

ISSN 1811-1807

# ҒЫЛЫМИ ЖУРНАЛ



С. ТОРАЙҒЫРОВ АТЫНДАҒЫ  
ПАВЛОДАР МЕМЛЕКЕТТІК  
УНИВЕРСИТЕТІ

## ФИЗИКА-МАТЕМАТИКАЛЫҚ СЕРИЯ



3' 2014

ПМУ ХАБАРШЫСЫ  
ВЕСТНИК ПГУ

Научный журнал Павлодарского государственного университета  
имени С. Торайгырова

### **СВИДЕТЕЛЬСТВО**

о постановке на учет средства массовой информации  
№ 14213-Ж

выдано Министерством культуры, информации и общественного согласия  
Республики Казахстан  
04 марта 2014 года

---

#### **Редакционная коллегия:**

**Тлеукиенов С. К.**, д.ф.-м.н., профессор (главный редактор);  
**Испулов Н. А.**, к.ф.-м.н., доцент (заместитель главного редактора);  
**Жукенов М. К.**, к.ф.-м.н., (ответственный секретарь);

#### **Редакционная коллегия:**

**Абдул Хадыр Рахмон**, доктор PhD (Пакистан);  
**Бахтыбаев К. Б.**, д.ф.-м.н., профессор;  
**Данаев Н. Т.**, д.ф.-м.н., академик НИИ РК;  
**Ткаченко И. М.**, д.ф.-м.н., профессор, Валенсийский  
политехнический университет (Испания);  
**Демкин В. П.**, д.ф.-м.н., профессор, Томский  
государственный университет (Россия);  
**Кумекоев С. Е.**, д.ф.-м.н., профессор;  
**Куралбаев З.**, д.ф.-м.н., профессор;  
**Оспанов К. Н.**, д.ф.-м.н., профессор;  
**Отельбаев М. О.**, д.ф.-м.н., академик НАН РК;  
**Уалиев Г. У.** д.ф.-м.н., профессор, академик НАН РК;  
**Нургожина Б. В.** (тех. редактор).

---

За достоверность материалов и рекламы ответственность несут авторы и рекламодатели.  
Мнение авторов публикаций не всегда совпадает с мнением редакции.  
Редакция оставляет за собой право на отклонение материалов.  
Рукописи и дискеты не возвращаются.  
При использовании материалов журнала ссылка на «Вестник ПГУ» обязательна.

---

**МАЗМҰНЫ**
**Алдибаева Л. Т.**

Екі дененің шектелген фотогравитациялық есебі және оның стационар шешімдері .....6

**Жақсылықов Ә. Е., Оркенова Г. Т.**

Қашықтықтан оқитын студенттерге оқу үдерісінде бейнедәрістерді қолданудың маңыздылығы .....15

**Испулов Н. А., Оспанова Ж. Ж.,****Кисиков Т. Ф., Қадыр А.**

Анизотропты ортада байланысқан термосерпімді толқындардың таралуы туралы.....19

**Машрапов Н. Қ., Тлеубергенава З. Н.**

Жалпы орта мектептерде математика пәнінен «Дифференциалдық теңдеулер» элективті курсты оқыту туралы.....26

**Оспанова Н. Н., Дюсенгазина Н. Н., Садыкова А. О.**

«Ақпараттық қауіпсіздік және ақпаратты қорғау» пәнінен виртуалды зертхананы оқу үдерісінде қолдану.....32

**Павлюк И. И., Павлюк Ин. И., Сыздыкова А. Т.**

Натурал сандар жүйесінің жалғыздығы.....36

**Павлюк И. И., Павлюк Ин. И., Құдайберген М. К.**

Топтың аксиоматикалық жүйе ретінде жалғыздығы.....43

**Самокиш Е. В., Павлюк И. И., Павлюк Ин. И.**

FC-топтың орталығы және индексе эквиваленттілігі .....47

**Самокиш Е. В., Павлюк И. И., Павлюк Ин. И.**

Топтың Абелді қалыпты бөліндісі туралы .....49

**Сенашов В. И.**

Сәл қабатты шекті топтар туралы.....53

**Умбетов А. У., Жумабаева С. Б.**

Бір өсті кристалдардан жасалынған оптикалық жүйелердің түрлері .....58

**Феррер Х. Р., Гайдак В., Ткаченко И. М.**

Біртекті емес Стефан есебі.....63

**Ялчин М.**

Еуропалық елдерде өте томен жиілікке арналған электромагнитті сәуле шағарудың шегін салыстыру.....76

Авторларға арналған ережелер.....86

## СОДЕРЖАНИЕ

**Алдибаева Л. Т.**

Ограниченная фотогравитационная задача  
двух тел и ее стационарные решения.....6

**Жаксылыков А. Е., Оркенова Г. Т.**

Особенности применения видеолекции  
в учебном процессе для студентов дистанционного обучения .....15

**Испулов Н. А., Оспанова Ж. Ж.,****Кисиков Т. Г., Кадыр А.**

О распространении связанных  
термоупругих волн в анизотропной среде .....19

**Мащрапов Н. К., Тлеубергенова З. Н.**

О преподавании элективного курса по математике  
«Дифференциальные уравнения» в средних школах .....26

**Оспанова Н. Н., Дюсенгазина Н. Н., Садыкова А. О.**

Применение виртуальной лаборатории в обучении  
дисциплины «Информационная безопасность и защита информации».....32

**Павлюк И. И., Павлюк Ин. И., Сыздыкова А. Т.**

Единственность системы натуральных чисел.....36

**Павлюк И. И., Павлюк Ин. И., Кудайберген М. К.**

Единственность группы как аксиоматической системы.....43

**Самокиш Е. В., Павлюк И. И., Павлюк Ин. И.**

Индексная эквивалентность и FC-центр группы.....47

**Самокиш Е. В., Павлюк И. И., Павлюк Ин. И.**

Об Абелевом нормальном делителе группы.....49

**Сенашов В. И.**

О почти слойно-конечных группах.....53

**Умбетов А. У., Жумабаева С. Б.**

Кристаллооптические системы из одноосных кристаллов.....58

**Феррер Х. Р., Гайдак В., Ткаченко И. М.**

Неоднородная задача Стефана .....63

**Ялчин М.**

Сопоставление пределов электромагнитного  
излучения для очень низких частот в европейских странах .....76

Правила для авторов.....86

---

**CONTENTS**
**Aldibaeva L. T.**

Limited photogravitational two-body  
problem and its stationary solutions .....6

**Zhaksylykov A. E., Orekenova G. T.**

Features of application of a video lecture  
in the educational process for students of distance learning .....15

**Ispulov N. A., Ospanova Zh., Kissikov T., Qadir A.**

About propagation of the bound  
thermoelastic waves in the anizotropic medium .....19

**Mashrapov N. K., Tleubergenova Z. N.**

On teaching an elective course «Differential equations»  
in mathematics at comprehensive high schools .....26

**Ospanova N. N., Diusengazina N. N., Sadykova A. O.**

Application of virtual laboratory in discipline  
«Information safety and data protection» .....32

**Pavlyuk I. I., Pavlyuk In. I., Syzdykova A. T.**

Uniqueness of the system of natural numbers .....36

**Pavlyuk I. I., Pavlyuk In. I., Kudaybergen M. K.**

The uniqueness of the group as axiomatic system .....43

**Samokish E. V., Pavlyuk I. I., Pavlyuk In. I.**

Index equivalent and FC-group center .....47

**Samokish E. V., Pavlyuk I. I., Pavlyuk In. I.**

On Abelian normal group divider .....49

**Senashov V. I.**

On almost layer-finite groups .....53

**Umbetov A. U., Zhumabayeva S. B.**

Crystal optics system of uniaxial crystals .....58

**Ferrer J. R., Gaydak V., Tkachenko I. M.**

Inhomogeneous Stefan problems .....63

**Yalcin M.**

Comparison of electromagnetic radiation limits  
for extremely low frequencies in European countries .....76

Rules for authors .....86

**Л. Т. Алдибаева**

к.ф.-м.н., заведующая кафедрой «Естественные дисциплины и информационные технологии», Казахский национальный аграрный университет, г. Алматы

## **ОГРАНИЧЕННАЯ ФОТОГРАВИТАЦИОННАЯ ЗАДАЧА ДВУХ ТЕЛ И ЕЕ СТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ**

*В статье рассмотрена ограниченная фотогравитационная задача двух тел и ее стационарные – экваториальные и полярные решения.*

*Ключевые слова: фотогравитационные задачи, исследование, гравитационная сила.*

В последние годы фотогравитационные задачи исследования, которые начаты в 50-х годах прошлого столетия, в частности, ограниченная фотогравитационная задача трех тел, которая может рассматриваться как обобщенная классическая задача, являются предметом интенсивного исследования многих авторов [1-6].

Это объясняется тем, что при изучении реального движения естественных и искусственных космических объектов наряду с гравитационной силой часто приходится учитывать репульсивную силу светового давления, являющуюся неизменной спутницей гравитирующих и излучающих тел. При этом суммарная сила, действующая на частицу или тело со стороны излучающих основных массивных тел, подчиняется тому же закону, что и гравитационная сила и отличается лишь поправкой на массу частицы, называемой коэффициентом редукции массы и зависящей от ее «парусности», определяемой как отношение площади сечения к массе объекта.

В фотогравитационной задаче трех тел известны следующие основные варианты: 1) частица с бесконечно малой массой находится под действием светового давления только от одной основной гравитирующей точечной массы, обеспечивая ее массу редуцированным репульсивным давлением; 2) частица находится под действием светового давления от каждого основного тела, оба имеют редуцированную массу; 3) только один или оба гравитирующие и излучающие основные тела имеют сферическую или эллипсоидальную форму.

Основные формулировки задачи с одним и двумя излучающими телами.

Рассмотрим проблему в начальной формулировке, когда коэффициент редукции массы  $Q$  тела с массой  $M$  определяется величиной результирующей

силы  $F_{\Sigma}$  от двух коллинеарных сил: гравитационная сила  $F_{гр}$  и сила радиационного давления  $F_{рад}$ , действующих на частицу  $P$  с бесконечно малой массой  $m$ :

$$\vec{F}_{\Sigma} = F_{\Sigma} \left( 1 + \frac{F_{рад}}{F_{gp}} \right) \vec{r}^0 = Q F_{gp} \vec{r}^0 \quad (1)$$

Здесь значение каждой силы (их проекции на единичный вектор  $\vec{r}^0$ ) равно

$$F_{gp} = -G \frac{Mm}{r^2}, \quad F_{рад} = E \frac{A}{r^2}, \quad (2)$$

где  $G$  – универсальная гравитационная постоянная,

$E$  – интенсивность радиации,

$A$  – площадь поперечного сечения частицы  $P$ .

Тогда  $Q$  может быть записано в форме

$$Q = 1 + \frac{F_{рад}}{F_{gp}} = 1 - \frac{E A}{GM m}, \quad (3)$$

показывая ее зависимость от парусности частицы  $A/m$ , которая может быть в общем переменной.

Для описания движения частицы  $P$  введем, как и в классической задаче, вращающуюся прямоугольную систему координат  $Oxyz$  с началом  $O$  в барицентре основных тел  $M_1$  и  $M_2$  [7]. Пусть  $R_1, R_2$  и  $R_0$  есть расстояния частицы  $P$  от основных тел и от начала  $O$ , соответственно, так что

$$R_1^2 = (x + \dots)^2 + y^2 + z^2,$$

$$R_2^2 = (x + \dots 11)^2 + y^2 + z^2,$$

$$R_0^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad (4)$$

$$\dots = \frac{M_2}{M_1 + M_2}$$

Тогда система уравнений движения есть

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y} &= \frac{\partial U}{\partial x} \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= \frac{\partial U}{\partial y} \\ \ddot{z} &= \frac{\partial U}{\partial z} \end{aligned} \quad (5)$$

где потенциал  $U$  равен

$$U = \frac{Q(1+\dots)}{R_1} + \dots + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \quad (6)$$

Эти уравнения, конечно, не интегрируются, но они имеют девять семейств частных решений, и пять положений относительного равновесия, которые являются аналогами точек либрации классической ограниченной задачи трех тел.

Первые исследования точек либрации фотогравитационной задачи, сформулированной выше, были проделаны В. В. Радзиевским [1, с. 250-256], который нашел, что их расположение строго зависит от коэффициента редукции массы  $Q$ . Сначала он рассмотрел плоский случай и позже пространственный [8].

Одной из особенностей точек либрации фотогравитационной задачи есть то, что их появление связано с определенной эволюцией компонентов особых точек поверхности нулевой скорости. Например, точки  $L_1$  и  $L_2$  могут существовать одновременно или  $L_2$  может появляться раньше  $L_1$ . Кроме того, точки  $L_4$  и  $L_5$  в классическом случае образуют форму равностороннего треугольника с основными телами, а в фотогравитационной задаче с одним излучающим телом они образуют равнобедренный треугольник.

В. В. Радзиевский также обобщил фотогравитационную задачу на случай двух излучающих тел (основные тела) с коэффициентами редукции масс  $Q_1$  и  $Q_2$ . Тогда силовая функция (6), принимает вид

$$U = \frac{2Q(1+\dots)}{R_1} + \frac{2Q_2\dots}{R_2} + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \quad (7)$$

и для треугольных точек либрации мы имеем

$$R_{1,2} = Q_{1,2}^{1/3}, \quad (8)$$

из которого ясно, что треугольные точки либрации могут существовать только для положительных  $Q_1$  и  $Q_2$ , когда преобладает гравитация. До тех пор, пока все физические возможные значения  $Q_1$  и  $Q_2$  подчиняются неравенству  $Q_{1,2} \leq 1$ , то весь ряд этих точек занимает область ограниченную двумя окружностями единичного радиуса с центром в каждой из основных тел с массами  $\mu$  и  $1 - \mu$ . В этом случае, треугольные точки уже не образуют равнобедренного треугольника (кроме случая  $Q_1 = Q_2$ ), так как  $R_{1,2} = Q_{1,2}^{1/3}$ .

Таким образом, условия существования этих точек могут быть представлены неравенствами:

$$Q_1 \geq 0,$$

$$Q_2 \geq 0, \quad (9)$$

$$Q_1^{1/3} + Q_2^{1/3} \geq 1.$$



Вводные замечания Под ограниченной фотогравитационной задачей двух тел понимается задача о движении частицы в поле гравитационного притяжения и репульсивного отталкивания вращающегося центрального тела. Впервые фотогравитационная задача двух тел была сформулирована В.В. Радзиевским сначала в неограниченной постановке двух сферических тел [9], а затем в ограниченной постановке для одного сферического (частица) и одного притягивающего и анизотропно излучающего (центральное тело) тел [10]. В последние годы были открыты галактики всевозможных форм [11] (сжатые и вытянутые эллипсоиды вращения, трехосные эллипсоиды и т.п.), поэтому рассматриваемая задача о движении частицы в поле гравитационного притяжения и репульсивного отталкивания центрального тела, имеющего сферическую форму или форму эллипсоида вращения представляется вполне актуальной.

Будем считать, что источники излучения равномерно заполняют внутренний объем эллипсоида и таким образом каждая точка эллипсоида одновременно является и притягивающей, и отталкивающей точкой. Естественно, такая модель является идеализацией процесса взаимодействия притягивающей и анизотропно излучающей галактики и частицы, однако вполне приемлемой идеализацией. Известно [12], что для газовых звезд главной последовательности можно построить две альтернативные модели: а) модель, в которой источники энергии распределены внутри звезды равномерно или почти равномерно (стандартная модель Эддингтона), б) модель, в которой вся энергия возникает в центре звезды. Таким образом, в основу предлагаемого анализа положена модель галактики, соответствующая модели ( $\neq$ ) звезды. Если к тому же пренебречь ничтожным эффектом aberrации, то можно считать силы гравитационного притяжения  $\vec{F}_{zp}$  и силы репульсивного отталкивания  $\vec{F}_{pen}$  антиколлинеарными и стандартным образом ввести [13] так называемый коэффициент редукции  $q$  тяжелой массы частицы по формуле

$$q = (\vec{F}_{zp} - \vec{F}_{pen}) / \vec{F}_{zp} \quad \left( F_{zp} = |\vec{F}_{zp}| \right), \quad \left( F_{pen} = |\vec{F}_{pen}| \right). \quad (10)$$

Уравнения движения и силовая функция Выберем прямоугольную систему координат  $OXYZ$ , начало которой совпадает с центром масс эллипсоида, плоскость  $OXY$  – с его экваториальной плоскостью, а ось  $OZ$  – с его осью симметрии. Тогда дифференциальные уравнения движения частицы, вращающейся с постоянной угловой скоростью  $\omega$  (вместе с эллипсоидом вокруг его оси симметрии  $OZ$ ) в системе координат  $OXYZ$  будут иметь вид

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2\dot{y} &= \frac{1}{r} U \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= \frac{1}{r} U \\ \ddot{z} &= \frac{1}{r} U \end{aligned} \quad (11)$$

где силовая функция

$$U = \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) + V \quad (12)$$

Чтобы получить фотогравитационный потенциал  $V$  однородного эллипсоида вращения воспользуемся частным случаем классического выражения Дирихле для потенциала эллипсоида в случае внешней точки [14]. Положив  $gM$  вместо  $M$ , имеем при  $a=b$  для сжатого эллипсоида вращения

$$V = \frac{3GqM}{2lc} \left\{ \arctg(lu) + \frac{x^2 + y^2}{l^2 c^2} \left[ \frac{lu}{1+l^2 u^2} - \arctg(lu) \right] + \frac{z^2}{l^2 c^2} [\arctg(lu) - lu] \right\} \quad (13)$$

где  $G$  – постоянная тяготения,  $M$  – масса эллипсоида, равная  $4\pi a^2 c \delta$ ,  $a, b, c$  – полуоси эллипсоида,  $l = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{c}$  – второй эксцентриситет сжатого эллипсоида вращения,  $\delta$  – плотность, и  $u$  является положительным корнем уравнения

$$\frac{x^2 + y^2}{1+l^2 u^2} + \frac{z^2}{1} = \frac{c^2}{u^2} \quad (14)$$

В случае шара будем иметь  $l=0$ ,  $r=c/u_0$  и фотогравитационный потенциал шара будет равен

$$V_0 = \frac{qGM}{r} \quad (15)$$

где  $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ .

Интеграл Якоби и стационарные решения Система уравнений (11) с силовой функцией (12), (13) допускает интеграл Якоби, и для стационарных решений имеем:

$$\Omega(x, y, z) = \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) + V(x, y, z) = C \quad (16)$$

Стационарные решения (точки либрации) найдутся из следующей системы уравнений [15]

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial x} &= x \left\{ \omega^2 + \frac{3qGM}{l^3 c^3} \left[ \frac{lu}{1+l^2 u^2} - \arctg(lu) \right] \right\} = 0 \\ \frac{\partial \Omega}{\partial y} &= y \left\{ \omega^2 + \frac{3qGM}{l^3 c^3} \left[ \frac{lu}{1+l^2 u^2} - \arctg(lu) \right] \right\} = 0 \\ \frac{\partial \Omega}{\partial z} &= z \left\{ -\frac{3qGM}{l^3 c^3} [-\arctg(lu) + lu] \right\} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

В случае, когда центральное тело - шар, система соответствующих уравнений принимает вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial x} &= x \left\{ \omega^2 - \frac{qGM}{l^3 c^3} \right\} = 0 \\ \frac{\partial \Omega}{\partial y} &= y \left\{ \omega^2 - \frac{qGM}{l^3 c^3} \right\} = 0 \\ \frac{\partial \Omega}{\partial z} &= z \left\{ -\frac{qGM}{l^3 c^3} \right\} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Системы уравнений (16) и (17) обладают следующими решениями.

А. Экваториальные стационарные решения  $q \in (0; 1]$ . Центральное тело – шар.

При  $z=0$  из системы (17) имеем  $x = x_0 \neq 0$  или  $y = y_0 \neq 0$ , причем  $r = a_0^2 = (qGM \mathcal{D}^2)^{1/3}$ , где  $a_0^2$  – радиус синхронной орбиты при данном значении параметра редукции  $q$ . Здесь также уместно отметить связь  $r = c/u_0 = a'_0$ . Таким образом, каждая точка круговой редуцированной синхронной орбиты является стационарной точкой.

Центральное тело – эллипсоид вращения.

При  $z=0$  из системы (16)  $x = x_0 \neq 0$  или  $y = y_0 \neq 0$ , причем должно иметь место

$$\omega^2 + \frac{3qGM}{l^3 c^3} \left[ \frac{lu}{1+l^2 u^2} - \arctg(lu) \right] = 0 \quad (19)$$

или

$$\arctg(lu) - \frac{lu}{1+l^2 u^2} = \frac{\omega^2 l^3 c^3}{3qGM} = \frac{l^3 c^3}{3(a'_0)^3}$$

Уравнения (18) является трансцендентным уравнением, которое будем решать относительно  $u$  методом малого параметра, считая малой величину  $l$ , определяющую степень сжатия (вытянутости) эллипсоида вращения. В результате, разложив предварительно  $\arctg(lu)$  по степеням  $lu$ , получим  $u = c/\sqrt[3]{2a'_0}$ . Представив затем  $r$  из выражения (14) в виде

$$r = \frac{c}{u} \sqrt{1 + l^2 u^2} = \frac{c}{u} \left( 1 + \frac{1}{2} l^2 u^2 + \dots \right) \quad (20)$$

и, учитывая полученное решение для  $u$ , находим

$$r = \alpha'_0 \left( 1 + \frac{1}{2^{5/2}} \frac{l^3 c^2}{(\alpha'_0)^2} + \dots \right) \text{ или } r = \alpha'_0 \left( 1 + \frac{1}{2^{5/2}} \frac{a^2 - c^2}{(\alpha'_0)^2} + \dots \right) \quad (21)$$

Таким образом, снова имеем круговые орбиты, целиком состоящие из стационарных точек, причем  $r > \alpha'_0$  для сжатого эллипсоида вращения ( $a^2 \downarrow c^2 > 0$ ) и  $r < \alpha'_0$  для вытянутого эллипсоида вращения ( $a^2 \downarrow c^2 < 0$ ). Отметим, что при каждом значении редукции  $q \in (0; 1]$  имеется «своя» круговая стационарная орбита.

Б. Предельные полярные решения  $q=0$ .

Предельные полярные стационарные решения имеют место в предельном случае при  $q \rightarrow 0$  и для обеих систем уравнений (16) и (17) имеют один и тот же вид

$$x = 0, y = 0, z = \pm |z_0|, z_0 \neq 0 \quad (22)$$

причем  $|z_0| \geq R$  для шара ( $R$  радиус шара) и  $|z_0| \geq c$  для эллипсоида вращения. То есть, предельные полярные решения плотно располагаются вдоль «южной» и «северной» полярных осей вращения эллипсоида. Следует отметить, что так как форма центрального тела представлена в уравнениях (16) выражением в квадратных скобках, которое имеет множитель  $q$ , то при  $q=0$  полярные решения существуют для любых тел, форма которых незначительно отличается от сферической.

О структуре полярных и экваториальных областей некоторых галактик. Полученные стационарные решения позволяют, на наш взгляд, объяснить структуру полярных и экваториальных областей некоторых галактик. Предельные полярные решения представляют собой непрерывные семейства точек либрации, располагающихся всюду плотно вдоль «южной» и «северной» полярных осей вращающегося эллипсоида (или шара), образуя как бы «светящиеся» оси. При этом при значении коэффициента редукции  $q=0$  и фиксированной массе частицы, частицы больших размеров располагаются ближе к притягивающему и излучающему телу, чем частицы меньших размеров. Примером наблюдаемых галактик такого типа служат веретенообразные галактики, например, NGC 2685 [16]. Экваториальные стационарные решения при фиксированном значении  $q=q_0$  представляют собой окружность, целиком состоящую из точек либрации, причем при непрерывном изменении  $q \in (0; 1]$  окружности образуют кольцевую структуру, внутренняя кромка которой при  $q = q'_0 \neq 0$  примыкает к поверхности притягивающего и излучающего тела, а внешняя кромка суть круговая синхронная орбита классической задачи двух

тел (т.е. при  $q=1$ ). Опять же при фиксированных значениях массы частицы и коэффициента редукции  $q \in (0;1]$  частицы больших размеров располагаются ближе к притягивающему и излучающему телу, чем частицы меньших размеров. Таким образом, галактики, имеющие форму эллипсоида вращения или шара, обладают кольцевым образованием в экваториальной области – имеют вид диска с ядром. Отличие структуры экваториальной формы эллипсоида вращения от аналогичной для шаровой галактики состоит в том, что внешняя круговая кромка кольцевого образования имеет меньший или больший радиус (для вытянутого или сжатого эллипсоида соответственно), чем это имеет место у шаровой галактики (разумеется, при одинаковых массах и скоростях вращения). Примером наблюдаемых галактик такого типа служат галактики с морфологическим описанием вида  $(N,D)$ ,  $(N;D \rightarrow R)$  и  $(N,R)$  содержащие резко выраженное ядро (символ  $N$ ), находящееся внутри диска (символ  $D$ ), который иногда имеет ближе к внешней кромке яркое кольцевое образование (символ  $R$ ).

Таким образом, семейства стационарных решений (семейства предельных полярных и экваториальных точек либрации), полученные в рассмотренном варианте ограниченной фотогравитационной задачи двух тел, в которой центральное тело является притягивающим и излучающим эллипсоидом вращения (или шаром), вполне могут быть использованы для объяснения наблюдаемого строения полярной и экваториальной областей галактик некоторых типов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 **Радзиевский, В. В.** Ограниченная задача трех тел с учетом светового давления // *Астрономический журнал*. – 1950. – Т.27, вып. 4. – С. 250-256.
- 2 **Schuerman, D. W.** The restricted three-body problem including radiation pressure // *Astrophysical journal*. – 1980. – Vol. 238, № 1, part 1. – P. 337-342.
- 3 **Черников, Ю. А.** Фотогравитационная ограниченная задача трех тел // *Астрономический журнал*. – 1970. – Т.47, вып. 1. – С. 217-223.
- 4 **Куницын, А. Л., Турешбаев, А. Т.** Устойчивость треугольных точек либрации фотогравитационной задачи трех тел // *Письма в Астрономический журнал*. – 1985. – Т.11, № 1. – С. 145-148.
- 5 **Лукьянов, Л. Г.** О поверхностях пулевой скорости в ограниченной задаче трех тел с переменными массами // *Астрономический журнал*. – 1988. – Т.65, вып.6. – С. 1308-1318.
- 6 **Огородников, И. Ф.** Ограниченная задача трех тел с учетом светового давления // *Астрономический журнал*. – 1950. – Т. 27, вып.4. – С. 250-256.
- 7 **Szebehely, V.** *Theory of Orbits*. – New York: Academic Press, 1967. – 584 p.

