – модуль RAM13 – обратного хода метода решения. В результате формируется вектор узловых перемещений.

В процессе работы модуль RAM11 выполняет подсчет значений компонент напряженно-деформированного состояния, которые записываются в выходной файл модуля – PARAMS.

При решении физически нелинейных задач выполняется модуль PLASN для уточнения упругопластического решения на основе итерационного процесса метода упругих решений А.А.Ильюшина. Зоны пластических деформаций определяются на основе критерия Мизеса. На выходе модуль записывает результирующие значения упругопластического состояния в файл PARAMS.

Для графической интерпретации результатов расчета используется программный модуль визуализации ТАСВИР (рис.4). Он позволяет: визуализировать картину распределения значений напряженно-деформированного состояния в заданных сечениях; выполнить градиентную заливку с использованием красного цвета для положительного значения параметра и синего – для отрицательного; визуализировать изолинии, значения которых заданы пользователем; рисовать эпюры параметров на границах сечения,

примыкающих к осям; корректировать и отображать картины деформации конструкций; выполнить совмещение конечно-элементной сетки с эпюрами и градиентной заливкой (всего 10 режимов отображения одного сечения); вывести для контрольной точки все значения компонентов НДС; сохранить полученные изображения в графический файл.

Опишем параметры, посредством задания которых можно получить картину распределения НДС исследуемой конструкции. Файл данных включает адреса файлов с параметрами конечно-элементной сетки и НДС; общее число конечных элементов и узловых точек. Конфигурационный файл состоит из коэффициентов коррекции перемещений и размеров конструкции; значений компонент перемещений и напряжений; интенсивности деформаций и напряжений; значения изолиний с соответствующим значениями температуры цвета; переменной настройки интерфейса; параметра загрузки компонент НДС; вида сетки и конструкции; параметра формы отображения конструкции; параметров видеокарты.

На входе модуль ТАСВИР считывает данные конечно-элементной сетки из файла DISKR1.DAT, узловые значения НДС из файла PARAMS.TXT и параметры из конфигурационного файла CONF.TXT. Модуль визуализации использует модуль INIT для построчного разбора конфигурационного файла. Результатом работы модуля является цветное отображение распределения значений параметров НДС в соответствии с запросами пользователя.

Вычислительный эксперимент

В качестве материала матрицы однонаправленного волокнистого композита используется алюминиевый сплав Д16 (бороалюминий) с параметрами: $E = 7.1 \cdot 10^4$ МПа, $\mu = 0.32$, с коэффициентом упрочнения $\bar{\lambda} = 0.5$ и пределом упругости $\sigma_s = 2.13 \cdot 10^2$ МПа. Для борного волокна $E' = 39.7 \cdot 10^4$ МПа, $\mu' = 0.21$, предел прочности при растяжении $\sigma'_s = 2.5 \cdot 10^3$.

С целью исследования влияния объемного содержания волокна в композите рассматривается трехмерная упругопластическая задача об одноосном растяжении по направлению волокон ($P_{zz} = 850$ МПа) прямоугольной пластины высотой 1 см с шириной – 0.5 см и толщиной – 0.1 см. Изолированное отверстие радиуса $R = 0.1$ см находится в центре пластины. Волокна материала расположены параллельно оси OZ . На рис.5.а приведено поле распределения значений интенсивности деформаций r_u по плоскости изотропии в окрестности отверстия (деформированная конфигурация). Пластические деформации в основном образуются в окрестности верхней и нижней части отверстия. Небольшие пластические зоны наблюдаются по бокам отверстия.

На рис.5.б приведено распределение значений интенсивности деформаций q_u по главной оси трансверсальной изотропии (при $v = 35\%$). Повышенные значения упругих деформаций формируются по бокам отверстия, однако в окрестности точек пересечения горизонтального диаметра с контуром отверстия, значения минимальны (тон закраски соответствует удвоенным значениям деформаций по плоскости изотропии, приведенным на рис.5.в) [16].

