

ISSN 1991-346X

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ  
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ

# Х А Б А Р Л А Р Ы

---

---

## ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК  
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES  
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА  
СЕРИЯСЫ**



**СЕРИЯ**

**ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ**



**PHYSICO-MATHEMATICAL  
SERIES**

**6 (298)**

**ҚАРАША – ЖЕЛТОҚСАН 2014 ж.  
НОЯБРЬ – ДЕКАБРЬ 2014 г.  
NOVEMBER – DESEMBER 2014**

1963 ЖЫЛДЫҢ ҚАҢТАР АЙЫНАН ШЫҒА БАСТАҒАН  
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1963 ГОДА  
PUBLISHED SINCE JANUARY 1963

ЖЫЛЫНА 6 РЕТ ШЫҒАДЫ  
ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД  
PUBLISHED 6 TIMES A YEAR

АЛМАТЫ, ҚР ҰҒА  
АЛМАТЫ, НАН РК  
ALMATY, NAS RK

Б а с р е д а к т о р  
ҚР ҰҒА корреспондент мүшесі  
**Ғ. М. Мутанов**

Р е д а к ц и я а л қ а с ы:

физика-математика ғылымдарының докторы **Н. М. Темірбеков** (бас редактордың орынбасары), ҚР ҰҒА-ның академиктері **Н. Ж. Тәкібаев, С. Н. Харин, Т. Ш. Кәлменов, Н. Қ. Блиев, Б. Н. Мұқашев, М. Ө. Өтелбаев**, физика-математика ғылымдарының докторы **Қ. Қ. Қадыржанов**, физика-математика ғылымдарының докторы **Н. Т. Данаев**, физика-математика ғылымдарының докторы **Т. С. Рамазанов**, физика-математика ғылымдарының докторы **Ө. Ө. Өмірбаев**, академик **А. Гаджиев** (Әзірбайжан), академик **А. Пашаев** (Әзірбайжан), академик **И. Тигиняну** (Молдова), академик **И. Н. Вишневский** (Украина), академик **А. М. Ковалев** (Украина), академик **А. А. Михалевич** (Беларусь), химия ғылымдарының докторы **Н. Бейсен** (жауапты хатшы)

Г л а в н ы й р е д а к т о р  
академик НАН РК  
**Б. Т. Жумагулов**

Р е д а к ц и о н н а я к о л л е г и я:

доктор физико-математических наук **Н. М. Темірбеков** (заместитель главного редактора), академики НАН РК **Н. Ж. Такибаев, С. Н. Харин, Т. Ш. Кальменов, Н. К. Блиев, Б. Н. Мукашев, М. О. Отелбаев**, доктор физико-математических наук **К. К. Кадыржанов**, доктор физико-математических наук **Н. Т. Данаев**, доктор физико-математических наук **Т. С. Рамазанов**, доктор физико-математических наук **У. У. Умирбаев**, академик **А. Гаджиев** (Азербайджан), академик **А. Пашаев** (Азербайджан), академик **И. Тигиняну** (Молдова), академик **И. Н. Вишневский** (Украина), академик **А. М. Ковалев** (Украина), академик **А. А. Михалевич** (Беларусь), доктор химических наук **Н. Бейсен** (ответственный секретарь)

E d i t o r - i n - c h i e f  
academician of the NAS of the RK  
**B. T. Zhumagulov**

E d i t o r i a l s t a f f:

doctor of physical and mathematical sciences **N.M. Temirbekov** (deputy editor-in-chief), academicians of the NAS of the RK **N. Zh. Takibayev, S. N. Harin, T. Sh. Kalmenov, N. K. Bliev, B. N. Mukashev, M. O. Otelbaev**, doctor of physical and mathematical sciences **K. K. Kadirzhanov**, doctor of physical and mathematical sciences **N. T. Danaev**, doctor of physical and mathematical sciences **T. S. Ramazanov**, doctor of physical and mathematical sciences **U. U. Umirbaev**, academician **A. Gadzhiev** (Azerbaijan), academician **A. Pashaev** (Azerbaijan), academician **I. Tiginaynu** (Moldova), academician **I. N. Vishnevskiyi** (Ukraine), academician **A. M. Kovalov** (Ukraine), academician **A. A. Mikhalevich** (Belarus), doctor of chemical sciences **N. Beysen** (secretary)

«Известия НАН РК. Серия физико-математическая» I ISSN 1991-346X

Собственник: РОО «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы)

Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации и архивов Министерства культуры и информации Республики Казахстан №5543-Ж, выданное 01.06.2006 г.

Периодичность: 6 раз в год.

Тираж: 300 экземпляров.

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28, ком. 219, 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18 www:akademiyanauk.kz  
Адрес типографии: ИП «Аруна», г. Алматы, ул. Муратбаева, 75.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 6, Number 298 (2014), 3 – 7

## APPROXIMATION OF CLASSES OF SMOOTH PERIODIC FUNCTIONS OF SEVERAL VARIABLES BY WAVELETS

Sh. A. Balgimbayeva, D. M. Nurbayeva, Zh. M. Nurmukhamedova

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan.

E-mail: sc\_s@mail.ru

**Key words:** functional space, approximation, wavelet.

**Abstract.** In the work the problem of approximation by sums of Fourier series with respect to Lizorkin wavelet system for the Nikolsky – Besov class  $\mathbf{B}_{p\theta}^s(\mathbf{T}^n)$  and Lizorkin–Triebel class  $\mathbf{F}_{p\theta}^s(\mathbf{T}^n)$  in norm of another Nikolsky –Besov space  $B_{q\tau}^t(\mathbf{T}^n)$  or Lizorkin–Triebel space  $F_{q\tau}^t(\mathbf{T}^n)$  is studied for certain relations between the parameters of the class and the space.

УДК 517.5

## ПРИБЛИЖЕНИЕ ВСПЛЕСКАМИ КЛАССОВ ГЛАДКИХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Ш. А. Балгимбаева, Д. М. Нурбаева, Ж. М. Нурмухамедова

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

*Представлено академиком НАН РК Н. К. Блиевым*

**Ключевые слова:** функциональное пространство, приближение, всплеск.

**Аннотация.** Изучается задача приближения классов Никольского–Бесова  $\mathbf{B}_{p\theta}^s(\mathbf{T}^n)$  и Лизоркина–Трибеля  $\mathbf{F}_{p\theta}^s(\mathbf{T}^n)$  суммами Фурье по системе всплесков Лизоркина в норме другого пространства Никольского–Бесова  $B_{q\tau}^t(\mathbf{T}^n)$  или Лизоркина–Трибеля  $F_{q\tau}^t(\mathbf{T}^n)$  при некоторых соотношениях между параметрами класса и пространства.

**Введение. Постановка задачи.** Задаче приближения различных классов гладких периодических функций тригонометрическими полиномами в одномерном случае посвящено большое число работ (см., например, [1–4] и др.).

В настоящей работе рассмотрены вопросы приближения классов Никольского – Бесова  $\mathbf{B}_{p\theta}^s(\mathbf{T}^n)$  и Лизоркина–Трибеля  $\mathbf{F}_{p\theta}^s(\mathbf{T}^n)$  периодических функций частными суммами их ряда Фурье по безусловному базису всплесков, которые являются тригонометрическими полиномами.

Введем некоторые обозначения. Пусть  $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{R}$  и  $\mathbf{C}$  – множества натуральных, целых, вещественных и комплексных чисел соответственно;  $\mathbf{N}_0 = \mathbf{N} \cup \{0\}$ ;  $\mathbf{T}^n = (\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z})^n$  –  $n$ -мерный тор;  $L_p := L_p(\mathbf{T}^n)$  ( $1 \leq p < \infty$ ) – пространство  $2\pi$ -периодических по каждой переменной функций  $f$ , суммируемых в степени  $p$  по периоду со стандартной нормой  $\|f\|_p$ ;  $\ell_\theta$  ( $1 \leq \theta \leq \infty$ ) – пространство числовых последовательностей  $\{a_j\}_{j \in \mathbf{N}_0}$  со стандартной нормой  $\|\{a_j\}\|_{\ell_\theta}$ ;

$\ell_\theta(L_p(\mathbf{T}^n))$  – пространство функциональных последовательностей  $\{f_k(x)\}_{k \in \mathbf{N}_0}$ ,  $x \in \mathbf{T}^n$ , с конечной нормой  $\|\{f_k\}|_{\ell_\theta(L_p)}\| = \|\{\|f_k|_{L_p}\|\}|_{\ell_\theta}\|$ ;

$L_p(\mathbf{T}^n; \ell_\theta)$  – пространство функциональных последовательностей  $\{f_k(x)\}_{k \in \mathbf{N}_0}$ ,  $x \in \mathbf{T}^n$ , с конечной нормой  $\|\{f_k\}|_{L_p(\mathbf{T}^n; \ell_\theta)}\| = \|\|\{f_k\}|_{\ell_\theta}\| |_{L_p}\|$  (с обычной модификацией при  $\theta = \infty$ ).

Пусть  $D(\mathbf{T}^n) := C^\infty(\mathbf{T}^n)$  – пространство бесконечно дифференцируемых комплекснозначных функций на  $\mathbf{T}^n$  (пробных функций);  $D'(\mathbf{T}^n)$  – двойственное пространство периодических распределений (обобщенных функций).

Значение распределения  $f \in D'(\mathbf{T}^n)$  на пробной функции  $g \in D(\mathbf{T}^n)$  будем обозначать через  $\langle f, g \rangle$ . Тогда коэффициенты Фурье  $f \in D'(\mathbf{T}^n)$  задаются соотношением  $\hat{f}(k) = (2\pi)^{-1} \langle f, e^{-i(k,x)} \rangle$ ,  $k \in \mathbf{Z}^n$ ,  $(k, x) = \sum_{j=1}^n k_j x_j$ .

Приведем определение периодических пространств Никольского–Бесова и Лизоркина – Трибеля [3], [5].

Введем разбиение множества  $\mathbf{Z}^n$  по диадическим кубам. Пусть  $K_0 = \{0 | 0 = (0, \dots, 0) \in \mathbf{Z}^n\}$ ,  $K_j = \{k | k \in \mathbf{Z}^n, |k_m| < 2^j, m = 1, \dots, n\} \setminus \{k | k \in \mathbf{Z}^n, |k_m| < 2^{j-1}, m = 1, \dots, n\}$ .

**Определение 1.** Пусть  $s \in \mathbf{R}$ ,  $1 \leq p < \infty$ ,  $1 < \theta < \infty$ .

i) пространство Никольского–Бесова  $B_{p\theta}^s(\mathbf{T}^n)$  состоит из всех периодических обобщенных функций  $f \in D'(\mathbf{T}^n)$  для которых конечна норма

$$\|f|_{B_{p\theta}^s}\| = \left\| 2^{sj} \sum_{k \in K_j} \hat{f}(k) e^{i(k,x)} |_{\ell_\theta(L_p(\mathbf{T}^n))} \right\|; \quad (1)$$

ii) пространство Лизоркина–Трибеля  $F_{p\theta}^s(\mathbf{T}^n)$  состоит из всех периодических обобщенных функций  $f \in D'(\mathbf{T}^n)$  для которых конечна норма

$$\|f|_{F_{p\theta}^s}\| = \left\| 2^{sj} \sum_{k \in K_j} \hat{f}(k) e^{i(k,x)} |_{L_p(\mathbf{T}^n, \ell_\theta)} \right\|. \quad (2)$$

Классом Никольского – Бесова  $\mathbf{B}_{p\theta}^s(\mathbf{T}^n)$  ( Лизоркина – Трибеля  $\mathbf{F}_{p\theta}^s(\mathbf{T}^n)$  ) будем называть единичный шар пространства  $B_{p\theta}^s(\mathbf{T}^n)$  ( $F_{p\theta}^s(\mathbf{T}^n)$ ), т.е.

$$\mathbf{B}_{p\theta}^s(\mathbf{T}^n) = \left\{ f \in B_{p\theta}^s(\mathbf{T}^n) : \|f|B_{p\theta}^s\| \leq 1 \right\} \quad \left( \mathbf{F}_{p\theta}^s(\mathbf{T}^n) = \left\{ f \in F_{p\theta}^s(\mathbf{T}^n) : \|f|F_{p\theta}^s\| \leq 1 \right\} \right)$$

В работе [6] дано представление функций из пространства  $B_{p\theta}^s(\mathbf{T}^n)$  с помощью системы функций (типа всплесков)  $\Phi := \{\phi_{\nu r}, (\nu, r) \in M\}$ ,  $M = \{(\nu, r) | \nu \in \mathbf{N}, r \in \mathbf{N}^n, 0 \leq r \leq N - M\}$ :

$$\phi_{\nu r} = \prod_{j \in \mathbf{N}} [N_j^\nu - M_j^\nu + 1]^{-1} \sum_{k=M}^N e^{i(k,u)},$$

где  $u = x - t_{M,N}^r$ ,  $t_{M,N}^r = \left( \frac{2\pi r_1}{N_1^\nu - M_1^\nu + 1}, \dots, \frac{2\pi r_n}{N_n^\nu - M_n^\nu + 1} \right)$ ,  $M_j^\nu := \min_l \{2^{l-1}(\sigma_j^l - 1)\}$ ,  $N_j^\nu := \max_l \{2^{l-1}(\sigma_j^l + 1)\}$ . Здесь  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$  вектор, компоненты которого равны  $\pm 1$  или  $\pm 3$ , но обязательно один из них равен  $\pm 3$ . Всего таких векторов  $\ell_n = 4^n - 2^n$ , т.е.  $\sigma^\ell = (\sigma_1^\ell, \dots, \sigma_n^\ell)$ ,  $\ell = 1, \dots, \ell_n$ . Имеем

$$\hat{f}_\phi(\nu, r) = \sum_{k \in \rho(\nu)} \hat{f}(k) e^{i(k, t_{M,N}^r)}.$$

Рассмотрим (формально) следующие декомпозиции периодического распределения  $f \in D'(\mathbf{T}^n)$  по двоичным "пачкам":

$$f(x) = \hat{f}(0) + \sum_{\nu \in \mathbf{Z}^n} \delta_\nu(f, x), \tag{3}$$

где  $\delta_\nu(f, x) = \sum_{k \in \rho(\nu)} \hat{f}(k) e^{i(k,x)}$ ,  $\nu \geq 1$ ;  $\rho(\nu) = \{k | k \in \mathbf{Z}^n, M^\nu \leq k \leq N^\nu\}$ .

**Предварительные сведения.** Сформулируем некоторые известные факты, которые использованы в работе. Приведем два утверждения из работы [6].

**Утверждение 1.** Пусть  $1 < p < \infty$ . Тогда для "пачки"  $\delta_\nu(f, x)$  ряда Фурье (3) справедливы оценки:

$$A_p^n \|\delta_\nu(f, x)\|_p \leq \left( \prod_{j=1}^n \frac{2\pi}{N_j^\nu - M_j^\nu + 1} \right)^{1/p} \left( \sum_{r=0}^{N^\nu - M^\nu} |\hat{f}_\phi(\nu, r)|^p \right)^{1/p} \leq B_p^n \|\delta_\nu(f, x)\|_p,$$

где постоянные  $0 \leq A_p \leq B_p < \infty$  не зависят от  $\nu$ .

**Утверждение 2.** Пусть  $s \in \mathbf{R}$ ,  $1 \leq p < \infty$ ,  $1 \leq \theta < \infty$ . Для того чтобы периодическое распределение  $f \in D'(\mathbf{T}^n)$  принадлежало пространству  $B_{p\theta}^s(\mathbf{T}^n)$  необходимо и достаточно, чтобы оно представлялось слабосходящимся рядом

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^\infty \sum_{r=0}^{N^\nu - M^\nu} \hat{f}_\phi(\nu, r) \phi_{\nu r}(x) \tag{4}$$

с коэффициентами  $\hat{f}_\phi(\nu, r)$ , удовлетворяющими условию

$$B_{p\theta}^s := \left[ \sum_{\nu=1}^\infty 2^{s\nu\theta} \left( \prod_{j=1}^n \frac{2\pi}{N_j^\nu - M_j^\nu + 1} \right)^{1/p} \left( \sum_{r=0}^{N^\nu - M^\nu} |\hat{f}_\phi(\nu, r)|^p \right)^{1/p} \right]^{1/\theta} \leq \infty$$

При этом ряд (4) сходится по норме  $B_{p\theta}^s(\mathbf{T}^n)$  (при  $\theta < \infty$ ) и величина  $\{\hat{f}_\phi(0,0)^\theta + (\beta_{p\theta}^s)^\theta\}^{1/\theta}$  эквивалентна норме  $f$  в  $B_{p\theta}^s(\mathbf{T}^n)$ .

Далее запись  $A \cong B$  означает, что существуют константы  $C_1, C_2 > 0$  такие, что  $C_1 A \leq B \leq C_2 A$ .

**Основные результаты.** Изучим задачу приближения функции из класса  $B_{p\theta}^s(\mathbf{T}^n)$  суммами  $S_\Delta(f)$  в метрике  $L_q(\mathbf{T}^n)$  и  $B_{q\tau}^t(\mathbf{T}^n)$ . Далее будем обозначать

$$S_\Delta(f) = \sum_{(v,r) \in M'} \hat{f}_\phi(v,r) \phi_{vr}(x),$$

где  $M' := \{(v,r) : 1 \leq v \leq v_\Delta, r = 0, \dots, N^v - M^v\}$ ; здесь  $v_\Delta = [\log_2(\Delta + 1)] + 1$  ( $[a]$  – целая часть числа  $a \in \mathbf{R}$ ). Для линейного нормированного пространства  $X = X(\mathbf{T}^n)$  периодических функций и класса  $F \subset X$  обозначим

$$S_\Delta(F, X) = \sup_{f \in F} \|f - S_\Delta(f)\|_X.$$

**Теорема 1.** Пусть  $1 < p, q < \infty, 1 \leq \theta, \tau \leq \infty; s \in \mathbf{R}$  такое, что  $s > (\frac{1}{p} - \frac{1}{q})_+$ . Тогда имеют место оценки

$$S_\Delta(B_{p\theta}^s(\mathbf{T}^n), B_{q\tau}^t(\mathbf{T}^n)) \cong 2^{-v_\Delta(s-t-(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})_+)}; \quad (5)$$

$$S_\Delta(B_{p\theta}^s(\mathbf{T}^n), L_q(\mathbf{T}^n)) \cong 2^{-v_\Delta(s-(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})_+)}. \quad (6)$$

Здесь  $a_+ = a$ , если  $a > 0$  и  $a_+ = 0$ , если  $a \leq 0$ .

*Доказательство.* Доказательство использует неравенства Гельдера, Йенсена, неравенство разных метрик Никольского, неравенство Литтлвуда – Пэли, а также теоремы А и В.

Далее рассмотрим задачу приближения в более общем случае.

**Теорема 2.** Пусть  $1 < p, q < \infty, 1 \leq \theta, \tau \leq \infty; s \in \mathbf{R}$  такое, что  $s - t > (\frac{1}{p} - \frac{1}{q})_+$ . Тогда имеет место оценка

$$S_\Delta(A_{p\theta}^s(\mathbf{T}^n), A_{q\tau}^t(\mathbf{T}^n)) \cong 2^{-v_\Delta(s-t-(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})_+)}. \quad (7)$$

Здесь  $\mathbf{A}$  – это либо  $\mathbf{B}$ , либо  $\mathbf{F}$ , аналогично  $A$  – это либо  $B$ , либо  $F$ .

*Доказательство.* Случай, когда  $\mathbf{A}$  – это  $\mathbf{B}$ ,  $A$  – это  $B$ , разобран в теореме 1. Далее рассмотрим случай  $\mathbf{A}$  – это  $\mathbf{F}$ ,  $A$  – это  $F$ . Оставшиеся случаи пар  $(\mathbf{B}, F); (\mathbf{F}, B)$  разбираются аналогично. Для доказательства воспользуемся оценкой (5) и известными вложениями  $B_{q \min(q,\tau)}^t(\mathbf{T}^n) \subset F_{q\tau}^t(\mathbf{T}^n) \subset B_{q \max(q,\tau)}^t(\mathbf{T}^n)$ . Тогда имеют место неравенства:

$$\begin{aligned} \sup_{f \in B_{p \min(p,\theta)}^s(\mathbf{T}^n)} \|f - S_\Delta(f)\|_{B_{q \max(q,\tau)}^t} &= \sup_{f \in F_{p\theta}^s(\mathbf{T}^n)} \|f - S_\Delta(f)\|_{F_{q\tau}^t} = \\ &= \sup_{f \in B_{p \max(p,\theta)}^s(\mathbf{T}^n)} \|f - S_\Delta(f)\|_{B_{q \min(q,\tau)}^t}. \end{aligned}$$

Величины справа и слева здесь согласно теореме 1 совпадают по порядку с величиной справа в (7), следовательно,

$$\sup_{f \in F_{p\theta}^s(\mathbf{T}^n)} \|f - S_\Delta(f)\|_{F_{q\tau}^t} \cong 2^{-v_\Delta(s-t-(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})_+)}.$$

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука, 1977. – 512 с.  
 [2] Корнейчук Н.П. Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987. – 423 с.  
 [3] Triebel H., Schmeisser H.-J. Topics in Fourier analysis and function spaces. – Chichester and New York: Wiley, 1987. – 300 p.  
 [4] Степанец А.И. Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наукова думка, 1987. – 268 с.  
 [5] Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1977. – 456 с.  
 [6] Orlovskii D.G. On multipliers in the spaces  $B_{p\theta}^r$  // Analysis Mathematica. – 1979. – Т. 5. – С. 207-218.

## REFERENCES

- [1] Dzjadyk V.K. *Vvedenie v teoriju ravnomernogo priblizhenija funkcij polinomami*. M.: Nauka, 1977, 512 s. (in Russ.).  
 [2] Kornejchuk N.P. *Tochnye konstanty v teorii priblizhenija*. M.: Nauka, 1987, 423 s. (in Russ.).  
 [3] Triebel H., Schmeisser H.-J. *Topics in Fourier analysis and function spaces*. Chichester and New York: Wiley. 1987, 300 p.  
 [4] Stepanec A.I. *Klassifikacija i priblizhenie periodicheskikh funkcij*. Kiev: Naukova dumka, 1987, 268 s. (in Russ.).  
 [5] Nikol'skij S.M. *Priblizhenie funkcij mnogikh peremennykh i teoremy vlozhenija*. M.: Nauka, 1977, 456 s. (in Russ.).  
 [6] Orlovskii D.G. *Analysis Mathematica*. 1979, 5, 207-218.

**ТЕГІС ПЕРИОДТЫ ФУНКЦИЯЛАР КЛАСТАРЫН  
ТОЛҚЫНШАЛАРМЕН ЖУЫҚТАУ**

**Ш. А. Балғымбаева, Д. М. Нұрбаева, Ж. М. Нұрмухамедова**

Математика және математикалық моделдеу институты, Алматы, Қазақстан

**Тірек сөздер:** функциялар кеңістігі, жұықтау, толқынша.

**Аннотация.** Жұмыста Лизоркин толқыншылар жүйесі бойынша Фурье қосындыларымен Никольский–Бесов  $B_{p\theta}^s(\mathbf{T}^n)$  және Лизоркин–Трибель  $F_{p\theta}^s(\mathbf{T}^n)$  кластарын басқа Никольский–Бесов  $B_{q\tau}^t(\mathbf{T}^n)$  немесе Лизоркин–Трибель  $F_{q\tau}^t(\mathbf{T}^n)$  кеңістігінде жұықтау есебі клас пен кеңістіктің параметрлерінің кейбір арақатынастары үшін зерттелген.

Поступила 26.11.2014 г.

**NEWS**

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES**

ISSN 1991-346X

Volume 6, Number 298 (2014), 8 – 20

**THE EQUATION OF TRANSFORMATION AND ITS GENERALIZED DECISIONS IN DIFFERENTIAL ALGEBRA OF BIQUATERNIONS**

**L. A. Alexeyeva**

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan.

E-mail: alexeeva@math.kz

**Key words:** equation of transformation, differential algebra, biquaternions, Minkowski space, generalized solutions, twistor.

**Abstract.** The differential algebra of biquaternions on Minkowski space is developed for creation of the generalized solutions of the biquaternionic differential equations, characteristic for problems of theoretical and mathematical physics. The biquaternionic wave equation of a general view is investigated at biquaternionic representation of its structural coefficient. The fundamental and generalized decisions are constructed at any right part in the class of generalized biquaternions on Minkowski space. Solutions of the uniform equation (twistors) are constructed and investigated with use of scalar potentials, satisfying to the hyperbolic equation, which generalizes the equations of Kleyn-Gordon-Fokk and Schrödinger. The polarized and unpolarized twistor fields of a general view with use of elementary twistors are constructed.

УДК 517.9+537.8, MSQ 15A66

**УРАВНЕНИЕ ТРАНСФОРМАЦИИ И ЕГО ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ АЛГЕБРЕ БИКВАТЕРНИОНОВ**

**Л. А. Алексеева**

Институт математики и математического моделирования МОН РК, Алматы, Казахстан.

**Ключевые слова:** биволновое уравнение, структурный коэффициент, дифференциальная алгебра, бикватернионы, пространство Минковского, обобщенное решение, твистор.

**Аннотация.** Разрабатывается дифференциальная алгебра бикватернионов на пространстве Минковского для построения обобщенных решений бикватернионных дифференциальных уравнений, характерных для задач теоретической и математической физики. Исследовано биволновое уравнение общего вида при бикватернионном представлении его структурного коэффициента. Построены фундаментальные и обобщенные решения при произвольной правой части из класса обобщенных бикватернионов на пространстве Минковского. Построены и исследованы решения однородного уравнения (твисторы) с использованием скалярных потенциалов, удовлетворяющих волновым уравнениям, обобщающим уравнения Клейна-Гордона-Фока и Шредингера. Построены поляризованные и неполяризованные твисторные поля общего вида с использованием элементарных твисторов.

Предложенная В. Р. Гамильтоном алгебра кватернионов [1] и ее комплексное расширение – алгебра бикватернионов являются удобным математическим аппаратом для описания многих физических процессов. В последние десятилетия эти алгебры стали активно использоваться в работах разных авторов для решения ряда задач электродинамики, квантовой механики, механики твердого тела и теории поля. Эти разделы физики активно изучаются в рамках теорий клиффордовых алгебр.



Здесь разрабатывается дифференциальная алгебра бикватернионов на пространстве Минковского для построения обобщенных решений бикватернионных дифференциальных уравнений, характерных для задач теоретической и математической физики. Рассматривается биволновое уравнение

$$\nabla^{\pm} \mathbf{B} + \mathbf{F} \circ \mathbf{B} = \mathbf{G}(\tau, x), \quad (\tau, x) \in M, \quad (1)$$

где дифференциальные бикватернионные операторы  $\nabla^{\pm} = \partial_{\tau} \pm i\nabla$  – взаимные биградиенты [1], структурный коэффициент  $\mathbf{F}$  – постоянный комплексный бикватернион.

Уравнение (1) относится к классу биволновых уравнений общего вида:

$$\mathbf{A} \circ \nabla^{\pm} \mathbf{B} + \mathbf{C} \circ \mathbf{B} = \mathbf{H}(\tau, x), \quad (2)$$

которые приводятся к (1), если существует  $\mathbf{A}^{-1}$  [1]. В этом случае, умножая (2) слева на  $\mathbf{A}^{-1}$ , получим уравнение (1), где  $\mathbf{F} = \mathbf{A}^{-1} \circ \mathbf{C}$ ,  $\mathbf{G} = \mathbf{A}^{-1} \circ \mathbf{H}$ .

В [1] рассмотрен случай, когда  $\mathbf{F}$  – комплексное число:  $\mathbf{F} = m$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ . Там же показано, что уравнение (1) эквивалентно модифицированной системе уравнений Максвелла (при  $\mathbf{F} = 0$ ) и Дирака (при  $\mathbf{F} = i\rho$ ,  $\rho \in \mathbb{R}$ ). В [2] рассмотрен случай, когда  $\mathbf{F} = F$ ,  $F \in \mathbb{Z}^3$  – трехмерный комплексный вектор. В [1-2] для таких  $\mathbf{F}$  на основе дифференциальной алгебры бикватернионов и теории обобщенных функций построены элементарные и общие решения (1), описывающие нестационарные, гармонические по времени и статические бикватернионные поля.

Здесь исследуем общий случай для произвольного постоянного бикватерниона  $\mathbf{F} = f + F$ . Построим обобщенные решения (1) при произвольной правой части из класса обобщенных бикватернионов на пространстве Минковского:  $\mathbf{G} \in \mathbf{B}'(M)$  [1].

Уравнение (1) при  $\mathbf{G} = 0$  имеет вид уравнения трансформации зарядов-токов электро-гравитационного (ЭГМ) поля [3, 4], описываемого бикватернионом  $\mathbf{B}(\tau, x)$  под действием внешнего постоянного ЭГМ-поля, описываемого заданным структурным коэффициентом  $\mathbf{F}$ . Поэтому назовем его *уравнением трансформации*. Эквивалентная ему система дифференциальных уравнений относится к классу уравнений Янга-Милса [5].

Здесь дифференциальная алгебра бикватернионов используется для построения обобщенных решений уравнения (1).

**1. Неоднородное биволновое уравнение и его решения.** Введем дифференциальные бикватернионные операторы:

$$\mathbf{D}_{\mathbf{F}}^{+} = \nabla^{+} + \mathbf{F} = \nabla^{+} + f + F, \quad \mathbf{D}_{\mathbf{F}}^{-} = \nabla^{-} + \mathbf{F}^{-} = \nabla^{-} + f - F,$$

свойствами которых будем пользоваться далее для решения поставленной задачи.

Л е м м а 1.1.

$$\mathbf{D}_{\mathbf{F}}^{+} \circ \mathbf{D}_{\mathbf{F}}^{-} = \mathbf{D}_{\mathbf{F}}^{-} \circ \mathbf{D}_{\mathbf{F}}^{+} = \square + 2f\partial_{\tau} + f^2 + (F, F) - 2i(F, \nabla). \quad (3)$$

где справа стоит волновой оператор (даламбертиан):  $\square = \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \Delta$ ,  $\Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2$  – лапласиан.

Д о к а з а т е л ь с т в о: Поскольку, как легко проверить [1],

$$\nabla^{+} \circ \nabla^{-} = \nabla^{-} \circ \nabla^{+} = \square, \quad (4)$$

простым вычислением получим требуемое:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{\mathbf{F}}^{+} \circ \mathbf{D}_{\mathbf{F}}^{-} &= \mathbf{D}_{\mathbf{F}}^{-} \circ \mathbf{D}_{\mathbf{F}}^{+} = \\ &= (\nabla^{+} + f + F) \circ (\nabla^{-} + f - F) = \square + 2f\partial_{\tau} + f^2 + (F, F) + 2i(F, \nabla). \end{aligned}$$

Далее значок кватернионного умножения между операторами будем убирать:

$$\mathbf{D}_{\mathbf{F}}^{+} \mathbf{D}_{\mathbf{F}}^{-} = \mathbf{D}_{\mathbf{F}}^{-} \mathbf{D}_{\mathbf{F}}^{+}.$$

Построим решения уравнения (1) для верхнего знака биградиента:

$$\mathbf{D}_F^+ \mathbf{B} = \mathbf{G}(\tau, x), \quad (\tau, x) \in M. \quad (5)$$

Решения для нижнего знака биградиента можно построить аналогично показанному ниже либо просто используя операцию комплексного сопряжения.

Используя свойство (3), из (5) получим

$$\mathbf{D}_F^- \mathbf{D}_F^+ \mathbf{B} = \left\{ \square + 2f \partial_\tau + f^2 + (F, F) + 2i(F, \nabla) \right\} \mathbf{B} = \mathbf{D}_F^- \mathbf{G} \square \mathbf{Q}$$

Т.е. каждая компонента  $\mathbf{B}$  удовлетворяет уравнению

$$\square u + 2f \partial_\tau u + 2i(F, \nabla u) + f^2 u + (F, F)u = q(\tau, x) \quad (6)$$

с соответствующей  $\mathbf{Q}$  правой частью.

Заметим, что это уравнение, если положить  $m^2 = f^2 + (F, F)$ , содержит оператор Клейна-Гордона-Фока  $(\square + m^2)$ , а также дополнительное слагаемое:  $2f \partial_\tau + 2i(F, \nabla)$ .

Если  $f = ik$  – чисто мнимая величина, то в этом уравнении можно увидеть и оператор Шредингера  $(2ik \partial_\tau - \Delta)$ . И хотя уравнение (4) имеет более сложный вид, чем уравнения названных авторов, его решения, как покажем далее, определяются более простыми, на наш взгляд, функциями.

**Т е о р е м а 1.1.** *Решение биволнового уравнения (1) можно представить в виде*

$$\mathbf{B} = \mathbf{D}_F^- (\psi * \mathbf{G}) + \mathbf{B}^0 = \mathbf{D}_F^- \psi * \mathbf{G} + \mathbf{B}^0 = \psi * \mathbf{D}_F^- \mathbf{G} + \mathbf{B}^0 \quad (7)$$

где  $\psi(\tau, x)$  -- фундаментальное решение уравнения (6) (при  $q = \delta(\tau)\delta(x)$ ), а  $\mathbf{B}^0(\tau, x)$  решение однородного уравнения (5) (при  $\mathbf{G} \equiv \mathbf{0}$ ):

$$\mathbf{B}^0 = \sum_{\psi^0} \mathbf{D}_F^- \psi^0 * \mathbf{C}^0 = \sum_{\psi^0} \psi^0 * \mathbf{D}_F^- \mathbf{C}^0 = \sum_{\psi^0} \mathbf{D}_F^- (\psi^0 * \mathbf{C}^0) \quad (8)$$

$\psi^0(\tau, x)$  -- решения однородного уравнения (6) (при  $q = 0$ ),  $\mathbf{C}^0 \in B'(M)$  -- произвольные обобщенные бикватернионы, допускающие такую свертку.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** В силу линейности уравнения, достаточно доказать утверждение для каждого слагаемого в формуле (5). Подставим первое слагаемое в уравнение (5) и, используя (3) и свойство дифференцирования свертки [6,1], получим

$$\mathbf{D}_F^- \mathbf{D}_F^+ (\psi * \mathbf{G}) = \left\{ \square \psi + 2f \partial_\tau \psi + f^2 \psi + (F, F) \psi + 2i(F, \nabla \psi) \right\} * \mathbf{G} = \delta(\tau)\delta(x) * \mathbf{G} = \mathbf{G}.$$

Для каждого слагаемого второй суммы аналогично имеем

$$\mathbf{D}_F^- \mathbf{D}_F^+ (\psi^0 * \mathbf{C}^0) = \left\{ \square + 2f \partial_\tau + f^2 + (F, F) + 2i(F, \nabla) \right\} \psi^0 * \mathbf{C}^0 = 0.$$

Очевидно, в силу линейности уравнения (1), любое решение можно представить в аналогичном виде. При этом в формулах теоремы (7) и (8) для построения решения можно брать любое из равенств в зависимости от удобства вычисления свертки, что зависит от конкретного вида входящих в свертку функций (определение бикватернионной свертки см. в [1]).