- 8 **Радзиевский, В. В.** Пространственный случай ограниченной задачи трех тел, излучающих и гравитирующих тел // *Астрономический журнал*. – 1953. – Т. 30, вып. 3. – С. 256-273.
- 9 **Радзиевский, В. В.** Задачи двух гравитирующих и излучающих тел // *Астрономический журнал*. – 1951. – Т. 28, вып.5. – С. 363-372.
- 10 **Радзиевский, В. В.** Фотогравитационная задача двух тел при анизотропном излучении // *ДАН СССР*. – 1953. – Т. 90. – С. 353-354.
- 11 **Binney, J. J.** The dynamics shapes and origin of elliptical galaxies // *Phil. Trans.* – 1980. – Vol. 296, №1419. – P. 329-338.
- 12 **Чандрасекар, С.** Введение в учение о строении звезд. – М. : Иностранная литература, 1950. – 476 с.
- 13 **Огородников, К. Ф.** Динамика звездных систем. – М. : Наука, 1958. – 627 с.
- 14 **Дубошин, Г. Н.** Небесная механика. Основные задачи и методы. – М. : Наука, 1975. – 800 с.
- 15 **Журавлев, С. Г., Кожанов, Т. С., Алдибаева, Л. Т.** О стационарных решениях в одном варианте ограниченной фотогравитационной задачи двух тел и строения экваториальной и полярной областей некоторых галактик // *Вестник, КазНУ им. аль-Фараби*. – 2003. – №4/39/. – С. 96-100
- 16 **Sandage, A.** The Hubble atlas of galaxies. – Washington D.C., 1961. – 230 p.

Материал поступил в редакцию 17.09.14.

*Л. Т. Алдибаева*

**Екі дененің шектелген фотогравитациялық есебі және оның стационар шешімдері**

Қазақ ұлттық аграрлық университеті, Алматы қ.  
Материал 17.09.14 баспаға түсті.

*L. T. Aldibaeva*

**Limited photogravitational two-body problem and its stationary solutions**  
Kazakh National Agrarian University, Almaty.  
Material received on 17.09.14.

*Мақалада екі дененің шектелген фотогравитациялық есебі және оның стационар экваториальдық және полярлық шешімдері келтіріледі.*

*The article discusses the limited photogravitational two-body problem and its fixed – equatorial and polar solutions.*

ЭОЖ 37.013.75:004

**Ә. Е. Жақсылықов<sup>1</sup>, Г. Т. Орекенова<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>аға оқытушы, <sup>2</sup>ЭООӘҚ маманы, С. Торайғыров атындағы Павлодар мемлекеттік университеті, Павлодар қ.

## **ҚАШЫҚТЫҚТАН ОҚИТЫН СТУДЕНТТЕРГЕ ОҚУ ҮРДІСІНДЕ БЕЙНЕДӘРІСТЕРДІ ҚОЛДАНУДЫҢ МАҢЫЗДЫЛЫҒЫ**

*Аталған мақалада жоғары оқу орнының оқыту үдерісінде қашықтықтан оқыту технологиясының ендірілуіне байланысты мәселе қозғалады. Оқу пәндерінің электрондық оқу-әдістемелік кешені оқытушылармен әзірленген бейнедәрістермен толықтырылған және бейнедәрістердің білім алушылар үшін маңыздылығы және қажеттілігі сипатталады.*

*Кілтi сөздер: қашықтықтан оқыту, бейнедәріс, электрондық оқу-әдістемелік кешен, ақпараттық технология.*

XX ғасырдың 80-жылдары бұқаралық дербес компьютерлердің таралуы білім беру ортасына тек жаңа техникалық емес, сонымен қатар дидактикалық мүмкіндіктер әкелді. Дербес компьютерлердің негізгі мүмкіндіктерінің қатарына олардың қолжетімділігі, диалогтық қарым қатынастың қарапайымдылығы, графикалық мүмкіндіктер жатады. Графикалық иллюстрацияларды компьютерлік желідегі оқытуда оқытушының ақпаратты жедел жіберіп және оны түсіну интенсивтілігін жоғарлату үшін қолданылады.

Ақпараттық және телекоммуникациялық технологиялардың ашық және қашықтықтан оқитын білімге көзқарастары бойынша, бірнеше негізгі кластары бар. Осы технологиялардың бірі бейнедәріс болып табылады. Бейнедәріс – интерактивті емес бейнеқатар ретінде ұсынылған оқу материалдарының түрі. Бейнедәрістер қашықтықтан оқитын студенттерге оқытушылардың өз мамандығына қажетті дәрістерін тыңдауға мүмкіндік береді. Қашықтықтан оқыту арнайы білім берудің бүгінгі заманға сай әмбебап формасы, ол білім алушылардың жеке сұраныстары мен олардың мамандықтарына бағытталады. Қашықтықтан оқыту кезінде білім беру үрдісінің негізін білім алушының мақсатты бағытталған және бақыланып отыратын өзіндік жұмысы құрайды, студент өзіне ыңғайлы жерде жеке сабақ кестесі бойынша оқи алады, сонымен қатар арнаулы online сабақта немесе электрондық пошта арқылы оқытушылармен қарым қатынасқа түсу мүмкіндігіне ие болады. Американдық және еуропалық білім беру курстарында негізгі материал бейнедәріс түрінде

беріледі. Осыған ұқсас оқытылатын оқу материалдары біздің елімізде де қолданылады және оған сұраныс та өте үлкен. Сонда да барлық курстарды бейнематериалдармен қолдану міндетті емес, себебі барлық оқу ақпараты бейнематериалдарға бейімделмеген. Егер оқу курсына визуалды ақпарат қажет болса, оны студентке басылған күйінде көрсете алмасақ, әрине бейне материал қажет болады.

С. Торайғыров атындағы ПМУ Қашықтықтан оқыту технологиясы (ҚОТ) бойынша оқу үрдісін ұйымдастыру ережелеріне сәйкес ЖОО-ның барлық мамандықтарын ЭОӘК пәндерін бейнедәрістермен қамтамасыз ету мақсатында С. Торайғыров атындағы Павлодар мемлекеттік университетінде қашықтықтан оқитын студенттерге бейнедәрістер әзірленген, оның маңыздылығы студенттер кез-келген уақытта өз мамандығына сай қажетті дәрісті тыңдай алады. Яғни студенттер оқытушымен бетпе бет байланыстың орнына бейнедәрісті көріп және естіп өзіне қажетті мағлұмат алады. Қашықтықтан оқитын студент бейнедәрістерді С. Торайғыров атындағы ПМУ білім беру порталына ([www.psu.kz](http://www.psu.kz)) кіріп, студент кабинетіне өтіп өзінің логині мен паролін енгізіп мәзірден «Электронды оқу курстары» модулінен Бейнедәрістерді қарай алады.

Бейнедәрістердің мазмұнын оқытушылардың өздері әзірлейді, сондықтан оны әзірлеуге назар аударған жөн:

1. Бір дәрістің ұзақтығы 15-30 мин. шамасында болуы қажет;
2. Ақпараттың көлемі мен мазмұны көрнекі құрал түрінде алынады, яғни бейнедәріс ескеріледі;
3. Студент пен оқытушының күштерін біріктіретін және курстың мазмұнын меңгеруге мүмкіндік беретін оқу құралдарын қолдану;
4. Оқу үрдісіндегі оның орнына сәйкес бейнедәрістің берілген тақырыбын қарастыра отырып оқу мақсаттары ескеріледі;
5. Нақты уақыттағы жеке кадрлар мен барлық дәріс толықтай анықталады.

6. Дәрістер тарихи-мұрағаттық және құжаттық материалдарды көрсеткенде үйлесетін, ғылыми-танымал кинофильмдердің фрагменттерін, тіреу сызбалар, мәтінге қатысты суреттері өзара байланысқан фрагменттер принципі бойынша құрылады;

7. Бейнеқатар көру және есту механизмдары арқылы құрылады. Сондықтан анықтап алған жөн:

Суреттер, графиктер, сызбалар және т.б. көрсету үшін фон болатын түрлі-түсті гамма;

- Оқу ақпараттарының символдық бейнесінің болуы;
- Жеке эпизодтардың, дәрістердің музыкалық сүйемелдеуінің болуы.
- Бейнедәрісті жазбас бұрын оның сценарий құрылуы қажет.

Сонғы кезде оқу үрдісінде оқытушының қызметін оқыту әрекетіне ауысуы, оқытудың аудиовизуалды технологиясын пайдалану қарқынды





білім беру жүйесінің маңызды міндеті. Білім – әрбір студенттің дамуына қажетті шарт. Білімнің тәрбиелік мәні алға қойылған мақсатқа жету болып табылады.

## ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1 Сайт материалдары <http://www.akorda.kz>

2 Сайт материалдары <http://www.tsu.ru>

3 Сайт материалдары <http://www.psu.kz>

4 Сайт материалдары <http://www.ntu.edu>

5 Сайт материалдары <http://www.ou.tsu.ru>

6 Сайт материалдары <http://www.kazrena.ru>

7 Сайт материалдары <http://www.intec.edu.za>

8 **Нұрбеков, Б. Ж.** Қашықтықтан оқытудың теориясы мен практикасы. Монография. – Павлодар : 2009. – 24 б.

9 **Морева, Н. А.** Технологии профессионального образования. – Москва : 2008. – С. 89-93.

10 **Нұрбеков, Б. Ж.** Қашықтықтан оқытуды әдістемелік қамтамасыз ету мәселелері. // «Педагогикалық білім бөсекеге қабілетті мамандарды дайындаудың негізі іспетті» респуб. ғыл.-теор.матер. – Павлодар: 2009. – Б. 370-374.

Материал 10.07.14 баспаға түсті.

*А. Е. Жаксылыков, Г. Т. Оркенова*

**Особенности применения видеолекции в учебном процессе для студентов дистанционного обучения**

Павлодарский государственный университет  
имени С. Торайгырова, г. Павлодар.

Материал поступил в редакцию 10.07.14.

*A. E. Zhaksylykov, G. T. Orenkova*

**Features of application of a video lecture in the educational process for students of distance learning**

S. Toraighyrov Pavlodar State University, Pavlodar.

Material 10.07.14.

*В этой статье рассматривают проблему о реализации удаленных образовательных технологий в образовательном процессе в высшем учебном заведении. В этом отношении электронный образовательный и методический комплекс предметов пополнен*

видео лекциями учителей, и описаны важность и потребность этих видео лекций.

*In this article the problem of implementation of distant educational technologies in the educational process in a higher education institution is considered. In this regard the electronic educational and methodical complex of subject matters is replenished by video lectures of teachers, and the importance and need of these video lectures is described.*

UDC 539.3:534.2

**N. A. Ispulov<sup>1</sup>, Zh. Ospanova<sup>2</sup>, T. Kissikov<sup>3</sup>, A. Qadir<sup>4</sup>**

<sup>1</sup>c.ph-m.s., associate professor, dean, faculty of physics, Mathematics and IT, <sup>2</sup>teacher, department of Rphysics and Instrumentation, S. Toraihyrov Pavlodar State University, Pavlodar; <sup>3</sup>graduate student, UC Davis University of California, USA; <sup>4</sup>PhD doctor, professor, Institute of Business Administration, Pakistan

## **ABOUT PROPAGATION OF THE BOUND THERMOELASTIC WAVES IN THE ANIZOTROPIC MEDIUM**

*Actuality of the study of the wave processes laws in elastic mediums with thermomechanical effects is related to necessity to solve theoretical and applied problems of geophysics, seismology, mechanics of composites, and so on. Bound motion equations and heat conduction equations differ by difficulty and abundance of physical-mechanical parameters. Because of this part of deformable body mechanics – thermoelasticity – are being intensively developed. Within the bounds of this area, based on use of physical-mechanical properties of anisotropic mediums, bound heat and mechanical fields are being studied.*

*Keywords: Anisotropic medium, thermoelasticity, Fourier heat equation, harmonic waves, matriciant.*

### **1. Introduction**

The dynamical theory of thermoelasticity is the study of dynamical interaction between thermal and mechanical fields in solid bodies and is of much importance in various engineering fields such as earthquake engineering, soil dynamics, aeronautics, nuclear reactors, ets. It is well known that the classical theory of thermoelasticity [1,2] rests upon the hypothesis of the Fourier law of heat conduction, in which the

temperature distribution is governed by a parabolic-type partial differential equation. The theory predicts that a thermal signal is felt instantaneously everywhere in a body. This is unrealistic from the physical point of view, especially for short-time responses. To account for the effect of thermal relaxation, generalized thermoelasticity has been formulated on the basis of a modified Fourier law such that the temperature distribution is governed by a hyperbolic-type equation. Accordingly, heat transport in solids is regarded as a wave phenomenon rather than a diffusion phenomenon.

The wave propagation in anisotropic inhomogeneous medium is considered. A new method of matricant has been developed. The method of matricant allows to investigate wave processing in anisotropic medium with various physical and mechanical properties [3,4,5].

The structure of matricant for the equation motion elastic medium equations, equations of thermo-mechanical medium has been established. Wave propagation in infinite and finite periodical inhomogeneous medium are studied.

In the paper [6], waves propagating along an arbitrary direction in a heat conducting orthotropic thermoelastic plate are presented by utilizing the normal mode expansion method in generalized theory of thermoelasticity with one thermal relaxation time. In the paper [7], authors studied the interaction of free harmonic waves with multilayered medium in generalized thermoelasticity by utilizing the combination of the linear transformation formation and transfer matrix method approach. Solutions obtained are general and pertain to several special cases. Of these mention: (a) dispersion characteristics for a multilayered.

## 2. The matrix formulation of the propagation of thermoelastic waves

Propagation of thermoelastic waves in anisotropic medium described by the equations of motion to be solved together with the Fourier heat equation and the equation of heat flow, which have the form:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial X} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial Y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial Z} = \rho \frac{\partial^2 U_x}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial X} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial Y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial Z} = \rho \frac{\partial^2 U_x}{\partial t^2} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial X} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial Y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial Z} = \rho \frac{\partial^2 U_z}{\partial t^2}$$

$$\lambda_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} = -q_i \quad (2)$$

$$\frac{\partial q_i}{\partial x_i} = -i\omega \beta_{ij} \varepsilon_{ij} - i\omega \frac{c_\varepsilon}{T_0} \theta \quad (3)$$

where  $\sigma_{ij}$  – stress tensor,  $\rho$  – density of the medium,  $\lambda_{ij}$  – thermal conductivity tensor,  $q_i$  – the vector of heat,  $\omega$  – the angular frequency,  $\beta_{ij}$  – thermomechanical constants,  $\beta_{ij} = \beta_{jip}$ ,  $\epsilon_{ij}$  – the strain tensor,  $\tilde{n}_\epsilon$  – specific heat at constant strain,  $\theta = T - T_0$  – temperature increase compared with the temperature of the natural state  $T_0$ ,  $\left| \frac{\theta}{T_0} \right| \ll 1$  for small deformations. Physical and mechanical quantities are

related by relation of Duhamel-Neumann:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \epsilon_{kl} - \beta_{ij} \theta \quad (4)$$

Here  $C_{ij}$  – the elastic parameters,  $c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{ijlk} = c_{klij}$ ;  $\epsilon_k$  – the tensor Cauchy for small deformations.

For crystals of rhombic system as coordinate three orthogonal axes of symmetry or inversion axes of the second order get out. For a rhombic class of crystals the ratio of Duhamel - Neumann looks like:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \beta_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{33} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \theta \quad (4)$$

Equations (1), (2), (3), (4) and (4)' determine the relationship of mechanical stress and temperature as a function of the independent variables – the thermal field and deformation.

Thus, the relation (1) – (4)' constitute a closed system of thermoelasticity equations, which describes the propagation of thermoelastic waves.

Based on the method of separation of variables in the case of a harmonic function of time:

$$\left[ U_i(x, y, z, t); \sigma_{ij}(x, y, z, t); \theta; q_z \right] = \left[ U_i(z), \sigma_{ij}(z), \theta; q_z \right] e^{i(\omega t - m x - n y)} \quad (5)$$

The system of equations (1) – (4) reduces to a system of differential equations of first order with variable coefficients which describes the propagation of harmonic waves:

$$\frac{d\bar{W}}{dz} = B\bar{W} \quad (6)$$

Here  $B = B[c_{ij}(z), \beta_{ij}(z), \omega, m, n]$  – coefficient matrix whose elements contain the parameters of the medium in which waves propagate thermoelastic;  $m, n$  – components of the wave vector  $\vec{K}$ .

The vector  $\vec{W}$  has the form:

$$\vec{W}(x, y, z, t) = [u_z(z), \sigma_{zz}, u_x(z), \sigma_{zx}, u_y(z), \sigma_{yz}, \theta, q_z]^T \exp(i\omega t - imx - iny) \quad (7)$$

The symbol  $t$  indicates the transpose of the vector - a vector of strings – Column.

The system of differential equations (6) for non-isotropic medium of a rhombic singony looks like:

$$\frac{dU_z}{dZ} = \frac{1}{c_{33}} \sigma_{zz} + \frac{c_{13}}{c_{33}} imU_x + \frac{c_{23}}{c_{33}} inU_y + \beta_{33} \theta$$

$$\frac{d\sigma_{zz}}{dZ} = -\rho\omega^2 U_z + im\sigma_{zx} + in\sigma_{yz}$$

$$\frac{dU_x}{dZ} = \frac{1}{c_{55}} \sigma_{zx} + imU_z$$

$$\frac{d\sigma_{zx}}{dZ} = im \frac{c_{13}}{c_{33}} \sigma_{zz} + \left[ -\rho\omega^2 + m^2 \left( c_{11} - \frac{c_{13}^2}{c_{33}} \right) + c_{66} n^2 \right] U_x + m n \left( c_{12} + c_{66} - \frac{c_{13} c_{23}}{c_{33}} \right) U_y \quad (6)$$

$$+ \left( \frac{c_{13}}{c_{33}} \beta_{33} - \beta_{11} \right) im \theta$$

$$\frac{dU_y}{dZ} = \frac{1}{c_{44}} \sigma_{yz} + inU_z$$

$$\frac{d\sigma_{yz}}{dZ} = in \frac{c_{23}}{c_{33}} \sigma_{zz} + m n \left[ c_{12} + c_{66} - \frac{c_{13} c_{23}}{c_{33}} \right] U_x + \left( -\rho\omega^2 + m^2 c_{66} - \left( c_{22} - \frac{c_{23}^2}{c_{33}} \right) n^2 \right) U_y +$$

$$+ \left( \frac{c_{23}}{c_{33}} \beta_{33} - \beta_{22} \right) in \theta$$

$$\frac{d\theta}{dZ} = -\frac{1}{\lambda_{33}} q_z$$

The heterogeneity of the medium is assumed along  $Z$ . In constructing the coefficient matrix  $B$  is used as a representation of the solution (5), the system of equations (1) - (4) are in the derivatives along the coordinate  $Z$  and the excluded

components of the stress tensor is not included in the boundary conditions. The multiplier  $\exp(i\omega t - imx - iny)$  is omitted throughout.

In the structure of the matrix and vector - column boundary conditions in the bulk case for the rhombic crystal system in the case of the symmetry axis of the second order and heterogeneity along the Z axis are given by:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & 0 & b_{15} & 0 & b_{17} & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 & b_{24} & 0 & b_{26} & 0 & 0 \\ b_{24} & 0 & 0 & b_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{13} & b_{43} & 0 & b_{45} & 0 & b_{47} & 0 \\ b_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{56} & 0 & 0 \\ 0 & b_{15} & b_{45} & 0 & b_{65} & 0 & b_{67} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{78} \\ 0 & -i\omega b_{17} & -i\omega b_{47} & 0 & -i\omega b_{67} & 0 & b_{67} & 0 \end{bmatrix}; \vec{W} = \begin{bmatrix} u_z \\ \sigma_{zz} \\ u_x \\ u_y \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \theta \\ q_z \end{bmatrix} \quad (8)$$

From the structure of the coefficient matrix (8) that in the spatial case, the elastic waves of different polarization and the heat wave are interrelated.

The  $b_{ij}$  elements of the coefficient matrix  $B$  for a rhombic singony of the classes mm2 and 222 in a volume case look like:

$$b_{12} = \frac{1}{c_{33}}; b_{13} = \frac{c_{13}}{c_{33}} im; b_{15} = \frac{c_{23}}{c_{33}} in; b_{17} = \frac{\beta_{33}}{c_{33}}; b_{21} = -\omega^2 \rho; b_{24} = im; b_{26} = in$$

$$b_{34} = \frac{1}{c_{35}}; b_{43} = \left( c_{11} - \frac{c_{13}^2}{c_{33}} \right) m^2 + c_{66} n^2 - \omega^2 \rho; b_{45} = \left( c_{66} + c_{12} - \frac{c_{13} c_{23}}{c_{33}} \right) mn;$$

$$b_{47} = \left( \frac{c_{13}}{c_{33}} \beta_{33} - \beta_{11} \right) im;$$

$$b_{56} = \frac{1}{c_{44}}; b_{65} = \left( c_{66} - \frac{c_{23}^2}{c_{33}} \right) n^2 + c_{66} m^2 - \omega^2 \rho; b_{67} = \left( \frac{c_{23}}{c_{33}} \beta_{33} - \beta_{22} \right) in;$$

$$b_{67} = -i\omega \left( \frac{\beta_{33}^2}{c_{33}} + \frac{c_\epsilon}{T_0} \right); b_{78} = -\frac{1}{\lambda_{33}}.$$

The nonzero elements of the matrix of coefficients  $B$   $b_{13}$ ,  $b_{24}$  determine the mutual transformation of longitudinal and transverse X - polarized waves. Elements of  $b_{15}$ ,  $b_{26}$  describe the relationship of transverse Y-polarization with the longitudinal wave. Nonzero element  $b_{45}$  defines the mutual transformation between the waves of transverse polarization.

The fact that the coefficient  $b_{17}$ :

$$b_{17} = \frac{\beta_{33}}{c_{33}}$$

means that the longitudinal wave is propagated from the thermoelastic effect.

Non-zero elements  $b_{47}$  and  $b_{67}$ :

$$b_{47} = \left( \frac{c_{13}}{c_{33}} \beta_{33} - \beta_{11} \right) im; \quad b_{67} = \left( \frac{c_{23}}{c_{33}} \beta_{33} - \beta_{22} \right) in$$

indicate the effect on the elastic wave transverse polarizations thermoelastic effect. At the same time describes the effect  $b_{47}$  thermoelastic effect on the elastic shear wave of the X-polarization, and  $b_{67}$  effects thermoelastic effect on the transverse wave Y-polarization.

Similarly, for the thermo-elastic waves propagating in an anisotropic medium of cubic symmetry the coefficient matrix is constructed in the bulk case and the analysis of matrix coefficients. We also obtain the structure of the matrix of coefficients in the propagation of thermoelastic waves in anisotropic medium of rhombic crystal systems in the plane XZ and YZ, defines the types of waves and the mutual transformation of waves of different polarizations.

### 3. Conclusion

Differential equations system of the first order with variable coefficients that are made by means of variable separation method are made (solution is presented as a plane harmonic wave). Coefficients matrix for all seven types of anisotropic mediums of of a rhombic singony of the classes mm2 and 222 for three-, two-, and one-dimensional cases were obtained.

## LIST OF REFERENCES

- 1 **Nowacki, W.** (1975): Dynamic Problems of Thermoelasticity, Noordhoff, The Netherlands.
- 2 **Nowacki, W.** Thermoelasticity. 2nd edition. Pergamon Press, Oxford 1986.
- 3 **Tleukenov, S.** Matriciant method. – Pavlodar: PSU after S. Toraigyrov, [In Russian], 2004, 148 p.
- 4 **Verma, K. L.** Thermoelastic Waves in Anisotropic Plates using Normal Mode Expansion Method with Thermal Relaxation Time, – *International Journal of Aerospace and Mechanical Engineering* 2:2. 2008. – Pp. 86-93.
- 5 **Verma, K. L.** The general problem of thermoelastic wave propagation in multilayered anisotropic media with application to periodic media. – *International Journal of Applied Engineering Research*, Dindigul Volume 1, No4, 2011. – Pp. 908-922.
- 6 **Erzhanov, ZH. S., Zhubaes, N. Zh., Tleukenov, S. K.** Seismic waves in an Inhomogeneous Medium. – Gerlands Beitr. Geophysik. – Leipzig 94, 1985. – № 1. – P. 45-51.
- 7 **Tleykenov, S.** The structure of propagator matrix and it is application in the case of the periodical inhomogeneous media. Abstr. Semin. on



Earthquake processes and their consequences Seismological investigations. – Kurukshetra, India. 1989 – P. 2-4.

8 **Tleykenov, S.** Investigation of the thin layer influence of the boundary conditions. Abstracts «Seminar on earthquake processes and their consequences». – Kurukshetra, India. 1989 – P. 4.

9 **Gantmacher, F. R.** Matrix Theory, Vol. II. – Chelsea, New York, 1964.

10 Marshall Carleton Pease Methods of Matrix Algebra. – Academic Press, 1965.

11 **Ashcroft, N., Mermin, N.** Solid state physics. – Vol 1. Chapter 8.

Material received on 12.08.14.

*Н. А. Испулов<sup>1</sup>, Ж. Ж. Оспанова<sup>1</sup>, Т. Ф. Кисиков<sup>2</sup>, Абдул Қадыр<sup>3</sup>*

**Анизотропты ортада байланысқан термосерпімді толқындардың таралуы туралы**

<sup>1</sup>С. Торайғыров атындағы Павлодар мемлекеттік университеті, Павлодар қ.