На рис.6 приведены кривые зависимости интенсивности напряжений и деформаций $P_u \div r_u$ при различных значениях объемного содержания волокна в композите. С уве-

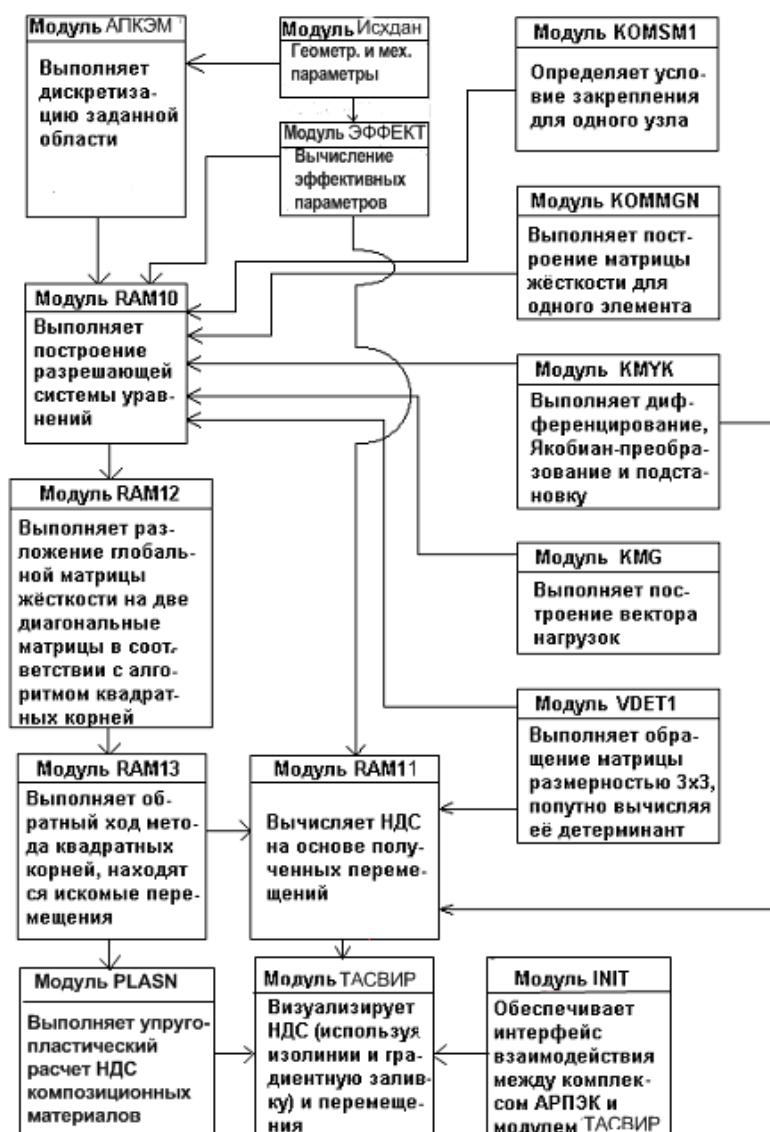


Рисунок 3 – Архитектура программного комплекса АРПЭК

личением объемного содержания волокна в композите увеличиваются его прочностные характеристики, вместе с тем, это ведет к уменьшению упругопластических характеристик матрицы [17].

Результаты проведенных вычислительных экспериментов подтвердили закономерности, связанные с влиянием объемного содержания волокна в композите [18]. В промежутке от 30% до 60% объемного содержания волокна волокнистые композиты обладают упругопластическими свойствами. При значениях ниже 30% не обеспечивается совместная работа волокна и матрицы, а при значениях выше 60% – композит работает как хрупкий материал.