Следовательно, класс решений биволнового уравнения (5) определяется скалярными функциями  $\psi(\tau, x)$  и  $\psi^0(\tau, x)$  - решениями уравнения (6), которые будем называть *скалярными потенциалами* биволнового уравнения (5).

**2. Скалярные потенциалы неоднородного биволнового уравнения.** Построим вначале решения неоднородного уравнения (6) для произвольных  $q(x, \tau)$ .

**Т е о р е м а 2.1.** *Фундаментальные решения уравнения (6) имеют вид:*

$$\psi = (1-a) \frac{e^{-i(F,x) - \|x\|f}}{4\pi \|x\|} \delta(\tau - \|x\|) + a \frac{e^{-i(F,x) + \|x\|f}}{4\pi \|x\|} \delta(\tau + \|x\|) + \psi^0, \quad \forall a \in \mathbb{Z} \quad (9)$$

где  $\delta(\tau - \|x\|)$  – простой слой на световом конусе  $\tau = \pm \|x\|$ ;  $\psi^0(\tau, x)$  – решение однородного уравнения (6) (при  $q = 0$ ).

**Доказательство.** Для доказательства формулы теоремы используем преобразование Фурье обобщенных функций. Далее переменные Фурье, соответствующие  $(\tau, x)$  обозначаем  $(\omega, \xi)$  соответственно. Уравнение для  $\psi$  имеет вид:

$$\square \psi + 2f \partial_\tau \psi + 2i(F, \nabla \psi) + f^2 \psi + (F, F)\psi = \delta(\tau)\delta(x), \quad (10)$$

а его преобразование Фурье [6] приводится к уравнению:

$$\left( \|\xi\|^2 - \omega^2 - 2if\omega + 2(F, \xi) + f^2 + (F, F) \right) \bar{\psi}(\omega, \xi) = 1,$$

которое можно записать в виде:

$$\left\{ (\xi + F, \xi + F) + (f - i\omega)^2 \right\} \bar{\psi} = 1$$

Откуда получим

$$\bar{\psi}(\omega, \xi) = \frac{1}{(\xi + F, \xi + F) - (\omega + if)^2} \quad (11)$$

Для построения обратного преобразования Фурье воспользуемся фундаментальным решением уравнения Даламбера

$$\square \chi = \delta(x, t),$$

которое имеет вид:

$$\chi(x, \tau) = \frac{1-a}{4\pi \|x\|} \delta(\tau - \|x\|) + \frac{a}{4\pi \|x\|} \delta(\tau + \|x\|), \quad \forall a \in \mathbb{Z}.$$

Это сингулярные обобщенные функции – простые слои на световом конусе "будущего и прошлого":  $\tau = \pm \|x\|$ . Их преобразование Фурье равно следующим регуляризациям функции

$$\left( \|\xi\|^2 - \omega^2 \right)^{-1}:$$

$$\mathbb{F} \left[ \frac{1}{4\pi \|x\|} \delta(\tau \mp \|x\|) \right] = \frac{1}{\|\xi\|^2 - \omega^2 \pm i0} \quad (12)$$

Используя свойства сдвига преобразования Фурье [6], из (11) и (12) следует формула:

$$\psi = \frac{e^{i(F, x) - \tau f}}{4\pi \|x\|} \left( (1-a)\delta(\tau - \|x\|) + a\delta(\tau + \|x\|) \right) + \psi^0, \quad \forall a \in \mathbb{Z}$$

Поскольку на носителе первого слагаемого  $\tau = \|x\|$ , а у второго  $\tau = -\|x\|$ , в результате получим формулу теоремы. Теорема доказана.

Заметим, что  $\psi$  – сингулярная обобщенная функция, включающая две сферические расходящиеся и сходящиеся волны, распространяющиеся в  $R^3$  с единичной скоростью (если  $\tau$  – время). При  $\operatorname{Re} F = E \neq 0$  реальная и мнимая часть плотности слоя на сфере  $\|x\| = |\tau|$  колеблются с изменением  $x$ .  $\operatorname{Im} F = H$  дает экспоненциальное затухание или возрастание плотности в зависимости от направления  $x$  по отношению к  $H$  с ростом  $\|x\|$ .  $\operatorname{Re} f$  дает экспоненциальное затухание плотности простого слоя на сфере с ростом  $\tau$ , а влияние  $\operatorname{Im} f$  рассмотрим несколько позже.

**Теорема 2.2.** Если  $\sup_\tau q(x, \tau) = \{\tau : \tau \geq 0\}$  и  $q(x, \tau)$  – регулярная функция, такая, что при

малых  $x$  для  $\forall \tau > 0 \quad \exists \varepsilon < 1 : |q(x, \tau)| \leq O\left(\|x\|^{-(2+\varepsilon)}\right)$ , то обобщенное решение уравнения (6)

имеет вид:

$$u = \psi^0 + \frac{e^{i(F, x)}}{4\pi} H(\tau) \int_{r < \tau} \frac{e^{-i(F, y) - rf}}{r} q(y, \tau - r) dV(y), \quad r = \|y - x\| \quad (13)$$

$$dV(y) = dy_1 dy_2 dy_3.$$

Доказательство. Используя свойство фундаментального решения [6], получим обобщенное решение в виде свертки:

$$u = q(x, \tau) * \frac{e^{i(F,x) - \|x\|f}}{4\pi \|x\|} \delta(\tau - \|x\|) = \\ = \frac{e^{i(F,x)}}{4\pi} H(\tau) \int_{\|y-x\| < \tau} \frac{e^{-i(F,y) - \|x-y\|f}}{\|y-x\|} q(y, \tau - \|y-x\|) dV(y),$$

$dV(y) = dy_1 dy_2 dy_3$ . Что дает формулу теоремы. При этом интеграл существует в силу условий на  $q(x, \tau)$ .

**3. Скалярные потенциалы однородного биволнового уравнения.** Рассмотрим решения однородного уравнения (6):

$$\square u + 2f \partial_\tau u + 2i(F, \nabla u) + f^2 u + (F, F)u = 0 \quad (14)$$

Его преобразование Фурье имеет вид:

$$\{(\xi + F, \xi + F) + (f - i\omega)^2\} \bar{\psi}^0 = 0$$

Следовательно [6], в пространстве обобщенных функций его решение имеет вид:

$$\bar{\psi}^0 = \varphi(\omega, \xi) \delta_S(\omega, \xi),$$

где  $\delta_S(\omega, \xi)$  -- простой слой на поверхности  $S$  в  $M$ , на которой выполняются условия:

$$S = \{(\omega, \xi) : (\xi + F, \xi + F) + (f - i\omega)^2 = 0\}, \quad (15)$$

плотность простого слоя  $\varphi(\omega, \xi)$  -- произвольная интегрируемая на  $S$  функция.

Формальное решение уравнения (14) имеет вид поверхностного интеграла

$$\psi^0(\tau, x) = \int_S \varphi(\omega, \xi) \exp(-i\omega\tau - i(x, \xi)) dS(\omega, \xi), \quad \forall \varphi(\omega, \xi) \in L_1(S) \quad (16)$$

При каких  $F$  такая поверхность существует, и какой вид она имеет?

**3.1.** Рассмотрим вначале случай, когда  $F = F_1 = i\varepsilon - E$ , где  $\varepsilon, E$  -- действительные скаляр и вектор. Тогда  $S$  -- это поверхность в  $R^4 = \{(\omega, \xi) = (\omega, \xi_1, \xi_2, \xi_3)\}$ , описываемая уравнением:

$$S = \{(\omega, \xi) : (\xi - E, \xi - E) - (\varepsilon - \omega)^2 = 0\}. \quad (17)$$

Это трехмерный конус в  $R^4$  с вершиной в точке  $(\omega, \xi) = (\varepsilon, E)$ . Т.к. на его поверхности

$$\omega = \pm \|\xi - E\| + \varepsilon,$$

интеграл (16) можно записать в виде:

$$\psi^0(\tau, x) = e^{-i\varepsilon\tau} \int_{R^3} \phi(\xi) \exp(\pm i \|\xi - E\| \tau - i(x, \xi)) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 = \\ = e^{-i\varepsilon\tau - i(x, E)} \int_{R^3} \phi(\xi) \exp(\pm i \|\xi - E\| \tau - i(x, \xi - E)) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 = \\ = e^{-i(\varepsilon\tau + (x, E))} \int_{R^3} \varphi(\zeta) \exp(\pm i \|\zeta\| \tau - i(x, \zeta)) d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3 \quad (18)$$

Здесь  $\forall \varphi(\zeta) \in L_1(R^3)$  -- произвольная интегрируемая на  $R^3$  функция.

**3.2.** Если же  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_2 = h - iH$  ( $h, H$  – действительные скаляр и вектор), тогда из (15) следует:

$$(\xi - iH, \xi - iH) + (h - i\omega)^2 = \|\xi\|^2 - \omega^2 + (h^2 - \|H\|^2) - 2i((H, \xi) + h\omega) = 0 \quad (19)$$

Решением этого уравнения будет пересечение двух гиперповерхностей в  $M$ , задаваемых равенствами:

$$S = \left\{ (\omega, \xi) : \|\xi\|^2 = \omega^2 + \|H\|^2 - h^2, \quad h\omega + (H, \xi) = 0 \right\} \quad (20)$$

При  $H = 0$   $S = \left\{ (\omega, \xi) : \|\xi\|^2 = -h^2, \quad \omega = 0 \right\}$ , откуда следует, что такой поверхности не существует.

При  $H \neq 0$  второе уравнение – это трехмерная гиперплоскость в  $R^4$ , проходящая через начало координат, с вектором нормали  $(h, H)$ . Если  $h \neq 0$ , то  $S$  – это пересечение трехмерного гиперблоида с трехмерной гиперплоскостью, на котором

$$\|\xi\|^2 = (h^{-1}H, \xi)^2 + \|H\|^2 - h^2, \quad \omega = -(h^{-1}H, \xi) \Rightarrow \|\xi\|^2 = \frac{\|H\|^2 - h^2}{1 - (e_\xi, h^{-1}H)^2}, \quad e_\xi = \frac{\xi}{\|\xi\|}.$$

Условием существования такого пересечения, в силу не отрицательности  $\|\xi\|^2$ , является неравенство

$$\frac{\|H\|^2 - h^2}{h^2 - \|H\|^2 \cos^2 \theta} \geq 0, \quad (21)$$

где  $\theta$  -- угол между  $\xi$  и  $H$ . Неравенство выполняется при  $|h| \leq \|H\|$ , если  $|\cos \theta| < \frac{|h|}{\|H\|} < 1$ .

При  $|h| > \|H\|$  решений нет.

Легко видеть, что  $S_\cap(\xi)$  -- это однополостный гиперблоид вращения вокруг вектора  $H$  в  $R^3$ , полуоси которого определяются величинами

$$\left(\|H\|^2 - h^2\right)^{1/2}, \quad \left(\|H\|^2 - h^2\right)^{1/2}, \quad h.$$

Формула решения (17) приводится к виду:

$$\psi^0(\tau, x) = \int_{S_\cap(\xi)} \varphi(\xi) \exp\left(i(\tau h^{-1}H - x, \xi)\right) dS_\cap(\xi), \quad \forall \varphi(\xi) \in L_1(S_\cap(\xi)) \quad (22)$$

где

$$S_\cap(\xi) = \left\{ \xi : \|\xi\| = \sqrt{\frac{\|H\|^2 - h^2}{1 - \|h^{-1}H\|^2 \cos^2 \theta}}, \quad \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{|h|}{\|H\|} < \theta < \frac{\pi}{2} + \arccos \frac{|h|}{\|H\|} \right\}$$

Этот интеграл можно упростить, если перейти к декартовой системе координат, связанной с вектором  $H$ :

$$\xi = \sum_{k=1}^3 \zeta_k e^k, \quad e^3 = e_H = H / \|H\|.$$

Тогда

$$S_\cap(\xi) \rightarrow S_\zeta = \left\{ \zeta : \frac{\|\zeta\|_2^2}{\|H\|^2 - h^2} - \frac{1}{h^2} \zeta_3^2 = 1 \right\}, \quad \|\zeta\|_2^2 = \zeta_1^2 + \zeta_2^2$$

и интеграл (22) преобразуется к интегралу по плоскости  $\zeta \in R^2$ , с выколотым кругом радиуса

$r = \|H\|^2 - h^2$ , на которой  $\zeta_3 = \pm \sqrt{\frac{h^2 \|\zeta\|_2^2}{\|H\|^2 - h^2}} \square \pm \alpha(\|\zeta\|)$ . Действительно, в силу ортогональности

$H$  к  $e^1$  и  $e^2$ , имеем

$$\begin{aligned} \psi^0(\tau, x) &= \int_{S_\zeta} \gamma(\zeta) \exp\left( ih^{-1}(H, \zeta)\tau - i \sum_{k=1}^2 (x, e^k)\zeta_k - i(x, e_H)\zeta_3 \right) dS_\zeta \Rightarrow \\ \psi^0(\tau, x) &= \int_{\|\zeta\|_2^2 \geq \|H\|^2 - h^2} \gamma(\zeta) \exp\left( \pm i\tau h^{-1} \|H\| \alpha(\|\zeta\|) - i(\zeta, x_{\perp H}) \mp i(x, e_H) \alpha(\|\zeta\|) \right) d\zeta_1 d\zeta_2, \\ \|\zeta\|_2^2 &= \sum_{k=1}^2 \zeta_k^2, \quad \forall \gamma(\zeta) \in L_1\left(\zeta \in R^2, \|\zeta\| \geq \|H\|^2 - h^2\right). \end{aligned}$$

Остался случай  $h = 0$ . Тогда из (20) получим:

$$\begin{aligned} S &= \left\{ \omega = \pm \sqrt{\|\xi\|^2 - \|H\|^2}, \|\xi\| \geq \|H\|, (H, \xi) = 0 \right\} \\ \psi^0(\tau, x) &= \int_{\{\xi \perp H\} \cap \{\|\xi\| \geq \|H\|\}} \varphi(\xi) \exp\left( i(\pm \tau \sqrt{\|\xi\|^2 - \|H\|^2} - (x, \xi)) \right) dS_{\cap}(\xi) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\psi_{\mp}^0(\tau, x) = \iint_{\|\zeta\|_2 \geq \|H\|} \gamma(\zeta) \exp\left( -i\left( \zeta_1(x, e_H^1) + \zeta_2(x, e_H^2) \mp \tau \sqrt{\|\zeta\|^2 - \|H\|^2} \right) \right) d\zeta_1 d\zeta_2,$$

$\forall \gamma(\zeta) \in L_1\left(\zeta \in R^2, \|\zeta\| \geq \|H\|\right)$ . Здесь область интегрирования тоже совпадает с плоскостью, перпендикулярной вектору  $H$ , с выколотым кругом радиуса  $\|H\|$ .

Сформулируем полученные результаты в виде теоремы.

**Т е о р е м а 3.1.** Решения однородного биволнового уравнения (1) при  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_2 = h - iH$  существуют, если  $\|H\| > |h|$ , и имеют вид:

при  $|h| \neq 0$

$$\begin{aligned} \psi_{\pm}^0(\tau, x) &= \\ &= \iint_{\|\zeta\|^2 \geq \|H\|^2 - h^2} \gamma(\zeta) \exp\left( \pm i\tau h^{-1} \|H\| \alpha(\|\zeta\|) - i(\zeta, x_{\perp H}) \mp i(x, e_H) \alpha(\|\zeta\|) \right) d\zeta_1 d\zeta_2, \end{aligned} \quad (23)$$

где  $\alpha(\|\zeta\|) = \frac{\|h\zeta\|}{\sqrt{\|H\|^2 - h^2}}$ ,  $\zeta \in R^2$ ,  $\forall \gamma(\zeta) \in L_1\left(\left\{\zeta \in R^2 : \|\zeta\|^2 \geq \|H\|^2 - h^2\right\}\right)$ ,  $x_{\perp H} = x - (x, e_H)e_H$ ,

при  $|h| = 0$

$$\psi_{\mp}^0(\tau, x) = \iint_{\|\zeta\| \geq \|H\|} \gamma(\zeta) \exp\left( -i\left( \zeta_1(x, e^1) + \zeta_2(x, e^2) \mp \tau \sqrt{\|\zeta\|^2 - \|H\|^2} \right) \right) d\zeta_1 d\zeta_2, \quad (24)$$

$\forall \gamma(\zeta) \in L_1(\zeta \in R^2, \|\zeta\| \geq \|H\|)$ , либо представимы в виде линейной комбинаций решений такого вида:  $\psi^0(\tau, x) = a\psi_+^0(\tau, x) + b\psi_-^0(\tau, x), \quad a, b \in \mathbb{Z}$ .

**3.3.** В общем случае структурный коэффициент

$$\mathbf{F} = f + F = (f_1 + if_2) + (F_1 + iF_2) \tag{25}$$

разлагается на два бикватерниона:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = (h + i\varepsilon) - (E + iH), \tag{26}$$

$$\mathbf{F}_1 = if_2 + F_1 = i\varepsilon - E, \quad \mathbf{F}_2 = f_1 + iF_2 = h - iH.$$

Предполагаем здесь, что

$$\mathbf{F}_1 \neq 0, \quad \mathbf{F}_2 \neq 0. \tag{27}$$

Тогда гиперповерхность (15) описывается соотношениями:

$$S = \left\{ (\omega, \xi) : ((\xi - E) - iH, (\xi - E) - iH) + (h + i(\varepsilon - \omega))^2 = 0 \right\} \tag{28}$$

Выделим действительную и мнимую часть:

$$S = \left\{ (\omega, \xi) : \|\xi - E\|^2 - \|H\|^2 - 2i(H, (\xi - E)) + (h^2 - (\varepsilon - \omega)^2 + 2ih(\varepsilon - \omega)) = 0 \right\},$$

приравнявая их нулю, получим  $S$  – это пересечение двух гиперповерхностей в  $R^4$ :

$$S = \left\{ (\omega, \xi) : \|\xi - E\|^2 - (\omega - \varepsilon)^2 = \|H\|^2 - h^2 \quad \cap \quad (H, (\xi - E)) + h(\omega - \varepsilon) = 0 \right\} \tag{29}$$

Чтобы второе уравнение описывало гиперплоскость, необходимо, чтобы  $H$  и  $h$  не обращались одновременно в ноль в  $R^4$ . В противном имеем случай 3.1.

Если  $\|H\| - |h| \neq 0$ , то  $S$  – это пересечение в  $R^4$  трехмерного однополостного (при  $\|H\| - |h| > 0$ ) или двуполостного (при  $\|H\| - |h| < 0$ ) гиперблоида, сдвинутого на вектор  $(\omega^*, \xi^*) = (\varepsilon, E)$ , с трехмерной гиперплоскостью с тем же сдвигом, которое в  $R^3$  описывается множествами вида:

$$S_{\cap}(\xi) = \left\{ \omega = \varepsilon - h^{-1}(H, \xi - E), \quad \xi : \left\{ \|\xi - E\|^2 - (h^{-1}H, \xi - E)^2 = \|H\|^2 - h^2 \right\} \right\} \tag{30}$$

Из формулы (16) и формулы (30) следует: при  $|h| \neq 0$

$$\psi^0(\tau, x) = e^{-i\tau\varepsilon} \int_{S_{\cap}(\xi)} \phi(\xi) \exp\left(i\left(\tau(h^{-1}H, \xi) - (x, \xi)\right)\right) dS_{\cap}(\xi), \tag{31}$$

Для  $\forall \phi(\xi) \in L_1(S_{\cap}(\xi))$ .

Переходя к системе координат с началом в точке  $\xi^* = E$  и ортами  $\{e^1, e^2, e^3\}$ , получим

$$\begin{aligned} S_{\zeta}(\varepsilon, E) &= \left\{ \zeta \in R^3 : \|\zeta\|^2 - (\|h^{-1}H\|_{\zeta_3})^2 = \|H\|^2 - h^2 \right\} = \\ &= \left\{ \zeta \in R^3 : \zeta_1^2 + \zeta_2^2 + (1 - \|h^{-1}H\|^2)\zeta_3^2 = \|H\|^2 - h^2 \right\} \end{aligned}$$

Следовательно, такая поверхность существует, только если

$$\|H\| > |h|, \tag{32}$$

и на ней

$$\zeta_3(\|\zeta\|) = \pm \sqrt{\frac{\|H\|^2 - h^2 - \|\zeta\|^2}{1 - \|h^{-1}H\|^2}} \square \beta(\|\zeta\|), \quad \|\zeta\|^2 > \|H\|^2 - h^2, \quad \zeta \in R^2:$$

В этой системе координат решение (29) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \psi^0(\tau, x) &= \exp\left(-i\tau\left(\varepsilon - (h^{-1}H, E)\right) - i(x, E)\right) \int_{S_\cap(\xi)} \phi(\xi) \exp\left(i\left(\tau(h^{-1}H, \xi - E) - (x, \xi - E)\right)\right) dS_\cap(\xi) = \\ &= \exp\left(-i\tau\left(\varepsilon - (h^{-1}H, E)\right) - i(x, E)\right) \iint_{\|\zeta\| > \sqrt{\|H\|^2 - h^2}} \gamma(\zeta) \exp\left(i\left(\tau(h^{-1}H, \|\zeta\|e_H) - (x_{\perp H}, \zeta) \mp \beta(\|\zeta\|)x_{\square H}\right)\right) d\zeta_1 d\zeta_2 \end{aligned}$$

для  $\forall \gamma(\zeta) \in L_1 \left\{ \zeta : \|\zeta\| \leq \sqrt{\|H\|^2 - h^2} \right\}$ ,  $x = x_{\square H}e^3 + x_{\perp H}$ ,  $x_{\square H} = (x, e^3)$ ,  $x_{\perp H} = x - (x, e^3)e^3$ .

Если  $|h| = 0$ , тогда

$$S = \left\{ (\omega, \xi) : \|\xi - E\|^2 - (\omega - \varepsilon)^2 = \|H\|^2 \cap (H, (\xi - E) = 0) \right\},$$

$$S_\cap(\xi) = \left\{ (\omega, \xi) : \omega = \varepsilon \pm \sqrt{\|\xi - E\|^2 - \|H\|^2}; \quad \xi : \left\{ \|\xi - E\|^2 \geq \|H\|^2 \cap (H, (\xi - E) = 0) \right\} \right\},$$

$$\psi^0(\tau, x) = e^{-i\tau\varepsilon} \int_{\substack{\xi - E \perp H \cap \\ \|\xi - E\| \geq \|H\|}} \phi(\xi) \exp\left(i\left(\pm\tau\sqrt{\|\xi - E\|^2 - \|H\|^2} - (x, \xi)\right)\right) dS_\cap(\xi), \quad \forall \phi(\xi) \in L_1(S_\cap(\xi))$$

$S_\cap(\xi)$  – это часть плоскости, перпендикулярной вектору  $H$ , проходящей через точку  $\xi^* = E$ , с выколотым кругом радиуса  $\|H\|$ , с центром в той же точке  $\xi^* = E$ . Интеграл тоже можно упростить, переходя к системе координат, связанной с осями соответствующего однополостного гиперболоида.

Сформулируем полученные результаты в следующей теореме.

**Т е о р е м а 3.2** *Скалярные потенциалы однородного уравнения трансформации (1), удовлетворяющие уравнению (14), существуют, если  $\|H\| > |h|$ , и представимы в виде линейной комбинации решений вида:*

при  $|h| \neq 0$

$$\begin{aligned} \psi^0(\tau, x) &= \exp\left(-i\tau\left(\varepsilon - (h^{-1}H, E)\right) - i(x, E)\right) \times \\ &\times \iint_{\|\zeta\| > \sqrt{\|H\|^2 - h^2}} \gamma(\zeta) \exp\left(i\left(\tau h^{-1}\|H\|\|\zeta\| - (x_{\perp H}, \zeta) \mp \beta(\|\zeta\|)x_{\square H}\right)\right) d\zeta_1 d\zeta_2, \end{aligned} \quad (33)$$

где  $\beta(\|\zeta\|) = |h| \sqrt{\frac{\|\zeta\|^2}{\|H\|^2 - h^2} - 1}$ , а при  $|h| = 0$

$$\psi^0(\tau, x) = e^{-i\tau\varepsilon - i(x, E)} \int_{\|\zeta\| \geq \|H\|} \gamma(\zeta) \exp\left(i\left(\pm\tau\sqrt{\|\zeta\|^2 - \|H\|^2} - (x_{\perp H}, \zeta) - (x, e_H)\right)\right) d\zeta_1 d\zeta_2,$$

для  $\forall \gamma(\zeta) \in L_1 \left\{ \zeta \in R^2 : \|\zeta\| \geq \sqrt{\|H\|^2 - h^2} \right\}$ ,  $x_{\square H} = (x, e_H)$ ,  $x_{\perp H} = x - x_{\square H}e_H$ ,  $e_H = H / \|H\|$ .

В силу произвольности  $\gamma(\zeta)$ , можно строить множество скалярных потенциалов и соответственно решений исходного бикватернионного уравнения (1).

Рассмотрим далее класс элементарных решений твисторного уравнения (1), через которые можно выразить любые его решения.

**4. Элементарные твисторы и твисторные поля.** Назовем решения однородного биволнового уравнения (2) *твисторами*. Построим их бикватернионные представления.



**4.1.** Рассмотрим вначале случай, когда  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 = i\varepsilon + E$ , и скалярные потенциалы имеют вид (18). Заметим, что входящие в них функции -

$$\psi_{\xi}^{\pm}(\tau, x) = \exp\left((-i\varepsilon\tau \pm i\|\xi - E\|)\tau - i(x, \xi)\right), \quad \forall \xi \in R^3, \quad (32)$$

по построению являются решением однородного уравнения (14) и представляют собой две гармонические волны, движущиеся с фазовой скоростью  $c = \frac{-\varepsilon \pm \|\xi - E\|}{\|\xi\|}$  в направлении волнового вектора  $\xi$  (или противоположном направлении в зависимости от знака  $c$ ); длина волн  $\lambda = 2\pi / \|\xi\|$ , их частота  $\varpi = |-\varepsilon \pm \|\xi - E\||$ , период колебаний  $T = \frac{2\pi}{|-\varepsilon \pm \|\xi - E\||}$ .

При  $\|\xi\| \rightarrow \infty$   $c \rightarrow \pm 1$ ,  $\lambda \rightarrow 0$ ,  $\varpi \rightarrow \pm\infty$ ,  $T \rightarrow 0$ . В частности, скалярный потенциал

$$\psi_E^{\pm}(\tau, x) = \exp(-i\varepsilon\tau - i(x, E))$$

описывает гармоническую волну в направлении вектора  $E$ , у которой  $c = \frac{|\varepsilon|}{\|E\|}$ ,  $\varpi = |\varepsilon|$ ,  $T = \frac{2\pi}{|\varepsilon|}$ .

Рассмотрим порождаемый  $\psi_{\xi}^{\pm}(\tau, x)$  элементарный  $\xi$ -твистор -

$$\Psi_{\xi}^{\pm} = \frac{\mathbf{D}_F^- \psi_{\xi}^{\pm}}{\sqrt{\|\xi\|^2 + \|E\|^2}} = \frac{\pm i\|\xi - E\| - (\xi + E)}{\sqrt{\|\xi\|^2 + \|E\|^2}} \psi_{\xi}^{\pm}(\tau, x) \quad (33)$$

Интересно, что его амплитуда не зависит от  $\varepsilon$ . Его норма и псевдонорма [1] равны:

$$\|\Psi_{\xi}^{\pm}\| = 1, \quad \langle\langle \Psi_{\xi}^{\pm} \rangle\rangle = i \frac{\sqrt{2(\xi, E)}}{\sqrt{\|\xi\|^2 + \|E\|^2}}. \quad (34)$$

При  $E \perp \xi$   $\langle\langle \Psi_{\xi}^{\pm} \rangle\rangle = 0$ , при  $E = \xi$   $\langle\langle \Psi_{\xi}^{\pm} \rangle\rangle = i$ . Бикватернион его энергии - импульса равен

$$\Xi(\Psi_{\xi}^{\pm}) = 1 + \frac{\|\xi - E\|^2}{\|\xi\|^2 + \|E\|^2} (1 \pm 2i(\xi + E)).$$

В частности,  $\Xi(\Psi_E^{\pm}) = 1$

Бикватернионы – свертки вида:

$$\mathbf{BE}^0(\tau, x, \xi) = \Psi_{\xi}^{\pm}(\tau, x) * \mathbf{C}^0(\tau, x), \quad (35)$$

где  $\mathbf{C}^0(\tau, x)$  --произвольные функциональные бикватернионы, допускающие такую свертку, в силу свойств свертки, также являются твисторами, и описывают  $\xi$ -поляризованные нестационарные твисторные  $\mathbf{C}^0$ - поля

Используя  $\Psi_{\xi}^{\pm}$  можно также строить неполяризованные твисторы  $\mathbf{BE}^0(\tau, x)$  в виде :

$$\mathbf{BE}^0(\tau, x) = \sum_{\mathbf{C}^0, \Psi^{\phi}} \Psi_{\xi}^{\phi}(\tau, x) * \mathbf{C}^0(\tau, x), \quad (36)$$

$$\Psi_{\xi}^{\phi}(\tau, x) = \int_{R^3} \phi(\xi) \Psi_{\xi}^{\pm}(\tau, x) dV(\xi), \quad \forall \phi(\xi) : \phi(\xi) \|\xi\|^{-1} \in L_1(R^3)$$

Бикватернионы  $\mathbf{C}^0(\tau, x)$  произвольные, допускающие такие свертки, в том числе могут быть из класса сингулярных обобщенных функций.

**4.2.** При  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_2 = h - iH$ ,  $h \neq 0$ , как следует из (23), функции

$$\begin{aligned}\psi_{\pm}(\tau, x) &= \exp\left(\pm i\tau h^{-1}\|H\|\alpha(\|\zeta\|) - i(\zeta, x_{\perp H}) \mp i(x, e_H)\alpha(\|\zeta\|)\right) = \\ &= \exp\left(i\left(\tau h^{-1}\|H\|\alpha(\|\zeta\|) - \zeta_1 x'_1 - \zeta_2 x'_2 \mp x'_3 \alpha(\|\zeta\|)\right)\right).\end{aligned}$$

являются скалярными потенциалами однородного биволнового уравнения. Для построения соответствующего ему твистора рассмотрим билинейное уравнение в системе координат  $(x'_1, x'_2, x'_3)$ , связанной с вектором  $H$  (далее штрихи опускаем).

Скалярный потенциал  $\psi_{\zeta}(\tau, x)$  описывает гармонические волны в направлении волнового вектора  $k_{\zeta} = \{\zeta_1, \zeta_2, \pm h\alpha(\|\zeta\|)\}$ , частота колебаний которых  $\varpi = |h^{-1}\|H\|\alpha(\|\zeta\|)|$ , период  $T = 2\pi / \varpi$ , длина волны  $L = 2\pi / \|k_{\zeta}\|$ .

Вычислим порождаемые ими элементарные твисторы:

$$\begin{aligned}\Psi_{\zeta}^{\pm}(\tau, x) &= \frac{1}{\sqrt{\|H\|^2 + h^2}} \mathbf{D}_F^{-} \psi_{\zeta}^{\pm}(\tau, x) = \\ &= \psi_{\zeta}^{\pm} \frac{h \pm i h^{-1} \|H\| \alpha(\|\zeta\|) - \{\zeta_1, \zeta_2, \mp \alpha(\|\zeta\|)\} + iH}{\sqrt{\|H\|^2 + h^2}}, \quad \|\zeta\| \geq \sqrt{\|H\|^2 - h^2}\end{aligned}\tag{37}$$

Здесь в фигурных скобках указаны компоненты действительной части вектора. Норма

$$\|\Psi_{\zeta}^{\pm}\| = \sqrt{1 + \frac{2\|\zeta\|^2\|H\|^2}{\|H\|^4 - h^4}}, \quad \text{а псевдонорма не зависит от } \zeta: \quad \langle\langle \Psi_{\zeta}^{\pm} \rangle\rangle = i \sqrt{\frac{\|H\|^2 - h^2}{\|H\|^2 + h^2}}.$$

$$\text{При } \|\zeta\| = \sqrt{\|H\|^2 - h^2} \quad \text{норма } \|\Psi_{\zeta}^{\pm}\| = \sqrt{1 + \frac{2\|H\|^2}{\|H\|^2 + h^2}}.$$

**4.3.** В общем случае (для удобства выкладок) будем работать в системе координат, изначально связанной с вектором  $H$  ( $H \square e_3$ ). Рассмотрим входящие в скалярные потенциалы  $\psi^0(\tau, x)$  функции из теоремы 3.2, которые в выбранной системе координат имеют вид:

$$\begin{aligned}\psi_{\zeta}^{\pm}(\tau, x) &= \exp\left(-i\left(\tau(\varepsilon + h^{-1}\|H\|(\|\zeta\| - E_3)) + (x, E - \Pi^{\pm}(\|\zeta\|))\right)\right) = \\ &= -e^{-i(\tau(\varepsilon - h^{-1}\|H\| - E_3) - (x, E))} \exp\left(-i\left(\tau h^{-1}\|H\|(\|\zeta\|) - (x, \Pi^{\pm}(\|\zeta\|))\right)\right)\end{aligned}\tag{38}$$

где введен действительный вектор

$$\Pi^{\pm}(\|\zeta\|) = \{\zeta_1, \zeta_2, \pm \beta(\|\zeta\|)\}, \quad \beta(\|\zeta\|) = |h| \sqrt{\frac{\|\zeta\|^2}{\|H\|^2 - h^2} - 1}, \quad \|\zeta\| > \sqrt{\|H\|^2 - h^2}, \quad \zeta \in R^2.$$

По построению, они тоже являются решениями (14), и описывают, соответственно знаку, две

гармонические волны, движущиеся с фазовыми скоростями  $c^{\pm} = \frac{\varepsilon + h^{-1}\|H\|(\|\zeta\| - E_3)}{\|\Pi^{\pm}(\|\zeta\|) - E\|}$  в направ-

лении волновых векторов  $K^{\pm} = \Pi^{\pm}(\|\zeta\|) - E$ ; длина волн  $\lambda^{\pm} = 2\pi / \|\Pi^{\pm}(\|\zeta\|) - E\|$ , их частота

$$\varpi = \varepsilon + h^{-1}\|H\|(\|\zeta\| - E_3), \quad \text{период колебаний } T = \frac{2\pi}{\varepsilon + h^{-1}\|H\|(\|\zeta\| - E_3)}.$$

Вычислим порождаемый ими элементарный  $\xi$ -твистор

$$\Psi_{\xi}^{\pm}(\tau, x) = \mathbf{D}_F^{-1} \psi_{\xi}^{\pm}(\tau, x) = \left( h - i \left( h^{-1} \|H\| (\|\xi\| - E_3) \right) + \Pi^{\pm}(\|\xi\|) + iH \right) \psi_{\xi}^{\pm} \quad (39)$$

Его норма и псевдонорма равны:

$$\|\Psi_{\xi}^{\pm}\| = \|H\| \sqrt{1 + \frac{(\|\xi\| - E_3)^2}{h^2} + \frac{\|\xi\|^2}{\|H\|^2 - h^2}}$$

:

$$\langle\langle \Psi_{\xi}^{\pm} \rangle\rangle = \sqrt{\|H\|^2 \left( \frac{(\|\xi\| - E_3)^2}{h^2} - 1 \right) - \|\xi\|^2 \left( 1 - \frac{h^2}{\|H\|^2 - h^2} \right)} \quad (40)$$

Твисторы – свертки вида:

$$\mathbf{B}^0(\tau, x, \xi) = \Psi_{\xi}(\tau, x) * \mathbf{C}^0(\tau, x), \quad (41)$$

$$\mathbf{B}^0(\tau, x) = \sum_{\mathbf{C}^0(\tau, x)} \Psi^{\chi}(\tau, x) * \mathbf{C}^0(\tau, x),$$

$$\Psi^{\chi}(\tau, x) = \int_{\|\xi\|^2 > \|H\|^2 - h^2} \chi(\xi) \Psi_{\xi}(\tau, x) dV(\xi), \quad \forall \chi(\xi) \in L_1 \left\{ \xi \in R^2 : \|\xi\|^2 > \|H\|^2 - h^2 \right\} \quad (42)$$

описывают  $\xi$ -поляризованные (41) и неполяризованные (42) нестационарные твисторные  $\mathbf{C}^0$ -поля, порождаемые потенциалом  $\Psi^{\chi}(\tau, x)$ , амплитуда которых в каждой точке поля определяется значением  $\mathbf{C}^0(\tau, x)$ .