<sup>2</sup>Дэвис университеті, Калифорния, АҚШ;

<sup>3</sup>Әкімшіліктік Бизнес институты, Пәкістан.

Материал 12.08.14 баспаға түсті.

*Н. А. Испулов<sup>1</sup>, Ж. Ж. Оспанова<sup>1</sup>, Т. Г. Кисиков<sup>2</sup>, Абдул Қадыр<sup>3</sup>*

**О распространении связанных термоупругих волн в анизотропной среде**

<sup>1</sup>Павлодарский государственный университет имени С. Торайғырова, г. Павлодар;

<sup>2</sup>Калифорнийский Университет Дэвиса, США;

<sup>3</sup>Шукур Институт Бизнес Администрирования, Пакистан.

Материал поступил в редакцию 12.08.14.

*Термомеханикалық эффектiмен болатын серпiмдi орталарда толқындық процестердiң заңдылықтарды зерттеу актуалдығы, геофизика, сейсмология, композиттік материалдардың механикасының теориялық және қолданбалы есептердi шешуiнде қажеттiлiгiмен байланысты. Байланысқан қозғалыс теңдеулерi мен жылуөткiзгiштік теңдеулерi физика–механикалық параметрлердiң күрделiгi мен көп болуымен ерекшеленедi. Осыған байланысты деформацияланатын қатты дене механикасының – термосерпiмдiлiк деген тарауы қарқынды дамып келедi. Осы бағыттың аясында анизотропты орталардың кейбiр физика–механикалық қасиеттерiн*

қолдана отырып, байланысқан жылулық және механикалық өрістер зерттеледі.

*Актуальность исследования закономерностей волновых процессов в упругих средах с термомеханическим эффектом связана с необходимостью решения теоретических и прикладных задач геофизики, сейсмологии, механики композитных материалов и т.д. Связанные уравнения движения и уравнения теплопроводности отличаются сложностью и обилием физико-механических параметров. В связи с этим интенсивно развивается раздел механики деформируемого твердого тела – термоупругость. В рамках этого направления, опираясь на использование определенных физико-механических свойств анизотропных средах, изучаются связанные тепловые и механические поля.*

ӘОЖ 37:51

**Н. Қ. Машрапов<sup>1</sup>, З. Н. Тлеубергенова<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>ф.-м.ғ.к, профессор, «Математика және физика» кафедрасы, <sup>2</sup>студент, Павлодар мемлекеттік педагогикалық институты, Павлодар қ.

## **ЖАЛПЫ ОРТА МЕКТЕПТЕРДЕ МАТЕМАТИКА ПӘНІНЕН «ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР» ЭЛЕКТИВТІ КУРСТЫ ОҚЫТУ ТУРАЛЫ**

*Жоғары оқу орындарында математикалық білімнің сапасын арттыру мақсатында, мақалада орта оқу орындарында жоғары математиканың іргелі дамуына қатысты болімдерді элективті пән ретінде оқыту мәселесі сөз болады. Дифференциалдық теңдеулер курсының күрделі емес үш болімі ұсынылып, олардың физика мен химиядағы қолданылуы, мысалдар келтіріледі.*

*Кілтi сөздер: математикалық білім, дифференциалдық теңдеу, элективті курс, жалпы орта білім, бағдарлама.*

Жалпы математика курсында дифференциалдық теңдеулер тарауы қиын оқытылатын тараулардың бірі болғандықтан, оқу процесі кең зейінді, оқуға дейінгі білімнің бастапқы сатысы нақты, зор болуын талап ететіндіктен мектеп курсында оқушыларға дифференциалдық теңдеулер тарауы бойынша элективті құрсын өткізу қажеттілігі туындайды.

Элективті курс-білім алушылардың мүдделерін, бейімділігі мен қабілеттерін, оқыту процесінің құрылымын, мазмұны мен ұйымдастырылуын қамтамасыз етеді. Нақтылай айтқанда ол оқушының жеке тұлғасын дамыту құралы болып табылады. Сонымен бірге элективті курс жеке тұлғаға бағыттала отырып, жалпы орта білім беру бағдарламасының жеке пәндерін тереңдете оқытуға, білім мазмұнын саралауға және әр оқушының жеке білімдік траекториясын анықтауға, жалпы орта және кәсіби білім арасындағы сабақтастықты айқындауға мүмкіндік береді. Элективті курс – жоғары сынып оқушыларының өз қызығушылықтары бойынша таңдалатын және педагогтар ұйымының мүмкіншіліктерін ескере отырып жасалатын курс.

Жалпы орта білім беру мектептерінде математика пәнінен өткізілетін элективті курстар бойынша оқушылар меңгере алатын, жасөспірімдердің жас ерекшеліктері ескерілетін белгілі бір көлемде оқушыларға арнайы бағдарлама дайындалады.

Жоғары сынып оқушыларына арналған математика пәнінен «Дифференциалдық теңдеулер» атты элективті курстың бағдарламасын ұсынамыз. Бұл курс дифференциалдық теңдеулерге келтірілетін есептерді, дифференциалдық теңдеулер ұғымын, айнымалалары бөлінетін теңдеулерді, біртекті дифференциалдық теңдеулерді, бірінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеулер тақырыптарын қамтиды.

Дифференциалдық теңдеулерге келтірілетін есептер тақырыбында физика мен техника, химия және биология мәселелерін шешкенде, эволюциялық процесті анықтайтын шамалар арасындағы байланыстарды шешуде қолданылатын дифференциалдық теңдеулер қарастырылады.

Дифференциалдық теңдеулер түсінігі тақырыбында оқушылар дифференциалдық теңдеулер жайлы жалпы түсініктер алады, негізгі элементтерімен танысып, дифференциалдық теңдеулерді құрып үйренеді. Бұл тақырыпты өтпес бұрын оқушы мектеп бағдарламасындағы туынды, функцияның қасиеттерін білуі қажет. Себебі дифференциалдық теңдеулер белгілі бір құбылыстың сандық мағынасын қарастырады. Бұндай құбылыстарды қарастырғанда, көбінесе  $x$  пен  $y$ -тің арасындағы тікелей байланыс көрсетілмейді, бірақ  $x$  пен  $y$ -тің және  $y$ -тің туындылары арасындағы байланыс көрсетіледі, яғни дифференциалдық теңдеулер жазылады. Осы пайда болған дифференциалдық теңдеулерді шешіп, бізге  $x$  пен  $y$ -тің арасындағы тікелей байланысты анықтауға болады.

Айнымалылары бөлінетін теңдеулер тақырыбында айнымалылары бөлінетін теңдеулердің анықтамасы, алгоритмі беріледі. Айнымалылары бөлінетін теңдеулерге мысалдар келтіріледі, жаттығулар орындалады. Математика пәнінде жаңа тақырып алдыңғы тақырыппен үнемі байланыста болу қажеттіліктен, оқушы әрдайым жаңа тақырыпты алдыңғы тақырыппен байланыстыра отырып меңгеруге үйренуі керек. Оқушы

мектеп бағдарламасындағы интеграл ұғымымен таныс болуы қажет, себебі дифференциалдық теңдеулердің шешімі интегралдық есептеумен табылады.

Мысалы,

$$y \cdot y' = \frac{1-2x}{y} \text{ теңдеуін шешейік.}$$

ол үшін  $y \frac{dy}{dx} = \frac{1-2x}{y}$  теңдеуінің екі жағын  $y \cdot dx$  көбейтеміз. Ол

$y^2 dy = (1-2x) dx$  айнымалылары бөлінетін теңдеуге келеді. Оны шешу үшін теңдеудің екі жағынан да интеграл аламыз.

$$\int y^2 dy = \int (1-2x) dx + C$$

$$\frac{y^3}{3} = x - x^2 + C$$

$$y^3 = 3x - 3x^2 + 3C$$

$$y = \sqrt[3]{3x - 3x^2 + 3C} \text{ тең болады.}$$

Дифференциалдық теңдеулер курсының біртекті дифференциалдық теңдеулер тақырыбында біртекті теңдеулердің жалпы анықтамасы, алгоритмі қарастырылады. Бұл теңдеулер алмастырулар енгізу арқылы айнымалылары бөлінетін теңдеулерге келтіру жолымен шешіледі.

Мысалы,  $(x^2 - y^2) dx + 2xy dy = 0$

Шешуі: Мұндағы  $P(x, y) = x^2 - y^2$

$Q(x, y) = 2xy$  функциялары біртектілік дәрежелері бірдей біртекті

функциялар болып табылады. Сондықтан  $t = \frac{y}{x}$  алмастырулар жасау

арқылы берілген теңдеуді мынадай түрдегі теңдеуге келтіруге болады:

$$\frac{dx}{x} + \frac{2t}{1+t^2} dt = 0$$

Бұл теңдеудің жалпы шешімі  $x^2 + y^2 = Cx$  түрінде жазылады.

Бірінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеулер тақырыбында бірінші ретті дифференциалдық теңдеулердің түрлері, анықтамалары, бірінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеулердің шешу әдістері қарастырылады.

Мысалы,  $y' - \frac{2}{x+1} y = (x+1)^3$  теңдеуінің  $x=0, y=3$  шартын

қанағаттандыратын дербес шешімін табу керек.

Шешуі: Бұл теңдеуді Бернуллі әдісімен шешеміз.

$y = u(x) \cdot v(x)$  арқылы іздейміз.

$$u \left( v' - \frac{2}{x+1} v \right) + u' v = (x+1)^3 (*)$$

Бұл теңдікте  $v' - \frac{2}{x+1}v$  – өрнегін нөлге теңестіріп, бұдан  $v=(x+1)^2$  формуласын табамыз.

Табылған  $v(x)$  формуласының мәнін (\*) теңдігіне қойып,

$$u = \frac{(x+1)^2}{2} + C \text{ табамыз.}$$

Бұл табылған  $u(x), v(x)$  мөндерін  $y = u(x) \cdot v(x)$  теңдігіне қойып, теңдеудің жалпы шешімі  $y = c(x+1)^2 + \frac{1}{2}(x+1)^4$  түрде болады.

Бастапқы шартты ескеріп, теңдеудің  $y = \frac{5}{2}(x+1)^2 + \frac{1}{2}(x+1)^4$  дербес шешімі шығады.

Элективті курстың маңыздылығы оқушылардың ғылыми көзқарасы мен нақты математикалық фактілерді қолдану, математикалық қабілеттерін дамытуға бағыттау болып табылады. Элективті курс дифференциалдық теңдеулердің негізгі ұғымдары мен қасиеттерін біртіндеп түсінуге мүмкіндік береді. Дифференциалдық теңдеулер курсына берілетін материалдарды жақсы меңгеру үшін оқушы өз бетімен теңдеулерді талдап өздігінен есептерді шығарып үйренуі керек. Осы есептерді игеру барысында оқушылардың ғылыми көзқарастары қалыптасып, математикалық ұғымдардың пайда болу тарихын, оның басқа пәндермен байланысын өздігінен түсінуге көмектеседі.

Қазіргі таңда орта мектептерде дифференциалдық теңдеулер курсына оқу оқушыларға біршама қиын тиетіндіктен, мектептерде элективті курсты оқыту жоғары сынып оқушыларына білімді нақтылап жүйелеуге көмектеседі. Оқушылардың ғылыми көзқарасының негізін қалыптастыруға дифференциалдық теңдеулерді шешуде жасалатын қорытындылардың, яғни ақиқаттың себептерін дұрыс түсінуге, бұл курстардың басқа пәндердегі (механика, физика, химия, биология және т.б.) және өмірде қолданылатын орнын көрсетуге септігін тигізеді.

Енді элективті курстың дифференциалдық теңдеулерге келтірілетін есептер тақырыбында оқылатын пәнаралық байланысты жүзеге асыратын есептерді қарастырайық.

Мысалы, Белгілі бір биіктіктен массасы  $m$ -ге тең дене лақтырылды делік. Егер бұл денеге ауырлық күшінен басқа ауаның жылдамдыққа пропорционал кедергі күші  $k$  әсер ететін болса, онда дененің құлау жылдамдығы  $v$  қалай өзгерегінін табу керек.

Шешуі: Ньютонның екінші заңы бойынша  $m \cdot \frac{dv}{dt} = F$ . Мұндағы,  $\frac{dv}{dt}$  дененің үдеуі,  $F$  – күш.  $F = mg$  – ауырлық күші,  $F = kv$  – кедергі күші. Осыдан

$$m * \frac{dv}{dt} = mg - kv \quad (1)$$

болады.  $v = C e^{-\frac{kt}{m}} + \frac{mg}{k}$ ,  $C$  – кез келген тұрақты шама.

Дене құлағанда, оның бастапқы жылдамдығы  $v_0$  болсын.

$v_0 = 0$  болсын.  $t = 0$ ,  $v = v_0$  болсын.

$$v = v_0 = C + \frac{mg}{k} \Rightarrow C = v_0 - \frac{mg}{k}$$

$$v = (v_0 - \frac{mg}{k}) e^{-\frac{kt}{m}} + \frac{mg}{k}$$

$t \rightarrow \infty$ ,  $v$  бастапқы жылдамдыққа тәуелді болады.

$k = 0$ , (1) теңдіктен  $v = gt + v_0$  тең болады.

Осы есептерді шешудің жолдарын дифференциалдық теңдеулер курсының тараулары қарастырады. Дифференциалдық теңдеулер курсына тәжірибелік есептерді шығару тақырыптың күрделілігіне, есеп шығару әдісі – тәсілдеріне және олардың кәсіби бағытына байланысты. Көптеген ғылыми және техникалық есептер дифференциалдық теңдеулерді шешуге келтіріледі. Мұндай есептер қандай да бір физикалық, химиялық және басқа да процестердегі айнаымалы шамалардың арасындағы тәуелділікті анықтауды және қисықтың немесе беттің теңдеуін табуды талап етеді. Кейде дифференциалдық теңдеуді қарапайым жолмен, яғни туындының геометриялық және физикалық мағынасын қолданып та құруға болады. Бұдан басқа, дифференциалдық теңдеуді құру кезінде, есеп шартына байланысты физиканың, механиканың, химияның және басқа да ғылымдардың сәйкес заңдары қолданылады.

Көптеген құбылыстардың математикалық моделі дифференциалдық теңдеулер арқылы сипатталады. Анықтайтын шамалар арасындағы тәуелділік, көбіне, шамалар мен олардың өзгеру жылдамдықтары арасындағы байланыс түрінде, яғни белгісіз функциялар мен туындыларын байланыстыратын теңдеу түрінде алынады. Дифференциалдық теңдеулерді шешуде кезінде математикалық талдау пәніне көбірек сүйенеді. Ал ол мектеп бағдарламасындағы алгебра және анализ бастамалары пәнін жетік меңгеру арқылы жүзеге асады.

Жоғары көрсетілген мақсаттарға жету үшін нақты қадамдар атқарылуы тиіс:

- Берілген көлемдегі жұмыс бағдарламасын өту, оны меңгеру;
- Көрсетілген көлемдегі есептерді шығару;

– Оқушылардың өзіндік атқаратын тақырыптарды толық көлемде орындау;

– Көрсетілген оқу құралдары мен әдістемелік әдебиеттерді меңгеру және олармен жұмыс істеуді үйрену.

«Дифференциалдық теңдеулер» атты элективті курсті мектеп бағдарламасына енгізу барысында мұғалімдерге оқушылардың қызығушылықтары мен жас ерекшеліктерін, материалдарды беру кезінде оқушылардың білім деңгейін, түсіндіру кезінде оқушыларға неғұрлым түсінікті, жеңіл, нақты жолмен берілуін, есептерді қарастыру кезінде есептің жеңілдігін, шығару жолының қысқалығын ескеру қажет. Мұғалім дифференциалдық теңдеулерді оқушыларға беру кезінде жалпы дифференциалдық теңдеулер туралы түсініктерді, оның басқа пәндермен байланысын, дифференциалдық теңдеулерді не үшін оқытуымыз қажет, яғни қандай жағдайларда дифференциалдық теңдеулер қолданылатындығын көрсету керек.

Оқушыларға арналған жаттығу есептері:

1. Айнымалылары бөлінетін теңдеулерді шешіндер:

$$a) (1+y^2)dx=(1+x^2)dx$$

$$b) (1+x)ydx+(1-y)xdy=0$$

2. Біртекті дифференциалдық теңдеулерді шешіндер:

$$a) (y^2-3x^2)dy+2xydx=0$$

$$b) (x^2+2xy-y^2)dx+(y^2+2xy-x^2)dy=0$$

Бірінші ретті сызықтық теңдеулерді шешіндер:

$$xy' + 3y = x^2$$

$$xy' - \frac{y}{x+1} = x$$

## ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1 **Машрапов, Н. К., Маршрапова, Г. Н.** Дифференциалдық теңдеулер, мысалдар мен есептер. – Павлодар, 2006.

2 **Воронина, Г. А.** Элективные курсы. – Москва, : 2006.

Материал 10.07.14 баспаға түсті.

*Н. К. Маширапов, З. Н. Тлеубергенова*

**О преподавании элективного курса по математике «Дифференциальные уравнения» в средних школах**

Павлодарский государственный педагогический институт, г. Павлодар.  
Материал поступил в редакцию 10.07.14.

*N. K. Mashrapov, Z. N. Tleubergenova*

### **On teaching an elective course «Differential equations» in mathematics at comprehensive high schools**

Pavlodar State Pedagogical Institute, Pavlodar.  
Material received on 10.07.14.

*С целью повышения качества математического образования в высших учебных заведениях, в статье предлагаются идеи развития азов разделов высшей математики в элективных курсах среднего учебного заведения. Предложены три не сложные темы из курса дифференциальных уравнений, имеющие приложения в физике, химии; рассмотрены примеры.*

*For the purpose to improve the quality of mathematical education in higher educational institutions, in this work the ideas of development of the basic elements of higher mathematics in elective courses at comprehensive high schools are offered. Three easy topics of the course «Differential equations» having applications in physics, chemistry are offered; examples are reviewed.*

ӘОЖ 004

**Н. Н. Оспанова<sup>1</sup>, Н. Н. Дюсенгазина<sup>2</sup>, А. О. Садыкова<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>п.ғ.к., С. Торайғыров атындағы ПМУ профессоры, <sup>2</sup>оқытушылар, С. Торайғыров атындағы Павлодар мемлекеттік университеті, Павлодар қ.

### **«АҚПАРАТТЫҚ ҚАУІПСІЗДІК ЖӘНЕ АҚПАРАТТЫ ҚОРҒАУ» ПӘНІНЕН ВИРТУАЛДЫ ЗЕРТХАНАНЫ ОҚУ ҮРДІСІНДЕ ҚОЛДАНУ**

*Мақалада «Ақпараттық қауіпсіздік және ақпаратты қорғау» пәнінен виртуалды зертхананы пайдалану көмегімен студенттердің біліктілігін арттыру тәсілі ұсынылады.*

*Кілті создер: ақпараттық қауіпсіздік, ақпаратты қорғау, виртуалды зертхана, криптожүйе, компьютерлік жүйе.*

«Ақпараттық қауіпсіздік және ақпаратты қорғау» пәні жалпы алғанда, криптожүйелердің дұрыс жұмыс жасауынан, шифрлаудың әдістері қолданып ақпараттың түрленуінен тұрады. Алайда, шифрлардың әрқайсысы түрлі



өдістермен жүзеге асырылады, олардың бірі – кілттік сөз көмегімен, екіншісі – кадам, үшіншісі – алфавитті алмастыру арқылы орындалады.

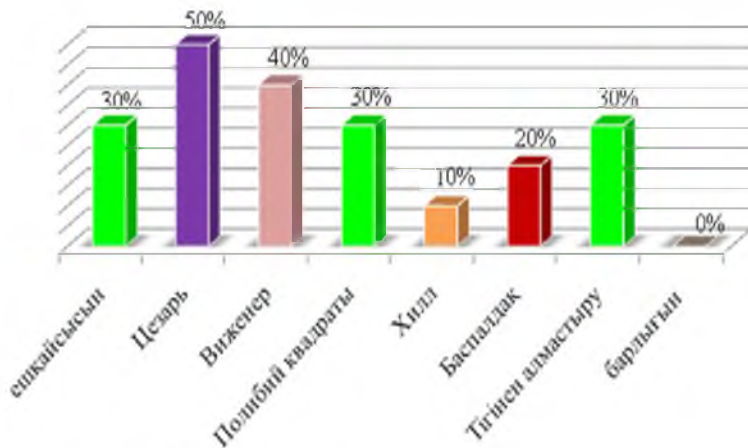
«Ақпараттық қауіпсіздік және ақпаратты қорғау» пәнінің мақсаты:

- мемлекеттің ақпараттық қауіпсіздігін қамтамасыз ету;
- ақпаратты қорғау жүйесінің методологиясын құру;
- ақпаратты жинау, тасымалдау және жинақтау;
- компьютерлік жүйелердің ақпараттық қауіпсіздігін және қорғаныс бағасын қамтамасыз ету.

Осы мақсаттар жүзеге асырылу үшін студенттер шифрлау түрлерімен танысу керек. Бұл тек оқытушы көмегімен ғана емес, сонымен қатар оқытушыға көмек ретінде болатын виртуалды зертхананы тәжірибелік сабақтарға ендіру арқылы орындалады.

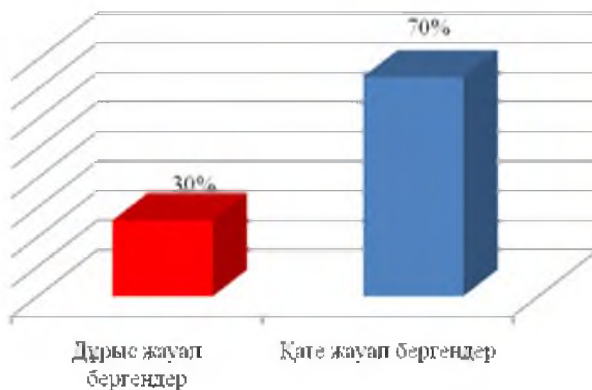
«Ақпараттық қауіпсіздік және ақпаратты қорғау» пәнінен виртуалды зертхананы тәжірибеге ендіру үшін С. Торайғыров атындағы ПМУ-да оқытушылар мен студенттерге жұмыс тәртібі түсіндіріліп, оларға сынақ өткізілді.

Оқытушылар өз пікірлерін айқындап, кемшіліктерін атап көрсетті. Олардың барлық кемшіліктері ескеріліп, бапталды. Сынақ ретінде «Ақпараттық қауіпсіздік және ақпаратты қорғау» пәнін оқып жүрген және осы пәннен мүлдем хабардар болмаған студенттер мен оқытушыларға сауалнама жүргізілді. Сауалнамаға он адам қатысты. Сауалнама жалпы он екі сұрақтан құралды, тестілеу түрінде өткізілді. Тек бір дұрыс жауап ескерілген болатын. Ең алдымен, студенттердің қандай шифрларды білетіндігі пайызбен айқындалды (1 сурет).



1 сурет – Студенттердің шифрларды білуі (пайызбен)

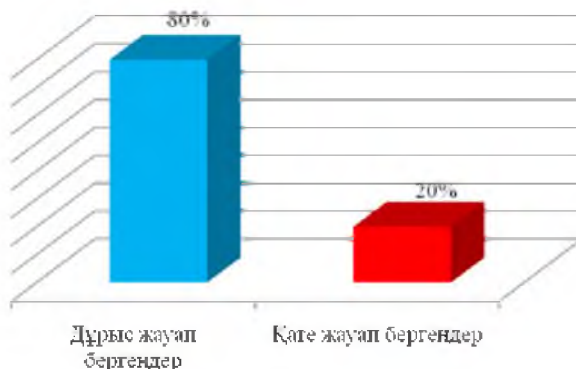
Студенттер мен оқытушыларға виртуалды зертхананы қолданбай тұрып, бірден жауап беру керектігі айтылды. Осы жүргізілген сауалнама бойынша дұрыс жауап бергендер – 30 % адам, қате жауап бергендер – 70 % адам (2 сурет).



2 сурет – Шифрлардың жұмысы туралы сұрақтарға жауап бергендердің нәтижесі

Сауалнамаға қатысқан студенттер мен оқытушылар виртуалды зертханамен танысты. Студенттер жаттықтырушыда жұмыс жасап, тәжірибе тапсырмаларына жауап берді. Осы виртуалды зертхананы қолдана отырып, студенттер шифрлардың жұмыс тәртібін жақсы меңгерді.

«Ақпараттық қауіпсіздік және ақпаратты қорғау» пәнінен виртуалды зертханамен жұмыс жасаған студенттерге тағы да осы сұрақтармен сауалнама жүргізілген болатын. Нәтижесінің күрт жақсарғанын келесі 3 суреттен анық көруге болады.



3 сурет – Виртуалды зертханамен жұмыс жасағаннан кейінгі нәтиже

Сауалнамаға қатысқандардан осы «Ақпараттық қауіпсіздік және ақпаратты қорғау» пәнінен қаншалықты білім алынғаны жайлы сұрастырылды. Олардың пікірі бойынша, виртуалды зертхананы қолданудың тиімділігі орта есеппен – 93,2 %. «Ақпараттық қауіпсіздік және ақпаратты қорғау» пәнінен виртуалды зертхананың тиімділігі дәлелденді.

Егер виртуалдық зертхананы оқу үрдісіне енгізетін болсақ, онда студенттердің «Ақпараттық қауіпсіздік және ақпаратты қорғау» пәніне деген қызығушылығы оянып, әрі білімдері де артатын болады.

## ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1 **Марченко, А. Л., Освальд, С. В.** / Лабораторный практикум по электротехнике и электронике в среде Multisim : учебное пособие для вузов. – М. : ДМК Пресс, 2010. – 448 с. : ил.

2 **Запрягаев, С. А.** / Виртуальные лаборатории в учебном процессе вуза / С. А. Запрягаев, С. Д. Кургалин, С. А. Хорошавин; Воронежский государственный университет.

3 **Трухин, А. В.** / Об использовании виртуальных лабораторий в образовании / А.В. Трухин; Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники.