Заключение

Разработанные в работе компьютерная модель, вычислительные алгоритмы и спе-

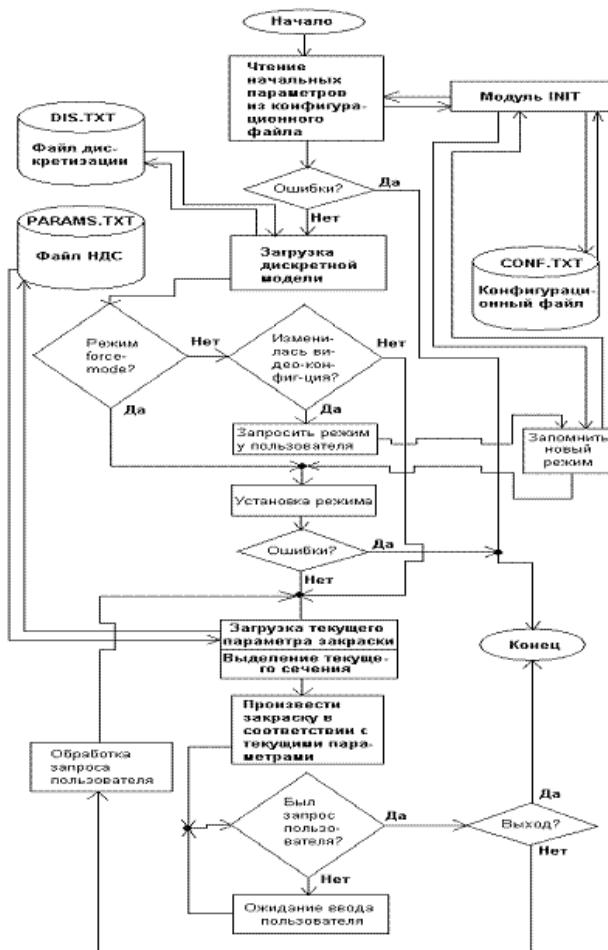


Рисунок 4 – Структура модуля визуализации ТАСВИР

циализированный программный комплекс решения задач упругопластического деформирования конструкционных материалов позволяют автоматизировать процесс проектирования ранее недоступных, принципиально новых элементов конструкций с заранее заданными механическими свойствами и конфигурацией. Разработаны вычислительный алгоритм и программный модуль построения конечно-элементной сетки конструкций. Проекция трехмерной конструкции вычерчивается посредством указателя мыши на мониторе компьютера. Визуализация результатов выполняется посредством использования возможностей библиотеки программного интерфейса OpenGL. Разработаны вычислительный алгоритм и программный модуль визуализации результатов расчета, позволяющий выполнять: градиентную заливку; визуализацию изолиний, значения которых задаются пользователем; построение эпюры значений параметров на границах сечения; совмещение конечно-элементной сетки с графиками и градиентной заливкой; вывод значений результирующих компонент в контрольной точке. Проведение вычислительного эксперимента позволило исследовать деформированное состояние одностороннего композиционного материала Д16 (бороалюминий) и подтвердить закономерности, связанные с влиянием объемного содержания волокна в композите.