**Заключение.** Рассмотренное здесь биволновое твисторное уравнение (1), если записать его в виде системы уравнений для скалярной и векторной части и перейти к их тензорному аналогу, можно отнести к классу уравнений Янга-Милса [5], используемых в квантовой механике для построения моделей элементарных частиц. Решения однородных уравнений Янга-Милса называются *твисторами*. Поэтому автор использовал это название для бикватернионного аналога этих уравнений (1), аналогично, как в [2], где был рассмотрен частный случай (1) при чисто векторном представлении структурного коэффициента.

Здесь показано, что для твисторов существуют порождающие их скалярные потенциалы, которые определяют их решения. Скалярные потенциалы выражаются через интегралы от элементарных потенциалов, выражаемых через экспоненциальные функции, и содержат достаточно произвольные подынтегральные функции типа  $\chi(\xi)$ . От этих представлений нетрудно перейти к представлению твисторов с использованием функций Бесселя и сферических гармоник, если выбирать  $\chi(\xi)$  соответственно интегральным разложениям этих специальных функций. В этом случае можно получить счетное число еще более элементарных твисторов, которые можно использовать в теории элементарных частиц и квантовой теории [7].

Биволновое уравнение (1) при  $\mathbf{B} = i\rho + J$  имеет вид уравнения трансформации масс-зарядов ( $\rho$ ) и электро-гравимагнитных токов ( $J$ ) под воздействием постоянного внешнего ЭГМ-поля, описываемого бикватернионом  $\mathbf{F}$ , ранее предложенного автором для одной бикватернионной модели ЭГМ-поля [7,8]. Если перейти на физический язык, полученные здесь твисторы для этой модели описывают трансформацию спиноров свободного поля (при  $\mathbf{F} = 0$ ), под воздействием постоянного внешнего ЭГМ-поля, вектор электрической напряженности которого равен  $E$ , а гравимагнитной напряженности  $H$ . Потенциальная часть  $H$  описывает напряженность внешнего гравитационного поля, а его вихревая часть соответствует магнитной напряженности внешнего поля. Скаляры  $\varepsilon$  и  $h$  описывают свойства сопротивления-поглощения этих полей. Используя построенные здесь решения можно детально исследовать такие процессы.

**ЛИТЕРАТУРА**

- [1] Alexeyeva L.A. Biquaternions algebra and its applications by solving of some theoretical physics equations // Int. J. Clifford Analysis, Clifford Algebras and their Applications. – 2012. – Vol. 7. – Issue 1. – P. 19-39.
- [2] Алексеева Л.А. Твисторное биволновое уравнение и его обобщенные решения // Доклады НАН РК. – 2012. – № 4(284). – С. 27-33.
- [3] Алексеева Л.А. Уравнения взаимодействия А-полей и законы Ньютона // Известия НАН РК. Серия физико-математическая. – 2004. – № 3. – С. 45-53.
- [4] Алексеева Л.А. Полевые аналоги законов Ньютона для одной модели электро-гравимагнитного поля // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. – 2009. – Т. 6, – № 1. – С. 122-134.
- [5] Yang C.N., Mills R. Conservation of Isotropic Spin and Isotropic Gauge Invariance // Physical review. – 1954. – 96(1). – P. 191-195.
- [6] Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. – М.: Наука, 1976.
- [7] Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Квантовые поля. – М.: Наука, 1980. – 320 с.
- [8] **MSQ** 15A66 Clifford algebras, spinors.

**REFERENCES**

- [1] Alexeyeva L.A. Biquaternions algebra and its applications by solving of some theoretical physics equations. Int. J. Clifford Analysis, Clifford Algebras and their Applications. 2012. Vol. 7. Issue 1. P. 19-39.
- [2] Alekseeva L.A. Tvistorное bivolnovое uravnenie i ego obobshhennye reshenija. Doklady NAN RK. 2012. N 4(284). S. 27-33.
- [3] Alekseeva L.A. Uravnenija vzaimodejstvija A-polej i zakony N'jutona. Izvestija NAN RK. Serija fiziko-matematicheskaja. 2004. N 3. S. 45-53.
- [4] Alekseeva L.A. Polevye analogi zakonov N'jutona dlja odnoj modeli jelektro- gravimagnitnogo polja. Giperkompleksnye chisla v geometrii i fizike. 2009. T. 6, N 1. S. 122-134.
- [5] Yang C.N., Mills R. Conservation of Isotropic Spin and Isotropic Gauge Invariance. Physical review. 1954. 96(1). P. 191-195.
- [6] Vladimirov V.S. Obobshhennye funkicii v matematicheskoy fizike. M.: Nauka, 1976.
- [7] Bogoljubov N.N., Shirkov D.V. Kvantovye polja. M.: Nauka, 1980. 320 s.
- [8] **MSQ** 15A66 Clifford algebras, spinors.

*Поступила 26.11.2014 г.*

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

## PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 6, Number 298 (2014), 21 – 25

**MODERN METHODS OF CALCULATION OF MIGRATION ENERGY  
OF VACANCIES IN METALS ON THE BASIS  
OF DENSITY FUNCTIONAL THEORY****K. B. Baigisova**

Kazakh national technical university named after K. I. Satpayev, Almaty, Kazakhstan

**Key words:** vacancy migration energy, density functional theory, point defect, calculation methods.**Abstract.** There are a number of modern methods for the calculation of vacancy migration energy, which are based on the density functional theory. In this paper such methods, as the embedded atom method, the effective medium theory, the Ercolessi-Adams potential and *ab initio* quantum method were reviewed. The calculation results of migration energy of vacancies in Al, Cu, Ni were considered, which were obtained using these methods.

УДК 538.9

**ТЫҒЫЗДЫҚ ФУНКЦИОНАЛ ТЕОРИЯСЫНА НЕГІЗДЕЛГЕН  
МЕТАЛДАРДАҒЫ ВАКАНСИЯЛАРДЫҢ МИГРАЦИЯ  
ЭНЕРГИЯСЫН ЕСЕПТЕУДІҢ ЗАМАНАУИ ӘДІСТЕРІ****Қ. Б. Байгісова**

Қ. И. Сәтбаев атындағы қазақ ұлттық техникалық университеті, Алматы, Қазақстан

**Тірек сөздер:** вакансиялардың миграция энергиясы, тығыздық функционал теориясы, нүктелік ақаулар, есептеу әдістері.**Аннотация.** Вакансиялардың миграция энергиясын есептеуге арналған тығыздық функционал теориясына негізделген заманауи әдістердің түрі сан алуан. Бұл жұмыста осындай әдістердің кейбіріне шолу жасалды, олар: енгізілген атом әдісі, эффективті орта теориясы, Эрколесси-Адамс потенциалы және *ab initio* кванттық әдісі. Осы әдістер арқылы Al, Cu, Ni металдары үшін есептелген вакансиялардың миграция энергиясының нәтижелері қарастырылды.

Металдарға пластикалық деформация, лездік суыту және радиациялық зақымдау секілді экстремалды әсерлердің нәтижесінде оларда нүктелік ақаулардың ретсіз, яғни әркелкі концентрациясы түзіледі. Металдың құрылымдық өзгерісі оның функционалдық сипаттары мен қасиеттерінің өзгеруіне де алып келеді. Осындай металдардағы нүктелік ақаулардың іс-әрекеттерін анықтайтын негізгі параметрлердің бірі – вакансиялардың миграция энергиясы. Вакансиялардың миграция энергиясының мәні анықталған болса, онда материалдардың қасиеттері мен ондағы ақаулардың іс-әрекеттерін түсініп, алдын-ала болжауға болады [1].

Өртүрлі әдістермен алынған вакансиялардың миграция энергиясының есептік мәндері әдетте тәжірибелік мәндермен сәйкес келе бермейді. Сондықтан да вакансиялардың миграция энергиясын есептеу әдісін жетілдіру қазіргі таңдағы өзекті мәселелердің бірі болып табылады. Мұндай есептерді шығаруда бірінші атомдардың өзара әсерлесу потенциалын анықтау қажет [2, 3]. Атомдардың өзара әсерлесуі мен қозғалысы классикалық немесе кванттық ұғым арқылы сипатталады.

Соңғы жылдары *ab initio* – бастапқы принципті кванттық модельдеу әдістері кеңінен дамып келеді. Бұл әдістерді қолдану аздаған атомдардан тұратын жүйелердің қасиеті мен электронды құрылымын ең жақсы дәлдікпен есептеуге мүмкіндік береді. Нанотехнологияда дәл осындай жүйелерді қарастыратындықтан, бұл салада бастапқы принципті әдістер ерекше орын алуда.

Есептері кванттық теория тілімен жазылып, шығарылатын бастапқы принципті әдістерге қарағанда, классикалық молекулалық динамика әдісінің көп бөлшекті жүйелердің физикалық сипаттарын есептеудегі мүмкіншіліктері өте зор, және бұл әдіс бөлшектердің өзара әсерлесуінің интерполяциялық потенциалын қолданады. Интерполяциялық потенциал мұндай әсерлесулердің сипатын атомдық масштабтарда береді және модельденуші жүйенің параметрлеріне тәуелді.

Тығыздық функционал теориясына негізделген, атомдар әсерлесуінің көп атомдық сипатын ескеретін әдістердің бірі – *ab initio* әдісі.

[4, 14] жұмыстарында металдардың энергетикалық сипаттамалары *ab initio* әдісімен анықталды. Нәтижесінде Cu және Ni секілді металдар үшін вакансиялардың миграция энергиясы алынды (1-кестені қара). Мұнда миграция энергиясы атомның толық энергияның айырымы ретінде: яғни атом «ер» нүктесінде  $E^{sp}$  және тепе-теңдіктің бастапқы нүктесінде  $E^{ini}$  болғанда деп қарастырылады:

$$E_m^v = E^{SP} - E^{ini} \quad (1)$$

Металдағы нүктелік ақаулардың миграция энергиясы мен басқа да сипаттамаларын анықтауға арналған көптеген жұмыстарда миграция энергиясы енгізілген атом жартылайэмпирикалық әдісі көмегімен алынған [5-9,15].

1-кестеде әртүрлі әдістермен алынған кейбір металдардағы вакансиялардың миграция энергиясының мәндері келтірілген. Сонымен қатар салыстыру сараптамасын жүргізу үшін анықтамалық мәндер де көрсетілген [10, 11].

1-кесте – Al, Cu, Ni металдарындағы вакансиялардың миграция энергиясы

Металл	Вакансиялардың миграция энергиясы $E_m^v$ , эВ				
	<i>ab initio</i> әдісі	Енгізілген атом әдісі	Эффективті орта теориясы	Эрколесси-Адамс потенциалы	Тәжірибелік мәндер [10, 11]
Al	0.560 [14]	0.56 [7], 0.75 [8], 0.64 [13]	–	0.61 [13]	0.57-0.65
Cu	0.502 [4]	0.689 [6],[9] 0.65 [7]	0.79 [12]	–	0.67-1.06
Ni	0.626 [4]	1.08 [17] 1.02 [7]	–	–	0.92-1.46

Енгізілген атом әдісінің маңыздылығы мынада: жүйедегі әрбір атом өзінен басқа атомдардан тұратын ансамбльге (жүйеге) енгізілген қоспа болып есептеледі. M.S. Dow және M. I. Baskes жұмыстарында алғаш рет ұсынылған жүйенің потенциал энергиясын анықтайтын формула келесі түрде өрнектелген болатын:

$$U = \sum_i \left[ \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \varphi(r_{ij}) + \Phi(\rho_i) \right], \quad (2)$$

мұндағы  $r_{ij}$  – бастапқы  $i$ -ші атом мен оны қоршай орналасқан  $j$  атомның арақашықтығы,  $\varphi(r_{ij})$  – жұптық потенциал,  $\Phi(\rho_i)$  – атомды енгізу энергиясы, ол электрон тығыздығының  $\rho_i$   $i$ -ші атом орналасқан нүктесіндегі жергілікті мәніне тәуелді.

$$\rho_i = \sum_{j=1}^N f_j(r) \quad (3)$$

Енгізілген атом әдісінде нүктедегі электрондық тығыздық әрбір атомның электрондық тығыздығының суперпозициясы болып табылады және олардың өзара әсерлесуі сфералы түрде симметриялы болып саналады.

Енгізілген атом әдісінің жұптық потенциалдардан ерекшелігі – ол  $\Phi(\rho_i)$  енгізу функциясының көмегімен көп бөлшекті өзара әсерлесуді эффективті пайдаланады.

$\varphi(r_{ij})$ ,  $f_i(r)$ ,  $\Phi(\rho_i)$  функцияларын табу – күрделі тапсырмалардың бірі болып табылады. Көбінесе берілген параметрлері бар әртүрлі аппроксимациялаушы формулалар таңдалып алынады, кейін олардың мәндері белгілі бір шамалардың тәжірибелік мәндеріне келтіріледі.

Таза металдар үшін потенциалдар параметрлері тор тұрақтылығын ( $a_0$ ), үш серпімділік тұрақтысын ( $C_{11}$ ,  $C_{12}$ ,  $C_{44}$ ), байланыс энергиясын ( $E_{cb}$ ) және вакансиялардың түзілу энергиясын ( $E_f^v$ ) жуықтап келтіру арқылы анықталады.

Қарастырылған [6] жұмыста мыстың диффузиялық сипаттамаларын есептеу енгізілген атом әдісі бойынша жасалды. Бұл жағдайда түйіршіктер шектеріндегі атомдардың миграциясы жеке нүктелік ақаулардың миграциялары: вакансиялар мен түйінаралық атомдар арқылы орташа мәнге келтіріледі деп есептелінеді. Бұл модель жоғары температуралар қарастырылғанда қолайсыз, өйткені жоғары температурада түйіршік шектері тым ретсіз болып кетеді де, нүктелік ақау ұғымы өз мәнін жоғалтады. Сондықтан есептер төмен және орташа температуралардағы диффузия үшін ғана қарастырылды, мұндай жағдайда түйіршік шектері белгілі бір нақты құрылымға ие және нүктелік ақауларды қолдайды.

Вакансиялардың миграция энергиясы модельді кристалдың толық энергиясының, яғни атомның миграцияға дейінгі және «ер» нүктесіндегі энергияларының айырымы арқылы анықталады. Салыстыру сараптамасы нәтижелердің тәжірибелік мәндерге сәйкес келетінін көрсетті.

Эффективті орта потенциалы металл жүйелерді есептеуге арналған көп бөлшекті потенциалдар болып табылады. Қарастырылатын металдың электрондық тығыздығы тордың бір түйінінен екінші түйініне ауысып отырады. Белгілі бір тордағы тұтасудың негізгі бөлімі бұл түйіндегі электрондардың жергілікті тығыздығына тәуелді.

Енгізілген атом әдісіне ұқсас мұнда да  $N$  атомнан тұратын жүйенің толық энергиясы келесі түрде жазылады:

$$E_{mol} = \sum_{i=1}^N F(n_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N V(r_{ij}) \quad (4)$$

мұндағы  $V(r_{ij})$  – әдетте, тебілуші жұптық потенциал,  $n_i$  – тордың  $i$  түйініндегі электрондардың жергілікті тығыздығын сипаттайтын шама, және  $F(n_i)$  – сәйкесінше электрондардың жергілікті тығыздығы функционалы.

Жергілікті тығыздық  $n_i$   $i$ -ші атом және оған көрші  $j$  атом араларындағы қашықтыққа тәуелді.  $V(r_{ij})$ ,  $F(n_i)$ ,  $n_i$  потенциалдары жартылай эмпирикалық болғандықтан, олардың параметрлері де тәжірибелік мәндерге келтіріледі.

Авторлар [12] жұмыста эффективті орта теориясын пайдаланып, 10% сығылудан 20% созылуды қарастыратын жоғары серпімді деформация жасай отырып мыстағы вакансиялардың түзілуі мен миграциясын зерттеген. Нәтижесінде деформация осы энергиялардың мәндеріне тәуелді екені байқалды. Мыс үшін вакансиялардың миграция энергиясы (1) формула арқылы есептелген мәні  $E_m^v = 0.79$  эВ.

Эрколесси-Адамс потенциалының функция формасы мен есептелуі тығыздық функционал теориясына негізделген басқа әдістердегідей енгізілген атом әдісіне ұқсас.

Толық потенциалдық энергия келесі түрде беріледі:

$$E_{mol} = \frac{1}{2} \sum_{ij} \phi(r_{ij}) + \sum_i U(n_i) \quad (5)$$

мұндағы

$$n_i = \sum_{i \neq j} \rho(r_{ij})$$

мұнда енгізу функциясының орнына «желім функциясы»  $U(n_i)$  қарастырылады, ол атомдардың координаталарына тәуелді.  $n_i$  тығыздығы – эффективті координациялық сан,  $\phi(r_{ij})$  – жұптық потенциал.

[13] жұмыста Al мен Ni энергетикалық сипаттамаларын есептеу үшін авторлар *ab initio*, Эрколесси-Адамс потенциалын және енгізілген атом әдітері қолданылды.

Мұндағы алынған вакансиялардың миграция энергиясы  $E_m^v=0.61$  эВ және енгізілген атом әдісі  $E_m^v=0.64$  эВ тәжірибелік мәндерге сәйкес келетінін көрсетеді.

**Қорытынды.** Кейбір әдістер аналитикалық жағынан ұқсас болғанменен, бір металды сипаттайтын әртүрлі потенциалдардың беретін мәндері мен қасиеттері де әртүрлі болады. Бұл жұмыста ҚЦК металдардағы вакансиялардың миграция энергиясын анықтау үшін жасалған есептеу әдістерінің нәтижелеріне шолу жүргізілді.

Алюминий үшін Эрколесси-Адамс потенциалы мен енгізілген атом әдістері арқылы айтарлықтай жақсы мәндер алынды, олар тәжірибе жүзінде алынған мәндерге сәйкес келеді. Сонымен, басқа әдістерге қарағанда, ҚЦК металдарды сипаттауда енгізілген атом әдісінің қолдану ең тиімді, әрі нәтижелері тәжірибе жүзінде алынған мәндерге сәйкес келеді.

Бұл әдістің кемшілігі – келтіру параметрлерінің көптігі. Келтіру параметрлері материалдың физикалық параметрлерінің мәндерін тәжірибе мәндерімен салыстыру арқылы анықталады. Бұл жұмысты күрделендіреді.

Сол себепті бұл әдіс әлі күнге дейін дамып, модифицирленуде, және материалдардың физикалық параметрлерін есептеуді жеңілдету жолдары қарастырылуда.

#### ӘДЕБИЕТ

- [1] Калинин Б.А. Физическое материаловедение. – Т. 4. Физические основы прочности. Радиационная физика твердого тела. Компьютерное моделирование. Вторичная: Учебник для вузов. – М.: МИФИ, 2008. – 696 с.
- [2] Marian J., Wirth B.D., Caro A., Sadigh B., Odette G.R., Perlado J.M., T. Diaz de la Rubia. Dynamics of Self-Interstitial Cluster Migration in Pure  $\alpha$ -Fe and Fe-Cu alloys // Physical Review B. – 2002. – Vol. 65, 144102.
- [3] Chaitanya Deo. Multiscale Materials Modeling of Structural Materials for Next Generation Nuclear Reactors. Edited by Amir Zacarias Mesquita, ISBN 978-953-51-0018-8, 2012. Available from: <http://www.intechopen.com/books/nuclear-reactors/multiscale-materials-modeling-of-structural-materials-for-next-generation-nuclear-reactors>.
- [4] Kiyoshi Betsuyaku, Toshiharu Ohnuma and Naoki Soneda. Kinetic Monte Carlo Simulations of Initial Process of Solute Atom Cluster Formations Based on *ab initio* Data Base // Progress in Nuclear Science and Technology. – 2011. – Vol. 2. – P. 538-542.
- [5] Williams P.L., Mishin Y., Hamilton J.C. An Embedded-Atom Potential for the Cu–Ag System. Modeling Simulation // Materials Science and Engineering. – 2006. – N 14. – P. 817-833.
- [6] Suzuki A., Mishin Y. Atomistic Modeling of Point Defects and Diffusion in Copper Grain Boundaries // Interface Science. – 2003. – N 11. – P. 131–148.
- [7] Iyad A. Hijazi, Young Ho Park. Consistent Analytic Embedded Atom Potential for Face-Centered Cubic Metals and Alloys // Journal of Materials Science and Technology. – 2009. – Vol. 25, N 6. – P. 835-846.
- [8] Grabowski S., Kadau K., Entely P. Atomistic Modeling of Diffusion in Aluminum // Phase Transitions: A Multinational Journal. – 2002. – Vol. 75. – Issue 1-2. – P. 265-272.
- [9] Mishin. Structural Stability and Lattice Defects in Copper: *Ab initio*, Tight-Binding, and Embedded-Atom Calculations // Physical Review B. – 2001. – Vol. 63, 224106.
- [10] Starostenkov M., Poletaev G., Aksenov M., Dyomina I. Relaxation of Two-Dimensional Al and Ni3Al Crystal Structures at the Impulsive Heating // Book of Abstracts of 2nd International Conference on Multiscale Materials Modeling (MMM-II). – Los-Angeles, USA, 2004. – ID: 806.
- [11] Balluffi R. W. J. Nucl. Mater. – 1978. – P. 240.
- [12] Sato K., Yoshiie T., Satoh Y. and Xu Q. Computer Simulation of Formation Energy and Migration Energy of Vacancies under High Strain in Cu // Materials Transactions. – 2004. – Vol. 45, N 3. – P. 833-838.
- [13] Mishin Y., Farkas D. Interatomic Potentials for Monoatomic Metals from Experimental Data and *ab initio* Calculations // Physical Review B. – 1999. – Vol. 59, 3393.
- [14] Stumpf R., Scheffler V. *Ab-initio* Calculations of Energies and Self-Diffusion on Flat and Stepped Surfaces of Al and their Implications on Crystal Growth // Physical Review B. – 1996. – Vol. 53. – P. 4958-4973.
- [15] Foiles S.M., Baskes M.I., Dow M.S. Embedded-Atom-Method Functions for the fcc Metals Cu, Ag, Au, Ni, Pd, Pt, and Their Alloys // Physical Review. – 1986. – Vol. B33. – N 12. – P. 7983-7991.



## REFERENCES

- [1] Kalin B.A. Fizicheskoe materialovedenie. Tom 4. Fizicheskie osnovy prochnosti. Radiatsionnaya fizika tverdogo tela. Kompyuternoe modelovanie. Vtorichnaya: Uchebnik dlya vuzov. M.: MIFI, 2008. 696 s.
- [2] Marian J., Wirth B. D., Caro A., Sadigh B., Odette G. R., Perlado J. M., T. Diaz de la Rubia. Dynamics of Self-Interstitial Cluster Migration in Pure  $\alpha$ -Fe and Fe-Cu alloys. *Physical Review B*. 2002. Vol. 65, 144102.
- [3] Chaitanya Deo. Multiscale Materials Modeling of Structural Materials for Next Generation Nuclear Reactors. Edited by Amir Zacarias Mesquita, ISBN 978-953-51-0018-8, 2012. Available from: <http://www.intechopen.com/books/nuclear-reactors/multiscale-materials-modeling-of-structural-materials-for-next-generation-nuclear-reactors>.
- [4] Kiyoshi Betsuyaku, Toshiharu Ohnuma and Naoki Soneda. Kinetic Monte Carlo Simulations of Initial Process of Solute Atom Cluster Formations Based on *ab initio* Data Base. *Progress in Nuclear Science and Technology*. 2011. Vol. 2. P. 538-542.
- [5] Williams P.L., Mishin Y., Hamilton J.C. An Embedded-Atom Potential for the Cu–Ag System. *Modeling Simulation. Materials Science and Engineering*. 2006. N 14. P. 817–833.
- [6] A. Suzuki and Y. Mishin. Atomistic Modeling of Point Defects and Diffusion in Copper Grain Boundaries. *Interface Science*. 2003. N 11. P. 131-148.
- [7] Iyad A. Hijazi, Young Ho Park. Consistent Analytic Embedded Atom Potential for Face-Centered Cubic Metals and Alloys. *Journal of Materials Science and Technology*. 2009. Vol. 25, N 6. P. 835-846.
- [8] Grabowski S., Kadau K., Entely P. Atomistic Modeling of Diffusion in Aluminum. *Phase Transitions: A Multinational Journal*. 2002. Vol. 75. Issue 1-2. P. 265-272.
- [9] Mishin. Structural Stability and Lattice Defects in Copper: *Ab initio*, Tight-Binding, and Embedded-Atom Calculations. *Physical Review B*. 2001. Vol. 63, 224106.
- [10] Starostenkov M., Poletaev G., Aksenov M., Dyomina I. Relaxation of Two-Dimensional Al and Ni3Al Crystal Structures at the Impulsive Heating. *Book of Abstracts of 2nd International Conference on Multiscale Materials Modeling (MMM-II)*. Los-Angeles, USA, 2004. ID: 806.
- [11] Balluffi R. W. *J. Nucl. Mater.* 1978. P. 240.
- [12] Sato K., Yoshiie T., Satoh Y. and Xu Q. Computer Simulation of Formation Energy and Migration Energy of Vacancies under High Strain in Cu. *Materials Transactions*. 2004. Vol. 45, N 3. P. 833-838.
- [13] Mishin Y., Farkas D. Interatomic Potentials for Monoatomic Metals from Experimental Data and *ab initio* Calculations. *Physical Review B*. 1999. Vol. 59, 3393.
- [14] Stumpf R., Scheffler V. *Ab-initio* Calculations of Energies and Self-Diffusion on Flat and Stepped Surfaces of Al and their Implications on Crystal Growth. *Physical Review B*. 1996. Vol. 53. P. 4958-4973.
- [15] Foiles S.M., Baskes M.I., Dow M.S. Embedded-Atom-Method Functions for the fcc Metals Cu, Ag, Au, Ni, Pd, Pt, and Their Alloys. *Physical Review*. 1986. Vol. B33, N 12. P. 7983-7991.

**СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА ЭНЕРГИИ МИГРАЦИИ ВАКАНСИЙ В МЕТАЛЛАХ  
НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ ФУНКЦИОНАЛА ПЛОТНОСТИ****К. Б. Байгисова**

Казахский национальный технический университет им. К. И. Сатпаева, Алматы, Казахстан

**Ключевые слова:** энергия миграции вакансий, теория функционала плотности, точечные дефекты, методы расчета.

**Аннотация.** Существует ряд современных методов для расчета энергии миграции вакансий, в основе которых лежит теория функционала плотности. В данной работе был проведен обзор по таким методам, как метод погруженного атома, теория эффективной среды, потенциал Эрколесси-Адамса и квантовый метод *ab initio*. Рассмотрены результаты расчетов энергии миграции вакансий в металлах Al, Cu, Ni, полученные с использованием этих методов.

Поступила 26.11.2014 г.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 6, Number 298 (2014), 26 – 32

**CYLINDRICAL COORDINATES OF A TEST BODY  
IN THE HILL'S GRAVITATIONAL FIELD**

**A. A. Bekov<sup>1</sup>, M. D. Shinibayev<sup>2</sup>, S. K. Dosibekov<sup>3</sup>, A. M. Taskulova<sup>3</sup>,  
K. S. Astemesova<sup>4</sup>, D. I. Usipbekova<sup>4</sup>**

<sup>1</sup>The Institute of Space Investigations named after U. M. Sultangazyn, JSC "NCKIT", Almaty, Kazakhstan,

<sup>2</sup>South-Kazakhstan State Pedagogical Institute, Shymkent, Kazakhstan,

<sup>3</sup>M. Auezov South-Kazakhstan State University, Shymkent, Kazakhstan,

<sup>4</sup>Kazakh national technical university after K. I. Satpayev, Almaty, Kazakhstan.

E-mail: bekov@mail.ru

**Key words:** Cylindrical coordinates, a test body, the Hill's gravitational field

**Abstract.** We propose a method of determining the cylindrical coordinates of the orbits of hyperbolic type for a test body in the gravitational field of the Hill.

УДК 521.3+629.195.1

**ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ ПРОБНОГО ТЕЛА  
В ПОЛЕ ТЯГОТЕНИЯ ХИЛЛА**

**А. А. Беков<sup>1</sup>, М. Д. Шинибаев<sup>2</sup>, С. К. Досыбеков<sup>3</sup>, А. М. Таскулова<sup>3</sup>,  
К. С. Астемесова<sup>4</sup>, Д. И. Усипбекова<sup>4</sup>**

<sup>1</sup>Институт космических исследований им. У. М. Султангазина АО «НЦКИТ», Алматы, Казахстан,

<sup>2</sup>Южно-Казахстанский государственный педагогический институт, Шымкент, Казахстан,

<sup>3</sup>Южно-Казахстанский государственный университет им. М. О. Ауезова, Шымкент, Казахстан,

<sup>4</sup>Казахский национальный технический университет им. К. И. Сатпаева, Алматы, Казахстан

**Ключевые слова:** цилиндрические координаты, испытательное тело, гравитационное поле Хилла.

**Аннотация.** Предлагается метод определения цилиндрических координат орбит гиперболического типа для пробного тела в поле тяготения Хилла.

Дифференциальные уравнения движения пробного тела в переменных Хилла имеют вид [1]:

$$\left. \begin{aligned} d\vartheta &= \frac{wdw}{\sqrt{-w^4 + 2w^3 + Hw^2 + \alpha}}, \\ \frac{d^2s}{d\vartheta^2} + \left(1 + \frac{\beta}{w^4}\right)s &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где

$$\alpha = \frac{vc^6}{\mu^4}, \quad \beta = \frac{(v-v')c^6}{\mu^4}, \quad \frac{1}{\rho} = w \cdot \frac{\mu}{c^2}, \quad s = \frac{z}{\rho},$$

$\alpha, \beta$  – постоянные параметры,  $\rho^2 = x^2 + y^2$ ;  $s$  – тангенс широты;  $w$  – переменная Хилла;  $\vartheta$  – истинная долгота;  $c$  и  $h$  – постоянные интеграла площадей и интеграла энергии;  $v$  и  $v'$  – малые параметры;  $\mu$  – произведение постоянной тяготения на сумму масс центрального и пробного тела.

Интегрирование первого уравнения из (1) позволяет определить полярные координаты пробного тела в случае орбит гиперболического типа ( $\alpha > 0, H > 0$ ):

$$\rho = (\rho_{00} + k^2 \rho_{02} + k^3 \rho_{03}) + (k\rho_{11} + k^3 \rho_{13}) \cos \frac{\pi}{2K} u + (k^2 \rho_{22} + k^3 \rho_{23}) \cos \frac{\pi}{K} u + k^3 \rho_{33} \cos \frac{3\pi}{2K} u, \quad (2)$$

$$\vartheta = (\vartheta_{00} + k^2 \vartheta_{02}) u + (k\vartheta_{11} + k^3 \vartheta_{13}) \sin \frac{\pi}{2K} u + (k^2 \vartheta_{22} + k^3 \vartheta_{23}) \sin \frac{\pi}{K} u + k^3 \vartheta_{33} \sin \frac{3\pi}{2K} u, \quad (3)$$

$$u = (1 + k^2 u_{02} + k^3 u_{03}) T + (k u_{11} + k^3 u_{13}) \sin \frac{\pi}{2K} T + (k^2 u_{22} + k^3 u_{23}) \sin \frac{\pi}{K} T + k^3 u_{33} \sin \frac{3\pi}{2K} T + k^3 u_{43} T \cos \frac{\pi}{2K} T, \quad (4)$$

где  $\rho_{ij}, \vartheta_{ij}, u_{ij}$  – постоянные величины, определяемые через корни подкоренного полинома ( $i, j = 1, 2, 3, 4$ )

$$G_4(w) = -w^4 + 2w^3 + Hw^2 + \alpha.$$

Для определения аппликаты пробного тела используем второе уравнение из (1), переписав его в следующем виде

$$\frac{d^2 s}{du^2} + \mu(w^2 + \beta w^{-2})s = 0, \quad (5)$$

которое после вычисления скобки будет представлено в виде дифференциального уравнения Хилла.

Ранее<sup>1</sup> было найдено

$$w = w_{00} + k^2 w_{02} + (k w_{11} + k^3 w_{13}) \cos \frac{\pi}{2K} u + (k^2 w_{22} + k^3 w_{23}) \cos \frac{\pi}{K} u + k^3 w_{33} \cos \frac{3\pi}{2K} u, \quad (6)$$

где  $K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$  – полный эллиптический интеграл 1-го рода;  $k$  – модуль эллиптического интеграла 1-го рода;  $u$  – промежуточная переменная

$$u = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (7)$$

Рассмотрим случай малого наклона, т.е.  $s \neq 0, s^2 = 0, s \approx O(k)$ . В этом случае (6) переписывается в следующем виде

$$w = w_{00} + k^2 w_{02} + k w_{11} \cos \frac{\pi}{2K} u + k^2 w_{22} \cos \frac{\pi}{K} u. \quad (8)$$

<sup>1</sup> Шинибаев М.Д. и др. Гиперболический тип движения пробного тела во второй задаче Хилла. – в печати.