4 **Мельников, В. П.** / Информационная безопасность и защита информации / В. П. Мельников, С. А. Клейменов, А. М. Петраков; высшее профессиональное образование; под ред. профессора С. А. Клейменова. – изд. 3-е, стереотипное – Москва : Академия, 2008.

Материал 19.06.14 баспаға түсті.

*Н. Н. Оспанова, Н. Н. Дюсенгазина, А. О. Садықова*

**Применение виртуальной лаборатории в обучении дисциплины «Информационная безопасность и защита информации»**

Павлодарский государственный университет имени С. Торайгырова, г. Павлодар.

Материал поступил в редакцию 19.06.14.

*N. N. Ospanova, N. N. Diusengazina, A. O. Sadykova*

**Application of virtual laboratory in discipline «Information safety and data protection»**

S. Toraihyrov Pavlodar State University, Pavlodar.

Material received on 19.06.14.

*В данной статье предлагается способ повышения квалификации студентов по дисциплине «Информационная безопасность и защита информации» посредством виртуальной лаборатории.*

*This article provides a method of training students in the discipline of «Information Security and information protection» through virtual labs.*

УДК 510.22,23

**И. И. Павлюк<sup>1</sup>, Ин. И. Павлюк<sup>2</sup>, А. Т. Сыздыкова<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>к.ф.-м.н., профессор, кафедра «Математика и информатика»,

<sup>2</sup>к.ф.-м.н., доцент, кафедра «Вычислительная техника и программирование»,

<sup>3</sup>магистр математики, старший преподаватель, кафедра «Математика и информатика», Павлодарский государственный университет имени С. Торайгырова, г. Павлодар

## **ЕДИНСТВЕННОСТЬ СИСТЕМЫ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ**

*В работе установлена единственность аксиоматической системы натуральных чисел.*

*Ключевые слова: натуральные числа, единственность, аксиоматическая система.*

Н. Бурбаки в статье «Архитектура математики» (см. также [1]) высказал предположение, что «единственными математическими объектами становятся, собственно говоря, математические структуры». К одной из таких структур относится система натуральных чисел. В работе дано теоретическое обоснование единственности системы натуральных чисел, как математического объекта. Тем самым решена утвердительно гипотеза Н. Бурбаки для математической структуры – системы натуральных чисел.

При аксиоматическом построении системы натуральных чисел утверждается, что существует хотя бы одна система натуральных чисел [2, стр. 120]. В настоящей заметке доказывается, что построенная система натуральных чисел на базе аксиом Дедекинда - Пеано единственна. Таким образом, система натуральных чисел единственна как эталон количественных отношений счетных множеств объектов реального мира. А в общем, сделан шаг на пути обоснования принципа конкретности в аксиоматической теории.

Категория конкретного тесным образом связана с истиной. В математике это проявляется особо выразительно. Конкретное – синоним диалектической

взаимосвязи расчлененной целостности. Абстрактное – этап движения конкретного. Абстрактное мышление позволяет из одних знаний получать другие не обращаясь непосредственно к практике, которая является критерием истины. Одной из форм абстрактного мышления являются понятия [6]. В них отражаются атрибутивные признаки предмета или класса однородных предметов [5]. В предметах сохраняется качественная определенность, относительно покоящаяся сущность, которая обозначает имя данного предмета. Каждое имя имеет значение (номинант) и смысл. Смысл имени – это информация о предмете, которая содержится в имени. Один и тот же предмет может иметь множество различных имен. Предметная величина в математике может выступать под различными именами ( $2+2$ ,  $4$ ). Элементы алфавита аксиоматической теории – предметные переменные. Они могут иметь различное начертание, смысл же они обретают во взаимодействии с аксиомами. Аксиомы связывают элементы алфавита отношениями. Эта связь и придает им смысл. Этот смысл единственно возможный в аксиоматике, иначе не будет реализован принцип ограниченности данной аксиоматикой. Отсюда следует, что выбор алфавита аксиоматической теории допускает определенную свободу. Смысл имени класса объектов реальной действительности воплощенного в его математической модели остается фиксированным и несет в себе целостность и единственность.

Мы используем выразительные возможности языка прикладного исчисления предикатов, а также язык теории множеств [2,3]. Это помогает детализировать рассуждения и придавать формулировкам утверждений и доказательствам более компактный и завершенный вид, а это (в свою очередь) позволяет символизировать теорию. Алгебра предикатов (в отличие от алгебры высказываний) за счет анализа субъектно-предикатной структуры высказывательных форм обладает большими выразительными возможностями, что позволяет средствами ее языка полнее отразить закономерности логического мышления, а это способствует более глубокому проникновению в суть вопроса.

Принцип объемности в теории множеств реализуется через отношение « $\equiv$ », которое является отношением эквивалентности, а принцип абстракции [4] – через атрибутивные свойства множества. Известно, что аксиоматика натуральных чисел является категоричной и вообще в алгебре аксиоматические системы рассматриваются с точностью до изоморфизма [4], вопрос о единственности не затрагивается. Отношение изоморфизма так же является отношением эквивалентности и конгруэнтно. Оно кланирует аксиоматические системы с долей мутации.

Что представляют собой классы эквивалентности в фактор множестве множества изоморфных систем по этой эквивалентности? Понятно, что свойства операций основной системы наследуются на смежных классах, но

алфавит подвержен изменению. Не являются ли смежные классы источником различных систем счисления? Элементы этого фактор множества различимы и, понятно, по мощности они не могут быть различны. Это вселяет надежду на утвердительное решение высказанной гипотезы.

### 1. О системе натуральных чисел

1. Алфавит и слова. Алфавитом называется произвольный набор символов, называемых буквами. Набор букв может быть представлен в виде конечного множества. В таком списке нет повторений букв. Таким образом, две буквы, встречающиеся в алфавите, различны. Очевидно, любой символ можно принять за букву алфавита и любой алфавит может содержать, по крайней мере, одну букву.

Каждую конечную последовательность букв алфавита  $U$  называют словом. Если алфавит  $U = \{a, b, c\}$ , то  $a, ba, baab, baacb$  – слова в этом алфавите. Каждая последовательность записанных друг за другом букв алфавита, есть слово. Таким образом, в алфавите  $U$  есть сколь угодно длинные слова. Удобно ввести слово, не содержащее ни одной буквы. Такое слово называется пустым словом. Это хорошо согласуется со свойством пустого множества  $\emptyset$ , которое содержится в любом множестве ( $U$ ) и не содержит ни одного элемента (пустое слово). Два слова считаются графически равными, если они совпадают по написанию, т.е. состоят из одинаковых элементов алфавита и одинаково эти буквы расположены в рассматриваемых словах (стоят на соответствующих местах).

Пусть даны слова  $A$  и  $B$  в алфавите  $U$ . Слово  $AB$  называется композицией или сочленением слов  $A$  и  $B$ . Очевидно,  $AB$  есть слово. Например, пусть  $A = bac$ ,  $B = aba$ . Тогда  $AB = bacaba$ . Композиция  $\emptyset A = A\emptyset = A$ , т.е. композиция любого слова  $A$  с пустым словом  $\emptyset$  считается по определению равной самому слову  $A$ , т.е.

$$(1) \emptyset A = A\overset{def}{\emptyset} = A.$$

Легко установить, что операция композиция слов, заданная на множестве слов произвольного алфавита  $U$ , обладает свойством ассоциативности, т.е.

$$(2) (\forall A, B, C \subseteq U)(A(BC) = (AB)C).$$

Слова  $abc$  и  $cba$  алфавита  $U$  зеркально отражают друг друга или являются зеркальными образами друг друга.

Слово  $B$  называется обращением слова  $A$ , если  $B$  состоит из тех же входящих букв, что и  $A$ , но записанных в обратном порядке. Слово алфавита  $U$  называется симметричным, если оно совпадает со своим обращением. Например, слово  $aba$  в алфавите  $U$  симметричное. А слово  $010$  является симметричным в двухэлементном алфавите  $t = \{0, 1\}$ .

Слово  $A$  называется подсловом слова  $B$ , если найдутся такие слова  $C$  и  $E$ , что  $B = CAE$ . Слова  $C$  и  $E$  могут быть пустыми (т.е.  $C = E = \emptyset$ ). Понятно, что слово  $A$  может иметь несколько вхождений в некоторое другое слово

$F$ . Ясно также, что пустое слово может быть подсловом любого слова с несколькими вхождениями.

### 1.2. Свойство пустого множества

Теорема. Слово  $\emptyset$  является единственным во множестве  $M$  слов в алфавите  $U$  относительно операции композиции слов.

Доказательство. По определению  $(\forall A \subset M)(\emptyset A = A\emptyset \stackrel{def}{=} A)$ . Предположим, что в данном алфавите  $U$  существует слово  $O$  с тем же свойством, что и  $\emptyset$ , т.е.

$$(1') (\forall A \subset M)(AO = OA = A)$$

и  $\emptyset \neq O$ . Поскольку  $O \subset M$ , то исходя из (1) имеем  $\emptyset O = O\emptyset = O$ . С другой стороны, исходя из (1'), при  $A = \emptyset$ ,  $O = \emptyset O = \emptyset$ . Таким образом,  $O = \emptyset O = O\emptyset = \emptyset$  и  $O = \emptyset$ . Противоречие.

Теорема доказана.

### 1.3. Построение системы натуральных чисел

Рассмотрим однобуквенный алфавит  $r = \{1\}$ , где «1» вертикальная черта. Пусть  $N$  – множество всех слов в алфавите  $r$ . Множеству  $N$  принадлежит пустое слово и слова 1, 11, 111 и т.д. Если  $n \in N$ , то  $n1$  так же слово в алфавите  $r$ . Два слова  $m$  и  $n$  из  $N$  равны ( $m=n$ ), если они равны графически. Если же они не равны, то пишут  $m \neq n$ .

Определение 1. Пусть  $m$  и  $n \in N$  композиция слов  $m$  и  $n$  называется суммой  $m$  и  $n$  и обозначается  $m \oplus n$ , где  $\oplus$  называется операцией сложения заданной на множестве  $N$ . Композиция любого слова  $n \in N$  и пустого слова  $O$  есть по определению слово  $n$ . Таким образом,

$$(3) (\forall n \in N)(O \oplus n = n \oplus O \stackrel{def}{=} n).$$

Отметим, что композиция слов на множестве  $N$  обладает свойством ассоциативности, т.е.

$$(4) (\forall m, n, l \in N)((m \oplus n) \oplus l = m \oplus (n \oplus l)).$$

Это свойство позволяет производить композицию любого конечного множества слов из  $N$ , поскольку

$$(5) (\forall m, n \in N)(m \oplus n = k \in N),$$

где  $k$  – слово в том же алфавите.

Определение 2. Произведение двух слов  $m$  и  $n$  ( $m \otimes n$ ) ( $n \neq \emptyset$ ) из  $N$  называется слово равное сумме  $n$  слагаемых, каждое из которых равно  $m$ .

Полагаем по определению  $m \otimes O = O \otimes m \stackrel{def}{=} O$ . Таким образом,

$$(6) m \otimes n = \underbrace{m \otimes m \otimes \dots \otimes m}_{n \text{ раз}}.$$

Например,  $(\forall m \in N)(m \otimes 1 = m, m \otimes 11 = m \otimes m, m \otimes 111 = m \otimes m \otimes m \dots)$ .

#### 1.4. Система натуральных чисел.

**Определение [2].** Системой натуральных чисел назовем множество  $N$  слов с операцией «+» сложения, операцией « $\cdot$ » умножения и некоторыми элементами  $0$  и  $1 \in N$ , удовлетворяющими условиям:

$$(\forall n \in N)(n + 1 \neq 0);$$

$$(\forall m, n \in N)((m + 1 = n + 1) \Rightarrow m = n);$$

$$(\forall m \in N)(m + 0 = m);$$

$$(\forall m, n \in N)(m + (n + 1) = (m + n) + 1);$$

$$(\forall m \in N)(m \cdot 0 = 0);$$

$$(\forall m, n \in N)(m \cdot (n + 1) = (m \cdot n) + m);$$

Если  $A$  – подмножество множества слов  $N$  такое, что

$$(a) 0 \in A$$

$$(b) (\forall n \in A)((n + 1 \in A) \Rightarrow A = N).$$

Приведенная система аксиом принадлежит Рихарду Дедекинду (1831–1916) и Джузеппе Пеано (1858–1932) – итальянскому математику, который занимался формально-логическим обоснованием математики. Немецкий математик Р. Дедекинд построил систему аксиом натуральных чисел раньше (1888г.) на три года [3]

Элементы множества  $N$  называются натуральными числами. Элемент  $0$  и  $1$  называются соответственно нулем и единицей системы  $N$ .

Для записи чисел (меры количества элементов множества, букв в словах, в данном случае)

$$(7)1+1, (1+1)+1, ((1+1)+1)+1,$$

используется обычная десятичная символика: 2, 3, 4,

В [1] приведены доказательства ряда свойств сложения и умножения натуральных чисел. Остановимся лишь на доказательстве необходимых нам свойств умножения натуральных чисел.

**Лемма 1.** Для любого натурального числа  $a \in N$   $1 \cdot a = a$ .

**Доказательство.** По аксиоме (V)  $1 \cdot 0 = 0$ . Предположим, что  $(\forall n \in N)(1 \cdot n = n)$ . Тогда  $1(n + 1) = 1n + 1$ , т.е.  $1(n + 1) = n + 1$ . Согласно принципу индукции (VII), формула  $1 \cdot a = a$  верна для любого натурального числа  $\dot{a}$ .

Лемма доказана.

**Теорема 2.** Умножение натуральных чисел коммутативно, т.е.

$$(8) (\forall a, b \in N)(a \cdot b = b \cdot a).$$

**Доказательство.** Используя индукцию по  $\dot{a}$ , покажем, что

$$(9) (\forall a, b \in N)(a \cdot 0 = 0 \cdot a)$$



Зафиксируем в формуле (8) произвольное значение  $\dot{a}$ . Обозначим через  $A(b)$  свойство определяемое свойством (9). Предположим, что для произвольного зафиксированного натурального число  $n$  верна формула

$(\forall n \in N)(a \cdot n = n \cdot a)$ . Тогда:

1.  $a \cdot (n+1) = a \cdot n + n$  (аксиома VI);
2.  $a \cdot (n+1) = n \cdot \dot{a} + \dot{a}$  (аксиома индукции VII);
3.  $a \cdot (n+1) = n \cdot \dot{a} + 1 \cdot \dot{a}$  (лемма 1);
4.  $(n+1) \cdot a$  (теорема 2.10 [1]).

Таким образом, выполняется условие для  $A=(n+1)$ . Согласно принципу индукции,  $A(b)$  верно для любого натурального  $b \in N$ . Поскольку фиксировалось произвольное значение  $\dot{a}$ , то формула (8) истина для любых натуральных  $\dot{a}$  и  $b$ .

Из аксиом V, VI легко следует, что

$$(10) (\forall m \in N)(m \cdot 1 = m), (\forall m \in N)(m \cdot 2 = m \cdot (1+1) = m + m),$$

$$(\forall m \in N)(m \cdot 3 = m \cdot (1+1+1) = m + m + m)$$

и т.д.

## 2. Основной результат

**Теорема 3.** Множество натуральных чисел  $N$  единственно относительно избранного алфавита и системы аксиом I, II, III, IV, V, VI, VII.

**Доказательство.** Так как умножение в  $N$  коммутативно (теорема 2), то

$$(\forall m \in N)(\forall n \in N)(m \cdot n = n \cdot m) \text{ и}$$

$$(11) (\forall m \in N)(m \cdot 1 = 1 \cdot m = m).$$

Предположим, что в  $N$  существует элемент  $1^*$  такой, что

$(\forall m \in N)(m1^* = 1^*m = m)$ , причем  $1^* \neq 1$  (допускаем). Поскольку  $1, 1^*, m \in N$ , то  $1^* \cdot 1 = 1 \cdot 1^* = 1^*$ . С другой стороны  $1 \cdot 1^* = 1^* \cdot 1 = 1$ . Из двух последних равенств следует, что  $1 = 1^*$ . Однако, это противоречит предположению. Таким образом, нейтральный элемент в системе натуральных чисел относительно операции умножения единственный.

Поскольку  $0 \in N$ , а сложение натуральных чисел коммутативно (теорема 2.3 [1, стр.124]), и  $a+0=a$  (аксиома III), то

$$(12) (\forall \dot{a} \in N)(\dot{a} + 0 = 0 + \dot{a} = \dot{a}).$$

Предположим, что в  $N$  существует элемент  $0^*$  такой, что  $(\forall \dot{a} \in N)(\dot{a} + 0^* = 0^* + \dot{a} = \dot{a})$  и  $0 \neq 0^*$ . Тогда из очевидных равенств следует, что

$$(13) 0^* + 0 = 0 + 0^* = 0^*, \quad 0 + 0^* = 0^* + 0 = 0, \quad 0 = 0^*.$$

Противоречие. Далее, из единственности записи каждого натурального числа (7) и однозначности операций сложения и умножения следует, что

система натуральных чисел единственна относительно данного алфавита и принятой системы аксиом.

Теорема доказана.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 **Пуанкаре, А.** О науке. – М. : Наука. – 1983. – 559 с.
- 2 **Куликов, Л. Я.** Алгебра и теория чисел. – М. : Высшая школа. – 1979. – 559 с.
- 3 **Бурбаки, Н.** Очерки по истории математики. – М. : ИЛ. – 1963. – 292 с.
- 4 **Столл, Р.,** Множества. Логика. Аксиоматические теории. Перев. с английского. – М. : Просвящение. – 1968. – 230 с.
- 5 **Гетманова, А. Д.** Логика. – М. : Высшая школа. – 1986. – 288 с.
- 6 **Петросян, А. Э.** Архитектоника понятия : существенное или необходимое // Вестник Омского университета, 2006. – № 4. – С. 43-56.

Материал поступил в редакцию 18.08.14.

*И. И. Павлюк, И. Ин. Павлюк, А. Т. Сыздыкова*

### **Натурал сандар жүйесінің жалғыздығы**

С. Торайғыров атындағы  
Павлодар мемлекеттік университеті, Павлодар қ.  
Материал 18.08.14 баспаға түсті.

*I. I. Pavlyuk, I. In. Pavlyuk, A. T. Syzdykova*

### **Uniqueness of the system of natural numbers**

S. Toraighyrov Pavlodar State University. Pavlodar.  
Material received on 18.08.14.

*Жұмыста натурал сандардың аксиоматикалық жүйесінің жалғыздығы анықталды.*

*In the work of the uniqueness the axiomatic system of natural numbers is established.*

УДК 510.22,23

**И. И. Павлюк<sup>1</sup>, Ин. И. Павлюк<sup>2</sup>, М. К. Кудайберген<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>к.ф.-м.н., профессор, кафедры «Математика и информатика»,  
<sup>2</sup>к.ф.-м.н., доцент, кафедры «Вычислительная техника и программирование»,  
<sup>3</sup>старший преподаватель, кафедры «Математика и информатика»,  
Павлодарский государственный университет имени С. Торайгырова,  
г. Павлодар

## **ЕДИНСТВЕННОСТЬ ГРУППЫ КАК АКСИОМАТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ**

*В работе доказана единственность аксиоматической системы группы.*

*Ключевые слова: группа, единственность, аксиоматическая система.*

В работе используются выразительные возможности языка прикладного исчисления предикатов, а также язык теории множеств [4]. Это помогает детализировать рассуждения и придавать доказательствам и формулировкам утверждений более компактный и завершённый вид, а это (в свою очередь) позволяет символизировать теорию. Алгебра предикатов (в отличие от алгебры высказываний) за счет анализа субъектно-предикатной структуры высказывательных форм обладает большими выразительными возможностями, что позволяет средствами ее языка полнее отразить закономерности логического мышления, а это способствует более глубокому проникновению в суть вопроса.

Определение [1] Алгебраической  $n$ -местной операцией на множестве  $G (G \neq \emptyset)$  (или законом композиции) называется правило (закон), по которому каждой упорядоченной  $n$ -ке  $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$  элементов множества  $G$  становится в соответствии единственный элемент  $b$  из того же множества  $G$ , ( $b \in G$ ), где  $b$  – результат операции.

Операции в математике обозначаются символами:  $f, g, * ; \cdot, +, 0, \dots$  Если  $n=2$ , то операция называется бинарной, при  $n=1$  – унарной.

Существует много определений группы [1]. Они эквивалентны. Ближе по духу теории единственности в группах следующее определение, связанное с решением уравнений, а уравнение (в нашем понимании) – это сравнение относительно отношения равенства.

Определение [2] Группой называется непустое множество  $G$  с одной основной бинарной алгебраической операцией « $\cdot$ », которая удовлетворяет следующим двум аксиомам:



1)  $(\forall a, b, c \in G)((a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c))$  – ассоциативность операции « $\cdot$ »;  
 2)  $(\forall a, b \in G)(\exists x, y \in G)((a \cdot x = b) \& (y \cdot a = b))$  – уравнения (сравнения)  $a \cdot x = b$ ,  $y \cdot a = b$  относительно переменных  $x, y$  разрешимы в  $G$ , то есть существуют их решения  $R(a \cdot x = b) \neq \emptyset$ ,  $R(y \cdot a = b) \neq \emptyset$  в  $G$ , где  $\&$  – знак конъюнкции («и»).

Эти решения могут оказаться различными. Для операции « $\cdot$ » в общем случае не выполняется закон коммутативности

$$(\forall a, b \in G)(a \cdot b = b \cdot a).$$

Если в группе  $G$  имеет место формула (1), то группа называется абелевой (в честь норвежского математика Н. Г. Абеля (1802-1829)) или коммутативной.

Будем пользоваться мультипликативной записью операции и соответствующей терминологией. В дальнейшем знак операции « $\cdot$ » опускаем (сохраняя терминологию), что согласуется с принципом экономии.

Ниже изложены свойства, вытекающие из приведенных выше аксиом группы.

**Свойство 1.** В группе  $G$  истина формула

$$(2) (\forall a, b \in G)(\exists x \in R(ax = b))(ax = a \Rightarrow (bx = b)),$$

то есть элементы группы  $G$  обладают правым нейтральным элементом.

Доказательство. Рассмотрим произведение  $bx$ , где  $b$  – произвольный элемент группы  $G$ , а  $x \in R(ax = a) \subseteq G$ . Существование такого  $x$  обеспечено аксиомой 2) (1.1.2). Тогда  $bx = (ya)x = y(ax) = ya = b$ . Отсюда  $bx = b$ .

Свойство доказано.

**Свойство 2.** В группе  $G$  истина формула

$$(3) (\forall a, b \in G)(\exists y \in R(ya = b)((ya = a) \Rightarrow (yb = b))),$$

то есть элементы группы  $G$  обладают левым нейтральным элементом.

Доказательство. Рассмотрим произведение  $yb$ . Так как  $y \in R(ya = b) \subseteq G$ , при  $b = a$ , то  $yb \in G$  и  $yb = y(ax) = (ya)x = ax = b$ . Таким образом,  $yb = b$ .

Свойства доказано.

**Свойство 3.** Группа  $G$  обладает единственным нейтральным элементом.

Доказательство. Сначала докажем, что  $x=y$  (см. свойства 1 и 2). Действительно, очевидно,  $\forall x \in G$  и  $yx = x$  поскольку  $y$  – левый нейтральный элемент группы  $G$ . С другой стороны  $yx = y$ , поскольку  $x$  – правый нейтральный элемент группы  $G$ . Таким образом,  $x = y = e$  и,

$$(4) (\forall g \in G)(\exists e \in G)(eg = ge = g).$$

Далее, установим единственность в группе  $G$  нейтрального элемента  $e \in G$ . Предположим, что  $(\forall g \in G)(\exists e_1 \in G)(e_1 g = g e_1 = g)$  и

$(\forall g \in G)(\exists e_2 \in G)(e_2 g = g e_2 = g)$  причём  $e_1 \neq e_2$ . Из равенств  $e_1 e_2 = e_2 = e_1 e_2 = e_1$  следует, что  $e_1 = e_2$ . Противоречие.

Свойство доказано.

**Свойство 4.** В группе  $G$  каждый элемент обладает единственным обратным (симметричным) элементом.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $a \in G$ . Очевидно, уравнения  $ax=e$ ,  $ya=e$  разрешимы в группе  $G$ . Пусть  $a_1^{-1} \in R(ax=e)$ ,  $a_2^{-1} \in R(ya=e)$  – решения соответствующих уравнений, то есть  $aa_1^{-1} = e = a_2^{-1}a$ . Докажем, что  $a_1^{-1} = a_2^{-1}$ . Предположим, что  $a_1^{-1} \neq a_2^{-1}$ . Рассмотрим элемент  $a_2^{-1}aa_1^{-1} = a_2^{-1}(aa_1^{-1}) = a_2^{-1}e = a_2^{-1}$ ,  $a_2^{-1}aa_1^{-1} = (a_2^{-1}a)a_1^{-1} = ea_1^{-1} = a_1^{-1}$ . Отсюда следует, что  $a_1^{-1} = a_2^{-1} = a^{-1}$ . Противоречие. Таким образом,

$$(5)(\forall a \in G)(\exists a^{-1} \in G)(a^{-1} = a^{-1}a = e).$$

Свойство доказано.

Следствие. В группе  $G$  каждый элемент  $a$  единственный.

**Доказательство**, очевидно, вытекает из свойства 4, так как  $(a^{-1})^{-1} = a$ , а элемент  $a^{-1}$  единственный в  $G$ .

Свойство 5. В группе  $G$  каждое уравнение (сравнение)  $ax=b$ ,  $ya=b$  имеет единственное решение.

Доказательство, очевидно, элемент  $a^{-1}b \in G$  есть решение уравнения  $ax=b$ , так как при подстановке его в уравнение  $ax=b$  вместо переменной  $x$  будем иметь  $a(a^{-1}b) = (aa^{-1})b = eb = b$  (то есть  $b=b$ ). С другой стороны, если предположить, что элемент  $c \in R(ax=b)$ , то есть  $ac=b$ , то  $c = ec = (a^{-1}a)c = a^{-1}(ac) = a^{-1}b$  (формула (5)). Таким образом,  $c = a^{-1}b$ , то есть других решений уравнения  $ax=b$  (кроме  $a^{-1}b$ ) в группе  $G$  нет. Аналогично устанавливается, что элемент  $ba^{-1}$  является единственным решением уравнения  $ya=b$ .