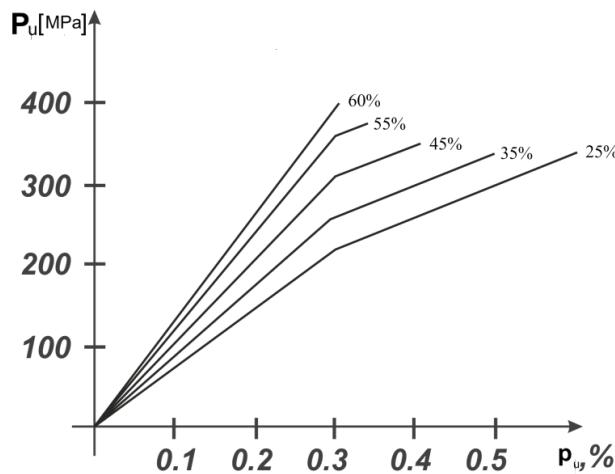


Рисунок 6 –Кривые деформирования $P_u \div p_u$

Литература

- [1] Самарский А. А., Михайлов А. П. Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры. –М.:Физматлит, 2002, 300 с.
- [2] Коновалов А.Н., Яненко Н.Н. Модульный принцип построения программ как основа создания пакета программ решения задач механики сплошной среды // Комплексы программ математической физики. Сб. науч. тр. – Новосибирск, 1972. –С. 48-54.
- [3] Кабулов В.К. Алгоритмизация в механике сплошных сред. –Ташкент, Фан, 1979. –304 с.
- [4] Победря Б.Е. Модели механики сплошной среды // Фундаментальная и прикладная математика. Изд. дом “Открытые системы”. 1997, т.3, № 1, –С. 93-127.
- [5] Аннин Б.Д. Модели упругопластического деформирования трансверсально-изотропных материалов // Сиб. журн. индустр. матем., –Новосибирск. 1999. т. 2, № 2. –С. 3-7.
- [6] Халдэжигитов А.А. О деформационных теориях пластичности для изотропных и трансверсально изотропных тел // Материалы международн. научно-техн. конф. “Современные проблемы механики”. Ташкент, 2009. Т.1. –С. 438-440.
- [7] Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике: М.: Мир, 1975. –541 с.
- [8] Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. –М.:МГУ, 1984. 336 с.
- [9] Немировский Ю.В., Янковский А.П. Эффективные физико-механические характеристики композитов, одновременно армированных монотропными волокнами. Сообщение 1: Модель армированной среды. Известия вузов, Строительство, № 5, 2006, –С.16-42.
- [10] Большаков В.И., Андрианов И.В., Данишевский В.В. Асимптотические методы расчета композитных материалов с учетом внутренней структуры. – Днепропетровск: “Пороги”, 2008. –196 с.
- [11] Полатов А.М. Программный комплекс решения задач нелинейного деформирования композитных материалов // Проблемы информатики и энергетики. ФАН АН РУз. № 1-2. –Ташкент. 2014. –С. 27-33.
- [12] Полатов А.М. Исследование напряженного состояния трансверсально-изотропных тел с полостью. Вестник НУУз. № 3, НУУз, Ташкент, 2010. –С. 159-164
- [13] Краснов М.В. OpenGL. Графика в проектах Delphi. –СПб.:БХВ –Петербург, 2002. –352 с.

References

- [1] *Tikhonov A.N.* On independence of the solutions of differential equations from a small parameter, Matem.sb., Vol. 22 (64) No. 2 (1948) 193-204.
- [2] *Tikhonov A.N.* O granichnykh skachkakh lineynykh differentialsialnykh uravneny s malym parametrom pri starshikh proizvodnykh // Vestnik ZhGU im. I. Zhansugurova. 2012. № 4. p. 17-21. Systems of differential equations containing a small parameter within derivatives, Matem.sb., Vol.31 (73) No. 31 (1952) 575-586.
- [3] *Vishik M.I., Lyusternik L.A.* Regular extinction and boundary layer for linear differential equations with a small parameter, UMN, Vol.212, No. 5. (1957) 3-122.
- [4] *Vasilyeva A.B.* Asymptotics of the solutions of some boundary value problems for quasilinear equations within a small parameter and a senior derivative, RCS USSR, Vol. 123 No.4 (1958) 583-586.
- [5] *Imanaliev M.I.* Asymptotic methods in the theory of singular perturbed integer-differential systems//Researches on the integer-differential equations.// -Frunze : Ilim, 1962. -T 2. -P. 21-39.
- [6] *Vishik M.I., Lyusternik L.A.* On initial jump for non-linear differential equations containing a small parameter, RCS USSR, Vol. 132 No. 6. (1960) 1242-1245.
- [7] *Kasymov K.A.* On asymptotic of the solutions of Cauchy problem with boundary conditions for non-linear ordinary differential equations containing a small parameter, UMN, Vol. 17 No. 5 (1962) 187-188.
- [8] *Dauylbaev M.K.* Asymptotic estimates of solutions of the integro-differential equations with small parameter // Mathematical Journal. Vol.8. No4 (2008).
- [9] *Kasymov K.A., Nurgabyl D.N.* Asymptotic estimates of the solution of a singularly perturbed boundary value problem with initial jump for linear differential equations, Differential equations, Vol. 40 No. 4 (2004). pp. 597-607.
- [10] *Nurgabyl D.N.* Construction of solution of the singularly perturbed boundary problem with initial jump // Vestnik of Kirghiz State National University. - 2001. - Vol.3., №6. - C.173-177.
- [11] *Nurgabyl D.N.* Semidegenerate for singularly perturbed boundary value problems // Abstracts of the International Conference "Differential Equations and Their Applications." Almaty, 2001.-C. 51-52.
- [12] *Vasilyeva A.B., Butuzov V.F.* Asymptotic decomposition of Solutions it is Singularly Perturbed equations, Moscow, Nauka (1973) -p.272.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