Учитывая (8), найдем

$$w^2 = (a_{00} + k^2 a_{02}) + k^2 a_{12} \cos \frac{\pi}{K} u + (ka_{21} + k^2 a_{22}) \cos \frac{\pi}{2K} u, \quad (9)$$

где

$$a_{00} = w_{00}^2, \quad a_{02} = \frac{1}{2} w_{11}^2 + 2w_{02} w_{00}, \quad a_{12} = \frac{1}{2} w_{11}^2, \quad a_{21} = 2w_{11} w_{00}, \quad a_{22} = 2w_{22} w_{00};$$

$$\beta w^{-2} = (b_{00} + k^2 b_{02}) + k^2 b_{12} \cos \frac{\pi}{K} u + (kb_{21} + k^2 b_{22}) \cos \frac{\pi}{2K} u, \quad (10)$$

где

$$b_{00} = \beta w_{00}^{-2}, \quad b_{02} = b_{00} \left( \frac{3}{2} \frac{w_{11}^2}{w_{00}^2} - \frac{2w_{02}}{w_{00}} \right), \quad b_{12} = b_{00} \cdot \frac{3}{2} \frac{w_{11}^2}{w_{00}^2}, \quad b_{21} = -b_{00} \cdot \frac{2w_{11}}{w_{00}},$$

$$b_{22} = -b_{00} \cdot \frac{2w_{22}}{w_{00}}.$$

Подставим (10), (9) в (5)

$$\frac{d^2 s}{du^2} + \left[ (A_{00} + k^2 A_{02}) + k^2 A_{12} \cos \frac{\pi}{K} u + (kA_{21} + k^2 A_{22}) \cos \frac{\pi}{2K} u \right] s = 0, \quad (11)$$

где

$$A_{00} = \mu(a_{00} + b_{00}), \quad A_{02} = \mu(a_{02} + b_{02}), \quad A_{12} = \mu(a_{12} + b_{12}), \quad A_{21} = \mu(a_{21} + b_{21}), \\ A_{22} = \mu(a_{22} + b_{22}).$$

Введем следующие обозначения в (11)

$$q_0 = A_{00} + k^2 A_{02}, \quad 2q_1 = k^2 A_{12}, \quad 2q_2 = kA_{21} + k^2 A_{22},$$

тогда

$$\frac{d^2 s}{du^2} + \left[ (q_0 + 2q_1 \cos \frac{\pi}{K} u + 2q_2 \cos \frac{\pi}{2K} u) \right] s = 0. \quad (12)$$

Первое приближение примем в виде [2]

$$s_1 = A \cos(cu + \varepsilon),$$

тогда без учета  $q_2$  имеем

$$\frac{d^2 s}{du^2} + q_0 s = -2q_1 A \cos(cu + \varepsilon) \cos \frac{\pi}{K} u$$

или

$$\frac{d^2 s}{du^2} + q_0 s = -q_1 A \left\{ \cos \left[ \left( c - \frac{\pi}{K} \right) u + \varepsilon \right] + \cos \left[ \left( c + \frac{\pi}{K} \right) u + \varepsilon \right] \right\}. \quad (13)$$

Общее решение (13) состоит из суммы общего решения однородного уравнения и частного решения уравнения (13):

$$s_2 = s_1 + s_r, \quad s_1 = A \cos(cu + \varepsilon), \quad s_r = B_0 \cos \left[ \left( c - \frac{\pi}{K} \right) u + \varepsilon \right] + B_1 \cos \left[ \left( c + \frac{\pi}{K} \right) u + \varepsilon \right],$$

$$\dot{s}_r = -B_0 \left( c - \frac{\pi}{K} \right) \sin \left[ \left( c - \frac{\pi}{K} \right) u + \varepsilon \right] - B_1 \left( c + \frac{\pi}{K} \right) \sin \left[ \left( c + \frac{\pi}{K} \right) u + \varepsilon \right],$$

$$\ddot{s}_r = -B_0 \left( c - \frac{\pi}{K} \right)^2 \cos \left[ \left( c - \frac{\pi}{K} \right) u + \varepsilon \right] - B_1 \left( c + \frac{\pi}{K} \right)^2 \cos \left[ \left( c + \frac{\pi}{K} \right) u + \varepsilon \right].$$

Подставив в (13)  $s_r, \dot{s}_r, \ddot{s}_r$  и найдем

$$B_0 = \frac{q_1 A}{\left(c - \frac{\pi}{K}\right)^2 - q_0}, \quad B_1 = \frac{q_1 A}{\left(c + \frac{\pi}{K}\right)^2 - q_0},$$

Следовательно, второе приближение дает решение вида

$$s_r = A \cos(cu + \varepsilon) + \frac{q_1 A}{\left(c - \frac{\pi}{K}\right)^2 - q_0} \cos\left[\left(c - \frac{\pi}{K}\right)u + \varepsilon\right] + \\ + \frac{q_1 A}{\left(c + \frac{\pi}{K}\right)^2 - q_0} \cos\left[\left(c + \frac{\pi}{K}\right)u + \varepsilon\right].$$

Найдем третье приближение из следующего дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 s}{du^2} + q_0 s = -2q_1 \cos \frac{\pi}{K} u \cdot \left\{ A \cos(cu + \varepsilon) + \frac{q_1 A}{\left(c - \frac{\pi}{K}\right)^2 - q_0} \cos\left[\left(c - \frac{\pi}{K}\right)u + \varepsilon\right] + \right. \\ \left. + \frac{q_1 A}{\left(c + \frac{\pi}{K}\right)^2 - q_0} \cos\left[\left(c + \frac{\pi}{K}\right)u + \varepsilon\right] \right\} - 2q_2 \cos \frac{\pi}{2K} u \cdot \left\{ A \cos(cu + \varepsilon) + \frac{q_1 A}{\left(c - \frac{\pi}{K}\right)^2 - q_0} \times \right. \\ \left. \times \cos\left[\left(c - \frac{\pi}{K}\right)u + \varepsilon\right] + \frac{q_1 A}{\left(c + \frac{\pi}{K}\right)^2 - q_0} \cos\left[\left(c + \frac{\pi}{K}\right)u + \varepsilon\right] \right\}.$$

Если в правой части ограничиться величинами порядка  $O(k^3)$ , то имеем

$$\frac{d^2 s}{du^2} + q_0 s = -q_1 A \cos\left[\left(c - \frac{\pi}{K}\right)u + \varepsilon\right] - q_1 A \cos\left[\left(c + \frac{\pi}{K}\right)u + \varepsilon\right] - \\ - q_2 A \cos\left[\left(c - \frac{\pi}{2K}\right)u + \varepsilon\right] - q_2 A \cos\left[\left(c + \frac{\pi}{2K}\right)u + \varepsilon\right]. \quad (14)$$

Частное решение будем искать в следующем виде

$$s_r = D_0 \cos\left[\left(c - \frac{\pi}{K}\right)u + \varepsilon\right] + D_1 \cos\left[\left(c + \frac{\pi}{K}\right)u + \varepsilon\right] + D_2 \cos\left[\left(c - \frac{\pi}{2K}\right)u + \varepsilon\right] + \\ + D_3 \cos\left[\left(c + \frac{\pi}{2K}\right)u + \varepsilon\right],$$

ВЫЧИСЛИМ

$$\begin{aligned} \dot{s}_r &= -D_0 \sin \left[ \left( c - \frac{\pi}{K} \right) u + \varepsilon \right] \cdot \left( c - \frac{\pi}{K} \right) - D_1 \left( c + \frac{\pi}{K} \right) \sin \left[ \left( c + \frac{\pi}{K} \right) u + \varepsilon \right] - \\ &\quad - D_2 \left( c - \frac{\pi}{2K} \right) \sin \left[ \left( c - \frac{\pi}{2K} \right) u + \varepsilon \right] - D_3 \left( c + \frac{\pi}{2K} \right) \sin \left[ \left( c + \frac{\pi}{2K} \right) u + \varepsilon \right], \\ \ddot{s}_r &= -D_0 \left( c - \frac{\pi}{K} \right)^2 \cos \left[ \left( c - \frac{\pi}{K} \right) u + \varepsilon \right] - D_1 \left( c + \frac{\pi}{K} \right)^2 \cos \left[ \left( c + \frac{\pi}{K} \right) u + \varepsilon \right] - \\ &\quad - D_2 \left( c - \frac{\pi}{2K} \right)^2 \cos \left[ \left( c - \frac{\pi}{2K} \right) u + \varepsilon \right] - D_3 \left( c + \frac{\pi}{2K} \right)^2 \cos \left[ \left( c + \frac{\pi}{2K} \right) u + \varepsilon \right]. \end{aligned}$$

Подставив  $\dot{s}_r$ ,  $\ddot{s}_r$ ,  $s_r$  в (14), найдем

$$D_0 = \frac{q_1 A}{\left( c - \frac{\pi}{K} \right)^2 - q_0}, \quad D_1 = \frac{q_1 A}{\left( c + \frac{\pi}{K} \right)^2 - q_0}, \quad D_2 = \frac{q_2 A}{\left( c - \frac{\pi}{2K} \right)^2 - q_0}, \quad D_3 = \frac{q_2 A}{\left( c + \frac{\pi}{2K} \right)^2 - q_0},$$

следовательно, мы можем общее решение уравнения (14) записать в следующем виде

$$\begin{aligned} s &= A \left\{ \cos(cu + \varepsilon) + \frac{k^2 A_{12}}{\left[ \left( c - \frac{\pi}{K} \right)^2 - q_0 \right]} \cos \left[ \left( c - \frac{\pi}{K} \right) u + \varepsilon \right] + \frac{k^2 A_{12}}{\left[ \left( c + \frac{\pi}{K} \right)^2 - q_0 \right]} \times \right. \\ &\quad \times \cos \left[ \left( c + \frac{\pi}{K} \right) u + \varepsilon \right] + \frac{kA_{21} + k^2 A_{22}}{2 \left[ \left( c - \frac{\pi}{2K} \right)^2 - q_0 \right]} \cos \left[ \left( c - \frac{\pi}{2K} \right) u + \varepsilon \right] + \\ &\quad \left. + \frac{kA_{21} + k^2 A_{22}}{2 \left[ \left( c + \frac{\pi}{2K} \right)^2 - q_0 \right]} \cos \left[ \left( c + \frac{\pi}{2K} \right) u + \varepsilon \right] \right\}, \end{aligned}$$

где

$$c = \left\{ 1 + [(q_0 - 1)^2 - q_1^2]^{1/2} \right\}^{1/2}.$$

Перепишем (15) в более компактной форме

$$\begin{aligned} s &= s_0 \left\{ k \cos(cu + \varepsilon) + k^3 s_{13} \cos \left[ \left( c - \frac{\pi}{K} \right) u + \varepsilon \right] + k^3 s_{23} \cos \left[ \left( c + \frac{\pi}{K} \right) u + \varepsilon \right] + \right. \\ &\quad \left. + (k^2 s_{32} + k^3 s_{33}) \cos \left[ \left( c - \frac{\pi}{2K} \right) u + \varepsilon \right] + (k^2 s_{42} + k^3 s_{43}) \cos \left[ \left( c + \frac{\pi}{2K} \right) u + \varepsilon \right] \right\}, \quad (16) \end{aligned}$$

где  $A = s_0 k$ ,  $\varepsilon$  – постоянные интегрирования.

Найдем координату  $z$  с точностью  $O(k^3)$ . Для этого используем (16) и (2)

$$z = (kz_{01} + k^3 z_{03}) \cos(cu + \varepsilon) + k^3 z_{23} \cos\left[\left(c - \frac{\pi}{K}\right)u + \varepsilon\right] + k^3 z_{33} \cos\left[\left(c + \frac{\pi}{K}\right)u + \varepsilon\right] + (k^2 z_{42} + k^3 z_{43}) \cos\left[\left(c - \frac{\pi}{2K}\right)u + \varepsilon\right] + (k^2 z_{52} + k^3 z_{53}) \cos\left[\left(c + \frac{\pi}{2K}\right)u + \varepsilon\right], \quad (17)$$

где

$$z_{01} = \rho_{00}, \quad z_{03} = \rho_{02} + \frac{1}{2} \rho_{11} (s_{32} + s_{42}), \quad z_{23} = \rho_{00} s_{13} + \frac{1}{2} s_{32} \rho_{11} + \frac{1}{2} \rho_{22},$$

$$z_{33} = \rho_{00} s_{23} + \frac{1}{2} s_{42} \rho_{11} + \frac{1}{2} \rho_{22}, \quad z_{42} = \rho_{00} s_{32} + \frac{1}{2} \rho_{11}, \quad z_{43} = s_{33} \rho_{00},$$

$$z_{52} = s_{42} \rho_{00} + \frac{1}{2} \rho_{11}, \quad z_{53} = s_{43} \rho_{00}; \quad A = s_0 k;$$

$$s_{13} = A_{12} \left[ \left( c - \frac{\pi}{K} \right)^2 - q_0 \right]^{-1}, \quad s_{23} = A_{12} \left[ \left( c + \frac{\pi}{K} \right)^2 - q_0 \right]^{-1},$$

$$s_{32} = \frac{A_{21}}{2} \left[ \left( c - \frac{\pi}{2K} \right)^2 - q_0 \right]^{-1}, \quad s_{33} = \frac{A_{22}}{2} \left[ \left( c - \frac{\pi}{2K} \right)^2 - q_0 \right]^{-1},$$

$$s_{42} = \frac{A_{21}}{2} \left[ \left( c + \frac{\pi}{2K} \right)^2 - q_0 \right]^{-1}, \quad s_{43} = \frac{A_{22}}{2} \left[ \left( c + \frac{\pi}{2K} \right)^2 - q_0 \right]^{-1}.$$

Таким образом, для пробного тела в случае гиперболического типа движения найдены цилиндрические координаты  $\rho$ ,  $\vartheta$ ,  $z$  посредством  $u$ , как явные функции времени, и определены выражениями (2), (3), (4), (17). Выпишем их:

$$\rho = (\rho_{00} + k^2 \rho_{02} + k^3 \rho_{03}) + (k\rho_{11} + k^3 \rho_{13}) \cos \frac{\pi}{2K} u + (k^2 \rho_{22} + k^3 \rho_{23}) \cos \frac{\pi}{K} u + k^3 \rho_{33} \cos \frac{3\pi}{2K} u,$$

$$\vartheta = (\vartheta_{00} + k^2 \vartheta_{02}) u + (k\vartheta_{11} + k^3 \vartheta_{13}) \sin \frac{\pi}{2K} u + (k^2 \vartheta_{22} + k^3 \vartheta_{23}) \sin \frac{\pi}{K} u + k^3 \vartheta_{33} \sin \frac{3\pi}{2K} u,$$

$$z = (kz_{01} + k^3 z_{03}) \cos(cu + \varepsilon) + k^3 z_{23} \cos\left[\left(c - \frac{\pi}{K}\right)u + \varepsilon\right] + k^3 z_{33} \cos\left[\left(c + \frac{\pi}{K}\right)u + \varepsilon\right] + (k^2 z_{42} + k^3 z_{43}) \cos\left[\left(c - \frac{\pi}{2K}\right)u + \varepsilon\right] + (k^2 z_{52} + k^3 z_{53}) \cos\left[\left(c + \frac{\pi}{2K}\right)u + \varepsilon\right],$$

где

$$u = (1 + k^2 u_{02} + k^3 u_{03}) T + (ku_{11} + k^3 u_{13}) \sin \frac{\pi}{2K} T + (k^2 u_{22} + k^3 u_{23}) \sin \frac{\pi}{K} T + k^3 u_{33} \sin \frac{3\pi}{2K} T + k^3 u_{43} T \sin \frac{\pi}{2K} T,$$

здесь на интервале  $\alpha_2 < w < \alpha_1$  имеем  $T = \frac{1}{t_{00}} t$ ,  $t_{00} - const$ ,  $t$  – время;

$0 \leq u \leq \left(1 + \frac{1}{4}k^2 + \frac{9}{64}k^4\right)\pi$ , следовательно  $\rho$ ,  $\vartheta$ ,  $z$  – ограниченные периодические функции, другими словами, эти формулы дают только часть гиперболической орбиты.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Шинибаев М.Д. Поступательное движение пассивно гравитирующего тела в центральном и нецентральном поле тяготения. – Алматы: РИО ВАК РК, 2001. – 128 с.  
[2] Чеботарев Г.А. Аналитические и численные методы небесной механики. – М.: Наука, 1965. – 367 с.

#### REFERENCES

- [1] Shinibaev M.D. Postupatelnoe dvizhenie passivno gravitiruyezego tela v centralnom i necentralnom pole tyagotenia. Almaty: RIO VAK RK, 2001, 128 s.  
[2] Chebotarev G.A. Analiticheskie i chislennye metody nebesnoi mehaniki. M.: Nauka, 1965. 367 s.

#### ХИЛЛ ӨРІСІНДЕГІ СЫНАУ ДЕНЕСІНІҢ ЦИЛИНДРЛІК КООРДИНАТТАРЫ

**А. А. Беков<sup>1</sup>, М. Д. Шыныбаев<sup>2</sup>, С. К. Досыбеков<sup>3</sup>, А. М. Тасқұлова<sup>3</sup>,  
К. С. Астемісова<sup>4</sup>, Д. И. Үсіпбекова<sup>4</sup>**

<sup>1</sup>Академик Ө. М. Сұлтанғазин атындағы Ғарыштық зерттеулер институты АҚ "ҰҒЗТО", Алматы, Қазақстан,

<sup>2</sup>Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік педагогикалық институті, Шымкент, Қазақстан,

<sup>3</sup>М. О. Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті, Шымкент, Қазақстан,

<sup>4</sup>Қ. И. Сәтбаев атындағы Қазақ ұлттық техникалық университеті, Алматы, Қазақстан

**Аннотация.** Мақалада Хилл өрісіндегі сынау денесінің гипербола тәрізді қозғалысының цилиндрлік координаттарын анықтау әдісі берілген.

*Поступила 26.11.2014 г.*



## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

## PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 6, Number 298 (2014), 33 – 39

**ABOUT DISTRIBUTIONS OF PLASTIC STRESSES  
IN LIMITING AREA WITH A CIRCULAR HOLE****M. Yeskaliyev, G. Izbassarova**

Kazakh State women's Pedagogical University, Almaty, Kazakhstan.

E-mail: Yeskaliyev@mail.ru

**Key words:** resiliency, plasticity, zone, making, tensions, potential.

**Abstract.** The development of limit states near the opening in transtropic (layered) array of complex structure have been considered. In the elastic zone of the mountain range the anisotropic structure dominates and corresponds to generalized Hooke's law, and in the formation the plastic zone is considered to be isotropic. In determining of stresses in the marginal zone Hoek-Brown failure criterion and semi-inverse method of P. I. Perlin were firstly used.

УДК 622.011. 04; 622.023

**О РАСПРЕДЕЛЕНИИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ  
В ПРЕДЕЛЬНОЙ ЗОНЕ С КРУГЛЫМ ОТВЕРСТИЕМ****М. Е. Ескалиев, Г. К. Избасарова**

Казахский государственный женский педагогический университет, Алматы, Казахстан

**Ключевые слова:** упругость, пластичность, зона, выработка, напряжения, потенциал.

**Аннотация.** Рассмотрено развитие предельных состояний вблизи отверстия в транструпном (слоистом) массиве сложного строения. В упругой зоне горный массив преобладает анизотропную структуру и подчиняется обобщенному закону Гука, а пластическая зона при формировании считается изотропным. При определении напряжений в предельной зоне впервые использован критерий разрушения Хоека-Брауна и полуобратный метод П. И. Перлина.

**Полуобратный метод П. И. Перлина.** Суть метода заключается в следующем. Заданием двух компонент напряжений на бесконечности  $\sigma_x^{(\infty)}$  и  $\sigma_y^{(\infty)}$  однозначно определяется решение упругопластической задачи в прямой постановке. Поэтому семейство упругопластических границ представляет собой двухпараметрическое семейство кривых, а две произвольные точки границы однозначно определяют напряжения на бесконечности. Именно на этом положении построена постановка задачи: задается положение двух каких-либо точек границ, а напряжения на бесконечности и сама предельная зона находятся в ходе решения задачи. Решение ищется в окрестности контура  $L_1^1$  предоставляющего собой концентрическую окружность к внутреннему контуру радиуса  $R$  (рисунок).

Семейство упругопластических границ

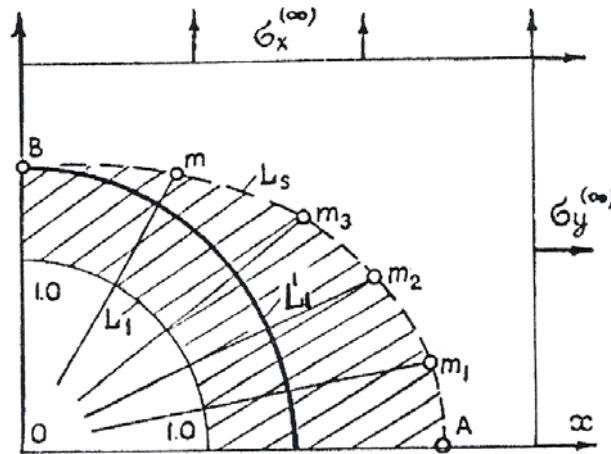


Схема к решению упругопластической задачи полуобратным методом П. И. Перлина

Радиус окружности равен  $L_1^1 R = |b|$ , где  $|b| < |a|$ , а и b - заданные точки искомой упругопластической границы  $L_s$ , для удобства приняты в точках пересечения границы с осями симметрии. В изотропной плоскости комплексные потенциалы Н. И. Мусхелишвили [8] аналитически продолжаются до контура  $L_1^1$  с соответствующими краевыми условиями. Последние представления в виде бесконечного ряда с неизвестными коэффициентами  $\alpha_n$  и  $\beta_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), величины которых определяется в ходе решения упругопластической задачи. Число членов, удерживаемых в разложении, зависит от числа выбранных точек  $m_j$ , по которым уточняется контур  $L_s$ . Заданная совокупность точек  $m_j$  при условии совместимости системы уравнений, полученных из условий непрерывности напряжений на упругопластической границе, решает задачу приближенного определения границы  $L_s$ , а напряжения на бесконечности  $\sigma_x^{(\infty)}$ ,  $\sigma_y^{(\infty)}$  и коэффициенты  $\alpha_0, \beta_0$  связываются соотношениями:

$$\alpha_0 = \frac{\sigma_x^{(\infty)} + \sigma_y^{(\infty)}}{2}, \quad \beta_0 = \frac{\sigma_x^{(\infty)} - \sigma_y^{(\infty)}}{2}.$$

*Распределение компонент упругих напряжений.*

В соответствии с исходной предпосылкой породный массив в упругой зоне подчиняется уравнениям обобщенного закона Гука.

Напряжения в упругой зоне, как известно [9], представляются через две аналитические функции  $\varphi_k(z_k)$  усложненного комплексного аргумента  $z_k = x + \mu_k y$ , ( $k=1, 2$ ):

$$\begin{aligned} \sigma_x^y &= 2 \operatorname{Re} [\mu_1^2 \varphi_1'(z_1) + \mu_2^2 \varphi_2'(z_2)]_p \\ \sigma_y^y &= 2 \operatorname{Re} [\mu_1'(z_1) + \varphi_2'(z_2)]_p \\ \tau_{xy}^y &= -2 \operatorname{Re} [\mu_1 \varphi_1'(z_1) + \mu_2 \varphi_2'(z_2)]_p \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\mu_k$  находится как корни характеристического уравнения четвертой степени [10].

$$\mu^4 + a_1 \mu^2 + a_2 = 0, \quad (2)$$

где  $a_1 = \frac{2b_{12} + b_{66}}{b_{11}}$ ,  $a_2 = \frac{b_{22}}{b_{11}}$  являются коэффициентами деформации [10].

Для многих анизотропных тел  $\mu_k$  являются чисто мнимыми величинами, т.е.  $\mu_k = i\beta_k$ .

Согласно полуобратному методу [1, 2] задаются положения двух точек упругопластической границы. Пусть таковыми будут точки пересечения осей координат с эллипсом, т.е.  $OA = a$ ,  $OB = b$  (см. рисунок). Эллипс с указанными полуосями примем за упругопластическую границу при нулевом приближении, уточняемой в ходе решения задачи.

Рассмотрим теперь задачу теории упругости анизотропного тела для бесконечной плоскости с эллиптическим отверстием, на контуре которого приложены нормальные и касательные напряжения, симметричные относительно осей координат, а на бесконечности действуют напряжения:

$$\sigma_x^{(\infty)} = -p, \quad \sigma_y^{(\infty)} = -q, \quad \tau_{xy}^{(\infty)} = 0 \quad (3)$$

Представим функции напряжений  $\varphi_k(z_k)$ , ( $k=1, 2$ ), в виде [9].

$$\varphi_k(z_k) = \varphi_k^{(0)}(z_k) + \varphi_k^{(00)}(z_k) = A_{k0}z_k + \varphi_k^{(00)}(z_k) \quad (4)$$

Функции основных напряжений в нетронутом массиве  $\varphi_k^{(0)}(z_k)$ , т.е. постоянные  $A_{k0}$  связаны с напряжениями на бесконечности и упругими параметрами  $\beta_k$  зависимостями [7]:

$$A_{10} = -\frac{\sigma_x^{(\infty)} + \beta_2^2 \sigma_y^{(\infty)}}{2(\beta_1^2 - \beta_2^2)}, \quad A_{20} = \frac{\sigma_x^{(\infty)} + \beta_1^2 \sigma_y^{(\infty)}}{2(\beta_1^2 - \beta_2^2)}. \quad (5)$$

Для нахождения функций дополнительных напряжений  $\varphi_k^{(00)}(z_k)$ , ( $k=1, 2$ ), связанных с проведением выработки, отобразим внешность эллиптического контура с полуосями  $OA=a$ ,  $OB=b$  на внешность единичного круга рациональной функцией  $\omega(\zeta)$  вида

$$z = \omega(\zeta) = m_1 \left( \zeta + \frac{m_2}{\zeta} \right), \quad (6)$$

Тогда

$$z_k = \omega_k(\zeta_k) = \frac{a + \beta_k b}{2} \zeta_k + \frac{a - \beta_k b}{2} \cdot \frac{1}{\zeta_k}, \quad (7)$$

где

$$\zeta_k = \frac{z_k + \sqrt{z_k^2 - \text{sqr}(a) + \beta_k^2 b^2}}{a + \beta_k b};$$

на контуре единичного круга  $\zeta_k = \sigma = e^{i\theta}$ .

Обозначив бесконечную плоскость с эллиптическим отверстием через  $S$ , можно утверждать, что функции  $\varphi_k(z_k)$ , определяются в областях  $S_k$ , полученных из  $S$  путем аффинного преобразования.

Граничными условиями для определения функций  $\varphi_k^{(00)}(z_k)$ , выступают следующие выражения

$$2 \operatorname{Re}[\varphi_1^{(00)}(z_1) + \varphi_2^{(00)}(z_2)] = -\int_0^s Y_n dS, \quad (8)$$

$$2 \operatorname{Re}[i\beta_1 \varphi_1^{(00)}(z_1) + i\beta_2 \varphi_2^{(00)}(z_2)] = \int_0^s X_n dS.$$

В последних соотношениях  $X_n$  и  $Y_n$  проекции внешних усилий на контуре эллиптического отверстия на соответствующие координатные оси.

Зная, что на контуре отверстия

$$\varphi_1^{(00)}(z_1) = \varphi_1^{(00)}[\omega_1(\sigma)] = \omega_{10}(\sigma),$$

$$\varphi_2^{(00)}(z_2) = \varphi_2^{(00)}[\omega_2(\sigma)] = \omega_{20}(\sigma),$$

и разлагая правые части граничных условий (11) в ряд Фурье, преобразуем их к виду:

$$2 \operatorname{Re}[\varphi_{10}(\sigma) + \varphi_{20}(\sigma)] = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sigma^n + \overline{a_n \sigma^{-n}}), \quad (9)$$

$$2 \operatorname{Re}[i\beta_1 \varphi_1(\sigma) + i\beta_2 \varphi_2(\sigma)] = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \sigma^n + \overline{b_n \sigma^{-n}})$$

В силу симметрии задачи (относительно осей координат) суммирование в правых частях (12) производится лишь по нечетным степеням  $\sigma$ .

Используя известные свойства интеграла типа Коши, и переходя к старым переменным  $Z_k$ , из граничных условий (12) находятся функции  $\varphi_k^{(00)}(z_k)$  в таком виде:

$$\begin{aligned}\varphi_1^{(00)}(z_1) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_{1n} \left[ \frac{a + \beta_1 b}{z_1 + \sqrt{z_1^2 - a^2 + \beta_1^2 b^2}} \right]^{2n-1}, \\ \varphi_2^{(00)}(z_1) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n} \left[ \frac{a + \beta_2 b}{z_2 + \sqrt{z_2^2 - a^2 + \beta_2^2 b^2}} \right]^{2n-1}\end{aligned}\tag{10}$$

где коэффициенты  $A_{kn}$ , ( $k = 1, 2, \dots$ ), неизвестные действительные величины.

Таким образом, полные функции напряжений  $\varphi_k(z_k)$  записываются так

$$\begin{aligned}\varphi_1(z_1) &= A_{10} z_1 + \sum_{n=1}^{\infty} A_{1n} \left[ \frac{a + \beta_1 b}{z_1 + \sqrt{z_1^2 - a^2 + \beta_1^2 b^2}} \right]^{2n-1}, \\ \varphi_2(z_1) &= A_{20} z_2 + \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n} \left[ \frac{a + \beta_2 b}{z_2 + \sqrt{z_2^2 - a^2 + \beta_2^2 b^2}} \right]^{2n-1}\end{aligned}\tag{11}$$

Производные от этих функций  $\varphi'_k(z_k)$  равны:

$$\begin{aligned}\varphi'_1(z_1) &= A_{10} - \frac{1}{\sqrt{z_1^2 - a^2 + \beta_1^2 b^2}} \sum_{n=1}^{\infty} A_{1n} \left[ \frac{(2n-1)(a + \beta_1 b)}{z_1 + \sqrt{z_1^2 - a^2 + \beta_1^2 b^2}} \right]^{2n-1}, \\ \varphi'_2(z_2) &= A_{20} - \frac{1}{\sqrt{z_2^2 - a^2 + \beta_2^2 b^2}} \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n} \left[ \frac{(2n-1)(a + \beta_2 b)}{z_2 + \sqrt{z_2^2 - a^2 + \beta_2^2 b^2}} \right]^{2n-1}\end{aligned}\tag{12}$$

Компоненты напряжений в упругой зоне посредством функций (12) определяются выражениями:

$$\begin{aligned}\sigma_x^y &= - \left\{ 2(A_{10}\beta_1^2 + A_{20}\beta_2^2) + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \beta_k^2 \frac{1}{\sqrt{z_k^2 - a^2 + \beta_k^2 b^2}} \times \right. \\ &\times \left. \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1) A_{kn} \left( \frac{a + \beta_k b}{z_k + \sqrt{z_k^2 - a^2 + \beta_k^2 b^2}} \right)^{2n-1} \right\}, \\ \sigma_y^y &= \left\{ 2(A_{10} + A_{20}) - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \beta_k^2 \frac{1}{\sqrt{z_k^2 - a^2 + \beta_k^2 b^2}} \times \right. \\ &\times \left. \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1) A_{kn} \left( \frac{a + \beta_k b}{z_k + \sqrt{z_k^2 - a^2 + \beta_k^2 b^2}} \right)^{2n-1} \right\},\end{aligned}\tag{13}$$

$$\tau_{xy}^y = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 i \beta_k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)A_{kn}}{\sqrt{z_k^2 - a^2 + \beta_k^2 b^2}} \left( \frac{a + \beta_k b}{z_k + \sqrt{z_k^2 - a^2 + \beta_k^2 b^2}} \right)^{2n-1}$$

**Распределение напряжений в однородной пластической зоне при условии текучести Хюэка-Брауна.** Ввиду статистической определенности задачи компоненты напряжений в пластической зоне находятся без учета упругопластической границы, а зависят лишь от граничных условий на контуре полости. Переходим к их определению.

Вокруг круговой выработки удобно представить компоненты напряжений в полярных координатах. Снабдим их индексом "п" сверху, указывающим принадлежность к пластической зоне. Компоненты напряжений  $\sigma_r^п$ ,  $\sigma_\theta^п$ ,  $\tau_{r\theta}^п$  в пластической зоне удовлетворяют дифференциальным уравнениям равновесия.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r^п}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \sigma_\theta^п}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r^п - \sigma_\theta^п}{r} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}^п}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta^п}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{r\theta}^п}{r} &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

граничным условиям на контуре полости (при  $r = 1$ )

$$\sigma_r^п = p_0 = \text{const}, \tau_{r\theta}^п = 0. \quad (15)$$

и условию пластичности [3]

$$(\sigma_r^п - \sigma_\theta^п) - \sqrt{-m \sigma_r^п \sigma_c + s \sigma_c^2} = 0, \quad (16)$$

где  $\sigma_c > 0$ , сопротивление при простом сжатии неповрежденного камня (породы), значения берутся из эксперимента;  $s$  – параметр (величина) определяющий уровень потрескивания (1 для случая неповреждения и 0 (ноль) в случае, когда материал полностью раздроблен).

Привлекается полуобратный метод П. Н. Перлина [1, 2, 4-7] для упругопластического состояния анизотропного массива вокруг штрека. Справедливыми являются следующие допущения:

а) область неупругой деформации полностью охватывает незакрепленный контур выработки радиуса  $R$ ;

б) изотропный несжимаемый материал в зоне неупругой деформации подчиняется критерию текучести Хюэка-Брауна без смягчения;

в) упругая область находится в условиях плоской деформации и его поведение описывается уравнением обобщенного закона Гука для однородного трансформного массива с наклонной плоскостью изотропии.

Далее определим выражение разных полей внутри пластической зоны, которых полностью охватывает контур выработки круглого поперечного сечения. Для этого используем факт того, что критерий пластичности достигается по всей предельной зоне, что позволяет записать  $\sigma_\theta$  через  $\sigma_r$  и решить уравнение равновесие. Полученное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\sigma_r^п}{r} = - \frac{\sqrt{-m \sigma_c \sigma_r - s \sigma_c^2}}{r} \quad (17)$$

при граничных условиях

$$r=R, \quad \sigma_r^п = -P_i,$$

где  $P_i$  - внутреннее давление,  $m$  – параметр связанный со свойствами горной породы (обычно от 5 до 30), где через буквы «п» сверху снабжены компоненты пластических напряжений.