Свойство доказано.

**Свойство 6** (закон сокращения). В группе  $G$  истина формула

$$(6)(\forall a, b, c \in G)((ac = bc) \vee (ca = cb) \Leftrightarrow (a = b)),$$

где « $\vee$ » – знак дизъюнкции («или»).

**Доказательство.** Необходимость. Пусть  $ac=bc$  – верное равенство в  $G$ . Рассмотрим решение  $R(yc=bc)$  уравнения  $yc=bc$  на элементах группы  $G$  относительно переменной  $y \in G$ . Очевидно,  $b, a \in R(yc=bc)$ . Так как  $R(yc=bc)$  единственно в  $G$  (свойство 5), то  $a=b$ . Если же  $ca=cb$ , то рассмотрев уравнение  $cx=cb$ , получим, что  $a, b \in R(cx=cb)$ . В силу Свойства 5,  $a=b$ .

Достаточность. Так как  $a=b$ , то из равенства  $ac=ac$  очевидно, следует равенство  $ac=bc$ . Аналогично из равенства  $ca=ca$  следует, что  $ca=cb$ .

Свойство доказано.

**Следствие.** Произведение  $a=b$  элементов группы  $G$  единственно в  $G$  относительно групповой операции.

Доказательство. Так как операция « $\cdot$ » алгебраическая в  $G$  то  $a \cdot b = c \in G$ , а так как в группе  $G$  каждый элемент единственный (следствие свойства 4) то и элемент  $c$  единственный.

Свойство доказано.

**Теорема.** Группа единственна относительно алфавита, и непустого множества  $G$  с групповой бинарной операцией, удовлетворяющей системе аксиом (1.1.2).

Доказательство. По свойству 3 группа  $G$  обладает единственным нейтральным элементом  $e$ , а по свойству 4 каждый элемент  $a \in G$  обладает единственным обратным элементом  $a^{-1}$ . По следствию свойства 4 каждый элемент  $g \in G$  единственный в группе  $G$ . По следствию свойства 6 ( $\forall a, b \in G \exists ab = c$ ), где  $c$  – единственный элемент группы  $G$ . Следствие свойства 6 вместе с аксиомой 1) определения группы дает базу индукции для получения обобщенной ассоциативности групповой операции [2], а вместе с этим – получения любого элемента группы. Поскольку он единственный, то группа  $G$  относительно групповой операции и алфавита, использованного для реализации аксиом, единственна.

Теорема доказана.

Доказанной теоремой решена утвердительно гипотеза Н. Бурбаки о единственности алгебраической структуры группы [5].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Курош, А. Г. Теория групп. – М. : Наука – 1967. – 648 с.
- 2 Кострыкин, А. И. Введение в алгебру. – М. : Наука. – 1977. – 496 с.
- 3 Каргаполов, М. И., Мерзляков, Ю. И. Основы теории групп. – М. : Наука. – 1982. – 288 с.
- 4 Куликов, Л. Я. Алгебра и теория чисел. – М. : Наука. – 1977. – 495 с.
- 5 Пуанкаре, А. О науке. – М. : Наука. – 1983. – 559 с.

Материал поступил в редакцию 18.08.14.

*И. И. Павлюк, Ин. И. Павлюк, М. К. Кудайберген*

**Топтың аксиоматикалық жүйе ретінде жалғыздығы**

С. Торайғыров атындағы

Павлодар мемлекеттік университеті, Павлодар қ.

Материал 18.08.14 баспаға түсті.

*I. I. Pavlyuk, In. I. Pavlyuk, M. K. Kudaybergen*

### **The uniqueness of the group as axiomatic system**

S. Toraighyrov Pavlodar State University, Pavlodar.

Material received on 18.08.14.

*Жұмыста топтың аксиоматикалық жүйесінің жалғыздығы дәлелденді.*

*In the work the uniqueness of the axiomatic system of group is proved.*

УДК 512.54

### **Е. В. Самокиш<sup>1</sup>, И. И. Павлюк<sup>2</sup>, Ин. И. Павлюк<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>магистр математики, <sup>2</sup>к.ф.-м.н., профессор, <sup>3</sup>к.ф.-м.н., доцент, кафедра ВТиП, Павлодарский государственный университет имени С. Торайгырова, г. Павлодар

## **ИНДЕКСНАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ И FC-ЦЕНТР ГРУППЫ**

*В работе установлено отношение эквивалентности на элементах группы, которому соответствует FC-центр группы G.*

*Ключевые слова: группа, отношение индексной эквивалентности, FC-центр группы.*

Множество элементов  $FC(G)$  группы  $G$  такое, что  $(\forall g \in FC(G))(|G : C(g)| < \infty)$  составляют нормальную подгруппу группы  $G$ . Эта подгруппа  $FC$ -центр группы  $G$ . Она играет важную роль в теории  $FC$ -групп [1]. Поскольку элементы смежного класса  $aH$  группы  $G$  по произвольной подгруппе  $H$  связаны отношением эквивалентности, то наша задача указать это отношение, которое было бы связано с характеристическим свойством  $FC$ -центра группы  $G$ . Очевидно,  $(\forall a, b \in FC(G))(|G : C(a) \cap C(b)| < \infty)$ . Нетрудно видеть, что  $(\forall a, b \in FC(G))(|C(a) : C(a) \cap C(b)| < \infty$  и  $|C(b) : C(a) \cap C(b)| < \infty)$ . Таким образом, элементы  $a, b$  группы  $G$  индексно-эквивалентны  $a_i \equiv b$  в группе  $G$  тогда и только тогда, когда  $|C(a) : C(a) \cap C(b)| < \infty$  и  $|C(b) : C(b) \cap C(a)| < \infty$ , т.е. имеет место формула  $\&|C(b) : C(b) \cap C(a)| < \infty$ . Модулятор  $M(a)$  элемента  $a$  в группе  $G$  это решения сравнения  $x_i \equiv a$  в группе  $G$  относительно фиксированного  $\bar{a} \in G$ , т.е. это множество

элементов группы  $G$  такое, что  $(\forall x \in M(a))(C(a) : C(a) \cap C(x) < \infty)$  [2].  
Теперь сформулируем следующий результат:

**ТЕОРЕМА.** Элементы смежного класса  $aF$  группы  $G$  по подгруппе  $F < G$  индексно-эквивалентны в группе  $G$  тогда и только тогда, когда  $F = FC(G)$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Необходимость. Пусть элементы смежного класса  $aF$  индексно эквивалентны. Так как  $F < G$ , то  $(\forall h \in F)(\forall a \in G)(a_i \equiv ah)$ , где  $h \in F$ . Из сравнения  $a_i \equiv ah$  следует, что  $M(a) = M(ah)$  [2]. Так как  $M(a)$  - подгруппа группы  $G$  [2], то  $a^{-1} \in M(ah) = M(a)$ . Отсюда следует, что  $a^{-1} \in M(ah)$ . А так как  $ah \in M(ah)$ , то  $(a^{-1})(ah) \in M(a)$ . Отсюда, очевидно,  $h \in M(a)$ . Легко видеть, что  $h \in \bigcap_{a \in G} M(a) = FC(G)$  для любого

$a \in FC(G)$  и  $F \leq FC(G)$ . Так как  $(\forall b \in FC(G))(b \in M(a))$ , то  $F = FC(G)$ .

Достаточность. Пусть  $a, b \in aFC(G)$ . Тогда  $aFC(G) = bFC(G)$  и  $a^{-1}b \in FC(G)$ . Так как  $(\forall g \in G)(FC(G) \leq M(g))$ , то  $a^{-1}b \in M(a)$ ,  $b \in M(a)$  и  $b_i \equiv a$ . Аналогично устанавливается, что  $a^{-1}b \in M(b)$  и  $a \in M(b)$ . Отсюда  $a_i \equiv b$ . Теперь  $a_i \equiv b$ .

Теорема доказана.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Курош, А. Г. Теория групп. М.: Наука 1967. – 648 с.
- 2 Павлюк, И. И. Сравнение и проблема Чернышева в теории групп. Павлодар. ПГУ. 2002. – 222 с.

Материал поступил в редакцию 20.06.14.

*Е. В. Самокиш, И. И. Павлюк, Ин. И. Павлюк*

**FC-топтың орталығы және индекс эквиваленттілігі**

С. Торайғыров атындағы  
Павлодар мемлекеттік университеті, Павлодар қ.  
Материал 20.06.14 баспаға түсті.

*E. V. Samokish, I. I. Pavlyuk, In. I. Pavlyuk*

**Index equivalent and FC-group center**

S. Toraighyrov Pavlodar State University, Pavlodar.  
Material received on 20.06.14.



*Жұмыста математикалық түсінік ретінде FC-топ орталығына  $G$  сәйкес келетін эквиваленттіліктің қатынасын көрсетеді.*

*Determined the equivalence relation on the elements, corresponding to the FC-center of group  $G$ .*

УДК 512.54

**Е. В. Самокиш<sup>1</sup>, И. И. Павлюк<sup>2</sup>, Ин. И. Павлюк<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>магистр математики, <sup>2</sup>к.ф.-м.н., профессор, <sup>3</sup>к.ф.-м.н., доцент, кафедра ВТиП, Павлодарский государственный университет имени С. Торайгырова, г. Павлодар

## **ОБ АБЕЛЕВОМ НОРМАЛЬНОМ ДЕЛИТЕЛЕ ГРУППЫ**

*В работе найдены условия, при которых группа обладает нормальным делителем.*

*Ключевые слова: группа, Абелева группа, подгруппа, нормальный делитель группы, класс сопряженных элементов, коммутатор элементов, коммутант группы, централизатор элемента, центр группы, индекс подгруппы в группе [1, 2].*

Проблема Бернсайда [1] о наличии абелевого нормального делителя в конечной группе нечетного порядка решена утвердительно [5]. Связь наличия нормального делителя в произвольной группе с мощностью некоторого класса сопряженных элементов группы не выделялась в теории групп для исследования. Хотя хорошо известно, что мощность  $\left| \begin{matrix} c \\ a \end{matrix} \right|$  некоторого класса сопряженных элементов группы  $G$ , содержащего элемент  $a$  определяется индексом  $|G : C(a)|$  централизатора  $C(a)$  этого элемента в самой группе  $G$ . При каких условиях  $C(a)$  является абелевой группой или хотя бы содержит абелев нормальный делитель? Такие исследования проведены в настоящей работе при достаточно жестком ограничении для некоторого класса  $a$  сопряженных элементов – его мощность ограничена числом два. Совпадение коммутанта группы с ее подгруппой индекса два, которое установлено в Теореме 3 является уникальным свойством группы содержащей класс сопряженных элементов мощности два (теорема 2).

ЛЕММА 1. Элемент  $a$  группы  $G$  тогда и только тогда принадлежит центру  $Z(G)$  группы  $G$ , когда  $a \in \overset{c^n}{a}$  - классу сопряженных элементов группы  $G$ , содержащему элемент  $a$ , мощность  $\left| \overset{c^n}{a} \right|$  которого равна единице.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть  $e \neq a \in Z(G)$ . Тогда

$$(\forall g \in G)((a^g = a) \Leftrightarrow (C(a) = G)). \text{ Отсюда следует, что } \left| \overset{c^n}{a} \right| = 1.$$

Достаточность. Пусть  $e \neq a \in \overset{c^n}{a}$  и  $\left| \overset{c^n}{a} \right| = 1$ . Тогда  $(\forall g \in G)(a^g = a)$  и

$a \in Z(G)$ . В противном случае, если  $(\exists x \in G)(a^x \neq a)$ , то  $a, a^x \in \overset{c^n}{a}$  и  $\left| \overset{c^n}{a} \right| \geq 2$  Противоречие.

Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Группа  $G$  абелева тогда и только тогда, когда мощность каждого класса сопряженных элементов группы  $G$  равна единице.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть  $G$  абелева группа, т.е.

$$(\forall a, b \in G)(ab = ba). \text{ Если это так, то } (\forall g \in G)(\forall a \in G)(a^g = a) \text{ и } \left| \overset{c^n}{a} \right| = 1.$$

Достаточность. Пусть  $(\forall a \in G)(\left| \overset{c^n}{a} \right| = 1)$ . Тогда по Лемме 1  $(\forall a \in G)(a \in Z(G))$  и  $G \leq Z(G)$ . Отсюда  $G$  - абелева группа.

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 1. Группы, в которой каждый нетривиальный ее класс сопряженных элементов содержит два элемента, не существует.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Опираясь на лемму 1, очевидно, гипотетическая группа не абелева. Предположим, что существует неабелева группа  $G$  такая,

что  $(\forall a \in G \setminus e)(\left| \overset{c^n}{a} \right| = 2)$ . Тогда из  $\left| \overset{c^n}{a} \right| = 2$  следует, что  $(\forall a \in \overset{c^n}{a})(|G : C(a)| = 2)$  (2.5.6 [2]). Так как индекс  $|G : C(a)|$  конечен, то можно считать, без потери общности рассуждений, что  $C(a) \triangleleft G$  (12.2.2 [1]). Поскольку факторгруппа

$\overline{G} = G/C(a)$  имеет порядком два, то  $\overline{G}$  - абелева циклическая группа и

$G' \leq C(a)$  (9.2.1 [4]). Далее, из истинной формулы  $(\forall g \in G)(|G:C(g)| = 2)$  следует, что  $(\forall g \in G)(G' \leq C(g))$ . Отсюда следует, что коммутант  $G'$  содержится в центре  $Z(G)$  группы  $G$ . Пусть элемент  $b \in G' \setminus e$ . Тогда  $(\forall g \in G)(b^g \in Z(G))$ , так как  $Z(G)$  – инвариантная подгруппа группы  $G$ .

Но  $(\forall b \in Z(G))\left| \begin{smallmatrix} e \\ b \end{smallmatrix} \right| = 1$  (лемма 1), а по условию  $\left| \begin{smallmatrix} e \\ b \end{smallmatrix} \right| = 2$ . Наши предположения привели к противоречию.

Теорема доказана.

**ТЕОРЕМА 2.** В неабелевой группе  $G$ , обладающей подгруппой  $H$  индекса два, коммутант  $G$  группы равен  $H$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Так как индекс  $|G:H| = 2$ , то  $G = H \cup aH$ , где  $a \in G \setminus H$ . Очевидно,  $(\forall g \in G)(H^g \cup (aH)^g = G^g = G)$ . Отсюда следует, что  $(aH)^g = H$ . А так как, без потери общности рассуждений можно считать, что  $H \triangleleft G$ , то  $(\forall h \in H)(\forall g \in G)(h^g \in H)$ . Отсюда из равенства  $agHg = aH$  следует, что  $agH = aH$  и  $ag = ah_1$ , где  $h_1, h_2 \in H$ . Таким образом,  $a^g = ah_2h_1^{-1}$  и  $a^g = ah_3$ , где  $h_3 = h_2 \cdot h_1^{-1} \in H$ . Отсюда следует, что в группе  $G$  существует элемент  $g$  такой, что  $a^g = ah$  и  $(\forall a \in G \setminus H)(\forall h \in H)(a^g \equiv ah)$ . Таким образом, элементы смежного класса  $aH$  сопряжены между собой. Далее, установим, что  $H = G'$ . Предположим, что  $H \neq G'$ . Так как  $H \triangleleft G$ , как группа, содержащая коммутант [3], т.е.  $G' \leq H$ . Поскольку  $H \neq G'$ , то коммутант  $G'$  собственная подгруппа  $H$ . Пусть элемент  $x \in G' \setminus H$ . Так как  $a \in G' \setminus H$ , то  $a \neq G'$ . Поскольку  $x \in H$ , то  $ax \equiv a$ , т.е.  $(a^x)^g = a$ , для некоторого  $g \in G$ . Отсюда  $a^{-1}a^g = (x^{-1})^g \in G'$ . Поскольку  $G' \triangleleft G$ , то и  $x^{-1} \in G'$ . Отсюда  $x \in G'$ . Противоречие. Таким образом,  $H = G'$ .

Теорема доказана.

**ТЕОРЕМА 3.** Если в группе  $G$   $(\exists a \in G)\left| \begin{smallmatrix} e \\ a \end{smallmatrix} \right| \leq 2$ , то она обладает абелевым нормальным делителем.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Очевидно, если в группе  $G$   $(\forall a \in G)\left| \begin{smallmatrix} e \\ a \end{smallmatrix} \right| = 1$ , то она абелева и Теорема 3 справедлива. Пусть для некоторого  $a \in G$   $\left| \begin{smallmatrix} e \\ a \end{smallmatrix} \right| = 2$  (Теорема 1). Тогда  $|G:C(a)| = 2$  и факторгруппа  $G/H$ , где  $H = C(a)$ ,

абелева, а  $G' \leq H$ . По Теореме 2  $H = G' = C(a)$ . Отсюда следует, что элемент  $a \in Z(G')$ . Так как  $a \neq e$ , то  $Z(G') \neq e$  и  $Z(G') \triangleleft G$ . Таким образом, группа  $G$  обладает абелевым нормальным делителем.

Теорема доказана.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Каргаполов, М. И., Мерзляков, Ю. М.** Основы теории групп // – М. : Наука. 1982. – 284 с.

2 **Холл, М.** Теория групп // М. Ил. 1962. – 468 с.

3 **Ляшенко, И. М., Павлюк, И. И.** О нормальных множественных группах // Материалы международной научной конференции «Первые ержановские чтения». – Павлодар. – Т2. – с. 262-264.

4 **Навалихина, М. Ю.** О коммутанте группы // Сборник докладов Первой республиканской студенческой научно-практической конференции по математике и информатике. – Астана. 2008. – с. 88-89.

5 **Feit, W. and Tompson, G.** Solvability of odd order // Pac. Jour. Math. 13 (1963). – с. 775-1029.

Материал поступил в редакцию 20.06.14.

*E. V. Samokish, I. I. Pavlyuk, In. I. Pavlyuk*

**Топтың абелді қалыпты бөліндісі туралы**

С. Торайғыров атындағы  
Павлодар мемлекеттік университеті, Павлодар қ.  
Материал 20.06.14 баспаға түсті.

*E. V. Samokish, I. I. Pavlyuk, In. I. Pavlyuk*

**On Abelian normal group divider**

S. Toraighyrov Pavlodar State University, Pavlodar.  
Material received on 20.06.14.

*Жұмыста топтың абельдік нормальды бөлгіші болатын шарттары табылған.*

*In this work we obtain the conditions when the group has Abelian normal subgroup.*

UDC 512.54

**V. I. Senashov**

Institute of computational modelling of siberian division of RAS, SFU

**ON ALMOST LAYER-FINITE GROUPS**

*Established and proven new properties of almost layer-finite groups.  
Provides a review of the results on groups possessing the infinite subsystems  
of almost layer-finite subgroups.*

*Key words: group, layer of elements, finiteness conditions, almost  
layer-finiteness.*

## Introduction

**Definition.** *Layer-finite group* is called a group in which no more than a finite number of elements of each order.

This concept was first introduced by S. N. Chernikov in [1]. The theory of such groups in expanded form given in the monographs [2,3].

Layer-finite groups were studied in detail by S. N. Chernikov, R. Baer, Ch. Ch. Mukhamedjan, Ya. D. Polovitskii and other (see, e.g., [2 – 4].).

**Definition.** *Almost layer-finite group* is an extension of layer-finite group by a finite group.

Almost layer-finite groups are significantly wider class of groups than a layer-finite groups, in it, in particular, placed all Chernikov's groups. At the same time it is easy to give an example of Chernikov's group that is not a layer-finite. This group is, for example, the extension of a quasi-cyclic  $p$ -group, where  $p \neq 2$  by a cyclic group of order two, involution from which inverts all elements of quasi-cyclic group.

Layer-finite groups began to be studied by S. N. Chernikov in connection with the study of groups with minimal condition when center has a finite index in the group. In this case, the group has finite number of elements of each order. The main result describing the structure of layer-finite groups was obtained by S. N. Chernikov in 1948 [4]. It says that the group is layer-finite, when it can be represented as a product of two element-wise permutable subgroups, the first of which is a layer-finite complete Abelian group and the second is a layer-finite group with finite Sylow subgroups.

Properties of almost layer-finite groups can be found in [5, 6].

Properties of almost layer-finite groups

**Definition.** If the product of all normal layer-finite subgroups in a group is layer-finite, then it is called layer-finite radical of the group.

Layer finite radical of the group  $W$  denoted by  $R(W)$ .

In [5, 6] it is proved that any almost layer-finite group has a layer-finite radical which has finite index in the group. It is also proved that any element of the layer-finite radical of an almost layer-finite group is contained in the finite class of conjugate elements of the group; any element not contained in the layer-finite radical of an almost layer-finite group belongs to an infinite class of conjugate elements of the group.

Centralizer of any element of the layer-finite radical of an almost layer-finite group has finite index in the group; centralizer of any element not contained in the layer-finite radical of an almost layer-finite group has infinite index in the group [5, 6].

Any Chernikov group is almost layer-finite, it has finitely many prime divisors of the orders of elements. At the same time in [5, 6] shown that non-Chernikov almost layer-finite group has an infinite number of prime divisors of its elements.

Definition. The group is called Chernikov's group if it is either finite or a finite extension of a direct product of a finite number of quasi-cyclic groups.

As an example of non-Chernikov almost layer-finite group can serve an extension by a finite group of direct product of an infinite set of quasi-cyclic groups for different primes.

In [5, 6] also proved that every complete subgroup of an almost layer-finite group is contained in the center of its layer-finite radical.

Let us consider the properties of an almost layer-finite primary groups.

Examples of such groups include direct products of a finite number of quasi-cyclic primary groups for the same prime number  $p$  and extensions of these groups by a finite  $p$ -groups.

For locally finite groups is valid Schmidt's theorem talking about the closure of locally finite groups with respect to extension by locally finite groups. For the class of almost layer-finite groups analogous theorem does not hold: the extension of an almost layer-finite groups by almost layer-finite groups not necessary belong to this class. The following theorem holds:

Theorem 1. Infinite almost layer-finite  $p$ -group  $G$  contains a normal subgroup of finite index, which is a direct product of a finite number of quasi-cyclic groups [5, 6].

Class of almost layer-finite groups is closed under taking of subgroups and factor groups:

Theorem 2. Subgroups and factor groups of an almost layer-finite group are almost layer-finite.

Proof. Subgroups of an almost layer-finite group are almost layer-finite by the definition of almost layer-finiteness. Let  $N$  be a normal subgroup of an almost layer-finite group  $G$ . Since by definition, the group  $G$  has the form  $G=K \cdot R(G)$ , where  $K$  is a finite group,  $R(G)$  is a layer-finite radical of the group  $G$ , then the factor group  $H=G/N$  is isomorphic to  $KN/N \cdot R(G)N/N$ . The group  $KN/N$  is finite, and the group  $R(G)N/N$  is layer-finite on the note to Theorem 3.4 in [3]. The theorem is proved.

Definition. We call an almost layer-finite group thin if all its Sylow subgroups are finite and thick if at least one of its Sylow subgroups is infinite.

Theorem 3. Almost layer-finite group can be represented as the product of a complete layer-finite Abelian group and thin almost layer-finite group.

Proof. Let  $G$  be an almost layer-finite group. By the properties of almost layer-finite groups (see paragraph 1) group  $G$  has a layer-finite radical  $R(G)$  of finite index in  $G$ , which contain in its center all complete subgroups of  $G$ . Then the product  $A$  of all complete subgroups of the group  $G$  is a complete layer-finite Abelian group and the subgroup  $A$  is a characteristic subgroup in  $R(G)$ .

Since by Corollary 3.3 of [3] for layer-finite group  $R(G)$  factor group  $R(G)/A$  is a thin layer-finite group. So Sylow primary subgroups of the factor group  $(G)/A$  do not contain infinite complete subgroups. Hence, by Theorem 2  $G$  is an extension of a complete layer-finite Abelian group by a thin almost layer-finite group. The theorem is proved.

2. Properties of infinite groups having infinite subsystems of an almost layer-finite subgroups

Like Schmidt's problem (whether every group in which every proper subgroup is finite be finite) legitimately ask the question: what properties are transferred to the whole group from some system of its subgroups? Here, the question is solved for almost layer-finiteness conditions.

First, this problem is solved in the class of locally finite groups:

Theorem 4 (V. P. Shunkov, [7]). Locally finite group  $G$  if and only if almost layer-finite, when in  $G$  the condition holds: normalizer of any nontrivial finite subgroup of  $G$  is an almost layer-finite group.

Then, the same problem is solved in the class of periodic Shunkov's groups without involutions:

Theorem 5 (V. I. Senashov, [8]). Let  $G$  be a Shunkov's periodic group without involutions. If in  $G$  the normalizer of any nontrivial finite subgroup is almost layer-finite, then the group  $G$  is almost layer-finite.

Definition. Shunkov's group is such a group in which for any finite subgroup  $K$  in the factor group  $N_G(K)/K$  any two conjugate elements of prime order generate a finite subgroup.

Condition in the theorem that the group is a Shunkov's group can not be dropped because examples of Novikov-Adian's groups [9] and Olshansky groups [10].

Another criterion of almost layer-finiteness of the group obtained by M. N. Ivko:

Theorem 6 (M. N. Ivko, [11]). Let  $G$  be a periodic almost locally soluble group having elementary Abelian subgroup  $V$  of order  $p^2$ . If the centralizer in  $G$  of any non-trivial element from  $V$  is layer-finite, then the group  $G$  is almost layer-finite.

Definition. A group is called locally solvable if any finite set of its elements contained in a finite solvable subgroup.

Further continuing study on the transfer of property almost layer finiteness from normalizers of nontrivial finite subgroups to the whole group.

The following theorem establishes almost layer-finiteness of periodic group provided its conjugate biprimatively finiteness and when it has strongly embedded subgroup.