1. *Айдос Еркара Жолдыбайулы* - доцент кафедры "Математика" Казахского национального технического университета имени К.И. Сатпаева, кандидат физико-математических наук
2. *Айсагалиев Серикбай Абдиғалиевич* - профессор механико-математического факультета Казахского национального университета имени аль-Фараби, доктор технических наук
3. *Ахметова Жамила Аляскановна* - магистрант механико-математического факультета Казахского национального университета им.аль-Фараби
4. *Айтмұкаш Даңғыр Болатұлы* - студент механико-математического факультета Казахского национального университета имени аль-Фараби
5. *Баканов Галитдин Баканович* - профессор кафедры "Физика и математика" Кызылординского государственного университета имени Коркыт Ата, доктор физико-математических наук
6. *Босинов Даңғыр Жұмадилович* - магистрант механико-математического факультета Казахского национального университета им.аль-Фараби
7. *Дильман Түребай Бимагамбетович* - доцент кафедры "Высшая математика" Кызылординского государственного университета имени Коркыт Ата, кандидат физико-математических наук
8. *Дилдабек Гүлнар* - доцент кафедры "Дифференциальные уравнения и теория управления" Казахского национального университета им. аль-Фараби, кандидат физико-математических наук
9. *Муканова Балгайша Гафуровна* - профессор Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева, доктор физико-математических наук
10. *Муканов Асхат Бирлесович* - PhD докторант механико-математического факультета Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева
11. *Ниязбаев Алмас Амангелдиулы* - студент механико-математического факультета Казахского национального университета им.аль-Фараби
12. *Нұртай Аней Толегенқызы* - ассистент Назарбаев Университета
13. *Тенгаева Айжан Абденовна* - ассоциированный профессор Казахского национального аграрного университета, кандидат физико-математических наук
14. *Туралина Динара Елусизовна* - доцент механико-математического факультета Казахского национального университета имени аль-Фараби, кандидат физико-математических наук
15. *Тұрсынбай Айсулу Таясарқызы* - PhD докторант механико-математического факультета Казахского национального университета им. аль-Фараби
16. *Урмашев Байдайлет Амантаевич* - заведующий кафедрой "Информатика" Казахского национального университета им.аль-Фараби, кандидат физико-математических наук
17. *Куралов Ерлан Ақылбекулы* - студент механико-математического факультета Казахского национального университета им.аль-Фараби
18. *Кошумбаев Марат Бұлатович* - профессор Казахского научно-исследовательского института энергетики имени академика Ш.Ч. Чокина, доктор технических наук
19. *Күлбай Магира Назымхикматқызы* - PhD докторант механико-математического факультета Казахского национального университета им. аль-Фараби

20. *Курманбаев Дамир Муратбекович* - PhD докторант механико-математического факультета Казахского национального университета им. аль-Фараби
21. *Керимбаев Рашид Конырбаевич* - доцент кафедры "Фундаментальная математика" Казахского национального университета им. аль-Фараби, кандидат физико-математических наук
22. *Полатов Асхад Мухамеджсанович* - доцент Национального университета Узбекистана, кандидат физико-математических наук

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

1. В журнал "Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика" принимаются набраные только в текстовом формате $\text{\LaTeX}2\epsilon$ на казахском, русском или английском языках, ранее не опубликованные проблемные, обзорные, дискуссионные статьи в области естественных наук, где освещаются результаты фундаментальных и прикладных исследований.
2. Материалы следует направлять по адресу: 050040 Алматы, ул. аль-Фараби, 71, корпус 13, Научно-исследовательский институт механики и математики КазНУ им. аль-Фараби, каб. 125, тел. 377-32-23. Электронная почта: Lazat-dairbayeva@mail.ru (ответственному секретарю редколлегии, Даирбаева Л.М.)
3. Статья должна сопровождаться письмом от учреждения, в котором выполнена данная работа, где указываются сведения об авторах: Ф.И.О. полностью, место их работы, должность (название вуза, центра без сокращений, факультета, кафедры), рабочий телефон, факс, e-mail, домашний адрес и контактный телефон.
4. В редакцию необходимо представить электронную версию статьи: tex-файлы работы и файлы рисунков на одном диске. Для файлов рисунков рекомендуется использовать средства основного пакета $\text{\LaTeX}2\epsilon$ или формат eps [см. п.7]. Указывается код по УДК. В редакцию также представляется оттиск работы в двух экземплярах.
5. Объем статьи, включая список литературы, таблицы и рисунки с подрисуточными надписями, аннотации, не должен превышать 15 страниц печатного текста. Минимальный объем статьи - 5 страниц. В начале работы после заголовка и фамилий авторов работы помещается её аннотация в объеме 200-250 слов на том же языке, на котором набран основной текст. Кроме сведений, которые можно перечислить из заголовка, аннотация должна отражать методы исследования, основные результаты статьи, их новизну и указывать на смежные работы.