Преобразование дифференциального корня сложной функции:

$$\frac{d\sigma_r^п}{\sqrt{-m \sigma_c \sigma_r + s \sigma_c^2}} = - \frac{dr}{r}. \quad (18)$$

Итак, компоненты пластических напряжений в полярной системе координат таковы :

$$\sigma_r^p = \frac{s\sigma_c}{m} - \frac{1}{m\sigma_c} \left( \sqrt{s\sigma_c^2 - m\sigma_c P_i} + \frac{m\sigma_c}{2} \ln \frac{r}{R} \right)^2 \quad (19)$$

$$\sigma_\theta^p = \sigma_r^p - \sqrt{s\sigma_c^2 - m\sigma_c \sigma_r^p}.$$

В первоначальном варианте допускаем, что внутреннее давление равно нулю ( $P_i=0$ ).

В силу статической определенности задачи в пластической зоне компоненты напряжений в прямоугольных координатах находятся независимо от напряжений на «бесконечности» формулами:

$$\begin{aligned} -\sigma_x^p / \sigma_c &= \Psi \frac{(z + \bar{z})^2}{4zz} + (\Psi + \sqrt{1 + m\Psi}) \frac{(z - \bar{z})^2}{4zz}, \\ -\sigma_y^p / \sigma_c &= \Psi \frac{(z - \bar{z})^2}{4zz} + (\Psi + \sqrt{1 + m\Psi}) \frac{(z + \bar{z})^2}{4zz}, \\ -\tau_{xy}^p / \sigma_c &= (\Psi + 1 + \sqrt{1 + m\Psi}) \frac{z^2 - \bar{z}^2}{4iz\bar{z}}, \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$\Psi = \ln \sqrt{\frac{zz}{R^2}} \left( 1 + \frac{m}{4} \ln \sqrt{\frac{zz}{R^2}} \right), \quad z = x + iy, \bar{z} = x - iy.$$

Во втором случае, когда со стороны внутреннего контура выработки действует давление  $P_i$  ( $P_i > 0, S \neq 1$ ), то компоненты напряжений в пластической зоне определяется так:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_x}{\sigma_c} &= -\eta^* \frac{(z + \bar{z})^2}{4|zz|} - (\eta^* + N) \frac{(z - \bar{z})^2}{4|zz|} + \frac{P_i}{\sigma_c}; \\ \frac{\sigma_y}{\sigma_c} &= -\eta^* \frac{(z - \bar{z})^2}{4|zz|} - (\eta^* + N) \frac{(z + \bar{z})^2}{4|zz|} + \frac{P_i}{\sigma_c}; \\ \frac{\tau_{xy}}{\sigma_c} &= N \frac{z^2 - \bar{z}^2}{4i|zz|}. \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$\eta^* = \ln \sqrt{\frac{|zz|}{R^2}} \left( \sqrt{s - m \frac{P_i}{\sigma_c}} \right) - \frac{m}{4} \ln \sqrt{\frac{|z - \bar{z}|}{R}}, \quad N = \sqrt{s + m\eta^* - m \frac{P_i}{\sigma_c}}, \quad z = x + iy, \bar{z} = x - iy.$$

Напряжение на искомой предельной зоне(границе)должны быть непрерывными:

$$\sigma_x^y = \sigma_x^\Pi, \quad \sigma_y^y = \sigma_y^\Pi, \quad \tau_{xy}^y = \tau_{xy}^\Pi. \quad (22)$$

С учетом (1) и (20) или (21) условие (22) дает систему уравнений для определение неизвестных коэффициентов  $A_{k0}$  и  $A_{kn}$ , ( $k=1, 2; n=1, 2, \dots$ ) функций (12). Верхний предел суммы (11), то же самое суммы (12) определяются из равенства числа уравнений числу неизвестных.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Перлин П.П. Приближенный метод решения упругопластических задач // Инженерный журнал. – 1960. – Вып. 28. – С. 145-150.  
 [2] Перлин П.П. Упругопластическое распределение напряжений вокруг отверстия // Труды МФТИ. – 1960. – № 5. – С. 30-40.

- [3] Brown E.T. et Hoek Underground excavations in rock, Intuition of mining and metallurgy. – 1980.
- [4] Айталиев Ш.М., Ескалиев М.Е., Масанов Ж.К. Об упругопластическом распределении напряжений и перемещений в анизотропном массиве с отверстием // В кн.: Прикладные проблемы прочности и пластичности. – Горький: Изд-во Горьк. ун-в., 1981. – С. 129-136.
- [5] Ескалиев М.Е., Масанов Ж.К. К упругопластическому состоянию анизотропного тела с отверстием // В кн.: Механика тектонических процессов. – Алма-Ата: Наука, 1983. – С. 152-166.
- [6] Ескалиев М.Е. Влияние дилатансии пород на упругопластическое состояние выработки в трансформном массиве // Известия мин. науки – Академии наук РК. Серия физ.-мат. – 1996. – № 3. – С. 72-78.
- [7] Ескалиев М.Е. Дис. ... док. техн. наук. – Алма-Ата, 1998.
- [8] Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
- [9] Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – М., 1977. – 415 с.
- [10] Ержанов Ж.С., Айталиев Ш.М., Масанов Ж.К. Устойчивость горизонтальных выработок в наклонно-слоистом массиве. – Алма-Ата: Наука КазССР, 1971. – 160 с.

## REFERENCES

- [1] Perlin P.P. Priblizhennyj metod reshenija uprugoplasticheskikh zadach. Inzhenernyj zhurnal. 1960. Vyp. 28. S. 145-150.
- [2] Perlin P.P. Uprugoplasticheskoe raspredelenie naprjazhenij vokrug otverstija. Trudy MFTI. 1960. N 5. S. 30-40.
- [3] Brown E.T. et Hoek Underground excavations in rock, Intuition of mining and metallurgy. 1980.
- [4] Ajtaliev Sh.M., Eskaliev M.E., Masanov Zh.K. Ob uprugoplasticheskom raspredelenij naprjazhenij i peremeshhenij v anizotropnom massive s otverstiem. V kn.: Prikladnye problemy prochnosti i plastichnosti. Gor'kij: Izd-vo Gor'k. univ., 1981. S. 129-136.
- [5] Eskaliev M.E., Masanov Zh.K. K uprugoplasticheskomu sostojaniju anizotropnogo tela s otverstiem. V kn.: Mehanika tektonicheskikh processov. Alma-Ata: Nauka, 1983. S. 152-166.
- [6] Eskaliev M.E. Vlijanie dilatansii porod na uprugoplasticheskoe sostojanie vyrabotki v transtropnom massive. Izvestija min. nauki – Akademii nauk RK. Serija fiz.-mat. 1996. N 3. S. 72-78.
- [7] Eskaliev M.E. Dis. ... dok. tehn. nauk. Alma-Ata, 1998.
- [8] Mushelishvili N.I. Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoi teorii uprugosti. M.: Nauka, 1966. 707 s.
- [9] Lehnickij S.G. Teorija uprugosti anizotropnogo tela. M., 1977. 415 s.
- [10] Erzhanov Zh.S., Ajtaliev Sh.M., Masanov Zh.K. Ustojchivost' gorizonta'nyh vyrabotok v naklonno-sloistom massive. Alma-Ata: Nauka KazSSR, 1971. 160 s.

## ДӨҢГЕЛЕК ТЕСІКТІ ШЕКТІК АЙМАҚТАҒЫ СЕРПІНДІ ПЛАСТИКАЛЫҚ ҚЫСЫМДЫ ТАРАТУ ТУРАЛЫ

**М. Е. Есқалиев, Г. Қ. Избасарова**

Қазақ мемлекеттік қыздар педагогикалық университеті, Алматы, Қазақстан

**Тірек сөздер:** серпімділік, пластикалық аймақ, қазба, кернеу, потенциал.

**Аннотация.** Тесігі бар трансформты (қабаттасқан) күрделі құрылымды массивтегі шекті жағдайдың дамуы қарастырылған. Серпімді ортада тау жынысы анизотропты құрылымға басымырақ, ол Гуктың жалпылама заңына бағынады, пластикалық орта қалыптаса бастаған уақыттан бастап изотропты деп қабылданады. Шекті маңайдағы кернеулерді анықтағанда алғаш рет Хок-Браунның қирау шарты және П. И. Перлиннің жартылай қайыру әдісі пайдаланылған.

*Поступила 26.11.2014 г.*

**NEWS**

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES**

ISSN 1991-346X

Volume 6, Number 298 (2014), 40 – 43

**SOLUTION OF THREE-DIMENSIONAL THERMOELASTICITY  
PROBLEMS WITH PROVISION OF CHANGING TRANSVERSE  
DEFORMATION COEFFICIENT**

**R. Zh. Zhadrayev**

Kazakh academy of transport and communications named after M. Tynyshpayev, Almaty, Kazakhstan

**Key words:** three-dimensional problem of elasticity, theory, transverse deformation coefficient, differential equation, Cauchy formula, marginal problem.

**Abstract.** In the article three-dimensional problem of thermoelasticity with provision of changing transverse deformation coefficient is explored. The differential equation is found in displacement and border conditions of the main marginal problems for sought additives in decisions of the thermoelasticity problems. These additives depend from Poisson coefficient change to some fixed meaning. Hereinafter differential equations in displacement with provision of Cauchy formula and meaning of deformation from physical dependency are definitively replaced by equivalent differential equations in voltages.

УДК 539.31.4 (075.8)

**РЕШЕНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧ ТЕРМОУПРУГОСТИ  
С УЧЕТОМ ИЗМЕНЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА  
ПОПЕРЕЧНОЙ ДЕФОРМАЦИИ**

**Р. Ж. Жадраев**

Казахская Академия транспорта и коммуникаций им. М. Тынышпаева, Алматы, Казахстан

**Ключевые слова:** трехмерная задача теории упругости, коэффициент поперечной деформации, дифференциальное уравнение, формула Коши, краевая задача.

**Аннотация.** В статье исследована трехмерная задача термоупругости с учетом изменения коэффициента поперечной деформации. Найдены дифференциальное уравнение в перемещениях и граничные условия основных краевых задач для искомым добавок в решениях задач термоупругости. Эти добавки зависят от изменения коэффициента Пуассона по отношению к некоторому фиксированному значению. Далее дифференциальные уравнения в перемещениях, с учетом формулы Коши и значения деформаций из физической зависимости, заменены окончательно эквивалентными дифференциальными уравнениями в напряжениях.

Положим, что найдено решение  $u_i$  в перемещениях трехмерной несвязанной задачи термоупругости при некотором фиксированном значении  $\nu$  коэффициента Пуассона\*.

Требуется найти аддитивное изменение в решении  $u_i$  при изменении коэффициента Пуассона термоупругой среды на величину  $\nu_* - \nu$ , где  $\nu_*$  - новое его значение.

---

\* Купрадзе В.Д. и др. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. – М.: Наука, 1976. – 664 с.



Полагаем также, что решение  $u_i^*$  той же задачи, но при значении  $\nu_*$  коэффициенты Пуассона также найдено.

Следовательно, сформулированную задачу можно определить в следующем виде. Требуется найти разность решений:

$$u_i^{\bar{\sigma}} = u_i - u_i^*, \quad u_i^{\bar{\sigma}^*} = u_i - u_i^*, \quad (1)$$

где добавочные перемещения  $u_i^{\bar{\sigma}}$  приписываются термоупругой среде, имеющей коэффициент Пуассона  $\nu$ , а добавки  $u_i^{\bar{\sigma}^*}$  приписываются среде с коэффициентом  $\nu_*$ .

Всюду в дальнейшем будем обозначать через  $E$  - модуль Юнга,  $\alpha$  - температурный коэффициент линейного расширения среды,  $K_i$  - массовую силу,  $T$  - температуру среды (известная функция координат и времени),  $x_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  - декартовы координаты,  $\Delta$  - оператор Лапласа,  $\nu$  - относительное изменение объема,  $\Theta$  - первый инвариант тензора напряжений.

При обоих введенных выше коэффициентах Пуассона дифференциальное уравнение равновесия термоупругой среды в перемещениях записывается так:

$$\begin{aligned} \Delta u_i + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x_i} &= \frac{2\alpha(1+\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial T}{\partial x_i} - \frac{2(1+\nu)}{E} K_i \\ \Delta u_i^* + \frac{1}{1-2\nu_*} \frac{\partial \mathcal{G}^*}{\partial x_i} &= \frac{2\alpha(1+\nu_*)}{1-2\nu_*} \frac{\partial T}{\partial x_i} - \frac{2(1+\nu_*)}{E} K_i \end{aligned} \quad (2)$$

Вычитая уравнения (2) одно из другого, будем учитывать следующие очевидные соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-2\nu_*} - \frac{1}{1-2\nu} &= \frac{2(\nu_* - \nu)}{(1-2\nu)(1-2\nu_*)}, \quad (1+\nu_*) - (1+\nu) = (\nu_* - \nu), \\ \frac{1+\nu_*}{1-2\nu_*} - \frac{1+\nu}{1-2\nu} &= \frac{3(\nu_* - \nu)}{(1-2\nu)(1-2\nu_*)} \end{aligned} \quad (3)$$

Тогда для разности решения получается дифференциальное уравнение в двух вариантах:

$$\begin{aligned} \Delta u_i^{\bar{\sigma}} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \mathcal{G}^{\bar{\sigma}}}{\partial x_i} &= \frac{2(\nu_* - \nu)}{E(1-2\nu)} \frac{\partial \Theta^*}{\partial x_i} + \frac{2(\nu_* - \nu)}{E} K_i \\ \Delta u_i^{\bar{\sigma}^*} + \frac{1}{1-2\nu_*} \frac{\partial \mathcal{G}^{\bar{\sigma}^*}}{\partial x_i} &= \frac{2(\nu_* - \nu)}{E(1-2\nu_*)} \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} + \frac{2(\nu_* - \nu)}{E} K_i \end{aligned} \quad (4)$$

Первое уравнение (4) определяет разность  $u_i^{\bar{\sigma}}$  решений как перемещение среды с коэффициентом Пуассона  $\nu$ , а второе уравнение (4) определяет эту разность как перемещения среды, имеющей коэффициент  $\nu_*$ . Правые части уравнений (4) представлены известными функциями; эти функции, как будет показано ниже, нельзя представить как правые части уравнений (2) через какое бы то ни было поле температур и массовых сил.

Физически закон термоупругости был существенно использован для получения уравнений (2), а также для преобразования правой части уравнения (4). При двух значениях коэффициента Пуассона этот закон записывается так:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \delta_{ij} \frac{\nu \Theta}{E} + \delta_{ij} \alpha T, \quad \mathcal{G} = \frac{1-2\nu}{E} \Theta + 3\alpha T, \\ \varepsilon_{ij}^* &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i} \right) = \frac{1+\nu_*}{E} \sigma_{ij}^* - \delta_{ij} \frac{\nu_* \Theta}{E} + \delta_{ij} \alpha T, \quad \mathcal{G}^* = \frac{1-2\nu_*}{E} \Theta^* + 3\alpha T, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\delta_{ij}$  - символ Кронекера. Вычитая друг из друга формулы (5), учитываем соотношения (3). Тогда получим два варианта физической зависимости между деформациями и напряжениями, которые соответствуют искомой разности решений  $\mathbf{u}_i$  и  $\mathbf{u}_i^*$ :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{\bar{\sigma}} &= \frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma}_{ij}^{\bar{\sigma}} - \delta_{ij} \frac{\nu \Theta^{\bar{\sigma}}}{E} + \frac{\nu_* - \nu}{E} (\delta_{ij} \Theta^* - \boldsymbol{\sigma}_{ij}^*) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{u}_i^{\bar{\sigma}}}{\partial x_j} + \frac{\partial \mathbf{u}_j^{\bar{\sigma}}}{\partial x_i} \right), \\ \mathcal{G}^{\bar{\sigma}} &= \frac{1-2\nu}{E} \Theta^{\bar{\sigma}} + \frac{2(\nu_* - \nu)}{E} \Theta^*, \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{\bar{\sigma}^*} &= \frac{1+\nu_*}{E} \boldsymbol{\sigma}_{ij}^{\bar{\sigma}^*} - \delta_{ij} \frac{\nu_* \Theta^{\bar{\sigma}}}{E} + \frac{\nu_* - \nu}{E} (\delta_{ij} \Theta - \boldsymbol{\sigma}_{ij}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{u}_i^{\bar{\sigma}^*}}{\partial x_j} + \frac{\partial \mathbf{u}_j^{\bar{\sigma}^*}}{\partial x_i} \right), \\ \mathcal{G}^{\bar{\sigma}^*} &= \frac{1-2\nu_*}{E} \Theta^{\bar{\sigma}} + \frac{2(\nu_* - \nu)}{E} \Theta.\end{aligned}\tag{6}$$

Уравнениям (4) нельзя придать смысл уравнений термоупругости. Однако это, конечно, не мешает нам решать уравнения (4), понимая под решением просто разность (1) для которой вводится физическая зависимость (6).

Кроме дифференциальных уравнений (4), добавочные перемещения  $\mathbf{u}_i^{\bar{\sigma}}$  или  $\mathbf{u}_i^{\bar{\sigma}^*}$  должны удовлетворять граничные условия, которые необходимо здесь сформулировать.

В первой краевой задаче на границе S области V задаются значения  $f_i$  перемещений  $\mathbf{u}_i$  или  $\mathbf{u}_i^*$ :

$$(\mathbf{u}_i)_S = f_i, (\mathbf{u}_i^*)_S = f_i \tag{7}$$

Вычитая оба условия (7) друг из друга, получим для разности решений граничные условия первого типа:

$$(\mathbf{u}_i^{\bar{\sigma}})_S = 0, (\mathbf{u}_i^{\bar{\sigma}^*})_S = 0 \tag{8}$$

Во второй краевой задаче на границе S термоупругой области задаются значения  $F_i$  вектора интенсивности внешних сил:

$$(\mathbf{p}_i)_S = F_i, (\mathbf{p}_i^*)_S = F_i \tag{9}$$

В среде с коэффициентом  $\nu$  напряжения  $\boldsymbol{\sigma}_{ij}$  вычисляем, применяя физически закон (5) и (6) в обратной форме.

Граничное условие для добавочных усилий  $\mathbf{p}_i^{\bar{\sigma}}$ , возникающих на S в среде с коэффициентом  $\nu$ :

$$\left( \mathbf{p}_i^{\bar{\sigma}} \right)_S = -\mathbf{p}_i(\nu, \mathbf{u}_i^*)_S + \frac{1+\nu_*}{1+\nu} F_i - n_i \frac{(\nu_* - \nu) \Theta^*}{(1+\nu)(1-2\nu)} \tag{10}$$

Второй вариант граничного условия второй краевой задачи для добавочных усилий  $\mathbf{p}_i^{\bar{\sigma}^*}$  в среде с коэффициентом  $\nu_*$  через некоторые преобразования получим:

$$\left( \mathbf{p}_i^{\bar{\sigma}^*} \right)_S = \mathbf{p}_i^*(\nu_*, \mathbf{u}_i) - \frac{1+\nu}{1+\nu_*} F_i - n_i \frac{(\nu_* - \nu) \Theta}{(1+\nu_*)(1-2\nu_*)} \tag{11}$$

Таким образом, найдены дифференциальное уравнение (4) и граничные условия (8), (10), (11) основных краевых задач для искомым добавок  $u_i^{\sigma}$  и  $u_i^{\sigma^*}$  в решениях задач термоупругости. Эти добавки зависят от изменения  $\nu_* - \nu$  коэффициента Пуассона по отношению к некоторому фиксированному значению  $\nu$ .

Заметим теперь, что, поскольку граничные условия (10), (11) даются в напряжениях, то может оказаться целесообразным, вместо дифференциальных уравнений (4) в перемещениях, получить и решать эквивалентные дифференциальные уравнения в напряжениях, к получению которых мы здесь и переходим.

Продифференцируем все члены уравнений (4) по координате  $x_j$ :

$$\begin{aligned} \Delta \frac{\partial u_i^{\sigma}}{\partial x_j} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 g^{\sigma}}{\partial x_i \partial x_j} &= \frac{2(\nu_* - \nu)}{E(1-2\nu)} \frac{\partial^2 \Theta^*}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{2(\nu_* - \nu)}{E} \frac{\partial K_i}{\partial x_j}, \\ \Delta \frac{\partial u_i^{\sigma^*}}{\partial x_j} + \frac{1}{1-2\nu_*} \frac{\partial^2 g^{\sigma^*}}{\partial x_i \partial x_j} &= \frac{2(\nu_* - \nu)}{E(1-2\nu_*)} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{2(\nu_* - \nu)}{E} \frac{\partial K_i}{\partial x_j}. \end{aligned} \quad (12)$$

С учетом формулы Коши и значения деформаций из физической зависимости (6) получим окончательно следующие дифференциальные уравнения:

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_{ij}^{\sigma} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta^{\sigma}}{\partial x_i \partial x_j} &= \frac{\nu_* - \nu}{1+\nu} \Delta \sigma_{ij}^* + \frac{\nu_* - \nu}{E} \left( \frac{\partial K_i}{\partial x_j} + \frac{\partial K_j}{\partial x_i} \right), \\ \Delta \sigma_{ij}^{\sigma^*} + \frac{1}{1+\nu_*} \frac{\partial^2 \Theta^{\sigma^*}}{\partial x_i \partial x_j} &= \frac{\nu_* - \nu}{1+\nu_*} \Delta \sigma_{ij} + \frac{\nu_* - \nu}{E} \left( \frac{\partial K_i}{\partial x_j} + \frac{\partial K_j}{\partial x_i} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

#### REFERENCES

Kupradze V.D. and others. Three-dimensional problems of mathematical bounce theory and thermobounce. M.: Science, 1976. 664 p.

#### КӨЛДЕНЕҢ ДЕФОРМАЦИЯ КОЭФФИЦИЕНТІНІҢ ӨЗГЕРУІН ЕСКЕРІП ҮШӨЛШЕМДІ ТЕРМОСЕРПІМДІЛІК ЕСЕБІН ШЕШУ

Р. Ж. Жадраев

М. Тынышбаев атындағы Қазақ көлік және коммуникациялар академиясы, Алматы, Қазақстан

**Тірек сөздер:** үшөлшемді серпімділік теориясының есебі, көлденең деформация коэффициенті, дифференциалдық тендеу, Коши формуласы, шеттік есеп.

**Аннотация.** Мақалада көлденең деформация коэффициентінің өзгеруін ескеріп үшөлшемді термосерпімділік есебі зерттелінген. Жылжудағы дифференциалдық тендеу мен термосерпімділік есебін шешуде ізделінген қосымша үшін негізгі шеттік есептің шекаралық шарттары табылған. Бұл қосымшалар Пуассон коэффициентінің кейбір белгіленген мәніне қатысты өзгеруіне тәуелді. Коши формуласын және физикалық тәуелділіктен деформацияның мәнін ескеріп жылжудағы дифференциалдық тендеулер барабар кернеудегі дифференциалдық тендеулермен түпкілікті ауыстырылған.

Поступила 26.11.2014 г.

**NEWS**

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES**

ISSN 1991-346X

Volume 6, Number 298 (2014), 44 – 48

**TEACHING IN HIGHER EDUCATIONAL ESTABLISHMENTS  
BY MEANS OF COREL DRAW**

**S. N. Isabayeva, N. B. Duisenova**

Kazakh state women's pedagogical university, Almaty, Kazakhstan.

E-mail: duisenovanur@mail.ru

**Key words:** instruments of Corel Draw, graphic design, cloning, vector graphics, three sizes of chart.

**Abstract.** In this article the use of the program, vectorial technological possibilities of graphic arts of Corel Draw for planning of figures, layouts and pictures by the use of instruments of this program, are considered.

ӘӨЖ 002.6:37.016

**COREL DRAW ВЕКТОРЛЫҚ ГРАФИКАСЫНЫҢ  
ТЕХНОЛОГИЯЛЫҚ МҮМКІНДІКТЕРІ**

**С. Н. Исабаева, Н. Б. Дүйсенова**

Казахский государственный женский педагогический университет, Алматы, Казахстан

**Тірек сөздер:** Corel Draw құралдары, графикалық дизайн, клондау, векторлық графика, үш өлшемді графика.

**Аннотация.** Мақалада жоғары оқу орнында оқытудың векторлық графикада қарапайым геометриялық фигуралардан яғни сызық, қисық сызық, шеңбер және тағы да басқалардан құралады. Corel Draw-мен иллюстрациялар, макеттер мен суреттер салу және оларды өңдеу келтірілген.

Бүгінгі таңдағы компьютерлік дизайн саласында Corel Draw пакеті қуатты құралдарымен, графикалық дизайнның қиын тапсырмаларын оңайлататын сан түрлі эффектері және үш өлшемді графикасымен ерекшеленеді. Corel Draw құрамына кіретін тамаша ойластырылған жарықтылық, ыңғайлылық және жеңіл игерілетін интерфейс қабілетіне ие. Corel Draw-мен иллюстрациялар, макеттер мен суреттер салу және оларды өңдеу оңайлатылды. Компьютер суретші қиялында пайда болған әртүрлі бейнелерді, кеңейтілген тапсырмаларды жасауға мүмкіндік туғызады. Компьютерлік графика бейнелену тәсіліне байланысты векторлық, растрлық және фракталдық графика болып бөлінеді. Corel Draw графикалық редакторы векторлы бейнелену тәсіліне жатады.

Векторлық графикада бейне қарапайым геометриялық фигуралардан яғни сызық, қисық, қисық сызық, шеңбер және тағы да басқалардан құралады. Әрбір элемент компьютер жадысында математикалық формула түрінде сақталынады.

Таңдау құралы. Таңдау құралы – ең маңызды құралдардың бірі. Алдыңғы айтылған операциялар осы құрал арқылы орындалады. Белгілеу дегеніміз объектіні таңдау құралымен үстінен бір рет шерту. Жылжыту таңдау құралымен объектінің үстінен басып тұрып керекті жерге апарамыз. Өлшемін ұзарту-қысқарту объектінің шеткі маркерлерін тарту не қысу арқылы орындалады. Объектіні қисайту арқылы объектіні айналдыру, қисайту, оське қарағанда айналдыру операцияларын орындайды. Өшіру – таңдау құралымен белгіленген объектіні Delete пернесін басу арқылы жүзеге асырылады. Көшірмесін алудың бірнеше түрі бар: 1) жылжыту кезінде тышқанның оң

жағын шертсе; 2) жылжыту кезінде бос орын (пробел) пернесін басу арқылы; 3) объектіні белгілеп + пернесін (цифрлық бөлігіндегі) басса; 4) қосарлау арқылы Ctrl+D пернесін басса көшірмесі пайда болады. Клондау – көшірме алудың ең қызықты түрі. Белгіленген объектіні Түзету – Клондау (Редактировать – Клонировать) арқылы клондасақ, көшірмесі шығады. Егер клондаған объектіні өзгертсек, клон көшірмелеріде өзгереді.

Базалық фигуралар Құралдар жиынында орналасқан. Құралдарды таңдау, құралдар жиынынан белгілеу немесе тышқанның оң жақ батырмасын шертіп объектіні жасау – құрал командасы арқылы орындалады.

Тіктөртбұрыш. Тіктөртбұрышты таңдап, бір төбесін тышқанды шертіп белгіле жібермей диагональ арқылы қарама – қарсы төбесін көрсетіп тышқанды жібереміз.

Үш нүктелі тіктөртбұрыш. Үш нүктелі тіктөртбұрыш салу үшін бірінші бір төбесін белгілеп сол арқылы тіктөртбұрыштың бір қабырғасын саламыз, тышқанды жібергеннен кейін биіктігін көрсету арқылы төртбұрышты салуды бітіреміз.

Эллипс. Тышқанды бір шертіп жібермей, қалаған жаққа қарай тартсақ салынатын эллипстің пішіні (контур) көрінеді, тышқанды жіберсек келтірілген формаға келеді. Үш нүктелі эллипс. Үш нүктелі эллипс үш нүктелі тіктөртбұрышты салғандай етіп салады.

Көпбұрыш. Көпбұрыш салу тіктөртбұрыш салғандай оңай. Қасиеттік тақтада бұрыштар санын, көпбұрыштық немесе жұлдыздық режимін және бұрыштардың сүйірленуін көрсетуге болады. Көпбұрыш арқылы 3-тен 500 бұрышты көпбұрыш салуға болады. Corel Draw-да көпбұрыштар және жұлдыздар үш түрге бөлінеді:

1. Көпбұрыштар.

2. Жұлдыздар (көпбұрышты жұлдыздар формасында).

3. «Қиын» жұлдыздар – бұлар диагональдары көрінетін, қарама-қарсы биіктіктері қосылған жұлдыздар.

Спираль. Спираль салынғаннан кейін қасиеттік тақтада орама санын, симметриялық немесе логарифімдік спираль қылып өзгертуге болады.

Автофигуралар. Автофигуралар—бұл динамикалық объектілер. Автофигуралардың сырт көрінісінің бір немесе бірнеше контрольдық нүктелер (маркерлер) арқылы өзгертуге болады.

Түзу салу құралдары. Түзу салу құралдары – қисық (свободная рука), безье қисығы, көркемдік түзу (живопись), қылқалам (перо), сынық (ломаной), Үш нүктелі қисық, өлшемдік және интерактивті түзу қосқыш (инструмент интерактивного соединения) құралдары.

Түзу салу құралдарының мақсаты бір болсада, қолданатын жері мен қолдану ережелері әртүрлі. Барлық түзу тышқанды шертіп жібермей сызылады. Бұл құралдардың кейбірі бірнеше құралдардан тұрады. Төменде кейбір бір-біріне ұқсастығы бар құралдарға сипаттама берілген.

Қисық және сынық құралдары. Екеуі де қисық сызық немесе түзу сызық сызуға көмектеседі. Екеуінің айырмашылығы Қисық құралмен түзудің басын тышқанды шерту арқылы бастапқы нүктесін белгілеп жібермей соңғы нүктесінде тышқанды жіберсек, түзуді сол жерде үзіп аламыз.

Ал Сынық құралында түзудің соңғы нүктесінде түзу үзілмейді, жалғасып сызыла береді, үзу үшін екі рет шерту керек. Екеуінің де қасиеттік тақтасы бір деуге болады.

Үшнүктелі қисық құрал. Тышқан арқылы түзудің бастапқы нүктесін көрсетіп тышқанды жібермей соңғы нүктесін көрсеткеннен кейін тышқанды қозғау арқылы керек қисықты аламыз.

Безье қисығы және қылқалам құралдары. Бұл екеуіде дәл қисықтарды салуға арналған. Бірақ Безье қисығы құралмен қисықты үлкен дәлдікпен салуға болады.

Осы екі құралмен салынған қисықтар түйіндерден тұрады. Түйіндерді қозғау арқылы қисықты қисайтуға болады. Түйіндермен жұмыста форма құралы арқылы жүзеге асырылады. Қасиеттік тақтадағы түйіндермен жұмыс батырмалармен керек қисықты аламыз.

Өлшемдік құрал. Өлшемдік құрал инженерия, архитектура, электромеханика және тағы басқа салаларда жұмыс істейтіндерге қажет. Қасиеттік тақтаны пайдаланып, объектінің ұзындығын, енін, бұрыш және тағы басқаларының өлшемдерін көрсетуге болады.

Интерактивті түзу қосқыш құралы. Бұл құрал блок-схема, ғылыми және техникалық диаграмма сызуға арналған.

Жиектеу қаламы құралы. Жиектеу қаламы құралынан бұрын фигураның жиегі (обводка) туралы бір-екі сөз жазсақ. Әрбір фигураның жиегінің түсі, қалыңдығы, стилі болады. Оларды басқару (өзгерту) қасиеттік тақтада орындалады.

Мұнда объектіге қолданылған өзгерістерді бірден көре аламыз. Ал жиектеу қаламының сұхбат терезесінде жасалған өзгерістерді ОК батырмасы арқылы бекітеміз. Жиектеу қаламының сұхбат терезесінде жиектің түрін, түсін, қалыңдығын, бұрышын және тағы басқаларын өзгерте аламыз. Жиектеу қаламының сұхбат терезесі. Жиектеу қаламы құралының жиынында жиектеу түсі сұхбат терезесі, жиектеу қаламының сұхбат терезесі, 7 дайын жиек және тағы басқалары бар.

Пышақ құралы. Бұл құрал объектіні кесіп тастауға арналған. Егер құралдың қасиеттік тақтасында киюдан кейін автотұйықталу (автоматическое замыкание при отрезании) батырмасы басылса, кесілген объект тұйықталады. Ал бір объект қылып сақтау батырмасы басылса, объект екі бөлек фигуралардан тұратын болады.

Өшіргіш құралы. Өшіргіш суреттің керек емес жерін интерактивті өшіруге арналған. Құралдың қасиеттік тақтасында өшіргіш диаметрін, формасын және тағы басқаларын өзгертуге болады.

Езгіш бояу құралы. Езгіш бояу арқылы фигураның жиегін өзгертуге, ашып айтқанда езіліп жатқан сияқты қылып көрсетуге болады. Құралдың қасиеттік тақтасында езгіш бояу қалыңдығын, интенсивтілігін және тағы басқаларын көрсетуге болады.

Еркін өзгертуші құралы. Бір қарағанда таңдау құралы мен еркін өзгертуші құралы айырмашылығы жоқ сияқты. Бірақ еркін өзгертуші құралы қасиеттік тақта мен трансформация жасырма терезені пайдаланып үлкен дәлдікке қол жеткіземіз.

Маштаб және Қол құралдары. Бұл құралдар парақтағы объектілерді қарауға, бағдарлауға және маштабты үлкейту- кішірейтуге арналған.

Мәтінді өңдеу және әр мақсатта қолдануға болады. Мәтін – жарнамалық плакат, логотип, буклеттердің бөлінбес бөлігі және дизайнерлік жұмыстарда қажет. Мәтіндік құралдар логотип жасауда қарапайым әрі ыңғайлы бола отырып, құжат жасауда мәтіндік құралдардың қуатты дамығандығын көруге болады.

Құйма (заливка) фигураның ішкі ауданын белгілі бір түске бояуға, әр түсті түске, өтпелі қылуға (градиенттеуге), өрнектеуге (узор), текстурлеуге арналған. Құралдар I жиынынан Интерактивті құйманы таңдаймыз.

Қасиеттік тақтадан құйманың түрін таңдаймыз. Мынадай құйма түрлері бар:

Біртекті (однородный) құйма - өңкей бір түспен құйылады. Қасиеттік тақтада палитра мен түстік модельдерді таңдап, түстердің пайыздық қатынастарын келтіреміз.

Өтпелі құйма екі не бірнеше түстің бір-біріне өтуіндегі түстер жиыны. Мұнда сызықтық, радиальдық, конустық, квадранттық дайындамаларда түстердің ауысуын пайдалануға болады.