Theorem 7 (V. I. Senashov, [12]). Let Shunkov's periodic group  $G$  contains a strongly embedded subgroup. If in  $G$  the normalizer of any nontrivial finite subgroup almost layer-finite, then the group  $G$  is almost layer-finite.

Definition. Subgroup  $H$  of the group  $G$  is called a strongly embedded in  $G$ , if  $H$  is a proper subgroup of the group  $G$  containing involution and the intersection  $H$  and  $x^{-1}Hx$  does not contain involutions for  $x \in G \setminus H$ .

Theorem 8 (V.I. Senashov, [13]). Let  $G$  be a Shunkov's periodic group without subgroups of the form  $PSL_2(q)$ . If the normalizer in  $G$  of any nontrivial finite subgroup is almost layer-finite, then the group  $G$  is also an almost layer-finite.

The following theorems are characterizations of groups with an almost layer-finite periodic part.

Theorem 9 (V.I. Senashov, [7]). Let  $G$  be a Shunkov's group without involutions. If in  $G$  the normalizer of any nontrivial finite subgroup has an almost layer-finite periodic part, then the group  $G$  has an almost layer-finite periodic part.

Theorem 10 (V.I. Senashov, [14 – 16]). Let Shunkov's group  $G$  contains a strongly embedded subgroup, has an almost layer-finite periodic part. If in  $G$  the normalizer of any nontrivial finite subgroup has an almost layer-finite periodic part, then the group  $G$  itself has an almost layer-finite periodic part.

This work was supported by the grant 0112PK02319 of Ministry of Education of the Republic Kazakhstan and by the grant of SFU (algebraic logic structures and complex analysis).

## LIST OF REFERENCES

- 1 **Chernikov, S. N.** The theory of infinite special  $p$ -groups [Text] // Dokl. of USSR Academy of Sciences. – 1945. – P. 71–74.
- 2 **Senashov, V. I.** Layer-finite groups [Text]. – Novosibirsk: Nauka, – 1993. – 159p.
- 3 **Chernikov, S. N.** Groups with given properties of subgroups [Text]. – Moscow: Nauka, 1980. – 384 p.
- 4 **Chernikov, S. N.** Infinite groups with finite layers [Text] // Math. Sbornik. – 1948. – Vol. 22 (64). – P. 101–133.
- 5 **Senashov, V. I.** On groups possessing a strongly embedded subgroup [Text] // Algebra and its Applications: Proceedings of the International Algebraic Conference dedicated to the 80th anniversary of the birthday of A. I. Kostrikin. – Nalchik: Kab.-Balk. University, – 2009. – P. 118–120.





*Сәл қабатты шекті топтардың жаңа қасиеттері орнатылған және дәлелденген. Сәл қабатты шекті ішкі топтардан топшадан тұратын шексіз ішкі жүйелерге ие болған топтар бойынша нәтижелер көрсетілген.*

*Установлены и доказаны новые свойства почти слойно-конечных групп. Приводится обзор результатов по группам, обладающих бесконечными подсистемами из почти слойно-конечных подгрупп.*

ӘОЖ 533.9.01

**А. У. Умбетов<sup>1</sup>, С. Б. Жумабаева<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>ф.-м.ғ.к., профессор, <sup>2</sup>аға оқытушы, магистр, БІ. Алтынсарин атындағы Арқалық мемлекеттік педагогикалық институты, Арқалық қ.

## **БІР ОСТІ КРИСТАЛДАРДАН ЖАСАЛЫНҒАН ОПТИКАЛЫҚ ЖҮЙЕЛЕРДІҢ ТҮРЛЕРІ**

*Квантты электроника мен когерентті оптиканың дамуына байланысты әр түрлі кристалды оптикалық жүйелердің ғылыми техникалық және ондірістік құрылымдарда қолданылуы кең түрде артты. Кристалды оптикалық қондырғылардың көмегімен лазер сәулелерін басқару, амплитудасын, жиілігін, фазасын және поляризациясын басқару сәтті шешіледі. Сонымен бірге жарық сәулесін үздікті және үздіксіз сканерлеу, модуляциялау және оптикалық резонатордың модтарын бөліп алу, оптикалық сәулелердің ұзақтығы мен түрін басқару сәтті шешіледі. Кристалды оптикалық жүйелер кеңістіктік кодировкалау және декодировкалау үшін, басқармалы кеңістік сүзгіштер құру үшін қажет. Кристалды оптикалық жүйелер негізінде поляризациялық интерферометрлік қондырғылар алуға болады. Жұмыста кейбір кристалды оптикалық жүйелердің түрлері қарастырылады.*

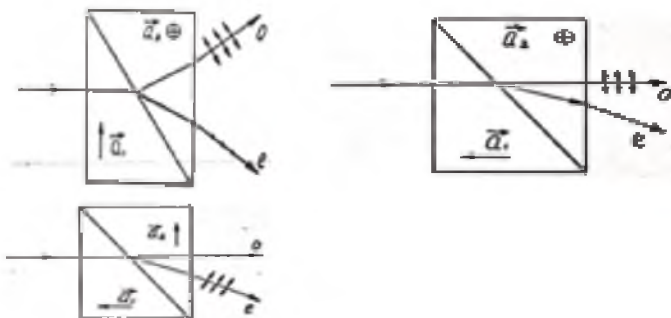
*Кілті сөздер: біросты, линзалар, призмалар, оптикалық осіттер, кәдімгі толқындар, әдеттегідей емес толқындар, поляризация.*

Бір ості кристалдардан жасалынған оптикалық жүйелер лазерлі поляризациялық интерферометрлерді құрастыруда қолданылады. Бұл интерферометрлер әр түрлі метрологиялық бағыттарда қажетті өлшегіш құралдар болып табылады. Сондықтан бір ості кристалдардан жасалынған

оптикалық жүйелердің түрлерімен құрылу принциптерін зерттеу лазерлер технологиясындағы маңызды мәселелердің бірі болып табылады.

Кристалды оптикалық жүйелердің жұмысы кристалдарда жарықтың қосарланып сыну құбылысына негізделген. Кристалдар жүйелерге өртүрлі комбинациялар түрінде енеді. Көдімгі жағдайда кристалды оптикалық жүйелер екі түрлі кристалдардан құралады. Бұндай призмалар шағысынданда сызықты поляризациялаған сәуле береді (поляризациялық призмалар).

Қасиеттері зерттелінген қосарланып сындырғыш призмалардың түрлері көп. Призманы құрайтын кристалдардың оптикалық остерінің өзара бағытталуы да әр түрлі. Оптикалық остерінің өзара бағытталуының нәтижесінде қасиеттердің әр түрлі жүйелер алуға мүмкіндік аламыз. 1,2,3, суреттерде оқулықтарда белгілі [1,2,3] қосарланып сындырғыш призмалар келтірілген. Бұл призмалар бір ості кристалдардың екі сынасынан құралған. Кристалдардағы оптикалық остердің бағыттары және олардағы көдімгі (o) және көдімгі емес (e) сәулелердің траекториясы келтірілген. Көрсетілген жағдайлар шеңберлі поляризацияланған жарық призманың кіріс қабырғасына нормаль түскен жағдайда орын алады.



Сурет 1 – а) Волластон призма; б) Рошон призмасы; в) Сенармон призмасы.

Призма бастапқы сәулені симетриялы түрде екі сәулеге жіктейді. Сәулелердің арасындағы бұрыш –  $X$ , ол призма сынасының сындыру бұрышына ( $\theta$ ) және  $n_e$  және  $n_o$  сыну көрсеткіштеріне тәуелді. Мұндағы  $n_o$  (көдімгі),  $n_e$  (көдімгі емес) сәулелердің сыну көрсеткіштері.

Призманың кірісіндегі шекарасына жарық нормаль түскен жағдайда;

$$X = 2(n_o - n_e) \operatorname{tg} \theta \quad (1)$$

2. Рошон призмасы (1 – сурет (б)).

Поляризациясы көдімгі толқынға сәйкес сәуле призманың шығысында бастапқы бағытын сақтайды. Көдімгі(o) және көдімгі емес(e) сәулелерінің

арасындағы екілену бұрышы  $e$  – сәулесінің ауытқуымен анықталады. Сонымен призманың екілену бұрышы Воллатон призмасымен салыстырғанда екі есе аз болады.

3. Сенармон призмасы (1 – сурет (в)).

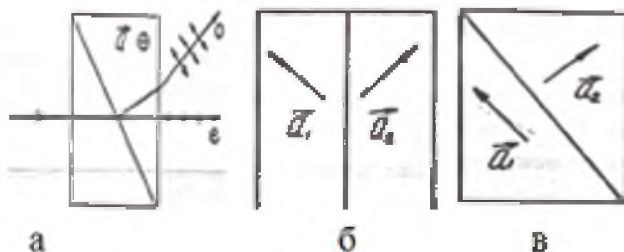
Сыналардың сындыру бұрышы  $45^\circ$  жуық және кристалды қолдануда ең тиімді. Бұнда да Рошан призмасына сәйкес тек  $e$ -сәулесі ауытқиды.

1. Изотропты және кристалды сыналардан құралған призма (2 – сурет (а)). Бұндай призмада кәдімгі  $o$  – сәулесі ауытқиды, кәдімгі емес  $e$ - сәулесі бағытын сақтайды.

2. Совар пластинасы (2 – сурет (б)).

Бір өсті кристалдардан құралған жазық паралельді пластинка. Оптикалық осіне  $45^\circ$  бұрышпен кесілген және бір – біріне оптикалық өстері перпендикуляр болатындай етіп желімденген. Бұл призманың шығысында кәдімгі ( $o$ ) және кәдімгі емес ( $e$ ) сәулелер өздерінің бастапқы бағыттарын сақтайды.  $o$  және  $e$  – сәулелер өзара бір – бірінен призманың қалыңдығына және кристалдардың анизотроптылығына сәйкес ығысады.

3. Екілену айнымалы бұрышты қос сындырғыш призма (ЕАБҚП) (2 – сурет (в)). Призма сыналарының оптикалық өстері өзара перпендикуляр, кіріс және шығыс қабырғаларымен  $45^\circ$  бұрыш жасай орналасады, және призманың кіріс және шығыс қабырғалары жатқан жазықтықта жатады.



Сурет 2 – а) Изотропты және кристалды сыналардан құралған призма;  
б) Совар пластинасы; в) Екілену айнымалы бұрышты қос сындырғыш призма.

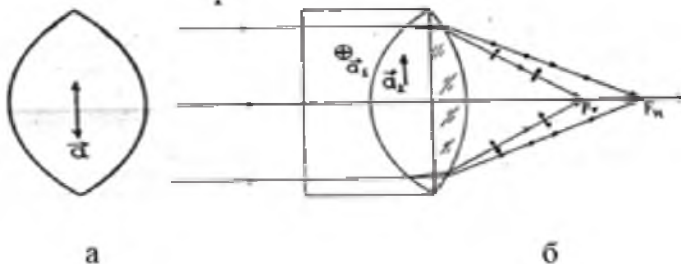
Жоғарыда айтылған қос сындырғыш призмалар жарықтың нормалды түсу режимінде қолданылады. Бұл жағдайда  $o$ - және  $e$ -сәулелердің бастапқы бұрыштық немесе бүйірлі (Совар пластинасы) ығысулары қамтамасыз етіледі. Ығысу шамасы призманың материалына және геометриясына байланысты және берілген призма үшін тұрақты шама болып табылады. Бұл ерекшелік призмаларды кең түрде қолдану мүмкіндігін шектейді, себебі кейбір жағдайларда сәулелердің жіктелінуін және үлкен аралықтардағы ығысуын басқару қажет болады.

4. Биполяризациялық линза (3 – сурет (а)).

Бұндай линза о-және е-сәулелерді әр түрлі нүктелерде фокустайды.

5. Бифокалды линза (БЛ) (3 – сурет (б)).

БЛ құрылымы Воллтон призмасының жұмысына негізделген (1 – сурет (а)). Воллтон призмасындағы сыналардың көлбеу жазықтығы сфералық бетпен алмастырылған.



Сурет 3 – а) Биполяризациялық линза; б) Бифокалды линза

Сфералық беттер БЛ шығысында қиылысатын және шашырайтын поляризацияланған сәулелер тудырады. Бұл жағдай кристалды оптикалық жүйелерді қолданудың жаңа мүмкіндіктерін береді. Қосымша түзеткіш шыны линзаның болуы - екі шын фокустар алуға мүмкіндік береді.

Берілген жұмыста БЛ-дің көмегімен физика мен техника үшін маңызды мәселелердің бірі, анализатордың көмегінсіз поляризацияланған сәулелердің интерференциясын алу мүмкіндігін аламыз және маңызды жағдайдың бірі БЛ–ға түскен поляризациялық сәулелердің екі нүктеде фокусталуы болып табылады. Қарастырылып өткен кристалды оптикалық жүйелер әр түрлі мақсаттарда қолданылатын поляризациялық интерферометрлер құрастыруға мүмкіндік береді.

## ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

- 1 **Бойко, Г., Эйрих, В.** Волоконно-оптические системы передачи связи. – Астана. – 2012.
- 2 **Байжігітов, Т.** Жалпы физика курсы. – Алматы, 2013.
- 3 **Борн, М., Вольф, Э.** Основы оптики. – М. : Наука, 1978.
- 4 **Ландсберг, Ф. С.** Оптика. – М. : Наука, 1976.
- 5 **Федоров, Ф. И., Филиппов, В. В.** Отражение и преломление света прозрачными кристаллами. Минск. Наука, 1976.

А. У. Умбетов, С. Б. Жумабаева

### **Кристаллооптические системы из одноосных кристаллов**

Аркалыкский государственный  
педагогический институт имени И. Алтынсарина, г. Аркалык.  
Материал поступил в редакцию 25.06.14.

*A. U. Umbetov, S. B. Zhumabayeva*

### **Crystal optics system of uniaxial crystals**

Arkalyk state pedagogical institute after I. Altynsarin, Arkalyk.  
Material received on 25.06.14.

*С развитием квантовой электроники и когерентной оптики значительно возросло использование разнообразных кристаллооптических систем в научно-технических и промышленных разработках. В работе рассмотрены различные виды кристаллооптических систем. С их помощью успешно решаются задачи управления излучением лазеров, управление амплитудой, частотой, фазой и поляризацией, создания непрерывного и дискретного сканирования светового луча, модуляции добротности и селекции мод оптического резонатора, управления длительностью и формой импульсов оптического излучения. Кристаллооптические системы применяются также для создания управляемых пространственных фильтров. На базе кристаллооптических систем создан целый ряд лазерных поляризационных интерферометрических устройств, позволяющих с высокой точностью исследовать качество обработки оптических деталей, геометрические параметры лазерных пучков, пространственную корреляционную функцию поля лазерного излучения и степень когерентности. В работе рассматриваются некоторые разновидности кристаллооптических систем.*

*With the development of quantum electronics and coherent optics the use of various crystal-optical systems in scientific-technical and industrial development considerably increased. In the work different types of crystal-optical systems are considered. With their help the problems of management are successfully solved of the radiation of lasers, management of amplitude, frequency, a phase and polarization, creations of continuous and discrete scanning of a light beam, modulation of good quality and selection of fashions of the optical resonator, management of duration and a form of impulses of optical radiation.*

*Crystal optical systems are applied as to creation of operated spatial filters. On the basis of a crystal of optical systems a number laser*

*polarizing the devices allowing with high precision to investigate quality of processing of optical details, geometrical parameters of laser bunches, spatial correlation function of a field of laser radiation and coherence degree is created.*

UDC 517.958

**J. R. Ferrer<sup>1</sup>, V. Gaydak<sup>2</sup>, I. M. Tkachenko<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>Department of Applied Mathematics, Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, Spain, <sup>2</sup>Department «Mathematics», S. Toraihyrov Pavlodar State University, Pavlodar, <sup>3</sup>Instituto de Matemática Pura y Aplicada, Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, Spain

## **INHOMOGENEOUS STEFAN PROBLEMS**

*Two-phase physical systems with sources and mobile interfaces are modeled by inhomogeneous parabolic problems which are considered as extensions of the classical problem of Stefan. The solutions in linear, cylindrical and spherical geometrical setups are found as a series in orthogonal (Hermite or Laguerre) polynomials. Some particular cases are considered.*

*Key words: Stefan problem, mobile interface, inhomogeneous heat equation.*

### 1. Introduction

Although much of attention has been paid in mathematical and engineering literature to various extensions of the Stefan problem (cylindrical and spherical geometries, heat loss by either Newton cooling or by black-body radiation instead of prescribing the temperature on the interface, etc.) [1], [2], [3], [4], inhomogeneous problems have not yet been considered with sufficient depth [2].

On the other hand, under certain physical conditions, a strong electrical discharge in dense media [5] (for recent experiments, see [6]) can be modeled as a cylindrical two-phase physical system with a mobile interface, see [8] where the nonsingular solution within the phase with energy sources was found as a series in Laguerre polynomials.

The cooling of a white or brown dwarf [7] can also be considered as a spherical parabolic problem (perhaps inhomogeneous) analogous to the classical problem of Stefan.

Here (Sects. 3 and 4) an inhomogeneous Stefan problem in linear, cylindrical or spherical geometries is considered. The heat equation with the source term

(in the first phase) is reduced to a homogeneous equation operating an unknown function transformation, which in turn affects the boundary condition on the free interface, which becomes nonstandard (Sect. 2). This condition prevents the application of classical self-similarity methods. The problem is solved by means of functional series in terms of the confluent hypergeometrical function reduced to Hermite or Laguerre polynomials.

Notice that by virtue of the problem linearity the contribution to its solution due to the initial conditions must be added to the contribution generated by the sources.

The deviation of the interface movement law from the classical  $\sqrt{t}$  is also determined. Some specific cases of boundary conditions are treated as well, see Appendices.

#### Inhomogeneous Stefan problem

The mobile interface condition. Consider first a cylindrical two-phase system with the phase transition taking place on the mobile interface. Presume also that there are sources within the first phase (subscript 1). The inhomogeneous equation in this phase will be

$$(2.1) \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} = \chi_1 \Delta u_1 + f(t), \quad 0 \leq r \leq R(t) \quad R(0) = 0,$$

Where  $\chi_1$  is the «heat conductivity» of the first phase, and  $f(t)$  is the sources density within this phase presumed to be distributed homogeneously. The function  $f(t)$  is also assumed to be analytical.

There are no sources in the second phase:

$$(2.2) \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} = \chi_2 \Delta u_2, \quad R(t) \leq r \leq \infty,$$

The function  $R(t)$  is the mobile interface «radius», so that the transition condition can be written as

$$(2.3) \quad u_1(R(t), t) = v_2(R(t), t) = 1.$$

To obtain the Stefan mobile interface condition, suppose that in  $dt$  seconds the interface has moved from the surface  $r = R$  to  $r = R + dR$ ; and the «mass»

$2\pi R l \rho_2 dR$  has transformed into the first phase ( $l$  is the system «length» in the orthogonal direction if ever, and  $\rho_j, j = 1, 2$  stands for the «mass» density of the  $j$ -th phase). The «lenergy» necessary to realize this elementary transition is  $dQ = 2\pi \Lambda l R dR$ ,  $\Lambda$  being the volume density of the transition «heat».

---

1991 *Mathematics Subject Classification*. Primary 35K05; Secondary 35K20.

I. M. T. is grateful to A.W. DeSilva and H.E. DeWitt for providing their materials prior to publication. The financial support of the Pavlodar State University (Kazakhstan) is acknowledged.

<sup>1</sup>See, nevertheless, Appendix 1, where in the cylindrical setup the energy injection mechanism is simplified to preserve the self-similarity.



The balance condition requires  $dQ$  to be equal to the difference between the «heat» delivered from the first and the second phases to the interface:

$$(2.4) \left( \kappa_1 \frac{\partial u_1}{\partial r} - \kappa_2 \frac{\partial v_2}{\partial r} \right)_{r=R} = 2\pi l R dt.$$

Dividing by the «channel» area  $2\pi l R$  and  $dt$ , we get the Stefan condition

$$(2.5) \left( \kappa_1 \frac{\partial u_1}{\partial r} - \kappa_2 \frac{\partial v_2}{\partial r} \right)_{r=R} = \lambda \frac{dR}{dt},$$

where  $\lambda$  is the transition «latent heat» normalized to the transition temperature.

Notice that  $\kappa_j = C_{pj} \chi_j, j = 1, 2$ , where  $C_{pj}$  is the thermal (isobaric) capacity of the  $j$ -th phase. We also assume that the temperature of the first phase at  $t = 0$  is higher or equal to the transition «temperature» (=1), and that

$$(2.6) v_2(r > 0, 0) = \theta \leq 1.$$

The inhomogeneous equation (2.1) can be easily reduced to the homogeneous one, if instead of  $u_j$  one introduces a new unknown function

$$(2.7) v_1(r, t) = u_1(r, t) - \int_0^t f(t') dt',$$

which satisfies the equation

$$(2.8) \frac{\partial v_1}{\partial t} = \chi_1 \Delta v_1.$$

The interface condition (2.3) then becomes

$$(2.9) v_1(R(t), t) + \int_0^t f(t') dt' = v_2(R(t), t) = 1,$$

and the Stefan condition (2.5) is not affected by the transformation of

Eq. (2.7):

$$(2.10) \left( \kappa_1 \frac{\partial v_1}{\partial r} - \kappa_2 \frac{\partial v_2}{\partial r} \right)_{r=R} = \lambda \frac{dR}{dt}$$

Since  $f(t)$  was assumed to be analytic, the function  $\Phi(t) = \int_0^t f(t') dt'$  is analytic as well:

$$(2.11) \Phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n t^n}{n!}$$

We want to include in our treatment three inhomogeneous problems with «radial» symmetry, and thus define the Laplace operator as  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r}$ , with  $\nu = 0, 1$  or  $2$  for linear ( $r = x \geq 0$ ), cylindrical or spherical geometrical conditions, respectively [2]. As it is well known, the latter case is easily reducible to the first (linear) one by means of the function transformation:  $u(r, t) = w(r, t) / r$ . Thus in what follows we consider only the linear and cylindrical cases ( $\nu = 0, 1$ ). Actually,

the one-dimensional case can be considered as a «boundary condition» for our development: the solution of the homogeneous ( $f(t) = 0$ ) one-dimensional problem due to its similarity property is representable as [13]

$$(2.12) \quad A + B \operatorname{erf}(z_i) = A' + B' \operatorname{erfc}(z_i)$$

where  $z_i$  is the similarity parameter (see further),  $A$  and  $B$  or  $A'$  and  $B'$  are constants depending on the initial conditions, and  $\operatorname{erf}(x)$  is the error function [10]:

$$(2.13) \quad \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt = 1 - \operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} x M\left(1, \frac{3}{2}, -x^2\right).$$

Here  $M(a, b, y)$  is Kummer's confluent hypergeometric function [10].

In the cylindrical case the equation

$$(2.14) \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} = \chi_2 \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) u_2$$

also admits a  $z$ -dependent general solution [8]

$$(2.15) \quad A'' + B'' E_1(z_2^2),$$

where

$$(2.16) \quad E_1(y) = \int_y^\infty e^{-s} \frac{ds}{s}$$

is the integral exponential function [10].

2.2. General solution of the inhomogeneous equation. Following the work by Tao ([9]), let us seek the solution of the mobile interface problem Eqs. (2.8, 2.2, 2.9, 2.10), which lacks the classical similarity property, as a linear combination of the solutions of the homogeneous equation (2.8) or (2.2),

$$(2.17) \quad v_i(r, t) = v_i^{(0)}(r, t) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{G_n^{(i)}}{n!} t^n G_n^{(i)}(z_i), i = 1, 2,$$

where  $v_i^{(0)}(r, t) = v_i^{(0)}(z_i)$  is a general solution of the homogeneous problem (Eqs. (2.12) or (2.15), respectively), and is presumed that for any  $n$  the function

$$(2.18) \quad g_n^{(i)}(r, t) = t^n G_n^{(i)}(z)$$

is a particular solution of

$$(2.19) \quad \frac{\partial v_i}{\partial t} = \chi_i \Delta v_i.$$

In Eq. (2.17) and in what follows,  $z_i$ ,  $i = 1, 2$ ; are effective dimensionless similarity parameters:

$$(2.20) \quad z_i = \frac{r}{\sqrt{4\chi_i t}}$$

The substitution of Eq. (2.18) into Eq. (2.19) leads to the following effective equation for the unknown functions  $G_n^{(i)}(z)$ : (we omit the super- or subscript  $i$  where possible)

$$(2.21) \frac{d^2 G_n(z)}{dz^2} + \left( 2z + \frac{\nu}{z} \right) \frac{dG_n(z)}{dz} - 4nG_n(z) = 0.$$

This equation has a regular pole at  $z = 0$ , i.e., at least one of the linearly independent solutions of Eq. (2.21) possesses a singularity (at least a logarithmic one) at  $z=0$  for any  $n=0, 1, 2, \dots$

The solutions of Eq. (2.21) can be sought as  $G_n(z) = f_n(-z^2)$ . Using the notation  $x = -z^2$ , Eq (2.21) can be rewritten as

$$(2.22) x f_n''(x) + \left( \frac{\nu+1}{2} - x \right) f_n'(x) + n f_n(x) = 0;$$

which is the confluent hypergeometric equation ([10]).

This equation has two linearly independent solutions. Due to the energy conservation it is evident then that the nonsingular solution will describe the "temperature" distribution within the first phase which contains the energy sources, while the singular one corresponds to the second, subdued, phase.

The "temperature" distribution within the first phase is generated by the regular particular solutions of Eq. (2.22):

$$(2.23) f_n^{(1)}(x_1) = M \left( -n, \frac{\nu+1}{2}, x_1 \right),$$

while the solution within the second phase not containing the point  $r=0$  is related to the singular solution of (2.22):

$$(2.24) f_n^{(2)}(x_2) = U \left( -n, \frac{\nu+1}{2}, x_2 \right).$$

In the latter equations we have recovered the phase distinction:

$$x_i = -\frac{r^2}{4x_i t}.$$

The same result can be obtained, looking for the functions  $G_n(z)$  as even moments of the Eq. (2.19) Green's function [9].