После аннотации задаются ключевые слова. Для каждой работы задайте 5-6 ключевых слов в порядке их значимости, т.е. самое важное ключевое слово статьи должно быть первым в списке.

Название работы, ФИО авторов, аннотация и ключевые слова должны быть представлены в статье на трех языках: казахском, русском и английском.

Использованная литература должна быть оформлена в соответствии с ГОСТ 7.1-2003 "Библиографическая запись. Библиографическое описание. Общие требования и правила составления". Список литературы должен состоять не более чем из 20 наименований. Ссылки на источники в тексте статьи даются только в квадратных скобках (без цитирования [12], при цитировании или пересказе авторского текста [12, с. 29]). Нумерация ссылок в статье производится по порядковому номеру источника в пристатейном списке литературы. Архивные материалы в список не включаются, ссылки на них помещаются в тексте в круглых скобках. При использовании в статье источников из электронных ресурсов или удаленного доступа (Интернета) в списке литературы приводится библиографическая запись источника и ссылка на сетевой ресурс с полным сетевым адресом в Интернете. Желательно указывать дату обращения к ресурсу.

Список литературы на языке оригинала сопровождается списком литературы (references) в английской транслитерации.

6. Журнал придерживается единого стиля и поэтому предъявляет ряд общих требований к оформлению работ. Исходный (неоттранслированный) tex-файл должен целиком помещаться в горизонтальных рамках экрана за возможным исключением матриц и таблиц и транслироваться без протестов $\text{\LaTeX}2\epsilon$ и сообщений о кратных и неопределенных метках, больших переполненных и незаполненных боксах. Не следует определять много новых команд, изобретая собственный сленг. Авторы могут подгружать другие стандартные стилевые пакеты, но только те, которые не входят в противоречие с пакетами *amsmath* и *amssymb*. Естественно файл, кроме всего прочего, должен быть проверен на отсутствие грамматических и стилистических ошибок. Статьи, не удовлетворяющие этим требованиям, возвращаются на доработку.

Эталонный образец работы с демонстрацией графики, с преамбулой устраивающей редакцию, списки типичных ошибок оформления и методы их устранения можно получить в редакции или на сайте КазНУ им. аль-Фараби <http://journal.kaznu.kz>.

7. Графические файлы с рисунками должны быть только качественными черно-белыми в формате .eps , либо выполнеными в латеховском формате. Рисунки в этих форматах делаются, например, с помощью мощных математических пакетов Maple, Mathematica или с помощью пакета Latexcad. Качественные графические файлы сделанные другими графическими программами должны быть сконвертированы в формат .eps с помощью Adobe Photoshop или конвертера Conversion Artist. Все рисунки должны быть уже импортированными в tex-файл и представляются в редакцию вместе с основным файлом статьи. Графические форматы, отличные от выше указанных, отвергаются.

Редакция вправе отказаться от включения в работу рисунка, если автор не в состоянии обеспечить его надлежащее качество.

Уважаемые читатели, вы можете подписаться на наш журнал "Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика", который включен в каталог АО "Казпочта""ГАЗЕТЫ И ЖУРНАЛЫ". Количество номеров в год – 4. Индекс для индивидуальных подписчиков, предприятий и организаций – 75872, подписная цена за год – 1200 тенге; индекс льготной подписки для студентов – 25872, подписная цена за год для студентов – 600 тенге.