Өрнектік құйма белгілі бір ретпен орналасқан өрнектердің (шеңбер, тіктөртбұрыш, сызық және тағы басқа әртүрлі фигуралар) жиыны. Өрнектік құйманың әрқайсысының атрибуттарын өзгертуге болатын 3 түрлі құйма: екі түсті, толық түсті, растрлық өрнек деген түрлері бар.

Текстуралық құйма дайын текстураны пайдалануға арналған. Бірақ текстуралардың пайыздық қатынастарын, түстерін өзгерту арқылы жаңа текстура алуға болады.

Постскрип құймасы. Бұл құйма текстуралы және өрнектік құймаларға ұқсас.

Алдында айтылған құйма түрлерінде қолданушы өзінің құймасын қосуға, яғни сақтауға болады. Ол жапсырма терезеде “+” батырмасы арқылы немесе басқа жолдармен де сақталады.

Құралдар жиынындағы құймамен жұмыс үшін екінші құйма құралы бар. Бұл құйманың алдыңғы құймадан айырмашылығы таңдалған құйма түрінің қасиеттерін бөлек сұхбат терезеде өзгертеді және де объектінің қасиеттік жапсырма терезесінен құйманы өзгертуге болады.

Торлама құйма құралы объектіні бөлшектеп, әр жеріне әртүрлі түс беру үшін арналған. Тор ең көп дегенде 50 ұяшықтан (тік немесе көлденең санағанда) тұрады. Тор сызықтарында орналасқан түйіндерді немесе қиылысу түйіндерін белгілеп, түстер палитрасынан керек түстермен “бояу” арқылы керекті құйманы аламыз.

Түстермен жұмыс. Color Draw-да түстермен жұмыс кең дамыған. Өте қуатты түстермен жұмыс істеу құралдары түсті таңдау және оны анықтау және олармен жұмыс істегенде үлкен мүмкіндіктер береді. Терезе–Түстер палитрасы–(керекті түс моделі) немесе Терезе–Докерлер–Түс командалары арқылы жапсырма терезеден түс моделіндегі түстердің пайыздық қатынастарын келтіруге және таңдалынған түсті жиекке немесе құймаға пайдалануға болады.

Түстермен жұмыста объектінің дайын құймасын басқа объектіге қолдану үшін тамызғыш және түс банкасы құралдары қолайлы. Осы жұмысты орындау үшін: Тамызғыш арқылы объекіден

керек түсті үстінен бір басқанда қалып-күй қатарында түс үлгісі пайда болады, Shrift пернесін басып тұрып – Түс банкасын таңдап керекті объектінің үстіне шерту арқылы құямыз.

Иілткіш эффектісі. Интерактивті иілткіш (интерактивная огибающая) құралы фигураны пішіні тіптен басқа фигураға айналдырады. Иілткіш құралын таңдағаннан кейін белгіленген фигура жиегінде қызыл үзік сызықты тік төртбұрыш пайда болады.

Сондағы түйіндерді созу немесе керу арқылы керегінше иілтеміз. Қасиеттік тақтада орналасқан дайын иілткіш формаларды пайдаланып әртүлі формалар алуға болады. Иілткіш құралының эффекттері барлық объектілерге қолдануға болады. Егер қолданушыға иілткіш құралымен жұмыс қиын болса, онда дайын фигураның иілуін пайданылады. Ол үшін қасиеттік тақтадағы “иілуді мынадан жасау” (создать контур из...) батырмасын қолданады. Бірінші иілетін фигураны иілткіш құралмен белгілеп, “иілуді мынадан жасау” батырмасын басып, бағыттаушымен иілу формасы керек фигураны бассаңыз жеткілікті. Ал дайын иілу формасын басқа фигураға қолдану үшін “иілу қасиеттерін көшіру” батырмасы қолданылады. Ол үшін иілткіш құралымен дайын иілу формасын белгілеп, “Иілу қасиеттерін көшіру” батырмасын басқаннан кейін бағыттаушымен керекті фигураны белгілесек, керекті фигура дайын иілу формасын қабылдайды.

Деформация эффектісі. Деформация эффектісі көбінесе табиғат объектілерін ұқсатып салуға қолданылады. Интерактивті деформация құралы 3 режимде: итер-тарт, зигзаг, айландыру бола алады. Бұл режимдер кезінде қасиеттік тақтада деформацияның амплитудасын, жиілігін және тағы басқаларын келтіруге болады.

Барлық режимде деформацияланған фигураның интерактивті маркерлерін қозғау арқылы сан түрлі пішіндер алуға болады.

Ағымдану және ореал – барлық эффектердің ішіндігі ең күштісі. Интерактивті ағымдану құралы. Ағымдану (перетекание) эффектісімен аралық объектілерді алуға болады.

Белгіленген екі объектіден аралық объектілерді алу үшін бірінші объектіні интерактивті ағымдану құралымен белгілеп екінші объектіге барып шертеміз, сонда керекті фигура пайда болады. Қасиеттік тақтадағы қасиеттерін (қадам саны және тағы басқа) өзгерту арқылы және өтпелі түс беру арқылы эффектіні күшейтуге болады.

Интерактивті ореал құралы. Бұл да объектінің түс тереңдігін көрсетуге арналған құрал. Интерактивті ореал құралы режимінде кез-келген объектіні таңдап, қасиеттік тақтада ореал бағытын ішке, сыртқа, центрге өзгертіп, интерактивті маркерлерді созу немесе қысу арқылы, кадамды азайту немесе көбейту арқылы керекті форманы аламыз. Сонан соң түс ауысуын пайдаланамыз.

Линза эффектісі. Линза эффектісі барлық Corel Draw X3-тің векторлық объектілеріне қолданылады. Линза эффектісін пайдалану үшін Эффектер- линза командасын орындап, ашылған терезеден линзаны таңдау керек. Алдын ала көру арқылы керекті эффектіні таңдаған соң қолдансын (применить) батырмасын басамыз.

Тереңдікті көрсету (имитация глубины) – суретті қызықты да, тартымды етіп көрсететін қарапайым әдіс. Интерактивті көлеңке құралы арқылы көлеңке көрсетіледі.

Құралдың қасиеттік тақтасын пайдалана отырып: көлеңкенің орналасуын, түсін, мөлдірлік коэффициентін және тағы басқа келтіру арқылы «тірі» сурет алуға болады. Көлеңке жиегін шаю арқылы сурет әсерлілірек көрінеді.

Фигуралық қима эффектісін пайдалану үшін Эффект- Фигуралық қима – Контейнерге орналастыру командасын орындап, қарайған тышқан белгісімен контейнерді көрсетеміз немесе керекті объектіні Таңдау режимінде тышқанның оң жағын басып жылжытып контейнерге апарып жібергенде, пайда болған контекстік мәзірден контейнерге орналастыру командасын орындауға болады. Ең ұтымдысы қалыптастыру жасырма терезесін пайдалану.

#### ӘДЕБИЕТ

- [1] Тайц А., Тайц А. Эффективная работа с Corel Draw. – СПб.: Питер, 2001. – 688 с.
- [2] Буляница Т. Дизайн на компьютере. – СПб.: Питер, 2003. – 320 с.
- [3] Кострова Л.А. Методика выполнения курсовых и дипломных работ с помощью компьютерных графических редакторов. – КазГАСА, 2004. – 52 с.
- [4] Журкабаева А.Б. Методика вывода на печать графических изображений в программах Corel Draw и Photoshop. – КазГАСА, 2005. – 16 с.

**REFERENCES**

- [1] Tajc A., Tajc A. Jeffektivnaja rabota s Corel Draw. SPb.: Piter, 2001. 688 s.
- [2] Buljanica T. Dizajn na komp'jutere. SPb.: Piter, 2003. 320 s.
- [3] Kostrova L.A. Metodika vypolnenija kursovych i diplomnyh работ s pomoshh'ju komp'juternyh graficheskikh redaktorov. KazGASA, 2004. 52 s.
- [4] Zhurkabaeva A.B. Metodika vyvoda na pechat' graficheskikh izobrazhenij v programmah Corel Draw i Photoshop. KazGASA, 2005. 16 s.

**ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ ВОЗМОЖНОСТИ ВЕКТОРНОЙ ГРАФИКИ Corel Draw**

**С. Н. Исабаева, Н. Б. Дүйсенова**

Казахский государственный женский педагогический университет, Алматы, Казахстан

**Ключевые слова:** инструменты Corel Draw, графический дизайн, клонирование, векторная графика, три размера графика.

**Аннотация.** В статье рассматривается использование программы векторные технологические возможности графики Corel Draw для проектирование фигур, макеты и рисунки использованием инструментов этой программы.

*Поступила 26.11.2014 г.*



**NEWS**

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES**

ISSN 1991-346X

Volume 6, Number 298 (2014), 49 – 54

**SOLVING ALGORITHM FOR PROBLEMS  
OF WATER FILTRATION THROUGH A DAM WITH BREAKS  
IN ORTHOTROPIC MEDIA****A. T. Kalbaeva, S. D. Kurakbaeva, A. M. Brenner**

M. Auezov South-Kazakhstan State University, Shymkent, Kazakhstan

**Key words:** algorithm, water filtration, dam with breaks, orthotropic media, method of the boundary elements

**Abstract.** In our work the main research results and algorithm of the numerical solving problems of water filtration through a dam with breaks are submitted in cases of isotropic and orthotropic media. In work we used the method of the boundary elements which have shown the good possibilities for solving problems with free boundaries. On the basis of this method the methodology for calculating liquid filtration through soil dam, allowing to solve various problems with free surfaces, taking into account breaks in the dam body, has been carried out.

УДК 519.67

**АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ФИЛЬТРАЦИИ ВОДЫ  
ЧЕРЕЗ ДАМБУ С ПРОРЫВАМИ В ОРТОТРОПНОЙ СРЕДЕ****А. Т. Калбаева, С. Д. Куракбаева, А. М. Бренер**

Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, Шымкент, Казахстан

**Ключевые слова:** алгоритм, фильтрации воды, дамба с прорывами, ортотропная среда, метод граничных элементов.

**Аннотация.** Исследование процесса фильтрации грунтовых и сточных вод из открытых водоемов через насыпные дамбы является актуальной задачей, так как непосредственно связано с вопросами защиты окружающей среды от катастроф. В статье представлены результаты исследования и алгоритм численного решения задач фильтрации воды через дамбу с прорывами в случаях изотропной и ортотропной среды. В работе использовали метод граничных элементов, продемонстрировавший большие возможности для решения сложных задач со свободными границами. На основе этого метода разработана методика расчета фильтрации жидкости через дамбу, позволяющая решать различные задачи со свободными поверхностями с учетом прорывов в перегородке, ограничивающей дамбу. Эта методика реализована в алгоритмах и программных комплексах. Достоверность получаемых данных с использованием методики и программ расчета подтверждена решением ряда тестовых задач и сравнением численных исследований с апробированными методами.

Применение методов математического моделирования для решения задач фильтрации через гидравлические сооружения является актуальной практической задачей [1]. Использование математического аппарата для решения такого класса задач позволяет провести анализ и дать оценку в случае аварийной ситуации, возникающей в результате трещинообразования гидротехнических сооружений под воздействием фильтрационного потока. Для решения данных задач целесообразно применение метода граничных элементов [2].

В данной статье приводится алгоритм численного решения задач фильтрации воды через прорывы дамбы в случае среды с изотропными и ортотропными свойствами [3-5].

Рассмотрим математическую модель среды плотины в случае однородности и изотропности. Поэтому задача сводится к уравнению Лапласа относительно скорости  $u$ :

$\Delta u = 0$  с граничными условиями:  $q=0$  на непроницаемой границе (поверхность AF на рисунке 1),  $u=const$  на поверхностях ABC и EF пористой среды,  $u = x_2$  на фильтрующей поверхности DE,  $u = x_2$  и  $q=0$  на свободной поверхности CD, где  $q = \frac{\partial u}{\partial n}$  - поток.

На рисунке 1а приведена схема грунтового блока образующего плотину, показаны уровни воды в водоеме и после фильтрации через блок, а также граничные условия для каждого участка границы грунтового блока, в том числе и для свободной границы CD (иначе будем называть свободной поверхностью).

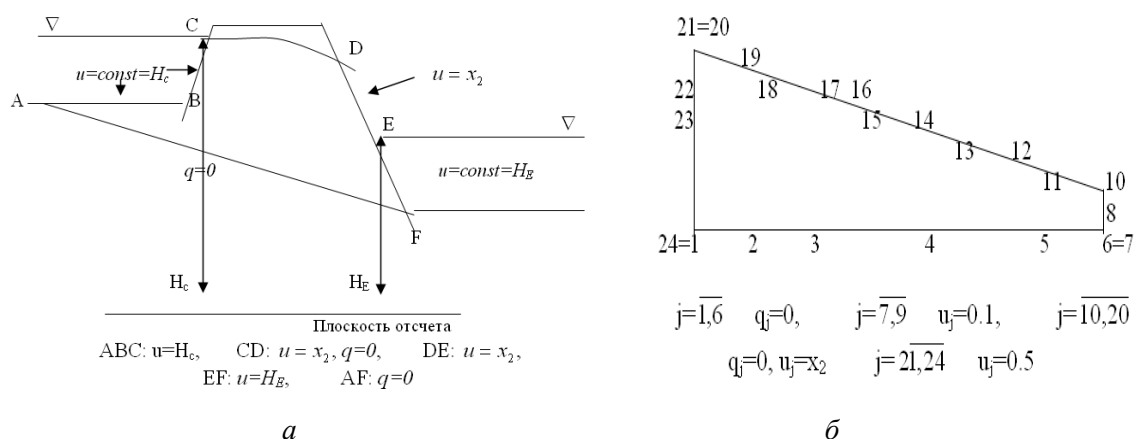


Рисунок 1 – Схема грунтового блока с граничными условиями

Для реализации метода граничных элементов вся граница грунтового блока разбита на 24 граничных элемента, как показано на рисунке 1б. Для простоты, не теряя физической сущности процесса, грунтовый блок плотины был принят в виде прямоугольной трапеции. Высота верхнего и нижнего бьефов составила соответственно 0,5 и 0,1 относительно поверхности отсчета. При численном расчете этой задачи начальное положение свободной поверхности задается произвольным образом. Затем в процессе решения положение свободной поверхности уточнялось на каждой итерации до необходимой точности. Окончательное положение свободной поверхности получено после 6-ой итерации [2].

Приведем алгоритм решения задачи:

1. Вводим узловые точки.

2. Находим нормали  $n^j = (n_1^j, n_2^j)$ ,

где  $n_1^j = \frac{x_2^{j+1} - x_2^j}{l_j}$ ;  $n_2^j = -\frac{x_1^{j+1} - x_1^j}{l_j}$  для линейных граничных элементов;

где  $l_j = \sqrt{(x_1^{j+1} - x_1^j)^2 + (x_2^{j+1} - x_2^j)^2}$  - длина j-го элемента.  $l_6, l_{20}, l_{24} = 0$ .

3. Находим коэффициенты влияния:  $x_1 = \frac{(1-\eta)x_1^j + (1+\eta)x_1^{j+1}}{2}$ ;

$x_2 = \frac{(1-\eta)x_2^j + (1+\eta)x_2^{j+1}}{2}$ ;  $\eta = -1$ :  $x_1 = x_1^j$ ,  $x_2 = x_2^j$  то есть  $(x_1^j, x_2^j)$   $\eta = 1$ :  $x_1 = x_1^{j+1}$ ,

$x_2 = x_2^{j+1}$  то есть  $(x_1^{j+1}, x_2^{j+1})$

4. Находим  $h_{ij}^1 = \int_{\Gamma_j} \varphi_1 q^* d\Gamma$  - криволинейный интеграл 1-го рода.

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}(1-\eta); \quad d\Gamma = |J|d\eta$$

$$q_{ij}^* = \frac{\partial u_{ij}^*}{\partial n^j} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(1/r_{ij})} \frac{(-1)}{r_{ij}^2} \frac{1}{2r_{ij}} (2(x_1^j - x_1^i)n_1^j + 2(x_2^j - x_2^i)n_2^j) = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{r_{ij}^2} (\overline{r_{ij}}, n^j)$$

$$\Rightarrow h_{ij}^1 = \int_{-1}^1 \frac{1-\eta}{2} \left( -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{r_{ij}^2} (\overline{r_{ij}}, \overline{n^j}) \right) |J| d\eta$$

где  $r^{ij} = (x_1^j - x_1^i, x_2^j - x_2^i)$ ;  $r_{ij}^2 = (x_1^j - x_1^i)^2 + (x_2^j - x_2^i)^2$

$(\overline{r_{ij}}, n^j) = (x_1^j - x_1^i)n_1^j + (x_2^j - x_2^i)n_2^j$  - скалярное произведение.

$$|J| = \sqrt{x_1'^2(\eta) + x_2'^2(\eta)} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}(x_1^{j+1} - x_1^j)\right)^2 + \left(\frac{1}{2}(x_2^{j+1} - x_2^j)\right)^2} - \text{якобиан} = \frac{d\Gamma}{d\eta}$$

Для вычисления этого определенного интеграла используем стандартные формулы гауссовых квадратур. В итоге приходим к виду:

$$h_{ij}^1 = \sum_{k=1}^4 \frac{1-\eta_k}{2} \left( -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{r_{ij_k}^2} (\overline{r_{ij_k}}, \overline{n^j}) \right) |J| \frac{W_k}{2}$$

точка  $j_k$  соответствует  $\eta_k$  на  $j$ -том элементе.

$W_k$  делится на два, т.к. сумма весов равна 2. Аналогично для  $h_{ij}^1$ :

$$h_{ij}^2 = \sum_{k=1}^4 \frac{1+\eta_k}{2} \left( -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{r_{ij_k}^2} (\overline{r_{ij_k}}, \overline{n^j}) \right) |J| \frac{W_k}{2}$$

Если  $j=6,20,24$ , то  $h_{ij}^1, h_{ij}^2 = 0$ , так как  $l_j=0$  и если  $i=j$ , то  $h_{ii}^1 = 0, h_{ii}^2 = 0$ , так как  $r_{iik} \perp n^i \Rightarrow (r_{iik}, n^j) = 0$   $r_{iik} \perp n^i \Rightarrow (r_{iik}, n^j) = 0$

Аналогично находим:

$$g_{ij}^1 = \int_{\Gamma_j} \varphi_1 u^* d\Gamma = \int_{-1}^1 \frac{1-\eta}{2} \left( \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{ij}} \right) |J| d\eta = \sum_{k=1}^4 \frac{1-\eta_k}{2} \left( \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{ij_k}} \right) |J| \frac{W_k}{2},$$

$$g_{ij}^2 = \int_{\Gamma_j} \varphi_2 u^* d\Gamma = \int_{-1}^1 \frac{1+\eta}{2} \left( \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{ij}} \right) |J| d\eta = \sum_{k=1}^4 \frac{1+\eta_k}{2} \left( \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{ij_k}} \right) |J| \frac{W_k}{2}.$$

Если  $j=6,20,24$ , то  $g_{ij}^1, g_{ij}^2 = 0$ , так как  $l_j=0$ ,

где  $g_{ij}^k = \int_{\Gamma_j} \varphi_k u_{iik}^* d\Gamma$  - коэффициент влияния, характеризующий связь между точкой  $I$  и узлом  $k$

на  $j$ -том элементе.

$$\text{Найдем: } g_{ii}^1 = \frac{1}{2\pi} \frac{l_i}{2} \left( \frac{3}{2} - \ln l_i \right), \quad g_{ii}^2 = \frac{1}{2\pi} \frac{l_i}{2} \left( \frac{3}{2} - \ln l_i \right)$$

5. Нахождение компонентов матриц  $H_{ij}$  и  $G_{ij}$ :

$$G_{ij} = g_{ij-1}^2 + g_{ij}^1, i = \overline{1, N}; j = \overline{2, N} \quad G_{i1} = g_{iN}^2 + g_{i1}^1, i = \overline{1, N}$$

$$H_{ij} = h_{ij-1}^2 + h_{ij}^1, i = \overline{1, N}; j = \overline{2, N}; i \neq j \quad H_{i1} = h_{iN}^2 + h_{i1}^1, i = \overline{1, N}$$

6. Получаем систему уравнений  $AY=F$ , которую решаем методом Гаусса и найдем решение  $Y = (y_1, \dots, y_N)$

$$j = \overline{1,6} : a_{ij} = H_{ij}, f_i = f_i + G_{ij}q_j \quad j = \overline{7,9} : a_{ij} = -G_{ij}, f_i = f_i - H_{ij}u_j$$

$$j = \overline{10,20} : a_{ij} = H_{ij}, f_i = f_i + G_{ij}q_j \quad j = \overline{21,N} : a_{ij} = -G_{ij}, f_i = f_i - H_{ij}u_j$$

7. На свободной границе  $j = \overline{10,20} : u_j = y_j$  сравнением  $u_j$  и  $x_2^j$  по дополнительному условию: максимальная разность между вычисленными значениями потенциала и высотой каждого узла, лежащего на свободной поверхности, должна не превышать 0,1% высоты, то есть если  $\frac{|u_j - x_2^j|}{u_j} < 0,001$  при  $j = \overline{10,20}$ , то искомое решение получено, если это не так, то  $x_2^j = u_j$  и

переходим к шагу 2. В случае, если со стороны водоема имеется преграда, предотвращающая фильтрацию, то возможно нарушение герметичности преграды с последующим прорывом дамб. На рисунке 2 показаны некоторые возможные случаи расположения прорывов:

а) два прорыва в непроницаемой преграде дамбы (рисунок 2а), б) прорыв в центре преграды дамбы, а также на дне непроницаемая пластина (рисунок 2б). Схема грунтового блока дамбы в рассматриваемых случаях показаны на рисунке 2в, 2г.

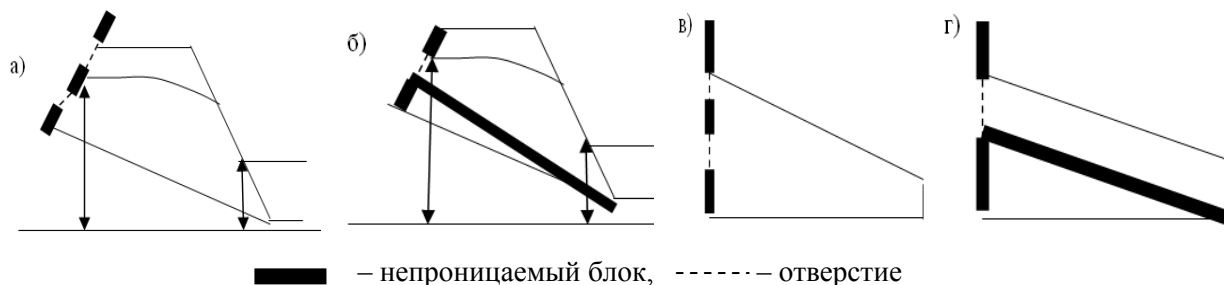


Рисунок 2 – Различные комбинации частичных прорывов дамбы: а, в – два прорыва; б, г – прорыв в центре, на дне непроницаемая пластина

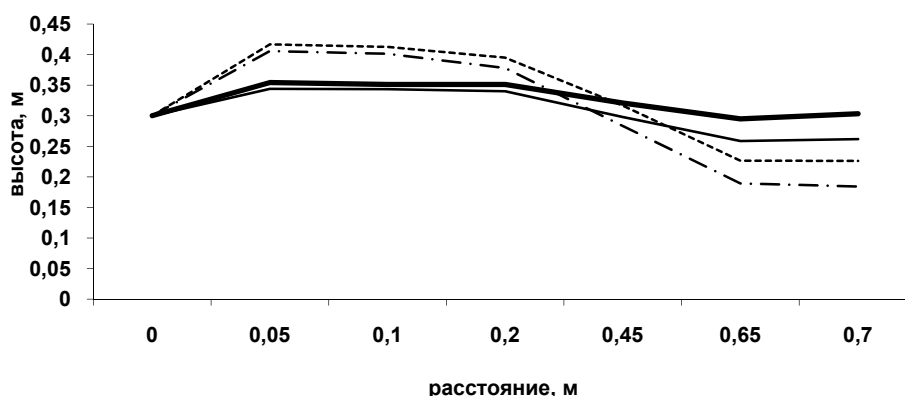
В результате численного эксперимента была получена картина линий тока и определено положение свободной границы при фильтрации жидкости через дамбу, ограниченную перегородкой с прорывами.

Как видно из рисунка 3, при фильтрации воды через дамбу с двумя прорывами в перегородке дамбы свободная поверхность оказалась выше, т.е. смачивание грунта происходит в большем объеме, чем при прорыве в центре перегородки, т.е. при топографии, соответствующей рисунку 2г).

Аналогичное исследование было проведено с целью исследования изменения положения свободной границы в случае ортотропной среды, т.е. когда коэффициенты фильтрации зависят от направления течения в пористой среде. Такой случай является довольно распространенным в реальных условиях. Разрешающее уравнение в осях координат, связанных с направлением ортотропии, можно записать для двумерного случая в виде  $k_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + k_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0$ , где  $k_i$  -

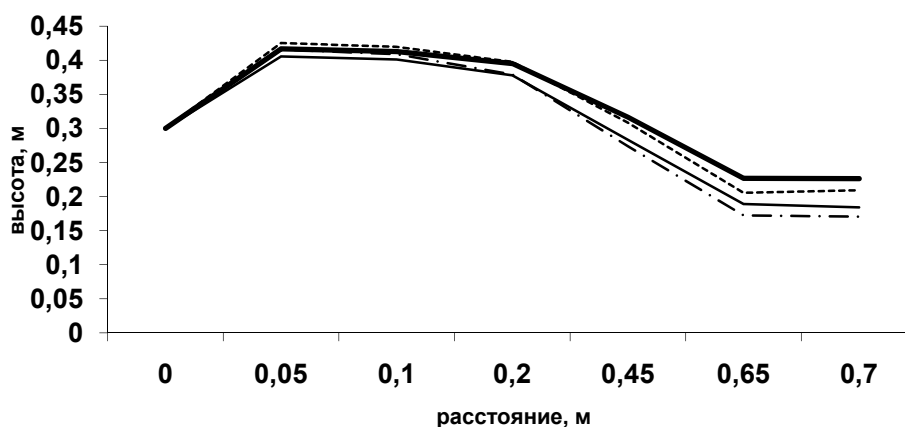
характеристики среды в направлении  $i$ -й ортотропии. Фундаментальным решением этого уравнения является функция  $u^* = \frac{1}{(k_1 k_2)} \ln \frac{1}{r(\xi, x)}$  [1].

Некоторые результаты расчетов показаны на рисунках 3, 4.



- — — — — два прорыва (ортотропная среда)
- — — — — прорыв в центре, на дне непроницаемая пластина (ортотропная среда)
- — — — — два прорыва (изотропная среда)
- · — · — прорыв в центре, на дне непроницаемая пластина (изотропная среда)

Рисунок 3 – Сравнение расчетных результатов для потенциала скорости при течении через дамбу для изотропной и ортотропной среды при коэффициентах  $k_1 = 0.9$ ,  $k_2 = 0.2$



- — — — — два прорыва (изотропная среда)
- — — — — прорыв в центре, на дне непроницаемая пластина (изотропная среда)
- — — — — два прорыва (ортотропная среда)
- · — · — прорыв в центре, на дне непроницаемая пластина (ортотропная среда)

Рисунок 4 – Сравнение расчетных результатов для потенциала скорости при течении через дамбу для изотропной и ортотропной среды при коэффициентах  $k_1 = 0.4$ ,  $k_2 = 0.8$

По результатам исследования можно сделать следующие выводы:

1. При фильтрации воды через дамбу с двумя прорывами в перегородке дамбы свободная поверхность располагается выше, т.е. смачивание грунта происходит в большем объеме, чем при прорыве в центре перегородки в случае ортотропной среды при различных коэффициентах.

2. Смачивание тела дамбы в случае изотропной среды происходит в большем объеме чем для ортотропной среды.

Проведенное исследование подтверждает возможности использования метода граничных элементов для решения сложных задач фильтрации жидкости в неоднородных средах. Поскольку такие задачи часто возникают в процессе проектирования различных гидротехнических сооружений, актуальной задачей в плане развития данной методологии является разработка алгоритмов решения нестационарных задач фильтрации с учетом развития струйных течений в грунте. Именно эти задачи и будут предметом дальнейших исследований авторов.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Бреббия К., Телес Ж., Врробел Л. Методы граничных элементов. – М.: Мир, 1987. – 524 с.
- [2] Калбаева А.Т., Бердалиева Г.А. Численное исследование фильтрации жидкости через дамбу с водонепроницаемыми закладными элементами // Сборник научных трудов аспирантов, магистрантов, стажеров-исследователей ЮКГУ им. М. Ауезова. – Шымкент, 2002. – № 3. – С. 8-11.
- [3] Калбаева А.Т., Куракбаева С.Д., Серимбетов М.А. Применение метода граничных элементов для решения задач фильтрации воды через дамбу // Наука и образование Южного Казахстана. – 2010. – № 2(81). – С. 84-87.
- [4] Калбаева А.Т., Куракбаева С.Д., Бренер А.М. Моделирование фильтрации через дамбу с прорывами в ортотропных средах // Сборник статей V Междунар. науч. конф. «Инновационное развитие и востребованность науки в современном Казахстане» (Ч. IV) естественно-технические науки. – Алматы, 24-25 ноября, 2011. – С. 105-108.
- [5] Калбаева А.Т., Куракбаева С.Д., Бренер А.М. Решение задач фильтрации воды через дамбу с прорывами // Наука и образование Южного Казахстана. – 2010. – № 6(85). – С. 84-87.

#### REFERENCES

- [1] Brebbija K., Teles Zh., Vroubel L. *Metody granichnyh jelementov*. M.: Mir, 1987, 524 p. (in Russ.).
- [2] Kalbaeva A.T., Berdalieva G.A. *Chislennoe issledovanie fil'tracii zhidkosti cherez dambu s vodonepronaemymi zakladnymi jelementam*. *Sbornik nauchnyh trudov aspirantov, magistrantov, stazherov-issledovatelej UKGU im. M.Auezova*. Shymkent, 2002, N 3. P. 8-11 (in Russ.).
- [3] Kalbaeva A.T., Kurakbaeva S.D., Serimbetov M.A. *Primenenie metoda granichnyh jelementov dlja reshenija zadach fil'tracii vody cherez dambu*. *Nauka i obrazovanie Juzh-nogo Kazahstana*. 2010. N 2(81). P. 84-87. (in Russ.).
- [4] Kalbaeva A.T., Kurakbaeva S.D., Brener A.M. *Modelirovanie fil'tracii cherez dambu s proryvami v ortotropnyh sredah*. *Sbornik statej V Mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii «Innovacionnoe razvitie i vostrebovannost' nauki v sovremennom Kazahstane» (chast' IV) estestvenno-tehnicheskie nauki*. Almaty: 24-25 nojabrja, 2011. P. 105-108. (in Russ.).
- [5] Kalbaeva A.T., Kurakbaeva S.D., Brener A.M. *Reshenie zadach fil'tracii vody che-rez dambu s proryvami*. *Nauka i obrazovanie Juzhnogo Kazahstana*. 2010. N 6(85). P. 84-87. (in Russ.).

### ОРТОТРОПТЫҚ ОРТАДАҒЫ СУ БӨГЕТІН ЖЫРЫП ӨТКЕН СУДЫҢ СҮЗГІЛЕНУ ЕСЕБІН ШЕШУДІҢ АЛГОРИТМІ

А. Т. Калбаева, С. Д. Куракбаева, А. М. Бренер

М. О. Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті, Шымкент, Қазақстан

**Тірек сөздер:** алгоритм, судың сүзгіленуі, жырылған су бөгеті, ортотроптық орта, шекаралық элементтер әдісі.

**Аннотация.** Мақалада ортотроптық және изотроптық ортадағы су бөгетін жырып өткен судың сүзгілену есебін зерттеудің нәтижелері және сандық шешудің алгоритмі келтірілген. Шекаралық элементтер әдісін және есептеу бағдарламасын қолданып алынған нәтижелердің дұрыстығы бірқатар тестілеу есептерін шешу, сандық зерттеулерді сыналған әдістермен және нақты мәліметтермен салыстыру арқылы тексерілген.

Поступила 26.11.2014 г.

**NEWS**

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES**

ISSN 1991-346X

Volume 6, Number 298 (2014), 55 – 59

**CHANGES OF MORPHOLOGICAL SURFACE  
OF POLYCRYSTALLINE SILICON  
UNDER THE ISOTHERMAL ANNEALING****T. Kosherov, A. Serik**

Kazakh National Technical University named after K. Satpayev, Almaty, Kazakhstan.

E-mail: aigera-11@mail.ru

**Key words:** modification, dislocation, homogenization, temperature gradient, oxides.

**Abstract.** In this work the features of changes in the surface of polycrystalline silicon under the influence of a fixed temperature treatment in varying time of heating are identified. There is shown that under isothermal effects the silicon surface is modified differently with activating movement and redistribution of dislocations, there is the surface's homogenization process and the fixing of surface layer of silicon dioxide. So it is expecting, when a thermal annealing of silicon depending on processing time, local areas of a significant layer and a formation of oxides may appear.

УДК 536.4:621.315.592

**ИЗМЕНЕНИЕ МОРФОЛОГИИ ПОВЕРХНОСТИ  
ПОЛИКРИСТАЛЛИЧЕСКОГО КРЕМНИЯ  
ПРИ ИЗОТЕРМИЧЕСКИХ ОТЖИГАХ****Т. С. Кошеров, А. С. Серик**

Казахский национальный технический университет им. К. И. Сатпаева, Алматы, Казахстан

**Ключевые слова:** модификация, дислокация, гомогенизация, градиент температур, оксиды.

**Аннотация.** В работе выявлены особенности изменения поверхности поликристаллического кремния под влиянием фиксированной температурной обработки в варьируемом времени прогрева. Показано, что при изотермических воздействиях поверхность кремния модифицируется по-разному, при этом активируются движения и перераспределение дислокаций, идет процесс гомогенизации поверхности и фиксирование поверхностного слоя из диоксида кремния. Предполагается, что при термических отжигах кремния в зависимости от времени обработки могут появляться локальные области значительного слоя и образования собственных оксидов.

Эффективность работы приборов на основе кремния существенно зависит от свойств и структуры поверхностного слоя, от качества ее поверхностей. Качество поверхности кремния определяется, в частности, кристаллическим совершенством поверхностных слоев и степенью физико-химической чистоты. Различные виды обработки, в том числе термические обуславливают неоднозначную модификацию и претерпеваемые изменения поверхности кремния. Температурная обработка обуславливает изменение объемной и поверхностной структуры кремния за счет образования и диффузии точечных дефектов, движения и размножения дислокаций, увеличения подвижности поверхностных атомов.