It is evident that the presence of the source term violates the similarity property. On the other hand, if the sources are switched off the similarity must «return», i.e., the coefficients  $a_n^{(i)}$  in Eq. (2.17) depend significantly on the sources presence. Since the solution of the initial problem can also be written as Eq. (2.17), we conclude that if  $f(t) = 0$  we have that  $a_n^{(i)} = 0$  for  $\forall n \geq 1$ .

### 3. Solution of the Stefan linear inhomogeneous problem

One can use now ( $\nu = 0$ ) the Kummer's transformation to show that both non-singular and singular solutions of the confluent hypergeometric equation in this case,  $M(-n, \frac{1}{2}, -z_1^2)$  and  $U(-n, \frac{1}{2}, -z_2^2)$  are closely related to the multiple

probability integrals  $i^m \operatorname{erfc}(z_i)$  [10]. Notice that  $i^m$  here is not the  $m$ -th power of the complex  $i$ , rather

$$(3.1) \quad i^m \operatorname{erfc}(z) = \int_z^\infty i^{m-1} \operatorname{erfc}(s) ds, (m = 0, 1, 2, \dots),$$

$$i^{-1} \operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-z^2), i^0 \operatorname{erfc}(z) = \operatorname{erfc}(z).$$

Notice also that the multiple probability integrals are in turn related to the Hermite polynomials of imaginary argument [10]:

$$(3.2) \quad (-1)^m i^m \operatorname{erfc}(z) + i^m \operatorname{erfc}(-z) = \frac{2H_m(iz)}{(2i)^m m!}.$$

In addition one can observe that the functions  $i^m \operatorname{erfc}(z)$  and  $i^m \operatorname{erfc}(-z)$  are two independent solutions of the differential equation

$$y'' + 2zy' - 2my = 0,$$

which coincides with Eq. (2.21) for  $m = 2n$ . Using these notations we redefine the unknown coefficients of the series (2.17) to write the "temperature" distributions in both phases as

$$(3.3) \quad u_1(r, t) = A_0 \operatorname{erf}(z_1) + \sum_{n=1}^\infty \frac{A_n}{n!} t^n F_{2n}(z_1),$$

$$(3.4) \quad u_2(r, t) = B_{-1} + B_0 \operatorname{erf}(z_2) + \sum_{n=1}^\infty \frac{B_n}{n!} t^n F_{2n}(z_2),$$

$$(3.5) \quad F_{2n}(z_1) = i^{2n} \operatorname{erf}(-z_1) + i^{2n} \operatorname{erfc}(z_1).$$

The expansion law for the interface will deviate now from the simple  $\sqrt{t}$  dependence due to the similarity property.

It seems to be natural to assume that the function  $R(t)/\sqrt{t}$ , which describes the expansion of the first phase, the one with the sources of "heat", is an analytic function satisfying the initial condition  $R(0) = 0$ ; i.e., that

$$(3.6) \quad R(t) = \beta \sqrt{t} \sum_{n=0}^\infty \frac{C_n}{n!} t^n$$

with  $C_0 = 1$ :

Certainly, we presume the series (3.3), (3.4), and (3.6) to be uniformly convergent  $\forall t > 0$ : The three sets of parameters  $\{A_n\}$ ;  $\{B_n\}$ ; and  $\{C_n\}$  can be simultaneously determined from the conditions at the interface (valid at  $\forall t \geq 0$ ) and the initial condition (2.6) in an iterative manner.

Indeed, let

$$(3.7) \quad z_1(R(t), t) = \frac{R(t)}{\sqrt{4\chi_1 t}} = \frac{\beta}{\sqrt{4\chi_1}} \sum_{n=0}^\infty \frac{C_n}{n!} t^n \equiv \gamma(t), z_2(R(t), t) = \sqrt{\frac{\chi_1}{\chi_2}} \gamma(t) \equiv \delta(t),$$

then it stems from the conditions (2.6) and (2.9) and (2.10), and their first derivatives at  $t = 0$  that

$$\begin{aligned}
 A_0 &= \frac{1}{\operatorname{erf}(\gamma_0)} > 1, \gamma_0 = \gamma(0) = \frac{\beta}{\sqrt{4\chi_1}}, B_{-1} = \theta, \\
 B_0 &= \frac{1-\theta}{\operatorname{erf}(\delta_0)}, \delta_0 = \delta(0) = \frac{\beta}{\sqrt{4\chi_2}}, \\
 A_1 &= \frac{\varphi_1}{F_2(\gamma_0)}, B_1 = \frac{2B_0 \exp(-\delta_0^2)}{\sqrt{\pi} F_2(\delta_0)}, \dots
 \end{aligned}
 \tag{3.8}$$

The expansion law initial factor  $\beta$  can be determined from the transcendental equation similar to the one corresponding to the inhomogeneous case:

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \lambda \beta = \frac{\kappa_1 A_0}{\sqrt{\chi_1}} \exp(-\gamma_0^2) + \frac{\kappa_2 B_0}{\sqrt{\chi_2}} \exp(-\delta_0^2) > 0.
 \tag{3.9}$$

It is also easy to find an expression for the first correction coefficient of the expansion law:

$$C_1 = \frac{\kappa_1 A_1 F_2(\gamma_0)}{3\lambda\beta\sqrt{\chi_1}} - \frac{\kappa_2 B_1 F_2(\delta_0)}{3\lambda\beta\sqrt{\chi_2}},
 \tag{3.10}$$

$$F'_2(\gamma_0) = [i^3 \operatorname{erfc}(-\gamma_0) + i^1 \operatorname{erfc}(\gamma_0)]
 \tag{3.11}$$

Further, the same procedure leads to a general expression for  $A_n, n > 1$ :

$$A_n = \frac{\varphi_n + \sum_{m=1}^{n-1} \binom{n}{n-m} A_m [F_{2m}(\gamma_0)]^{(n-m)} \Big|_{t=0}}{F_{2n}(\gamma_0)}
 \tag{3.12}$$

where  $[f(t)]^{(k)} \Big|_{t=0}$  is the value of the  $k$ -th time derivative of the function  $f(t)$  at  $t=0$ . Thus Eq. (3.12) will contain the coefficients  $C_k$  with  $k \leq n-1$ , notice that  $[\gamma(t)]^{(k)} \Big|_{t=0} = \gamma_0 C_k$ . The latter, in turn, are connected to  $A_n$  via the relations analogous to Eq. (3.10), which follow from the first time derivative of (2.10) and its consecutive time derivatives at  $t = 0$ .

Thus the iteration procedure can be closed, and, in principle, all terms of the series (3.3), (3.4), and (3.6) can be found.

#### 4. Solution of the Stefan cylindrical inhomogeneous problem

Notice that in this case ( $\nu = 1$ ) the regular Kummer solutions  $M(-n; 1; x)$  are virtually the Laguerre polynomials [10]

$$\nu_2(r, t) = b_{-1} + b_0 E_1(z_2^2) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} t^n L_n(-z_2^2).
 \tag{4.1}$$

Particularly,

$$M(-n, 1, -z^2) = \frac{n!}{(1)_n} L_n(-z^2) = \frac{n!}{(1)_n} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)! (k!)^2} z^{2k}, L_0(-z^2) = 1.
 \tag{4.2}$$

We assume that the solution within the first phase with uniformly distributed sources has no singularity at  $r = z_1 = 0$  whatsoever, thus

$$(4.3) \nu_1(r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} t^n L_n(-z_1^2),$$

with the coefficients  $a_n$  to be determined. Since Eq. (2.21) has a singularity at  $z = 0$ , and also possesses an irrational singularity at  $z = \infty$ , this solution (4.3) is an entire function of the effective parameter  $z_1$ :

The solution in the second phase can also be constructed on the basis of the Laguerre polynomials [10]:

$$(4.4) \nu_2(r, t) = b_{-1} + b_0 E_1(z_2^2) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} t^n L_n(-z_2^2).$$

Once more the initial and interface conditions can be made use of to give:

$$(4.5) \begin{aligned} a_0 &= 1, a_1 = -\frac{\varphi_1}{L_1(\sigma_0)}, \dots \\ b_{-1} &= \theta, b_0 = \frac{1-\theta}{E_1(x_2^2)}, b_1 = \frac{b_0 c_1 \exp(-x_2^2)}{1+x_2^2}, \dots \\ c_1 &= \frac{\kappa_1 \varphi_1}{2\kappa_2(1-\theta)} \frac{\exp(-x_2^2) E_1(x_2^2)}{(1+x_2^2)(1+x_1^2)}, \dots \end{aligned}$$

The following notations are introduced here:

$$\begin{aligned} R^2(t) &= \beta_c^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n t^{n+1}}{n!}, c_0 = 1, \\ -z_1^2(R(t)) &= \frac{R^2(t)}{4x_1} \equiv \sigma(t), x_1^2 = \sigma(0), \\ -z_2^2(R(t)) &= \frac{R^2(t)}{4x_2} \equiv \tau(t), x_2^2 = \tau(0). \end{aligned}$$

## 5. Underwater discharge

Consider the now a strong underwater discharge with [11]

$$(5.1) \begin{aligned} f(t) &= A(2^\nu \varphi_\nu(\omega t))^2, \\ \varphi_\nu(z) &= z^{-\nu} J_\nu(z), \end{aligned}$$

$J_\nu(z)$  being the Bessel functions of the first kind. Then the coefficients  $\varphi_n$  are determined explicitly:

$$(5.2) \varphi_{2k+1} = A \left( \frac{\omega}{2} \right)^{2k} \frac{(-1)^k \tilde{A}(2\nu + 2k + 1)}{\tilde{A}^2(\nu + k + 1) \tilde{A}(2\nu + k + 1)},$$

$$\varphi_{2k} = 0, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

where  $\tilde{\Gamma}(z)$  is the Euler's  $\Gamma$ -function [10].

For the conditions characteristic for underwater discharges [12] we can estimate that

$$(5.3) \quad x_1^2 = 0.2 \cdot 10^5, \quad x_2^2 = 1.5 \cdot 10^6,$$

and thus

$$(5.4) \quad \lambda = C_{p2}$$

If the expansion parameter  $\beta$  is determined experimentally, [11], one can effectively resolve the problem [8] to find:

$$(5.5) \quad c_1 = -\frac{2\kappa_1\varphi_1}{C_{p2}\beta^2}, \quad a_1 = -\frac{\varphi_1}{L_1(x_1^2)}, \quad b_1 = -\frac{c_1}{x_2^2}.$$

Numerical estimates based on the data of [11] produced the following estimates:

$$(5.6) \quad A \sim 0.5 \cdot 10^{-4} s^{-1}, \quad c_1 \sim -0.08 s^{-1}, \quad a_1 \sim 0.25 s^{-1}, \quad b_1 \sim 0.$$

Finally, with a satisfactory precision level, and for the times of the  $t \sim 10^{-6} - 10^{-5} s$ ; we can neglect the corrections to the expansion law  $\rho = \beta\sqrt{t}$  and with the precision of about 5%, find the temperature distribution within the plasma channel produced by the discharge, otherwise quite difficult to determine,

$$(5.7) \quad u_1(r, t) = 1 + At \left[ 1 - \frac{4\chi_1 t + r^2}{(4\chi_1 + \beta^2)t} \right].$$

The effective expansion law  $\rho = \beta\sqrt{t}$  was confirmed experimentally [11, 12].

## 6. Appendix 1. Cylindrical problem of Stefan: simplified model

Here we will consider a simplified cylindrical problem of Stefan analogous to the classical one dimensional model, see, e.g. [13].

The movement of the interface is to be studied in the case of the uniform injection of energy into the first phase in the way that the "temperature"  $u_1$  of this phase and of its surface is kept invariant and equal to 1. The "temperature" of the second phase  $u_2$  far away, formally, at infinity, is presumed to be equal to  $\theta < 1$ .

Let us determine the distribution  $u_2(r, t)$ , and simultaneously, find the first phase channel expansion law  $\rho = \rho(t)$ .

Thus our problem of Cauchy is formulated as:

$$(6.1) \quad u_1(r, t) = 1; \quad 0 \leq r \leq \rho(t) \quad \rho(0) = 0;$$

$$(6.2) \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} = \frac{\chi_2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_2}{\partial r} \right), \quad \rho(t) \leq r \leq \infty,$$

$$(6.3) \quad u_1(\rho(t), t) = u_2(\rho(t), t) = 1, \quad u_2(r > 0, 0) = \theta < 1$$

the notations are as in Sect. 2.

Use the similarity method to resolve the above problem. It is easily seen that Eq. (6.2) is invariant under the transformation

$$(6.5) \quad r' = kr, \quad t' = k^2 t$$

i.e., the solution  $u_2(r, t)$  must satisfy the similarity condition

$$(6.6) u_2(r, t) = u_2(kr, k^2 t)$$

for all possible values of  $r$ ,  $t$ , and  $k$ . Put now  $k = 1/2\sqrt{t}$  to obtain:

$$(6.7) u_2(r, t) = u_2\left(\frac{r}{2\sqrt{t}}, \frac{1}{4}\right) = f_2(r/2\sqrt{t}).$$

Thus  $u_2$  (as well as  $u_1$ ) depends only on the effective parameter  $z = r/2\sqrt{t}$ . Standard transformations based on Eq. (6.7) lead to the problem for the function  $f_2 = f_2(z)$ :

$$(6.8) \chi_2 f_2'' = -(2z + \chi_2 z) f_2',$$

$$(6.9) f_2(\infty) = \theta, \quad f_2(\rho/2\sqrt{t}) = 1$$

with the immediate solution

$$(6.10) f_2(z) = A + B \int_{\rho^2/4\chi_2 t}^{z^2/\chi_2} e^{-s} \frac{ds}{s},$$

where the constants  $A$  and  $B$  are to be obtained from Eq. (6.9):

$$(6.11) A = 1, \quad B \int_{\rho^2/4\chi_2 t}^{\infty} e^{-s} \frac{ds}{s} = \theta - 1.$$

These conditions hold for any value of  $t$ , and hence imply the relation  $\rho = \beta\sqrt{t}$ ,  $\beta$  being a constant. This last relation defines the channel expansion law in this simplified case, see Sect. 3. The corresponding «temperature» distribution in the second phase is

$$(6.12) u_2(r, t) = 1 - \frac{1 - \theta}{E_1(\beta^2/4\chi_2)} \int_{\beta^2/4\chi_2}^{r^2/4\chi_2 t} e^{-s} \frac{ds}{s}, \quad \beta\sqrt{t} \leq r \leq \infty,$$

it can be expressed in terms of the incomplete  $\Gamma$ -function [10].

## 7. Appendix 2. Cylindrical problem of Stefan: axial injection of energy

The simplified model considered in Appendix 1 is unsatisfactory for two reasons:

The solution in the first phase is considered to be uniform;

It is neglected that a significant fraction of the injected energy is spent to produce the shock wave

Here we will consider the two-dimensional Stefan problem without these limitations.

Suppose that the energy is injected into the first phase by the sources located along the channel axes. Then the following boundary condition substitutes the inhomogeneity term of Eq. (2.1)

$$(7.1) -\kappa_1 \frac{\partial u_1}{\partial r} \Big|_{r=0} = \mathcal{W},$$

so that the problem (6.1–6.4) of Appendix 1 will be complemented by Eq. (7.1) and Eq.(2.1)<sup>2</sup>. These changes do not affect the solution in the second phase, so that Eq. (6.12) is still valid, and the solution for the first phase becomes



$$(7.2) \quad u_1(r, t) = 1 + \frac{W}{4\pi\kappa_1} \int_{r/\sqrt{4\pi t}}^{\beta/\sqrt{4\pi t}} e^{-s^2} \frac{ds}{s}, \quad r \leq \beta\sqrt{t}, \quad t > 0.$$

Observe that the natural condition  $\rho(0) = 0$  leads to the result

$u_1(0; 0) = 1$  consistent with Eq. (6.3); it means that at the moment  $t = 0$  the first phase is created instantaneously. The solution Eq. (7.2) was used in [8] to estimate the efficiency of conversion of the electrical discharge energy into the thermal one, and the energy of the shock wave.

### 8. Appendix 3. Spherical problem of Stefan

Consider now the spherical problem of Stefan. In addition to its value for astrophysics, this problem is important from the methodological point of view.

As before, we will look for a solution parametrized by the effective parameter  $r/\sqrt{t}$ , where  $r$  is the radial spherical coordinate now.

Analyze the behavior of the expanding sphere in the case of a stationary energy injection into the first phase. Suppose that the «energy» source is located in the sphere center, and the boundary condition (7.1) will be substituted by

$$(8.1) \quad -\kappa_1 \frac{\partial u_1}{\partial r} 4\pi r^2 \Big|_{r=0} = N(t)$$

and the equations (2.1) and (2.2) turn into

$$(8.2) \quad \frac{\partial u_j}{\partial t} = \frac{\chi_j}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u_j}{\partial r} \right), \quad j=1, 2$$

applicable within the respective phase; all other conditions do not change. The similarity method once more proves to be applicable, and we get:

$$(8.3) \quad u_j(r, t) = \bar{A}_j + \bar{B}_j \int_{r/\sqrt{4\pi t}}^{\beta/\sqrt{4\pi t}} \exp(-s^2) \frac{ds}{s^2}, \quad j=1, 2.$$

The insertion of Eq. (8.3) in the condition (8.1) leads to the conclusion: *the spherical problem of Stefan can possess a solution parametrized only by the effective parameter  $r/\sqrt{t}$  if and only if the power of the «energy» source located in the sphere center is  $N(t) = N_0\sqrt{t}$ ,  $N_0$  being a constant.*

In this particular case we have:

$$(8.4) \quad u_1(r, t) = 1 + \frac{N_0}{8\pi\kappa_1 \sqrt{\chi_1}} \int_{r/\sqrt{4\pi t}}^{\beta/\sqrt{4\pi t}} \exp(-s^2) \frac{ds}{s^2}, \quad r \leq \beta\sqrt{t}, \quad t > 0,$$

---

<sup>2</sup> $W$  is the linear density of the power sources; notice that the problem variables  $u_j, j = 1; 2$  are dimensionless

$$(8.5) \quad u_2(r, t) = 1 - \frac{1 - \theta}{G_2(\beta / \sqrt{4\chi_2})} \int_{\beta/\sqrt{4\chi_2}}^{r/\sqrt{\beta\chi_2 t}} \exp(-s^2) \frac{ds}{s^2}, \quad \beta\sqrt{t} \leq r \leq \infty.$$

where  $\beta = \rho(t)/t$ , and

$$(8.6) \quad G_2(x) = \int_x^{\infty} \exp(-s^2) \frac{ds}{s^2}.$$

Finally, it was shown in [8] that in the particular case of stationary sources, i.e., when  $N(t) = N = \text{const}$  the sphere expands with  $\rho(t) = \sigma t^{1/3}$ ,  $\sigma$  being a constant.

## LIST OF REFERENCES

- 1 **Meirmanov, A. M.** The Stefan Problem, Walter de Gruyter. – Berlin, 1992.
- 2 **Hill, J. M.** One-mimensional Stefan Problems: an Introduction. – Longman Scientific & Technical, New York, 1987.
- 3 Moving Boundary Problems, Eds. D. G. Wilson, A. D. Solomon, P. T. Boggs. – Academic Press, New York, 1978.
- 4 **Gol'dman N. L.**, Inverse Stefan Problems. – Kluwer Acad. Pubs., Dordrecht, 1997.
- 5 **Shvets, I. S.** High Temp. 18. – No. 1, 1980.
- 6 **DeSilva, A. W., Katsouros, J. D.** Strongly coupled Coulomb systems, Eds. G. J. Kalman et al. – Plenum Press, New York, 1998, Pp. 313-318.
- 7 **DeWitt, H. E., Slattery, W. L.** *ibid*, Pp. 1-7.
- 8 **Adamjan, V. M., Tkachenko, I. M.** et al., Spreading of the under-water spark discharge channel as a Stefan problem. – Res.Rep. No. 234-Uk87, 1987 (in Russian, unpublished).
- 9 **Tao, L. N.** Quart. Appl. Math., 36. 1978. – P. 223-233.
- 10 **Abramowitz, M. and Stegun, I. A.** eds., Handbook of Mathematical Functions. – Dover, New York, 1972.
- 11 **Tkachenko, I. M., DeSilva, A. W. and Iserte, J.** Strongly coupled Coulomb systems, Eds. G.J. Kalman et al.– Plenum Press, New York, 1998. – Pp. 583-585.
- 12 **Adamyany, V. M.** et al., High Temp. (USA). 18, 241, 1980.
- 13 **Tikhonov, A. N., Samarsky, A. A.** Mathematical Physics Equations. – Moscow : Nauka 1977 (in Russian).

Material received on 20.08.14.

*X. P. Феррер<sup>1</sup>, В. А. Гайдак<sup>2</sup>, И. М. Ткаченко<sup>3</sup>*

**Біртекті емес Стефан есебі**

<sup>1</sup>Валенсия политехникалық университеті, Валенсия;

<sup>2</sup>С. Торайғыров атындағы  
Павлодар мемлекеттік университеті, Павлодар қ.;

<sup>3</sup>Таза және қолданбалы математиканың институты, Валенсия  
политехникалық университеті, Валенсия, Испания.

Материал 20.08.14 баспаға түсті.

*Х. Р. Феррер<sup>1</sup>, В. А. Гайдак<sup>2</sup>, И. М. Ткаченко<sup>3</sup>*

**Неоднородная задача Стефана**

<sup>1</sup>Политехнический университет Валенсии,  
Валенсия, Испания;

<sup>2</sup>Павлодарский государственный университет  
имени С. Торайғырова, г. Павлодар;

<sup>3</sup>Институт чистой и прикладной математики, Политехнический  
университет Валенсии, Валенсия, Испания.

Материал поступил в редакцию 20.08.14.

**M. YALCIN**

Faculty of Engineering, Department of Engineering Sciences, Istanbul University, Istanbul, Turkey

**COMPARISON OF ELECTROMAGNETIC RADIATION LIMITS FOR EXTREMELY LOW FREQUENCIES IN EUROPEAN COUNTRIES**

*Almost every member of modern societies constantly live in electromagnetic fields (EMF) which are much higher than those found in nature. Power lines, computer monitors, different electrical equipments, radio, television, mobile phones, microwave ovens can be given examples of these EMF sources. Their potential effects of health continue to be the subject of controversy. Extremely low frequency (ELF, 0-3000 Hz) region of spectrum is radiated by transformers, household equipments, high power lines, and by electrical goods is investigated in this study. Since more than 25 years research efforts to find a correlation between the electromagnetic field and their effects on health of human are going on, but without significant success. Generally, countries accept the standards of International Commission on Non-Ionizing Radiation Protection (ICNIRP), World Health Organization (WHO), and European Committee for Electrotechnical Standardization (CENELEC). Some countries apply more strict limit values than above foundations. The International Agency for Research on Cancer (IARC) reviewed EMFs and cancer in June 2001, and classified magnetic fields as «possibly» carcinogenic for low frequency region. Therefore, exposure limit values of EMFs are really important. The best way is acceptance of As Low As Reasonably Achievable (ALARA) principle as long as have not exact scientific results.*

*Keywords: Electromagnetic Radiation (EMR), Electromagnetic Pollution, Extremely Low Frequency (ELF), Exposure Limits, Magnetic Field, High Power Lines.*

**1. Introduction**

Some natural and man-made sources generate electromagnetic fields. According to frequency, electromagnetic spectrum is divided such as radio frequency (RF), microwaves, infra-red, visible light, ultra-violet, X and  $\gamma$  rays. While ultra-violet, X and  $\gamma$  rays are ionizing radiation type, others are non-ionizing type. These types are defined as follows: Non-ionizing radiation is «low to mid-

frequency radiation which is generally perceived as harmless due to its lack of potency.» and ionizing radiation is «mid to high-frequency radiation which can, under certain circumstances, lead to cellular and or DNA damage with prolonged exposure.» RF (10 kHz-300 GHz) is used in communications, radio and television broadcasting, radar systems, base stations, cordless phones, mobile phones, remote control systems, etc. ELF region of spectrum is radiated by high power lines, transformers, household equipments, and electrical equipments.