МАЗМҰНЫ - СОДЕРЖАНИЕ

1- бөлім

Математика

<p><i>Aйдос Е.Ж., Қазтай М.</i> Аралас нормалардағы ең жақсы жуықтамдар арасындағы қатыс туралы 3</p> <p><i>Айсагалиев С.А.</i> К решению краевой задачи с параметром для обыкновенных дифференциальных уравнений 7</p> <p><i>Баканов Г.Б., Дильман Т.Б.</i> Единственность решения задачи интегральной геометрии для некоторого семейства кривых 27</p> <p><i>Dildabek G., Tengayeva A.</i> Constructing a basis from systems of eigenfunctions of one not strengthened regular boundary value problem 36</p> <p><i>Нұртай А.Т.</i> Алгоритм поиска освещенных участков многогранных пересекающихся поверхностей в плоскопараллельном световом потоке 45</p> <p><i>Мұжанов А.Б.</i> Об одном примере к теореме Боаса 55</p> <p><i>Керімбаев Р.К., Ахметова Ж.А.</i> Керіленетін көпмүшелер 62</p> <p><i>Күлбай М.Н., Мұжанова Б.Г., Сүйсинбаев Д.К.</i> Моделирование процесса отрыва течения за обратным уступом в канале 67</p> <p><i>Курманбаев Д.М.</i> Построение разрушающих решений модифицированного уравнения Веселова-Новикова с помощью поверхности Эннепера второго порядка 77</p> <p><i>Урмашев Б.А., Айтмұкаш Д.Б., Ниязбаев А.А., Куралов Е.А., Тұрсынбай А.Т.</i> Моделирование горения пропана-кислородной смеси с использованием систематических процедур упрощения кинетических механизмов 77</p> <p>Сведения об авторах 88 К сведению авторов 89</p>	<p>Раздел 1</p> <p>Математика</p>
---	---

2- бөлім

Механика

<p><i>Кошумбаев М.Б., Туралина Д.Е., Босинов Д.Ж.</i> Бөлгесіз ГЭС-терде қолданылатын бір бағыттағы ағыс гидротурбинасының тиімді параметрлерін анықтау мақсатында жүргізілген теориялық және тәжірибелік зерттеулер 96</p> <p><i>Полатов А.М.</i> Автоматизация исследования упругопластического деформирования волокнистых композитных материалов 106</p>	<p>Раздел 2</p> <p>Механика</p>
---	---

CONTENS

Section 1 Mathematics

<i>Aidos E.Zh., Kaztay M.</i>	
About the relation between the best approximations in mixed norms	3
<i>Aisagaliev S.A.</i>	
To solution of a boundary value problem with parameter for ordinary differential equations	7
<i>Bakanov G.B., Dilman T.B.</i>	
Uniqueness theorem of solution the integral geometry problem for the family curves	27
<i>Dildabek G., Tengayeva A.</i>	
Constructing a basis from systems of eigenfunctions of one not strengthened regular boundary value problem	36
<i>Nurtag A.T.</i>	
An algorithm for sun illuminated surface areas of intersecting convex polyhedra	45
<i>Mukanov A.B.</i>	
On example to the Boas theorem	55
<i>Kerimbayev R.K., Akhmetova Zh.A.</i>	
Reversible polynomials	62
<i>Kulbay M.N., Mukanova B.G., Suisinbayev D.K.</i>	
Numerical method of solving inverse problem to diffusion equation with nonlocal boundary condition ..	67
<i>Kurmanbaev D.M.</i>	
Construction blowing up solutions of modified Novikov-Veselov equation by second order Enneper surface	77
<i>Urmashov B.A., Aytumkash D.B., Niyazbayev A.A., Kuralov E.A., Tursunbay A.T.</i>	
Modeling of combustion a propane-oxygen mixture using the systematic facilitation procedures of kinetic mechanisms	86
Information about the authors	119
For Authors	120

Section 2 Mechanics

<i>Koshumbaev M.B., Turalina D.E., Bossinov D.Zh.</i>	
Theoretical and experimental investigations to define optimal parameters of straight-flow turbine for damless hydro power station	96
<i>Polatov A.M.</i>	
Research automation of fibrous composite materials elastic-plastic deformation	106