Известно, что параметры термической обработки, такие как температура, скорость нагревания и охлаждения, длительность воздействия, внешняя среда, могут обуславливать неоднозначные изменения в структуре и поверхности кремния.

Длительные прогревания вызывают образования кислородных преципитатов [1], выделение кремния в реакцию с кислородом и образование диоксида кремния. Термические напряжения приводят к возникновению дислокаций. Под действием градиента температур дислокации перемещаются в своей плоскости скольжения и могут выходить из объема образца на поверхность, определяя ее топологию [2, 3].

Термоотжиг полупроводниковых структур приводит к твердофазной эпитаксиальной кристаллизации упорядочивания расположения атомов на границе раздела и движению этой границы к поверхности.

Нагревание полупроводникового материала может привести к высоким пространственным градиентам температуры, и иногда обеспечивает возможность плавления.

Цель настоящей работы – выявить особенности изменения поверхности поликристаллического кремния под влиянием фиксированной температурной обработки ( $T = 800^\circ\text{C}$ ) в варьируемом времени прогрева.

**Методы и материалы.** В качестве исследуемого материала использовали поликристаллический полупроводниковый кремний (С) Si с удельным сопротивлением  $3 \text{ Ом} \cdot \text{см}$  в виде пластин размером  $1 \text{ см}^2$ . Температурная обработка кремниевых пластин проводилась на воздухе при температуре  $800^\circ\text{C}$  в течение 10, 30, 60, 120, 240 и 360 минут. После термообработки образцы исследовались на рентгеновском рефрактометре  $x'$ PertPRO фирмы Phillips. Морфология поверхности образцов кремния после термической обработки исследовалась методом атомной силовой микроскопии (АСМ) производства NT-MDT, модель Интегра-Прима.

**Результаты и их обсуждение.** На рисунке 1 представлены результаты полуколичественного анализа состава фаз в зависимости от времени термического отжига при  $600$  и  $800^\circ\text{C}$ . По мере увеличения времени термического отжига ( $T = 600^\circ\text{C}$ ) изменение состава фаз кремния приводит к появлению диоксида кремния ( $\text{SiO}_2$ ) (рисунок 1) и его постоянному росту. Несколько иная картина при термическом отжиге кремния при  $800^\circ\text{C}$ . Здесь мы видим резкие скачки. Так, при 30-минутном термическом отжиге и 120 минутном величина фазового состояния кремния падает до минимального значения, так как в этих интервалах времени отжига образцы появившегося диоксида кремния достигают своего максимального значения. Одновременно наблюдаем появление силицидов кремния, стишовита при 30 минутном отжиге образца (точка А на рисунке 1).

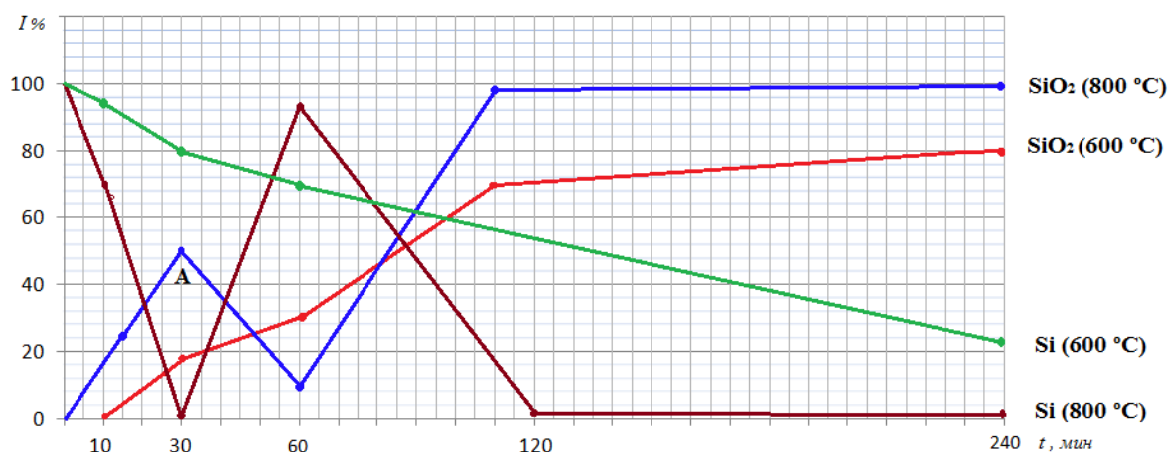


Рисунок 1 – Изменение состава фаз Si, SiO<sub>2</sub> в зависимости от времени термоотжига образца и температуры (точка А-появление силицидов кремния и стишовита)

Следовательно, изотермоотжиг при  $T = 600^\circ\text{C}$ , можно сказать, приводит к изменению реальной структуры кремния. Структура, изначально является не идеальной, т.е. в ней имеет место содержание точечных дефектов, микродефектов и дислокаций, то при нагреве кремниевого кристалла в ней образуются термически активируемые процессы, которые переводят структуру кремния в термодинамически более устойчивое состояние с меньшей свободной энергией. Такие процессы повышают структурное совершенство кремния за счет стока точечных дефектов к дислокациям,



межфазным границам, а также за счет перераспределения дислокаций [2, 4]. При отжиге при 600 °С в зависимости от времени прогрева образца мы замечаем активацию движения дислокаций, ее увеличение в размерах и выхода их на поверхность, т.е. к гомогенизации поверхности кремния за счет стока дислокаций к дефектным областям. Одновременно, по мере увеличения времени термоотжига, наблюдаем увеличения в размерах как количественно, так объемно на поверхности кремния диоксида кремния (рисунок 1).

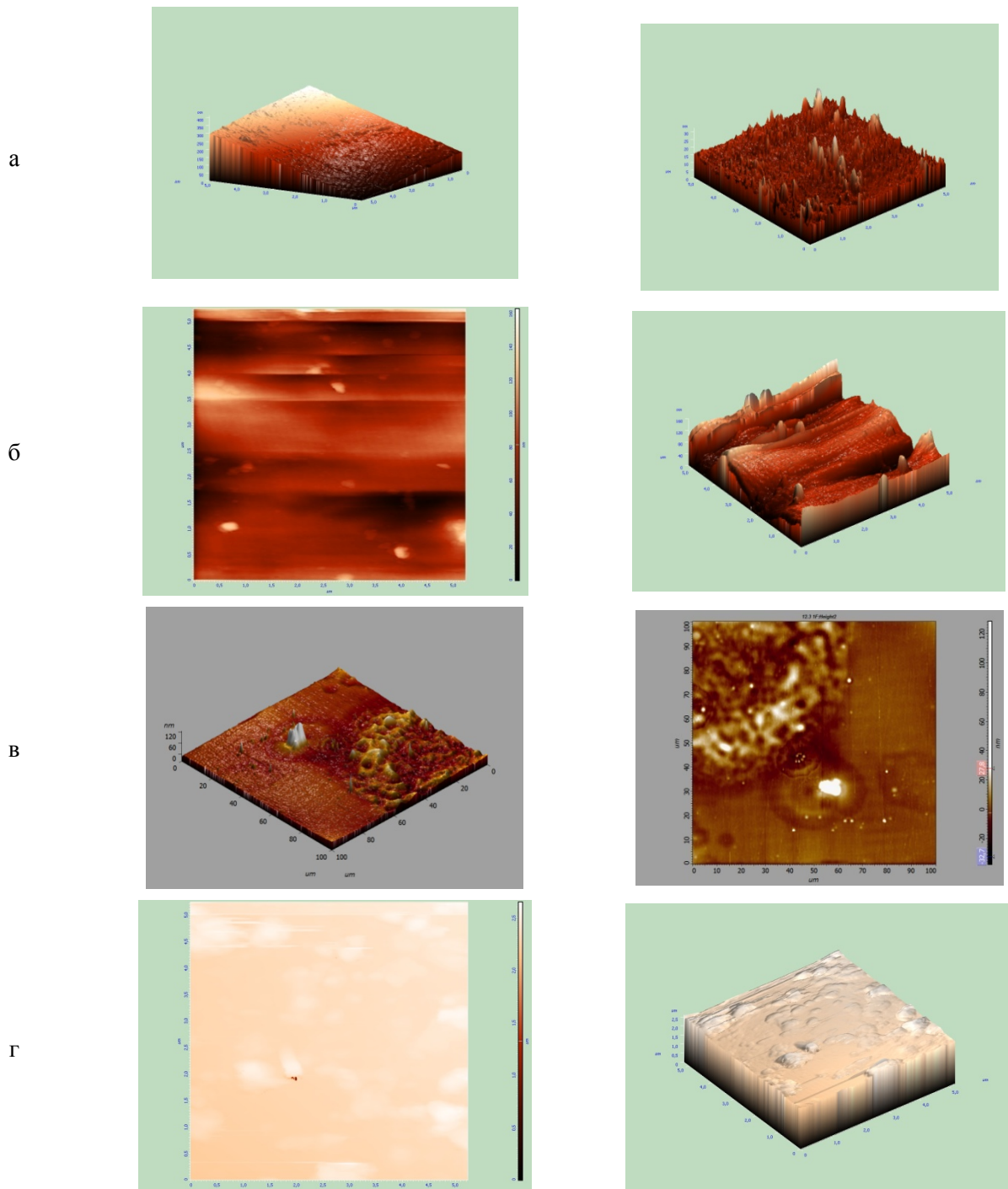


Рисунок 2 – Пирамидальные и структуры проплавленного кремния при термических отжигах:  
а)  $t = 10$  мин; б)  $t = 30$  мин; в)  $t = 120$  мин; г)  $t = 360$  мин

Наблюдаются аналогическая зависимость и происходящие выше процессы, но более выраженную, можно заметить при 800 °С прогреве образца. При этом образование диоксида кремния и ее рост при  $t = 30$  минутном прогреве и достижения наибольшего значения – при 120 минутном термоотжиге (рисунок 1). Видимо, здесь происходит образование диоксида кремния в два этапа: сначала кремний на поверхности активно взаимодействует с кислородом воздуха атмосферы, а затем в реакцию вступает по мере увеличения времени прогрева, кислород диффундирующий с приповерхностного слоя и объема образца. Этот диоксид кремния покрывает в виде пленки всю поверхность образца.

Анализируя серию АСМ изображений, подверженного термоотжигу кремния, можно заметить, что по мере увеличения времени отжига, изменения рельефа поверхности (рисунок 2). Новым структурным аспектом, выявленным при этом, было наличие пирамидальных структур. Данные пирамидальные структуры могут находиться как в обособленном состоянии, так и в совокупности. Их размеры в отдельных случаях достигают несколько десятков нанометров. При этом поверхность несколько деформируется. По площади такие скопления невелики, сами пирамидальные структуры имеют большой разброс по размерам и по форме. С увеличением времени отжига увеличивается площадь пирамидальных скоплений. Одновременно увеличиваются по форме и размерам и виды деформаций поверхностей кремния.

Замечено также, что при 240 минутной термообработке образца имеет место увеличение плотности пирамидального скопления, а при 360 минутном прогреве кремния наступает оплавление всей поверхности и выявлено формирование периодических структур (рисунок 2). Такая модификация поверхности обусловлена наличием значительного градиента температур и возможно, способствует закалке высокотемпературных состояний кремния.

**Заключение.** Результаты исследования показали, что при изотермических воздействиях поверхность кремния модифицируется по-разному. Отжиг при различном времени воздействия активизирует движение и перераспределение дислокаций на поверхности кремния, способствует гомогенизации поверхностей и формированию поверхностного слоя из диоксида кремния. Термообработка поликристаллического кремния не обеспечивает относительно равномерное распределение температуры и скорости нагрева в объеме и на поверхности образцов. При этом наблюдаются и локальные области поверхности кремния, которые наиболее интенсивно прогреваются и подвергаются окислению и пирамидальные образования, структура которых как по плотности, размеру и форме не одинаковы. Это дает основание высказать предположение, что при термоотжигах кремния в зависимости от времени обработки могут появиться локальные области значительного градиента температур, что сказывается на изменении структур поверхностного слоя и образовании собственных оксидов.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Светухин В.В. Моделирование современных перспективных кремниевых технологий, основанных на управлении процессами кластеризации и преципитации кислорода в кремнии. – Ульяновск: УГУ, 2006. – 108 с.
- [2] Горелик С.С., Дашевский М.Е. Материаловедение полупроводников и диэлектриков. – М.: Металлургия, 1988. – 574 с.
- [3] Кошеров Т.С., Ермолаев В.Н., Солтан Р., Сейтов А.С. Влияние термической обработки кремния на наноструктуру и морфологию поверхности // Сб. докл. междунар. конф. «Коллоиды и нанотехнологии в индустрии». – Алматы: КазНТУ, 2012. – С. 94.
- [4] Ашиккалиева К.Х., Каныгина О.Н., Васильченко А.С. Модификация поверхности монокристаллического кремния при изотермическом и лазерном отжигах. – Оренбург: Вестник ОГУ, 2012. – № 9. – С. 96.

#### REFERENCES

- [1] Svetuhin V.V., Simulation of modern-looking silicon technologies based on process management and clustering of oxygen precipitation in silicon. Ulyanovsk Ulyanovsk State University, 2006. 108 p. (in Russ.).
- [2] Gorelik S.S., Dashevskii M.J. Materials science of semiconductors and dielectrics. Moscow: Metallurgy, 1988. 574 p. (in Russ.).
- [3] Kosharov T.S., Yermolaev V.N., Soltan R., Seitov A.S. Effect of heat treatment on the silicon structure and morphology of the surface. Coll. rep. Int. Conf. "Colloids and nanotechnology industry". Almaty: KazNTU, 2012. P. 94 (in Russ.).
- [4] Ashikkaliev K.H., Kanygina O.N., Vasilchenko A.S. Surface modification of monocrystalline silicon under isothermal and laser annealing. Vestnik OSU, 2012. N 9. P. 96 (in Russ.).

**ИЗОТЕРМИЯЛЫҚ КҮЙДІРУ БАРЫСЫНДАҒЫ ПОЛИКРИСТАЛДЫ  
КРЕМНИЙ БЕТІНІҢ МОРФОЛОГИЯЛЫҚ ӨЗГЕРІСТЕРІ****Т. С. Көшеров, А. С. Серік**

Қ. И. Сәтбаев атындағы Қазақ ұлттық техникалық университеті, Алматы, Қазақстан

**Тірек сөздер:** модификация, дислокация, гомогенизация, температуралар градиенті, оксидтер.

**Аннотация.** Берілген жұмыста ауыспалы қыздыру уақытындағы тұрақталған температуралық өңдеудің әсерінен поликристалды кремний бетінің өзгеріс ерекшеліктері анықталған. Изотермиялық әсер ету барысында кремний бетінің модификациясы әртүрлі өтіп, сонымен қатар дислокациялардың қозғалысы мен қайта үлестендірілуі белсендендіріліп, беттің гомогенизациясы мен кремний диоксидінен түзілген жоғарғы қабаттың бекітілу үдерістері жүзеге асырылады. Ықтималынша, өңдеу уақытына байланысты кремнийді термиялық күйдіру кезінде маңызды қабаттардың локальды аймақтары пайда болып, өзіндік оксидтер түзілуі мүмкін.

*Поступила 26.11.2014 г.*

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 6, Number 298 (2014), 60 – 63

## CRITERION FOR CONNECTIVITY IN PARTIALLY ORDERED STRUCTURES

B. Sh. Kulpeshov

International University of information technologies, Almaty, Kazakhstan.

E-mail: b.kulpeshov@iitu.kz

**Key words:** model, base, number, language, element, table, natural, great number, infinitely, information.

**Abstract.** In the present work partially ordered structures with the condition of weak o-minimality are studied. A criterion for connectivity of the set of realizations of every complete 1-type over the universe in partially ordered structures of finite width has been obtained.

УДК 510.67

## КРИТЕРИЙ СВЯЗНОСТИ В ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫХ СТРУКТУРАХ

Б. Ш. Кулпешов

Международный университет информационных технологий, Алматы, Казахстан

**Ключевые слова:** модель, база, число, язык, элемент, таблица, натуральные, множество, бесконечно, информация.

**Аннотация.** В настоящей работе исследуются частично упорядоченные структуры с условием слабой о-минимальности. Получен критерий связности множества реализаций каждого полного 1-типа над основным множеством в частично упорядоченных структурах конечной ширины.

Понятие о-минимальности возникло более двадцати лет назад [1] и доказало свою полезность и важность. С тех пор появились многочисленные обобщения о-минимальности. Отметим только некоторые из них: слабая о-минимальность [2, 3], квази-о-минимальность [4, 5], циклическая минимальность [6], слабая циклическая минимальность [7], о-стабильность [8, 9]. Первые два понятия относятся к линейно упорядоченным структурам, а следующие два понятия – к циклически упорядоченным структурам, и основная идея этих обобщений состоит в том, что определяемые множества соответствующих моделей предполагаются представимыми в виде булевой комбинации достаточно простых множеств. Понятие о-стабильности (или упорядоченной стабильности) является обобщением о-минимальности несколько в другом русле, а именно в том, что любое сечение имеет малое число расширений до полных 1-типов. Вспомним, что любое сечение в о-минимальной структуре расширяется единственным образом до полного 1-типа [1], а в слабо о-минимальной структуре имеет самое большее два расширения [10].

Естественно попытаться обобщить понятие о-минимальности на частично упорядоченные структуры, что и было сделано первоначально в работе [11]. Структура вида  $\langle M, =, <, \dots \rangle$ , где  $\langle M, < \rangle$  – частично упорядоченное множество, называется *частично упорядоченной структурой*. В каждой частично упорядоченной структуре, не являющейся линейно упорядоченной, появляется отношение несравнимости элементов  $\diamond$ , т.е.

$$x \diamond y := \neg(x = y) \wedge \neg(x < y) \wedge \neg(x > y).$$

Любое семейство попарно несравнимых элементов частично упорядоченной структуры называется *антицепью*. Множество  $A \subseteq M$  называется *выпуклым*, если для любых  $a, b \in A$  и  $c \in M$  условие  $a < c < b$  влечет  $c \in A$ . Выпуклыми являются, в частности, точки и интервалы, определяемые обычным образом:

$$(a, b) = \{x \in M: a < x < b\},$$

$(a, b]$ ,  $[a, b]$ ,  $(a, \infty)$ ,  $(-\infty, b]$ , где  $a, b \in M$ . Очевидно, что антицепи также являются выпуклыми множествами.

*Слабо частично о-минимальной* (или *слабо р.о-минимальной*) структурой называется частично упорядоченная структура  $M = \langle M, =, <, \dots \rangle$  такая, что любое определенное (с параметрами) подмножество структуры  $M$  является объединением конечного числа выпуклых множеств в  $M$ . Теорию  $T$  назовем *слабо частично о-минимальной*, если такова каждая ее модель.

В настоящей статье мы обсуждаем некоторые свойства слабо частично о-минимальных структур как находящиеся в контрасте со слабо о-минимальными структурами, так и совпадающие с ними. Например, мы можем построить слабо частично о-минимальную структуру, в которой имеется сечение, расширяющееся до любого конечного или бесконечного числа полных 1-типов, или слабо частично о-минимальную структуру, в которой алгебраическое замыкание подмножества структуры не совпадает с его определенным замыканием, и т.д.

**Факт 1.** Пусть  $M = \langle M, \Sigma \rangle$  – слабо частично о-минимальная структура. Тогда любая параметрически определяемая линейно упорядоченная подструктура  $M' = \langle M', \Sigma \rangle$  структуры  $M$  является слабо о-минимальной структурой.

Множество  $A \subseteq M$ , где  $M$  – частично упорядоченная структура, назовем *связным*, если  $A$  выпукло и для любых элементов  $a, b \in A$   $\neg(a \diamond b)$ . Ранее в слабо о-минимальном случае [10] было показано, что множество реализаций любого полного 1-типа над множеством является выпуклым (которое является связным в частично упорядоченной постановке). В слабо частично о-минимальном случае это свойство не выполняется.

**Пример 2.** Пусть  $M = \langle M, =, < \rangle$  – частично упорядоченная структура, где  $M = D_1 \cup D_2 \cup A$ ,  $D_i$  есть копия  $\omega^* + \omega + Q + \omega^* + \omega$  для каждого  $1 \leq i \leq 2$ ,  $A$  есть копия  $Q$ ,  $D_1 \diamond D_2$ ,  $A < D_i$  для каждого  $1 \leq i \leq 2$ .

Можно доказать, что структура  $M$  является слабо частично о-минимальной. Очевидно, что она имеет ширину 2. Рассмотрим следующие формулы:

$$\psi(x) := \forall z_1 \forall z_2 (z_1 < x < z_2 \rightarrow \exists t_1 \exists t_2 (z_1 < t_1 < x < t_2 < z_2))$$

$$\phi(x) := \exists y (y < x \wedge \psi(y))$$

Пусть  $p(x) := \{x > a \mid a \in A\} \cup \{\psi(x)\} \cup \{\phi(x)\}$ . Очевидно, что  $p$  определяет тип над  $A$ , т.е.  $p \in S_1(A)$ . Нетрудно понять, что  $p(M)$  является объединением двух связных множеств.

**Пример 3.** Пусть  $M = \langle M, =, < \rangle$  – частично упорядоченная структура, где  $M = \bigcup_{i < \omega} D_i \cup A$ ,  $D_i$  есть копия  $\omega^* + \omega + Q + \omega^* + \omega$  для каждого  $i < \omega$ ,  $A$  есть копия  $Q$ ,  $D_i \diamond D_j$  для любых  $i, j: i \neq j$ ,  $A < D_i$  для каждого  $i < \omega$ .

Можно доказать, что структура  $M$  является слабо частично о-минимальной. Очевидно, что она имеет бесконечную ширину. Рассматривая в качестве  $\psi(x), \phi(x)$  и  $p$  те же самые формулы и тип как в Примере 2, мы видим, что  $p(M)$  является объединением бесконечного числа связных множеств.

Пусть  $q(x) := \{x \diamond c \mid c \in M\} \cup \{\psi(x)\} \cup \{\phi(x)\}$ . Очевидно, что  $q$  определяет тип над  $M$ , т.е.  $q \in S_1(M)$ . Очевидно, что для каждого  $n < \omega$  существует элементарное расширение  $N$  структуры  $M$  такое, что  $q(N)$  является объединением  $n$  связных множеств; а также существует элементарное

расширение структуры  $M$ , в котором множество реализаций типа  $q$  является объединением бесконечного числа связных множеств.

**Теорема 4.** Пусть  $M$  – частично упорядоченная структура конечной ширины. Тогда следующие условия эквивалентны:

(1)  $M$  слабо частично о-минимальна.

(2) Множество реализаций каждого полного 1-типа над  $M$  является связным в любом элементарном расширении структуры  $M$ .

*Доказательство Теоремы 4.* (1)  $\Rightarrow$  (2). Пусть  $M$  – слабо частично о-минимальна. Рассмотрим произвольную  $M$ -определимую формулу  $\phi(x)$ . В силу слабой частичной о-минимальности  $\phi(M)$  есть объединение конечного числа выпуклых множеств, каждое из которых является определимым над  $M$ . Действительно, в силу того что  $M$  имеет конечную ширину, существует  $M$ -определимая формула  $\phi'(x)$  такая, что  $\phi'(M) = \phi(M)$  и  $\phi'(M)$  есть объединение конечного числа связных  $M$ -определимых множеств:  $\phi'(x) \equiv \bigvee_{i=1}^k \phi'_i(x)$ ,  $\phi'_i(M)$  связно для каждого  $i \leq k$ ,  $\phi'_i(M) \cap \phi'_j(M) = \emptyset$  для любых  $i, j: i \neq j$ .

Пусть  $p$  – произвольный 1-тип над  $M$ . Очевидно, что  $\phi'(x) \in p \Leftrightarrow$  существует единственный номер  $i \in \{1, \dots, k\}$  такой, что  $\phi'_i(x) \in p$ . Также ясно, что  $\phi'_i(x)$  – связная формула тогда и только тогда, когда

$$M \models \forall x \forall y [\phi'_i(x) \wedge \phi'_i(y) \rightarrow \neg(x \diamond y) \wedge (x < y \rightarrow \forall t (x < t < y \rightarrow \phi'_i(t)))]$$

т.е. это свойство является элементарным и поэтому имеет место в любом элементарном расширении структуры  $M$ . Откуда имеем, что  $p(N)$  связно в любом элементарном расширении  $N$  структуры  $M$ .

(2)  $\Rightarrow$  (1). Допустим противное:  $M$  не слабо частично о-минимальна. Следовательно, существует  $M$ -определимая формула  $\phi(x)$  такая, что  $\phi(M)$  есть объединение бесконечного числа выпуклых множеств. Так как  $M$  имеет конечную ширину, то существует бесконечно линейно упорядоченное множество  $M' \subset M$  такое, что  $\phi(M')$  есть объединение бесконечного числа выпуклых множеств. Тогда  $M'$  не является слабо о-минимальной структурой, противоречия Теореме 3.1 [10].

В слабо о-минимальном случае алгебраическое замыкание любого подмножества структуры совпадает с его определимым замыканием. Однако в слабо частично о-минимальном случае это свойство также не выполняется.

**Пример 5.** Пусть  $M = \langle M, =, < \rangle$  – частично упорядоченная структура, где  $M$  есть непересекающееся объединение  $Q_0, \{a\}, N_1$  и  $N_2$ ,  $Q_0$  имеет тип  $Q$ ,  $N_1$  и  $N_2$  имеют тип  $\omega$ , причем  $Q_0 < a < N_1$ ,  $Q_0 < a < N_2$ ,  $N_1 \diamond N_2$ .

Можно доказать, что структура  $M$  является слабо частично о-минимальной. Рассмотрим следующую формулу:

$$\phi(x) := \forall y [y < x \rightarrow \exists z (y < z < x)] \wedge \exists t [t > x \wedge \forall u (t \geq u \geq x \rightarrow u = t \vee u = x)]$$

Очевидно, что  $M \models \phi(a) \wedge \exists! x \phi(x)$ , т.е.  $a \in dcl(\emptyset)$ . Рассмотрим для каждого  $n < \omega$  следующую формулу:

$$D_n(x, a) := x > a \wedge \exists x_1 \dots \exists x_n (\bigwedge_{i=1}^n (x > x_i > a) \wedge \bigwedge_{i \neq j} (x_i \neq x_j) \wedge \forall y (x > y > a \rightarrow \bigvee_{i=1}^n y = x_i))$$

Очевидно, что для каждого  $n < \omega$  существуют  $b_1^n \in N_1, b_2^n \in N_2$  такие, что

$$M \models D_n(b_1^n, a) \wedge D_n(b_2^n, a),$$

т.е.  $b_1^n, b_2^n \in acl(\emptyset)$ . Очевидно, что не существует  $\emptyset$ -определимой формулы, различающей эти элементы, т.е.  $b_1^n, b_2^n \notin dcl(\emptyset)$ , откуда алгебраическое замыкание пустого множества не совпадает с его определимым замыканием.

**Пример 6.** Пусть  $M = \langle M, =, <, f^1 \rangle$  – частично упорядоченная структура, где  $M$  есть непересекающееся объединение  $Q_1, Q_2$  и  $Q_3$ , где  $Q_i$  имеет тип  $Q$  для каждого  $1 \leq i \leq 3$ ,  $Q_i \diamond Q_j$  для любых  $i \neq j$ . Функция  $f$  – отображение  $Q_1 \cup Q_2$  на  $Q_3$ , сохраняющее порядок, причем  $f$  биективно отображает  $Q_i$  на  $Q_3$  для каждого  $1 \leq i \leq 2$ .

Также можно доказать, что структура  $M$  является слабо частично о-минимальной. Нетрудно понять, что  $\text{acl}(\emptyset) = \text{dcl}(\emptyset)$ , но для любого элемента  $a \in Q_3$   $\text{acl}(a) \neq \text{dcl}(a)$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Pillay A., Steinhorn Ch. Definable sets in ordered structures I // Transactions of the American Mathematical Society. – 1986. – Vol. 295, N 2. – P. 565-592.
- [2] Dickmann M. Elimination of quantifiers for ordered valuation rings // Proceedings of the 3<sup>rd</sup> Easter Conference on Model Theory. – Berlin: Humboldt University, 1985. – P. 64-88.
- [3] Macpherson H.D., Marker D., Steinhorn Ch. Weakly o-minimal structures and real closed fields // Transactions of the American Mathematical Society. – 2000. – Vol. 352, N 12. – P. 5435-5483.
- [4] Belegradek O., Petersil Ya., Wagner F. Quasi-o-minimal structures // The Journal of Symbolic Logic/ – 2000. – Vol. 65, N 3. – P. 1115-1132.
- [5] Belegradek O., Verbovskiy V., Wagner F. Coset-minimal groups // The Annals of Pure and Applied Logic. – 2003. – Vol. 121, N 2. – P. 113-143.
- [6] Macpherson H.D., Steinhorn Ch. On variants of o-minimality // The Annals of Pure and Applied Logic. – 1996. – Vol. 79, N 2. – P. 165-209.
- [7] Kulpeshov B.Sh., Macpherson H.D. Minimality conditions on circularly ordered structures // Mathematical Logic Quarterly. – 2005. – Vol. 51, issue 4. – P. 377-399.
- [8] Вербовский В.В. Упорядоченно стабильные группы // Математические труды. – 2010. – Т. 13, № 2. – С. 84-127.
- [9] Байжанов Б.С., Вербовский В.В. Упорядоченно стабильные теории // Алгебра и Логика. – Т. 50, № 3. – С. 303-325.
- [10] Kulpeshov B.Sh. Weakly o-minimal structures and some their properties // The Journal of Symbolic Logic. – 1998. – Vol. 63, N 4. – P. 1511-1528.
- [11] Кудайбергенов К.Ж. Обобщение о-минимальности на частичные порядки // Математические труды. – 2012. – Т. 15, № 1. – С. 86-108.

#### REFERENCES

- [1] Pillay A., Steinhorn Ch. Definable sets in ordered structures I. Transactions of the American Mathematical Society. 1986. Vol. 295, N 2. P. 565-592.
- [2] Dickmann M. Elimination of quantifiers for ordered valuation rings. Proceedings of the 3rd Easter Conference on Model Theory. Berlin: Humboldt University, 1985. P. 64-88.
- [3] Macpherson H.D., Marker D., Steinhorn Ch. Weakly o-minimal structures and real closed fields. Transactions of the American Mathematical Society. – 2000. Vol. 352, N 12. P. 5435-5483.
- [4] Belegradek O., Petersil Ya., Wagner F. Quasi-o-minimal structures. The Journal of Symbolic Logic/ – 2000. Vol. 65, N 3. P. 1115-1132.
- [5] Belegradek O., Verbovskiy V., Wagner F. Coset-minimal groups. The Annals of Pure and Applied Logic. 2003. Vol. 121, N 2. P. 113-143.
- [6] Macpherson H.D., Steinhorn Ch. On variants of o-minimality. The Annals of Pure and Applied Logic. 1996. Vol. 79, N 2. P. 165-209.
- [7] Kulpeshov B.Sh., Macpherson H.D. Minimality conditions on circularly ordered structures. Mathematical Logic Quarterly. 2005. Vol. 51, issue 4. P. 377-399.
- [8] Verbovskij V.V. Uporjadochenno stabil'nye grupy. Matematicheskie trudy. 2010. T. 13, N 2. S. 84-127.
- [9] Bajzhanov B.S., Verbovskij V.V. Uporjadochenno stabil'nye teorii. Algebra i Logika. T. 50, N 3. S. 303-325.
- [10] Kulpeshov B.Sh. Weakly o-minimal structures and some their properties. The Journal of Symbolic Logic. 1998. Vol. 63, N 4. P. 1511-1528.
- [11] Kudajbergenov K.Zh. Obobshhenie o-minimal'nosti na chastichnye porjadki. Matematicheskie trudy. 2012. T. 15, N 1. S. 86-108.

#### ЖАРТЫЛАЙ РЕТТЕЛГЕН ҚҰРЫЛЫМДАРЫНДА ҚИСЫНДЫЛЫҚ КРИТЕРИЙІ

**Б. Ш. Кулпешов**

**Тірек сөздер:** модель, база, сан, тіл, элемент, кесте, көпшілік, шексіз, ақпарат.

**Аннотация.** Осы мақалада босаң о-минималдық шартты бар жартылай реттелген құрылымдар зерттеледі. Шекті ені жартылай реттелген құрылымдарында негізгі жиынмен анықталатын кез келген толық 1-типтің орындалу жиынның қисындылық критерийі табылды.

*Поступила 26.11.2014 г.*

**NEWS**

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES**

ISSN 1991-346X

Volume 6, Number 298 (2014), 64 – 68

**INTERDISCIPLINARY CONNECTIONS AND THEIR INFLUENCE  
ON MATHEMATICAL EDUCATION OF STUDENTS**

**M. M. Sarsengeldin, G. Kospanova**

Suleyman Demirel University, Almaty, Qaskelen, Kazakhstan.

E-mail: merey@mail.ru

**Key words:** Interdisciplinary connections, Integral Error Functions, IEF method.

**Abbreviations:** IEF – Integral Error Function; FTB, STB, TTБ – are first, second and third type boundary problems; ES – experimental study stage; CS – control study stage.

**Abstract.** Mathematically and statistically it was proved that, interdisciplinary connections help educators to develop new, effective methods that positively effect on mathematical achievement of students. Moreover during the pedagogical experiment it was shown that new developed methods are easier and more understandable. During the data analyzes SPSS (Statistical Packet for Social Sciences) computer program was used.

**Introduction.** Interdisciplinary connection ensures efficient formation of scientific concepts and theories studied in depth assimilation. It facilitates the integration of science, the development of links between the fields of knowledge defining the location of discipline in the sciences. Interdisciplinary connection in its development has objective reasons.

First base - the rule of comprehensiveness of training. For a comprehensive knowledge of the subject, it is necessary to capture, examine all aspects of its connections. The same phenomena of the objective world have described by different sciences from different sides. Therefore, anticipating the process of combining the different properties of the object in the minds of students in teaching should be established between academic disciplines.

Second base - constantly ongoing process of integration of the sciences. Quality of education largely depends on the interaction between the fields of knowledge, and therefore need to understand the place of their discipline in the sciences and in the relationship that exists between science and practice.

Interdisciplinary connection is a main part of the professional training areas. Therefore, in the range of works on vocational and educational training of future school teachers, university professors of mathematics to include the implementation of a focused interdisciplinary connections. It should be separate and isolate also featured links, like composition, method, focus. This helps to establish the relationship between all forms of methodological training, increases the efficiency of professional and pedagogical orientation training. Training will be full and satisfy the modern requirements, if implemented multifaceted relationship with general subjects and special profiling. Obviously in this case, that goal will be achieved only when installed in the right-object logical connection - a slender sequence of presentation, the gradual deepening of the synthesis and material, the disclosure of the prospects of the theory and its application in practice. Outlook for education is crucial to an effective demonstration of mathematical concepts in other sciences. Differential equations are so useful, that their concepts, formulas, methods, algorithms can be used by engineers, technicians, chemists, biologists, economists, and representatives of other sciences, not to mention the mechanics and physics. This gives the teacher the opportunity to discover opportunities for applying mathematics and illustrate its application in other disciplines and practices.