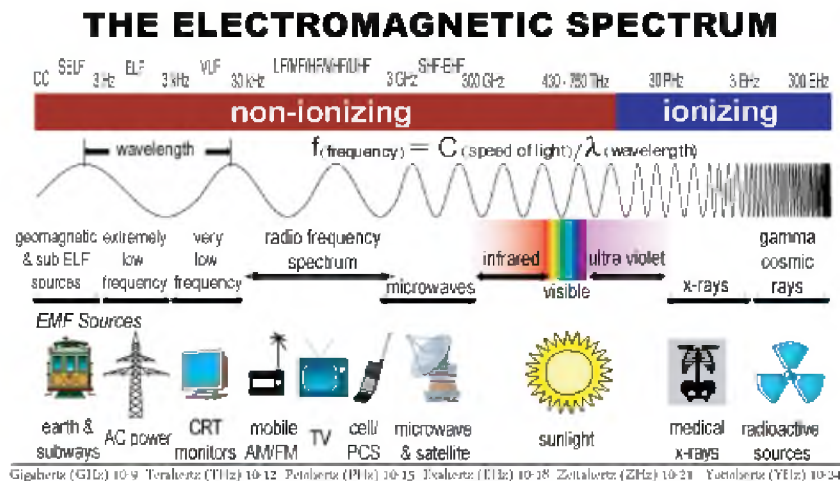


Figure 1 – Electromagnetic Spectrum (Nucleargraduates)

Electric field are associated only with the presence of electric charge, but magnetic fields are the result of the physical movement of electrical charge. Describing the exposure to electromagnetic fields shall be used following physical quantities. Contact current ( $I_c$ ) between a person and an object is expressed in amperes (A). A conductive object in an electric field can be charged by the field. Current density ( $J$ ) is defined as the current flowing through a unit cross section perpendicular to its direction in a volume conductor such as the human body or part of it, expressed in amperes per square metre ( $A/m^2$ ). Electric field strength is a vector quantity ( $E$ ) that corresponds to the force exerted on a charged particle regardless of its motion in space. It is expressed in volts per metre ( $V/m$ ). Magnetic field strength is a vector quantity ( $H$ ), which, together with the magnetic flux density, specifies a magnetic field at any point in space. It is expressed in amperes per metre ( $A/m$ ). Magnetic flux density is a vector quantity ( $B$ ), resulting in a force that acts on moving charges, expressed in teslas (T). In free space and in biological materials, magnetic flux density and magnetic field strength can be interchanged

using the equivalence  $1 A / m = 4\pi 10^{-7} T$ . The last two quantities are related by the expression:  $B = \mu H$ , where  $\mu$  is the magnetic permeability; in air and a vacuum, also in non-magnetic materials, it has the value  $4\pi 10^{-7}$ . In addition, B is expressed in Gauss (G) and conversion equation is  $1(\mu T) = 10(\text{mG})$ . Power density (S), specific energy absorption (SA), and specific energy absorption rate (SAR) are also other physical quantities for describing the exposure to electromagnetic fields, but they are used for high frequencies. Some epidemiological studies are shown exposure electromagnetic field at different frequencies cause some hazardous effects for human health. Since the first report suggesting an association between residential ELF electric and magnetic fields and childhood leukaemia was published in 1979, dozens of increasingly sophisticated studies have examined this association (Wertheimer and Leeper, 1979; Tomenijs, 1986; Feychting and Ahlbom, 1993). In addition some studies claim association between some cancer types that are observed adults and exposure to ELF electric and magnetic fields (Wertheimer and Leeper, 1982; Floderus, Persson and Stenlund, 1992; Tynes and Andersen, 1990). Distribution of electricity and working electrical equipments are generally extremely low frequency that 50 Hz in European countries. Environmental levels of ELF fields are very low. Exposure levels for the general population are typically 5-50 V/m for electric fields and 0.01–0.2 mT for magnetic fields. Considerably higher exposure occurs for shorter durations and in some occupational settings. It should be noted that the earth's magnetic field (25–65 mT, from equator to poles) is a static field to which everyone is exposed. Measurements of electric and magnetic fields are used to characterize sources and levels of exposure to humans. The limiting factor in exposure assessment is not instrumentation but the lack of a consensus as to what exposure characteristics should be measured that are biologically relevant. Computational methods are available to calculate fields and their parameters for instrument calibration, laboratory exposure systems and certain categories of indoor and outdoor sources. Where computational methods are used to calculate human exposure in epidemiological studies, it is desirable to understand the overall uncertainty in the calculated values.

In order to understand the effects of electric and magnetic fields on animals and humans, their electrical properties have to be considered. Static magnetic fields, which are not attenuated by the organism, can exert forces on moving charges, orient magnetic structures and affect the energy levels of some molecules. Static and ELF electric fields are greatly attenuated inside the body (WHO, IARC Report, 2002). Therefore, studies are more focused on the effects of ELF magnetic field (Barnes, 1995). Effects of magnetic fields have been studied with different methods and purposes for a few centuries, and researchers have noticed that biological systems have been affected by magnetic fields. But, it is still an unsolved problem that magnetic field effects which frequencies, what is its effect of threshold level, and potential effect mechanisms. (Repacholi and Greenebaum, 1999). There have been

numerous comprehensive reviews, meta-analyses, and two recent pooled analyses. In one pooled analysis based on nine well conducted studies, no excess risk was seen for exposure to ELF magnetic fields below 0.4 mT and a twofold excess risk was seen for exposure above 0.4 mT. The other pooled analysis included 15 studies based on less restrictive inclusion criteria and used 0.3 mT as the highest cut-point. A relative risk of 1.7 for exposure above 0.3 mT was reported. The two studies are closely consistent. In contrast to these results for ELF magnetic fields, evidence that electric fields are associated with childhood leukaemia is inadequate for evaluation. The association between childhood leukaemia and high levels of magnetic fields is unlikely to be due to chance, but it may be affected by bias. In particular, selection bias may account for part of the association. Case-control studies which relied on in-home measurements are especially vulnerable to this bias, because of the low response rates in many studies. Numerous studies of the relationship between electrical appliance use and various childhood cancers have been published. In general, these studies provide no discernable pattern of increased risks associated with increased duration and frequency of use of appliances. Since many of the studies collected information from interviews that took place many years after the time period of etiological interest, recall bias is likely to be a major problem. Studies on parental occupational exposure to ELF electric and magnetic fields in the preconceptional period or during gestation are methodologically weak and the results are not consistent (WHO, IARC Report, 2002). Applying magnetic field on cells, also low level like 0.20-20 mT, has changed speed of cell division. Particularly, on the studies of neurons that is stimulated by low electric current and low frequency magnetic field has been expressed decreasing of mitotic division (Walleczek, 1992). A lot of studies have shown effects of magnetic fields on potential of cell membrane. 10 mT amplitude magnetic field with changing ionic currents effected on neurons prevents creation of action potential (Kerna and Lucchinett, 1992).

The only way of understanding electromagnetic field is measurement. These measurement data are evaluated according to international or national limit values that was thought not harmful for human health. It is an assumption that harmless for human health if measured values under these limit values.

## 2. ELECTROMAGNETIC RADIATION AND LIMIT VALUES

ICNIRP are the International Commission on Non-Ionizing Radiation Protection was formed in 1992. The functions of the Commission are to investigate the hazards that may be associated with the different forms of non-ionizing radiation, develop international guidelines on non-ionizing radiation exposure limits, and deal with all aspects of non-ionizing radiation protection. The main objective of ICNIRP guidelines will provide protection against known adverse health effects. An adverse health effect causes detectable impairment of the health of the exposed individual or of his or her offspring; a biological effect, on the

other hand, may or may not result in an adverse health effect. Studies on both direct and indirect effects of EMF are described; direct effects result from direct interaction of fields with the body, indirect effects involve interactions with an object at a different electric potential from the body. Results of laboratory and epidemiological studies, basic exposure criteria, and reference levels for practical hazard assessment are discussed, and the guidelines presented apply to occupational and public exposure can be seen in Table 1 and Table 2. Only related ELF part of guidelines is shown here.

Table 1 – Reference levels for occupational exposure to time-varying electric and magnetic fields (ICNIRP Guidelines, 1998)

Frequency range	E-field Strength (V/m)	H-field strength (A/m)	B-field ( $\mu$ T)
Up to 1 Hz	-	$1.63 \times 10^5$	$2 \times 10^5$
1-8 Hz	20.000	$1.63 \times 10^5 / f^2$	$2 \times 10^5 / f^2$
8-25 Hz	20.000	$2 \times 10^4 / f$	$2.5 \times 10^4 / f$
0.025-0.82 kHz	$500 / f$	$20 / f$	$25 / f$
0.82-65 kHz	610	24.4	30.7

Table 2 – Reference levels for general public exposure to time-varying electric and magnetic fields (ICNIRP Guidelines, 1998)

Frequency range	E-field Strength (V/m)	H-field strength (A/m)	B-field ( $\mu$ T)
Up to 1 Hz	-	$3.2 \times 10^4$	$4 \times 10^4$
1-8 Hz	10.000	$3.2 \times 10^4 / f^2$	$4 \times 10^4 / f^2$
8-25 Hz	10.000	$4.000 / f$	$5.000 / f$
0.025-0.8 kHz	$250 / f$	$4 / f$	$5 / f$
0.8-3 kHz	$250 / f$	5	6.25

$f$  as indicated in the frequency range column for these two tables.

In 1998 ICNIRP published its thermal (heating and shock) guidelines. These have been widely criticized for rejecting evidence of adverse health effects at sub-thermal or biological and cancer levels. Many scientists now feel that, unless ICNIRP adopts appropriate biological guidelines, it should be disbanded or its membership should be replaced by those who accept biological evidence. Such scientists could be drawn from the authors of the BioInitiative Report in 2007 or the International Commission for Electromagnetic Safety (ICEMS) or the many



medical doctors who have petitioned governments to set new standards, along with the many other concerned scientists around the world who argue that to protect the human race it is essential to have biological and cancer safety guidelines.

Table 3 – Electric, magnetic, electromagnetic, and dosimetric quantities and corresponding SI units (ICNIRP Guidelines, 1998)

Quantity	Symbol	Unit
Conductivity	$\sigma$	Siemens per meter (S/m)
Current	$I$	Ampere (A)
Current density	$J$	Ampere per square meter (A/m <sup>2</sup> )
Frequency	$f$	Hertz (Hz)
Electric field strength	$E$	Volt per meter (V/m)
Magnetic field strength	$H$	Ampere per meter (A/m)
Magnetic flux density	$B$	Tesla (T)
Magnetic permeability	$\mu$	Henry per meter (H/m)
Permittivity	$\varepsilon$	Farad per meter (F/m)
Power density	$S$	Watt per square meter (W/m <sup>2</sup> )
Specific energy absorption	SA	Joule per kilogram (J/kg)
Specific energy absorption rate	SAR	Watt per kilogram (W/kg)

A general summary of EMF and dosimetric quantities and units used in these ICNIRP guidelines is provided in Table 3.

Importantly, ICNIRP guidelines are not intended to be a complete system for protecting the public that should be applied in different countries as it stands. They say that their guidance considers only the science, and Governments will need to look at other factors before deciding whether and how to implement the guidelines. Thus, for example, the EU Recommendation uses the numbers out of ICNIRP 1998 but expects them to be applied only where the time of exposure is significant. The European Union passed a Directive on occupational exposure in 2004 that would have implemented the ICNIRP 1998 values. In 2008, however, they delayed the implementation so that the Directive could be revised. In 2011, the Commission have issued the proposed replacement. This now has to go through a process of debate and approval in the European parliament and the Council. The proposed Directive introduces a distinction between «safety» effects (effects in the central nervous system of the head), and «health» effects (including the peripheral nervous system as well).

The Directive uses the ICNIRP values but gives them different names. The basic restriction becomes the limit value and the reference levels become the action values.

Table 4 – Limit values of EU Directive 2004 for 50 Hz

Exposure Limit Value: 10 mA m <sup>2</sup> in the central nervous system (identical to ICNIRP's basic restriction)	
Magnetic fields	Electric fields
Action level: 500 μT Field actually required: 1800 μT	Action level: 10 kV/m Field actually required: 46 kV/m

Table 5 – Limit values of EU Directive 2011 Proposal for 50 Hz

Exposure Limit Value for health 0.8 V/m	Exposure Limit Value for safety 0.1 V/m
Action Value (for health effects) 20 kV/m 13.32 mT	Orientation Value (for safety effects) 10 kV/m 1 mT

Table 6 – The position on exposure limits in each country in Europe

EU Recommendation (or ICNIRP or similar quantitative limits designed to prevent acute effects)	More restrictive quantitative limits (either in addition or instead of EU Recommendation; often apply only in specific circumstances)	Additional protective policies (not expressed as quantitative limits)	Not known
Bulgaria Cyprus Czech Republic Estonia Finland France Germany Greece Hungary Ireland Latvia Malta Portugal Romania Slovak Republic Spain Turkey	Austria Belgium Bosnia and Herzegovina Croatia Italy Lithuania Luxembourg Netherlands Poland Serbia Slovenia Switzerland	<del>Denmark</del> Norway <del>Sweden</del> UK	Albania Iceland Macedonia Montenegro

Table 7 – European countries that have different limit values from ICNIRP.

Country	Comment
Austria	requires high-voltage lines to be placed underground within 200 m or 400 m of residential areas, but only if «technically and economically efficient»
Belgium	5-10 kV/m depending on land use. Electric fields only.
Bosnia&Herzegovina	2 kV/m, 40 $\mu$ T
Croatia	2 kV/m, 40 $\mu$ T new facilities
Denmark	0.4 $\mu$ T evaluation level used as trigger to investigate possible reduction methods
Italy	ICNIRP + 10 $\mu$ T attention value + 3 $\mu$ T quality target, specific circumstances
Lithuania	Electric fields only, plus distance restrictions
Luxembourg	Plus advice on not building near power lines
Netherlands	0.4 $\mu$ T, dwellings and power lines, new construction
Norway	0.4 $\mu$ T evaluation level used as trigger to investigate possible reduction methods
Poland	1 kV/m residential areas, 48 $\mu$ T
Serbia	2 kV/m, 40 $\mu$ T
Slovenia	500 V/m, 10 $\mu$ T, new facilities, designated areas
Sweden	Measures at reasonable expense to reduce fields when radically deviating from normal
Switzerland	ICNIRP plus 1 $\mu$ T for new power lines, exemptions possible
UK	ICNIRP where time of exposure significant plus optimal phasing of power lines

### 3. CONCLUSION

In this study, I collected data about health effects of ELF electromagnetic radiation and applied limit values in European countries. It is easily seen from studies and limit values was accepted different countries the health effects of ELF electromagnetic radiation is still unclear. Some countries accepted ICNIRP limit values, but some countries accepted more strict limit values than these

limit values. The Parliamentary Assembly of the Council of Europe passed a resolution concerning EMFs in 2011. Much of the detail is concerned with microwaves but there are some references to power frequencies, that “introduce town planning measures to keep high-voltage power lines and other electric installations at a safe distance from dwellings; apply strict safety standards for the health impact of electrical systems in new dwellings;...”. Epidemiological studies have consistently found that everyday chronic low-intensity (above 0,3-0.4  $\mu\text{T}$ ) power frequency magnetic field exposure is associated with an increased risk of childhood leukemia. IARC has classified such fields as possibly carcinogenic. However, a causal relationship between magnetic fields and childhood leukemia has not been established nor have any other long term effects been established. The absence of established causality means that this effect cannot be addressed in the basic restrictions. However, risk management advice, including considerations on precautionary measures, has been given by WHO and other entities (ICNIRP Guidelines, 2010).

## LIST OF REFERENCES

- 1 Nucleargraduates, Last Accessed on 4 10, 2013, from [http://nuclearfootprints.com/?attachment\\_id=1973](http://nuclearfootprints.com/?attachment_id=1973).
- 2 **Barnes, F. S.** 1995. Typical Electric and Magnetic Field Exposures at Power-Line Frequencies and Their Coupling to Biological Systems. In: «Electromagnetic Fields, Biological Interactions and Mechanisms.» Ed. Blank M., American Chemical Society, Washington, DC; 37-55.
- 3 **Feychting, M.** and **Ahlbom, A.** 1993. Magnetic Fields and Cancer in Children Residing near Swedish High-Voltage Power Lines. – Am J Epidemiol. (138), 467-81.
- 4 **Floderus, B., Persson, T.** and **Stenlund, C.** 1992. Increased Risk of Leukemias and Brain Tumors in Occupational Exposure to Magnetic Fields. Lakartidningen. 89: 4363-6.
- 5 ICNIRP Guidelines, Health Physics 74 (4): 494-522; 1998
- 6 ICNIRP Guidelines, Health Physics 99 (6): 818-836; 2010
- 7 **Kerna, J. M.** and **Lucchinetti, C.** 1992. Electrical Field Effects on Crushed Nerve Regeneration, – Experimental Neurology. – (117), 71-80.
- 8 **Repacholi, M. H.** and **Greenebaum, B.** 1999. Interaction of static extremely low frequency electric and magnetic field with living system: Health Effects and Research Need. – Bioelectromagnetic. – (20), 133-160.
- 9 **Tomenius, L.** 1986. 50 Hz electromagnetic environment and incidence of childhood tumours in stockholm country. – Bioelectromagnetics. (7), 191-207.
- 10 **Tynes, T.** and **Andersen, A.** 1990. Electromagnetic fields and male breast cancer. – Lancet. (336), 1596.

11 **Walleczek, J.** 1992. Electromagnetic effects on cells of the immune system: The Role of Calcium Signaling, FASEB. (6), 3177.

12 **Wertheimer, N. and Leeper, E. D.** 1979. Electrical wiring configurations and childhood cancer. – Am. Journal Epidemiol. (109), 273-84.

13 **Wertheimer, N. and Leeper, E. D.** 1982. Adult cancer Related to Electrical Wires near the Home. – Int Journal Epidemiol. (11), 345-55.

14 WHO, IARC Report, Non-Ionizing Radiation, Part 1: Static and Extremely Low-Frequency (ELF) Electric and Magnetic Fields, Volume 80, 2002.

Material received on 08.09.14.

*М. Ялчин*

**Еуропалық елдерде өте томен жиілікке арналған электромагнитті сәуле шағарудың шегін салыстыру**

Стамбул университеті, Стамбул қ., Түркия.

Материал 08.09.14 баспаға түсті.

*М. Ялчин*

**Сопоставление пределов электромагнитного излучения для очень низких частот в европейских странах**

Стамбульский университет, г. Стамбул, Турция.

Материал поступил в редакцию 08.09.14.

*Мақалада еуропалық елдерде өте томен жиілікке арналған электромагнитті сәуле шағарудың шегін салыстыру саластырыу қарастырылады.*

*В работе проводится сопоставление пределов электромагнитного излучения для очень низких частот в европейских странах.*

**ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ****НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ ПГУ ИМЕНИ С. ТОРАЙГЫРОВА  
(«ВЕСТНИК ПГУ», «НАУКА И ТЕХНИКА КАЗАХСТАНА»,  
«КРАЕВЕДЕНИЕ»)**

Редакционная коллегия просит авторов при подготовке статей для опубликования в журнале руководствоваться следующими правилами.

Научные статьи, представляемые в редакцию журнала должны быть оформлены согласно базовым издательским стандартам по оформлению статей в соответствии с ГОСТ 7.5-98 «Журналы, сборники, информационные издания. Издательское оформление публикуемых материалов», пристатейных библиографических списков в соответствии с ГОСТ 7.1-2003 «Библиографическая запись. Библиографическое описание. Общие требования и правила составления».

**Статьи должны быть оформлены в строгом соответствии со следующими правилами:**

1. В журналы принимаются статьи по всем научным направлениям в 1 экземпляре, набранные на компьютере, напечатанные на одной стороне листа с межстрочным интервалом 1,5, с полями 30 мм со всех сторон листа, электронный носитель со всеми материалами в текстовом редакторе «Microsoft Office Word (97, 2000, 2007, 2010) для WINDOWS».

2. Общий объем статьи, включая аннотации, литературу, таблицы, рисунки и математические формулы не должен превышать **8-10 страниц печатного текста**. Текст статьи: кегль – 14 пунктов, гарнитура – Times New Roman (для русского, английского и немецкого языков), KZ Times New Roman (для казахского языка). Межстрочный интервал - 1,5 (полуторный);

3. **УДК** по таблицам универсальной десятичной классификации;

4. **Инициалы и фамилия** (-и) автора (-ов) – на казахском, русском и английском языках, абзац по левому краю (см. образец);

5. **Название статьи** – на казахском, русском и английском языках, заглавными буквами жирным шрифтом, абзац по левому краю (см. образец);

6. **Аннотация** дается в начале текста на казахском, русском и английском языках: кегль – 12 пунктов, курсив, отступ слева-справа – 3 см, интервал 1,5 (8–10 строк, 100-250 слов). Аннотация является кратким изложением содержания научного произведения, дающая обобщенное представление о его теме и структуре. (см. образец);

7. **Ключевые слова** оформляются на языке публикуемого материала: кегль – 12 пунктов, курсив, отступ слева-справа – 3 см, интервал 1,5. Для каждой статьи задайте 5-6 ключевых слов в порядке их значимости, т.е. самое важное ключевое слово статьи должно быть первым в списке. (см. образец);

8. **Список использованной литературы** должен состоять не более чем из 20 наименований (ссылки и примечания в статье обозначаются сквозной нумерацией и заключаются в квадратные скобки). Статья и список литературы должны быть оформлены в соответствии с ГОСТ 7.5-98; ГОСТ 7.1-2003 (см. образец).

~~ВНИМАНИЕ! В журнале не принимаются рукописи, не прошедшие процедуру рецензирования.~~

9. **Иллюстрации, перечень рисунков** и подрисуночные надписи к ним представляются по тексту статьи. В электронной версии рисунки и иллюстрации представляются в формате TIF или JPG с разрешением не менее 300 dpi.

10. **Математические формулы** должны быть набраны в Microsoft Equation Editor (каждая формула – один объект).

#### **На отдельной странице**

**В бумажном и электронном вариантах приводятся:**

– **название статьи, сведения о каждом из авторов: Ф.И.О. полностью, ученая степень, ученое звание и место работы на казахском, русском и английском языках;**

– **полные почтовые адреса, номера служебного и домашнего телефонов, e-mail** (для связи редакции с авторами, не публикуются);

#### **Информация для авторов**

**Все статьи** должны сопровождаться **двумя рецензиями** доктора или кандидата наук для всех авторов. Для статей, публикуемых в журнале «Вестник ПГУ» химико-биологической серии, требуется экспертное заключение.

**Редакция не занимается литературной и стилистической обработкой статьи.** При необходимости статья возвращается автору на доработку. За содержание статьи несет ответственность Автор. **Статьи, оформленные с нарушением требований, к публикации не принимаются и возвращаются авторам.** Датой поступления статьи считается дата получения редакцией ее окончательного варианта.

Статьи публикуются по мере поступления.

**Периодичность издания журналов – четыре раза в год (ежеквартально).**

Статью (бумажная, электронная версии, оригинал квитанции об оплате) следует направлять по адресу:

**140008, Казахстан, г. Павлодар, ул. Ломова, 64, Павлодарский государственный университет имени С. Торайгырова, Издательство «Кереку», каб. 137.**

Тел. 8 (7182) 67-36-69, (внутр. 1147), факс: 8 (7182) 67-37-05.

E-mail: kereky@mail.ru

Оплата за публикацию в научном журнале составляет **5000 (Пять тысяч) тенге.**

РГП на ПХВ Павлодарский государственный университет имени С. Торайгырова	РГП на ПХВ Павлодарский государственный университет имени С. Торайгырова
РНН 451800030073	РНН 451800030073
БИН 990140004654	БИН 990140004654
АО «Цеснабанк»	АО «Народный Банк Казахстана»
ИИК KZ57998FTB00 00003310	ИИК KZ156010241000003308
БИК TSESKZK A	БИК HSBKZKX
Кбе 16	Кбе 16
Код 16	Код 16
КНП 861	КНП 861

## ОБРАЗЕЦ К ОФОРМЛЕНИЮ СТАТЕЙ:

УДК 316:314.3

**А. Б. Есимова**

к.п.н., доцент, Международный Казахско-Турецкий университет имени Х. А. Ясави, г. Туркестан.

## **СЕМЕЙНО-РОДСТВЕННЫЕ СВЯЗИ КАК СОЦИАЛЬНЫЙ КАПИТАЛ В РЕАЛИЗАЦИИ РЕПРОДУКТИВНОГО МАТЕРИАЛА**

*В настоящей статье автор дает анализ отличительных особенностей репродуктивного поведения женщин сквозь призму семейно-родственных связей.*

*Ключевые слова: репродуктивное поведение, семейно-родственные связи.*

На современном этапе есть тенденции к стабильному увеличению студентов с нарушениями в состоянии здоровья. В связи с этим появляется необходимость корректировки содержания учебно-тренировочных занятий по физической культуре со студентами, посещающими специальные медицинские группы в.

*Продолжение текста публикуемого материала*

*Пример оформления таблиц, рисунков, схем:*

Таблица 1 – Суммарный коэффициент рождаемости отдельных национальностей

	СКР, 1999 г.	СКР, 1999 г.
Всего	1,80	2,22

Диаграмма 1 - Показатели репродуктивного поведения

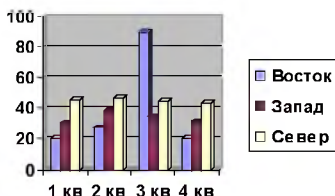






Рисунок 1 – Социальные взаимоотношения

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Эльконин, Д. Б.** Психология игры [Текст] : научное издание / Д. Б. Эльконин. – 2-е изд. – М. : Владос, 1999. – 360 с. – Библиогр. : С. 345–354. – Имен. указ. : С. 355–357. – ISBN 5-691-00256-2 (в пер.).

2 **Фришман, И.** Детский оздоровительный лагерь как воспитательная система [Текст] / И. Фришман // Народное образование. – 2006. – № 3. – С. 77–81.

3 Антология педагогической мысли Казахстана [Текст] : научное издание / сост. К. Б. Жарикбаев, сост. С. К. Калиев. – Алматы : Рауан, 1995. – 512 с. : ил. – ISBN 5625027587.

*A. B. Yessimova*

**Отбасылық-туысты қатынастар репродуктивті мінез-құлықты жүзеге асырудағы әлеуметтік капитал ретінде**

Қ. А. Ясауи атындағы Халықаралық казақ-түрік университеті, Түркістан қ.

*A. B. Yessimova*

**The family-related networks as social capital for realization of reproductive behaviors**

K. A. Yssawi International Kazakh-Turkish University, Turkestan.

*Бұл мақалада автор Қазақстандағы әйелдердің отбасылық-туыстық қатынасы арқылы репродуктивті мінез-құлықта айырмашылықтарын талдайды.*

*In the given article the author analyzes distinctions of reproductive behavior of married women of Kazakhstan through the prism of the kinship networks.*

Теруге 09.12.2014 ж. жіберілді. Басуға 09.12.2014 ж. қол қойылды.  
Форматы 70x100 1/16. Кітап-журнал қағазы.  
Көлемі шартты 3,8 б.т. Таралымы 300 дана. Бағасы келісім бойынша.  
Компьютерде беттеген М.А. Шрейдер  
Корректорлар: Б.Б. Ракишева, А. Елемескызы, А.Р. Омарова  
Тапсырыс № 2453

Сдано в набор 09.12.2014 г. Подписано в печать 09.12.2014 г.  
Формат 70x100 1/16. Бумага книжно-журнальная.  
Объем 3,8 ч.-изд. л. Тираж 300 экз. Цена договорная.  
Компьютерная верстка М.А. Шрейдер  
Корректоры: Б.Б. Ракишева, А. Елемескызы, А.Р. Омарова  
Заказ № 2453

«КЕРЕКУ» баспасы  
С. Торайғыров атындағы  
Павлодар мемлекеттік университеті  
140008, Павлодар қ., Ломов к., 64, 137 каб.  
67-36-69  
E-mail: [publish@psu.kz](mailto:publish@psu.kz)  
[kereky@mail.ru](mailto:kereky@mail.ru)