Tasks that require the use of knowledge from related disciplines or applied with a didactic purpose in teaching other subjects are considered, usually problems with cross-curricular content. Many problems in science lead to a differential equation, the solution of which can improve math skills, and intuition, that is, possess a sufficiently high level of mathematical culture.



Relationship of differential equations with other objects can fully reveal the essence of these types of interdisciplinary connections, describe each of them, it is appropriate to use the objective laws of the optimal implementation and impact through it to expand and deepen the worldviews of students.

Interdisciplinary connection - is not only didactic conditions and means of improving the efficiency of learning and skills, but also the general pedagogical means of an integrated approach to the education of students in the learning process.

In this paper it was tried to show the use of interdisciplinary connection on the example of Mathematical Physics course. Using Integral Error Function a new effective method was developed that positively effects on mathematical achievement of students.

The study was carried out at Suleyman Demirel University for Master degree students during Control Study stage and Experimental Study stage.

On the base of results, obtained by S.N. Kharin, where insolvability of Heat equations by Picard's iteration method, which were reduced to system of integral equations, was shown due to the singularity of integrals. It was shown that new method enables us to solve heat equations in easier and quite precise way. Moreover when traditional Fourier and Laplace transforms used to solve Heat equations some difficulties arise concerning finding inverse transforms.

There are 3 so called  $\Psi$  tests, each assigned for Homogeneous Heat problems with first, second and third type boundary conditions. Each test consist of same type, three problems, which were firstly done on 3-rd grade students during the special course "special methods of solving heat problems". Cronbach's alfa, mean, item mean and standard deviation were calculated.

The study of influence of IEF method on improvement of Master Degree students in solving heat problems was divided into two stages control study, and experimental study stages. In the first stage students were instructed traditional HP method where students learnt how to solve homogeneous, nonhomogeneous Heat problems with first, second and third type boundary conditions. After learning method of solution of certain boundary value problem  $\Psi$  tests were taken to collect the data and compare results of same tests done during the second stage where IEF method was instructed.

**Data analyses of  $\Psi$ -1 Test.** The pre- and post-test results of  $\Psi$  tests were compared and the results were analyzed by SPSS program. The means and standard deviations of the pre- and post-tests are shown in tables and can be observed on the graphs. Tests were initially applied for 3-rd grade students in order to calculate their Cronbach's alfa coefficients.

$\Psi$ -1 test was firstly applied for 3-rd grade students and its Cronbach's alfa was calculated, additionally, information concerned with average, standard deviation and item mean are shown in the table.

Table 1 –  $\Psi$ -1 test for 3-rd grade university students

Subjects	Type of Instruction	N	Type of the test	Cronbach's alfa	Mean	Item Mean	Std. Deviation
3-rd grade students	IEF method	30	$\Psi$ -1	0,913	11,4667	3,822	2,73840

The average results of 3-rd grade students during the ES stage are comparatively high because heat problems, included into the test, did not contain derivatives on the boundaries. Since no extra calculations were required in FTB conditions the test was reasonably easier than other tests.

Table 2 –  $\Psi$ -1 test for master degree students

Stages of the study	Type of Instruction	Subjects	N	Type of the test	Mean	Item mean	Std. Deviation
CS	HP method	Master degree students	20	Pre Test ( $\Psi$ -1)	10,200	3,4	2,14476
ES	IEF method		20	Post Test ( $\Psi$ -1)	12,900	4,3	1,74416

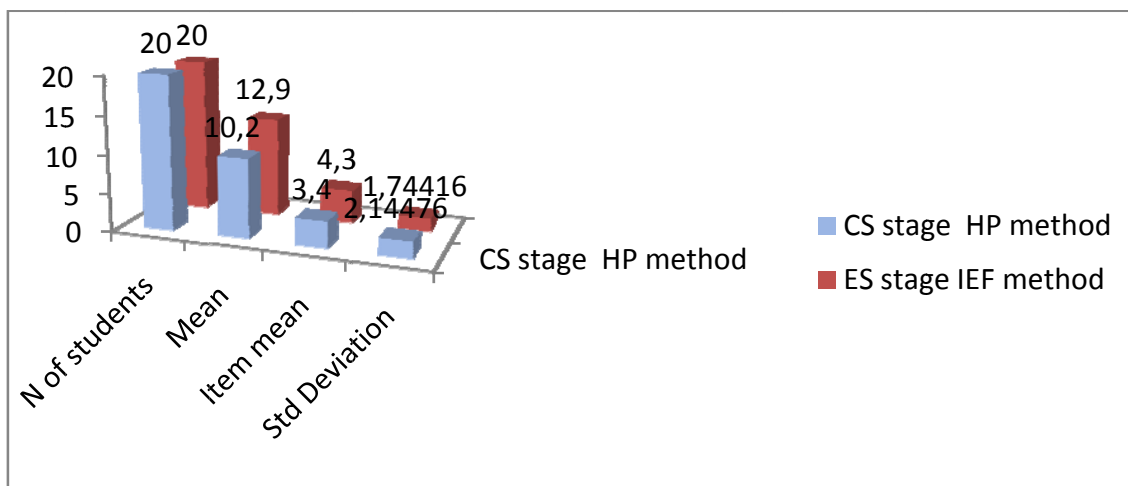


Figure 1 – Results of the  $\Psi$ -1 test during CS & ES stages

Pre and Post  $\Psi$ -1 tests results are shown on the figure and in the table. One can observe that during the CS stage students showed lower performance in solving problems than during the ES stage where IEF method was instructed. The reason is that in CS stage more complicated mathematical techniques are used, it is necessary to apply correctly Heat Potentials and jump theorem, make substitutions and calculate the integral.

It is remarkable that even though problems were comparatively easier than in other tests, the mean and item mean for 3-rd grade students that received IEF instruction are higher than mean and item mean of Master Degree students that received HP method instruction during the CS stage. But it should be noticed that the number of students was different and education level was also different.

**Data analyses of  $\Psi$ -2 Test.**  $\Psi$ -2 test was firstly prepared for 3-rd grade students and applied after IEF method was instructed. Cronbach's alfa, average, standard deviation and item mean of the test were calculated which are shown in the table.

Table 3 –  $\Psi$ -2 test for 3-rd grade university students

Subjects	Type of Instruction	N	Type of the test	Cronbach's alfa	Mean	Item Mean	Std. Deviation
3-rd grade students	IEF method	30	$\Psi$ -2	0,853	11,1000	3,700	2,23375

The results of the test for 3-rd grade students are a bit lower this time because in the second type boundary value problem it is required to take derivative of the IEF.

Table 4 –  $\Psi$ -2 test for master degree students

Stages of the study	Type of Instruction	Subjects	N	Type of the test	Mean	Item mean	Std. Deviation
CS	HP method	Master degree students	20	Pre Test ( $\Psi$ -2)	9,950	3,317	2,32775
ES	IEF method		20	Post Test ( $\Psi$ -2)	12,350	4,117	1,74416

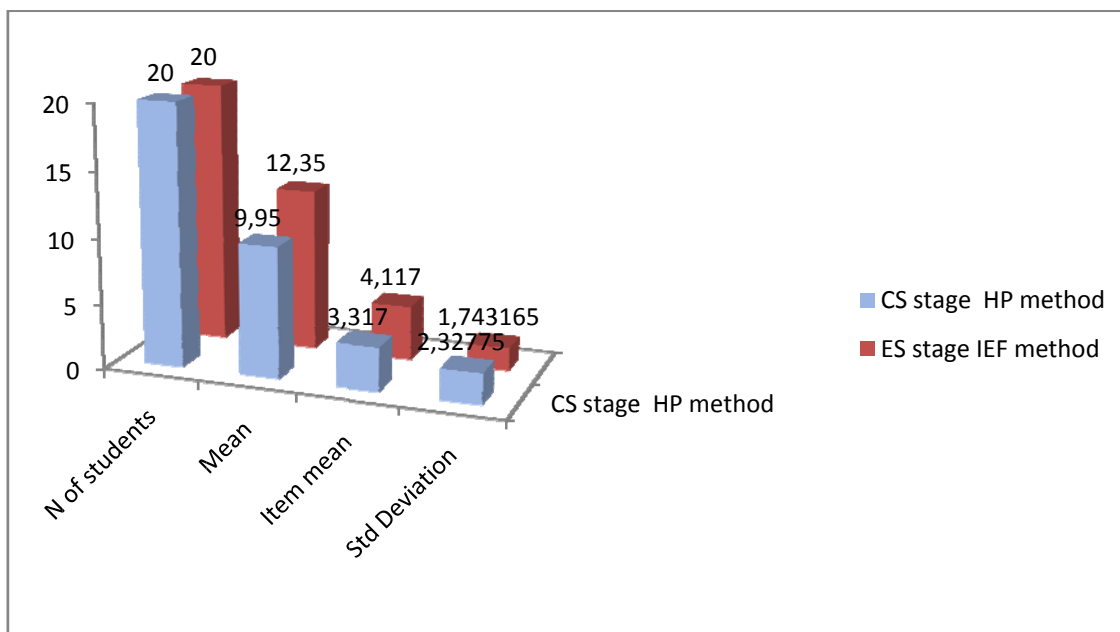


Figure 2 – Results of the Ψ-2 test during CS & ES stages

It is possible to observe that it is more difficult to calculate and apply Heat Potentials to solve second boundary value problems for students during CS stage.

**Data analyses of Ψ-3 Test.** As in other tests it is possible to see in the table Cronbach’s alfa, average, standard deviation and item mean of Ψ-3 test that was applied for 3-rd grade students.

Table 5 – Ψ-3 test for 3-rd grade university students

Subjects	Type of Instruction	N	Type of the test	Cronbach’s alfa	Mean	Item Mean	Std. Deviation
3-rd grade students	IEF method	30	Ψ-3	0,847	10,7333	3,578	2,42022

The test was applied to Master degree students during the CS stage where HP method was instructed and during ES stage where IEF method was instructed. The mean and item mean of the test is affected due to the mathematical apparatus that is required to solve Heat Problem with TTB conditions. It is necessary to be capable to predict power of t in the IEF solution.

Table 6 – Ψ-3 test for master degree students

Stages of the study	Type of Instruction	Subjects	N	Type of the test	Mean	Item mean	Std. Deviation
CS	HP method	Master degree students	20	Pre Test (Ψ-3)	9,7000	3,233	2,47301
ES	IEF method		20	Post Test (Ψ-3)	12,000	4,000	1,68585

**Ψ-3 test during CS & ES stages.**

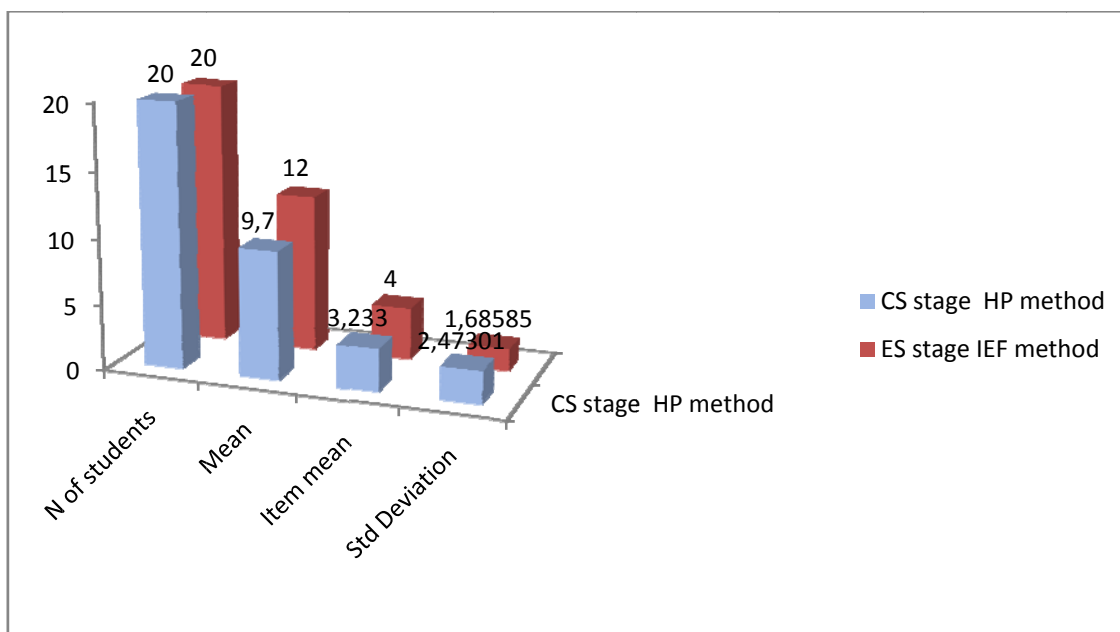


Figure 4 – Results of the Ψ-3 test during CS & ES stages

Above data allows us to say that Heat Problems with TTB conditions are harder than preceding problems. Neither the less IEF method anyway shows positive and positively effects on improvement of problem solving.

**REFERENCES**

[1] Kharin S.N., Sarsengeldin M.M., Temirkul A. Analytical Solution Of The Third Boundary-Value Problem For The Heat Equation By IEF Method. *Hjisk-Izdenis*. 2012, N 4(1). P. 78-81.  
[2] Kharin S.N., Sarsengeldin M. Influence of Contact Materials on Phenomena in a Short Electrical Arc. *Trans Tech Publications, Switzerland, Key Engineering Materials Vols. 510-511, (2012). P. 321-329.*

**ПӘНАРАЛЫҚ БАЙЛАНЫСТАРДЫҢ СТУДЕНТТЕРДІҢ ОҚУ ҮЛГЕРІМІНЕ ӘСЕРІ**

**М. М. Сәрсенгелдин, Г. Қоспанова**

Сүлеймен Демирел атындағы университет, Қаскелен, Қазақстан

**Аннотация.** Пәнаралық байланыстардың жаңа есеп шығару әдістерін дамытуға мүмкіндік бере отырып, студенттердің үлгеріміне оң әсерін тигізетінін математикалық және статистикалық тұрғыдан дәлелденген. Эксперимент кезінде жаңа дамытылған әдістің дәстүрлі жылу потенциалдар әдісінен оңай және тиімді екенін көрсетілген.

**ВЛИЯНИЕ МЕЖДИСЦИПЛИНАРНЫХ СВЯЗЕЙ  
НА МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ СТУДЕНТОВ**

**М. М. Сарсенгельдин, Г. Коспанова**

Университет им. Сулеймана Демиреля, Алматы, Каскелен, Казахстан

**Ключевые слова:** метод МЭФ, междисциплинарная связь, неотъемлемые функции ошибок.

**Аннотация.** Математически и статистически доказано, что междисциплинарные связи помогают педагогам в разработке новых, эффективных методов, положительно влияющих на академическую успеваемость студентов. Кроме того, в педагогическом эксперименте было показано, что новые разработанные методы являются более простым и понятным по сравнению с традиционным методом тепловых потенциалов для областей с подвижными границами.

Поступила 26.11.2014 г.

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

## PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 6, Number 298 (2014), 69 – 73

**TESTING SYSTEM – GUARANTEE OF QUALITATIVE EDUCATION****F. Urazova**

Kazakh State Women's Teacher Training University, Almaty, Kazakhstan.

E-mail: feruza.66@mail.ru

**Key words:** science, education, test, system, teacherstudying, methods.

**Abstract.** In the European countries as early as XIX century as experiments the system of tests began to be used in exact sciences, further for an improvement and control in the field of education began to inculcate sciences and educations in all industries. The testing system for years independence appeared and in our republic. Presently it is the only estimation of quality of education and control, before being used methodologies went out from application not actual.

УДК 577.71.5

**ТЕСТІЛЕУ ЖҮЙЕСІ – САПАЛЫ БІЛІМ КЕПІЛІ****П. Б. Уразова**

Қазақ мемлекеттік қыздар педагогикалық университеті, Алматы, Қазақстан

**Тірек сөздер:** ғылым, білім, тест, жүйе, ұстаз, оқушы, тәсіл.

**Аннотация.** Еуропада сонау XIX ғасырдың өзінде-ақ нақты ғылым салаларында ішінара қолданыла бастаған тестік жүйе келе-келе қанатын кеңге жайып, білім сапасын жақсарту мен бақылау ісінде тиімді тәсіл ретінде ғылым-білімнің барлық салаларында жаппай қолданыла бастады. Тәуелсіздік алғаннан кейін бұл үрдіс біздің елімізде де кең өріс алды. Қазір білім сапасын ұдайы жақсарту мен бақылау ісінде тестілеу тәсілінен басқа жүйе жоқ, ал бұрынғы білім беру дәстүрі тиімсіз тәсіл ретінде қолданыстан шығып қалды.

Алайда ғалымдар мен ұстаз-педагогтар арасында оқушының интеллектуалдық білімін көтеру мен бақылау тұрғысында бұрынғы кеңестік жүйенің артықшылығын жақтайтындар да жетіп артылады. Мұны әсіресе гуманитарлық ғылым саласындағы ғалымдар көбірек тілге тиек етеді. Әрине оның өзіндік себептері мен дәлелдері де жоқ емес. Мәселен, қазақ тілі мен әдебиет пәні мұғалімдері қазіргі оқушылардың арасында тестен жақсы баға алса да сөйлем талдау мен шығарма жазуға шорқақ балалардың көп екенін айтады. Әрине тестік жүйе әлемнің дамыған елдерінде де қолданысқа бірден ене қойған жоқ, тіпті әуелде оның жүйе ретінде атауы да болған жоқ.

Тарихқа көз жүгіртсек, тым ерте ғасырларда-ақ адам білімін тексеруде әр түрлі тәсілдердің қолданылғанын көруге болады. Яғни, тестілеу әдісінің тарихы нақтырақ айтсақ, алғашқы элемерттері ерте заманнан-ақ қолданыста болған. Мәселен, антикалық Грецияда шәкірттердің білім деңгейін бағалауда ақыл-ой өрісінің дамуын және дене икемін бақылайтын әртүрлі сынақтар қолданған. Ал б.э.д. VI ғасырларда Қытайда мемлекеттік қызметке алу үшін үміткерлердің білім деңгейін, ой өрісін тексеретін қазіргі тестік жүйе іспеттес сауал-жауап негізіндегі бақылау тәсілдері болған. Ежелгі Вавилонда да оқушылардың сауатын анықтайтын осыған ұқсас тәсілдер болса керек. Мұндай тәсілдер мұсылмандық білім беру ісі мен ғалымдардың біліктілігін тексеру ісінде де болғаны тарихтан белгілі. Мәселен өзінің мәні мен маңызы жөнінен Құраннан кейін тұрады деп есептелетін “Сахих әл-Бұхари” хадистер жинағының авторы Бұқаридің есте сақтау

қабілетін тексергенде ғалымдар хадистердің иснадтары (хадисті жеткізушілердің аты-жөндері) мен сөздерін ауыстырып немесе кезінде пайғамбарымызға қойылған сахабалардың сұрақтарына берілген жауаптарды әлденеше құбылтып айтып ғалымды шатастыруға тырысып, оның зейінін тексеруде әр түрлі тәсілдер қолданған. Бұл мысал тестік жүйенің сонау орта ғасырларда-ақ мұсылман елдерінде білім сапасын анықтауда қолданысқа ие болған тәсіл екенін көрсетеді. Сондай-ақ, басқа да шығыс елдерінде орта ғасырларда білім деңгейін бағалау ауызша сұрақ-жауап ретінде немесе жазбаша түрде қолданылған. Алайда бүгінгідей кең етек алмағандықтан арнайы жүйе ретінде қарастырылмаған. Мұның бәрі тестік жүйенің әуелгі элементтері еді. Замандар өте келе ғылым-білімнің күрделеніп, білім сапасын анықтау мен бақылау ісінің жүйеленуі тестік жүйенің табиғи түрде өмір сахнасына шығуына жол ашты. Алғаш рет 1884 жылы АҚШ-та тест материалдары қамтылған сынақ кітабы жарық көрді. Ол негізінен математика, тарих, грамматика секілді бірқатар пәндерден жинақталды және бес көрсеткіш жауаптан құрылды. Бұл педагогика саласының білім деңгейін анықтаудағы алғашқы әмбебап тәсіл, үлкен жетістік еді. АҚШ-та тестік жүйенің тиімділігі осылай белгілі болды. Бірте-бірте бұл тәсіл кең етек алып, барлық ғылым салаларында білім сапасын анықтау мен бақылау ісінде жаппай қолданыла бастады. Әуелде таңдауға берілетін жауаптардың жалпылама санының ең тиімді мөлшерін анықтауға арнайы зерттеулер жүргізілген. Бұл зерттеулерде негізінен жауаптар саны 2-ден 5-ке дейінгі аралықта болу мысалдары (кейбір жағдайларда ғана 7 жауап) қарастырылған, сөйтіп олардың нәтижесінде берілетін жауаптардың ең тиімді саны 5 екендігі анықталған. Дұрыс жауаптың орналасу реті ешбір роль атқармайтыны белгілі. Тестерді қолдану ережелерінде сол тестердің жауаптары, әдетте оқушылар жіберетін қателерді ескере отырып немесе жиі кездесетін қателерді сипаттайтын материалдарды негізге ала отырып таңдалады. Міне, содан бері екі ғасырға жуық уақыт өтті. Тестік жүйе бүгінгі өмірімізге дендеп еніп, білім беру мен бақылау ісінде бірден-бір тиімді тәсіл ретінде кең қолданысқа ие болды. Қазақстанда тестілеу жүйесінің енгізілуі 1992 жылдан басталды. Орта білімді бітірушілер мен олардың жоғары оқу орнына түсудегі білім деңгейін айқындау мақсатында Республикалық тестілеу орталығы құрылды. Тестілеу алғашында жаңаша ақпарат технологиялар әдісімен жоғары оқу орнына түсу емтиханы ретінде пайдаланылды. Әрине алғашқы кезде оқушылар тарапынан, тіпті оқытушылар тарапынан да түсінбеушіліктер, жаңа жүйеге жатырқап қарау көрініс берді. 1995 жылдан бастап барлық жоғары оқу орындары студенттерінің білім сапасын ағымдағы және аралық бақылауда тестілеу жүйесін кеңінен қолдана бастады. 1999 жылы орталықтанған кешенді тестілеудің енгізілуі талапкерлердің білім сапасын бағалаудың әділ болуына және мемлекеттік білім гранттары мен кредиттерді білімге сәйкес бөлуге жол ашты. 2004 жылы Ұлттық бірыңғай тестілеу енгізілді, ҰБТ – жалпы білім беру ұйымдары бітірушілерінің мемлекеттік қорытынды аттестаттауы мен орта білімнен кейінгі жоғары білім ұйымдарына қабылдау емтихандарын біріктірді. Бірте-бірте ҰБТ жалпы білім жүйесіндегі білім сапасын сырттай бақылайтын тәуелсіз жүйе ретінде қалыптасты. Сонымен қатар, талапкерлерді кешенді тестілеу жүйесі (ТКТ) – ақпараттық технологияларды пайдаланып, бірнеше оқу пәндері бойынша емтихан бір мезгілде өткізілетін болды. ТКТ-ге мектепті бұрынғы жылдары бітіргендер қатысады. Бұл тұрғыда елбасы Н.Ә.Назарбаевтың халыққа жолдауындағы «оқу үрдісінде ақпараттық технологияларды білім беру саласын жақсартуда қолданыс аясын кеңейту керек» деген сөзін басшылыққа ала отырып, сабақта жаңа ақпараттық технологияларды пайдалануға жаппай көшу ісі қолға алынып отыр. Ақпараттық технологияларды сабақта пайдаланудағы негізгі мақсат – Қазақстан Республикасында біртұтас білімдік ақпараттық орта құру, жаңа ақпараттық технологияны пайдалану Қазақстан Республикасындағы ақпараттық кеңістікті әлемдік білім беру кеңістігімен сабақтастыру болып табылады. Мұның мәні зор. Өйткені сапылы білім – күрделі технологияны меңгерудің құралы. Әлемдегі дамыған елдердің бәрі елдің шикізат көздеріне емес, күрделі технологияны меңгеру арқылы үлкен жетістіктерге жетуге, сол арқылы әлемдік саясатқа ықпал етіп, басқаларға өзінің гегемондық әрекеттерін мойындатуға ұмтылып отыр. Бұл – асыра айтқандық емес, өмір шындығы. Яғни тестік жүйенің пайда болуының өзі осындай үлкен амбициялық талаптардың әсерінен туындап жатқан шығар деген де ой келеді.

Бүгінгі күні заман талабына сай ақпараттық технологияның дамуына байланысты тесті қолдану тек оқытушылар ғана емес, оқушылар үшін де тиімді әдіс болғанын бүкіл әлем мойындап отыр. Өйткені тестік тапсырмалар арқылы білім сапасы мен деңгейін тексерудің өзі жоғары техноло-

гиялар қатарына жатқызылады. Әрине тестілеу жүйесі әлі күнге дейін әлемнің барлық елдеріне бірдей тарай қойған жоқ. Дей тұрсақ та көптеген дамыған елдерде білімінің ажырамас бөлігіне айналғаны белгілі, оқушылардың дайындық деңгейін және жалпы білім сапасын айқындаудың тиімді құралы, білімнің мемлекеттік стандарт талаптарына сәйкестігін бақылауды ұйымдастырудың бір түрі ретінде қолданылады.

Тест дегеніміз-оқушының білімі мен эксперттік білім моделі сәйкестігін нақты, дәл бағалауға тест арқылы мүмкіндік беретін өзара байланысқан тапсырмалар блып табылады. Тест дегеніміз өте күрделі педагогикалық құбылыс болып табылатын білімді игеру және іскерлік пен дағдыны қалыптастыру мәселелерін бағалауға математикалық әдістерді қолдана білудің ең қолайлы формасы болып табылады. Тестік тапсырмалар жинағынан тұратын арнайы тестер көмегімен жүргізіледі. Тестік тапсырма деп нақты пән облысынан анық және түсінікті етіп берілетін сұраққа бір мәнді жауапты немесе нақты алгоритмді орындауды талап ететін тасырманы айтады. Кездейсоқ алынған тапсырмалар жиынтығын тест деп қарастыруға болмайды. Тест білімді бақылау ретінде қолданып, нық және нақты әдістемелік талаптарды қанағаттандыруы қажет. Елімізде тестілеудің арнайы қарастырылған мемлекеттік тұрғыдан тұжырымдалған ережесі жоқ. Дегенмен оқушылардың білімін, іскерлігін, дағдысын, жылдамдығын тексеріп бақылау үшін дұрыс таңдау тесті, баламалы (альтернативті) тест, толықтыру тесті, сәйкестендіру тесті деп шартты түрде төрт түрі қолданылып жүр. Елімізде тестілеу жүйесіне бірінғай көшкеннен кейін бұл іспен әсіресе мұғалімдер тереңірек айналысатын болды. Тесті дамыту тұрғысында олардың ізденістері мен аздықөпті жетістіктері де жоқ емес. Яғни оқушылардың білім деңгейін бақылау үшін тестің қандай түрін қолдану, қалай қолдану мәселесі мұғалімнің біліктілігіне байланысты болмақ. Тесті тиімді тәсіл ретінде қарастырған соң оның прогрессивті сипаттарына кеңірек тоқталған жөн болмақ. Әр сабақ барысында тест түрлерін өзгертіп отыру жақсы нәтиже береді. Тест қолдану емтиханмен салыстырғанда көп тиімді екенін өмірдің өзі дәлелдеп отыр. Енді бұрынғы кеңестік жүйедегі емтихан тапсырумен салыстырғанда тестілеудің қандай артықшылықтары, қандай ерекшеліктері бар дегенге келсек, басты-басты мынадай ерекшеліктерді атап айтуға болады: Оқушы өзін-өзі бақылайды, бағалайды, кемшіліктерін анықтайды. Сапалық көрсеткіштерде жақсы нәтижеге қол жеткізеді. Нәтижесі тікелей белгілі болады. Барлық оқушыға бірдей талап қойылады. Оқушылардың білім дәрежесі әділ бағаланады әрі оқытушының өз пікірінше ғана бағалауына жол берілмейді. Оқушылардың білім деңгейін білу үшін оқылған материал тегіс қамтылады. Оқушы қалаған мамандығы бойынша оқуға түсуге тестілеу арқылы алдын ала дайын болады. Тестілерді құрастыру барысында мейлінше қысқа да нұсқа жауаптарды қажет ететін тапсырмалар қолданылады немесе тестер бірнеше жауаптар ішінен дұрыс жауапты таңдап алуға негізделген тапсырмаларға құрылады. Жауаптарды іріктеу ыңғайлы болу үшін олар белгілі бір ретпен нақтылы орынға жазылып отырады. Бір сөзбен айтқанда, тест оқушылардың мәліметтерді салыстыра білуін, өзіне белгілі деректермен ұштастыра білуін қажет етеді. Әрине, тестілеудің бұдан да басқа жақсы жақтары мен өзіндік кемшіліктері де жоқ емес. Тест алардан бұрын мұғалім өзі не әдістемелік орталық тест тапсырмаларын әзірлейді. Оны орындау жолдары оқушыға түсіндіріледі. Оқушы тестік сынақта жақсы көрсеткішке жету үшін оқулықтар бойынша дайындалады. Тест жүйесі оқушылардың өз бетінше жұмыс әрекетін арттырып, оқытудың тиімділігіне қол жеткізіп, ойлау қабілетін, шығармашылық қабілетін арттырады. Бұған қоса оқушылардың білімдеріндегі олқылықтар анықталып, уақытты тиімді пайдалануға мүмкіндік береді. Тестің нәтижесін оқытушының қатысуынсыз компьютер автоматты түрде бағалайды. Қазіргі кезде мектеп оқушыларына арналған тестілеу тапсырмаларының мәселесін шешудің моделі мен әдістерін жасауда жоспарланған бағыт-бағдары анықталған іс-шаралар қарастырылуда. Оқушылар білімін бағалауда қолданылатын бақылау тапсырмалары субъективті және объективті тапсырмалар болып бөлінеді. Субъективті тапсырмалардың қатарына әр түрлі шығармалар мен трактаттар жатады. Олардың субъективті болу себебі, бұл шығармалар бойынша мұғалім жеке-дара тұжырым жасауға мәжбүр және ол тұжырым оқушының іскерлігі мен дағдысын көптеген критерийлер бойынша кешенді түрде саралау нәтижесін-де қалыптасады. Тест нәтижесін бағалау моделдері-бақылаудың объективті формасына жатады, себебі олардың жауабы сандық тұрғыда кескінделеді және тест негізінен бағдарлы түрде жасакталады, яғни олардың әрбір түрі білімнің, іскерліктің және дағдының нақты түрін бағалау мақсатында құрастырылады. Жауапты таңдап алуды қажет ететін

тестердің өзге түрлері баршылық, олар жіктемелік тестер, яғни белгілі бір ретпен орналастыруды қажет ететін тестер т.б. Тестер оқушының білім дәрежесін анықтау ісінде субъективтік элементтің болмауын қамтамасыз ете алады, себебі бұл орайда бүкіл іс дұрыс және дұрыс емес жауаптарды есепке алуға және осы мәліметтерді статистикалық тұрғыдан саралауға ғана негізделген. Тестерді қолдану оқушылардың нақтылы мәселелер бойынша білім деңгейін, сол сияқты оларда іскерлік пен дағдының жекелеген түрлері қалыптасуы дәрежесін сипаттайтын мейлінше ауқымды материалды тез арада есептеу және саралау шараларын жүзеге асыруға мүмкіндік береді. Солай бола тұрса да, тестілеу дегеніміз оқушылардың үлгерімін тексерудің мейлінше қарабайыр, негізінен алғанда механикалық әдісі екендігін ұғынбау мүмкін емес. Тестер әсіресе олардың дұрыс жауапты тандап алуды қажет ететін түрлері көмегімен оқушының белгілі бір пәннен бағдарлама көлеміндегі білімін жүйелі, толық бағдарлауға мүмкіндік туады, негізгі ұғымдар мен тұжырымдар туралы қандай біліктілігінің бар екендігін аңғаруға болады. Оқушы тестегі әрбір жауапты бір-бірімен салыстыра отырып талдау жасайды, яғни белсенді ойлау процесі жүреді де, оқушының логикалық ойлау қабілетінің дамуына мүмкіндік туады. Тестілеу әдісінің кеңінен таралуына, тестілеу нәтижелерін мейлінше тез және сапалы түрде өндеп шығаруға компьютерлердің үлкен септігі тиетіні сөзсіз. Тестілеуде компьютерді қолдану оқушылардың білім деңгейін сырттан бақылауды және олардың өзін-өзі бақылауын қамтамасыз ету мақсатында қолданылады және бұл технология оқушы жауабын тандау принципіне немесе өте қысқа да нұсқа жауаптар (сандар түріндегі немесе әріптегі түріндегі) алу принципіне негізделген. Көптеген жаңа технологиялармен қатар соңғы кездері информатика пәні сабақтарында ақпараттық технологиялар жиі қолданылуда. Осыған байланысты күнделікті сабаққа:

- мультимедия (видео, аудио қондырғылары мен теледидарды, электрондық оқулықтарды);
- компьютер (компьютерлік бағдарламалар, интерактивті такта)
- интернет және т.б. көрнекі материалдарды пайдалану айтарлықтай нәтиже береді.

Мұндай қондырғылар оқушылардың қызығушылығын арттырып, зейін қойып тыңдауға және алған мәліметтерді нақтылауға мүмкіндік береді. Оқушылардың білімі мен біліктілігін қалыптастыруда тиімді әдістерді қолдана отырып өз бетімен ізденіп оқуға, олардың эмоциясы және денсаулығына зиянды әсерін тигізбей өзін-өзі бағалауға үйрету көзделген.

Тестің көмегі арқылы бақылау жұмысында мектеп бағарламасын дұрыс меңгере алды ма анықтау қолайлы. Тестілеу өнімділігі ұстаздардың кәсіби ұтқырлықтарынан, оқушылардың білім деңгейінің көтерілуінен және білім берудің сапалығынан айқын көрінеді. Сондықтан тестілеу жүйесін ұдайы дамытып, жетілдіріп отыру ләзім. Бұл елімізде білім сапасын көтеру мен бақылау ісінің жақсаруына кепіл болары даусыз.

#### ӘДЕБИЕТ

- [1] Сарманова К. Тест дайындау тәсілдері // Қазақстан мектебі. – 1999. – № 9.
- [2] Мұқашева К. Тест әдісінің тиімділігі // Ауыл мектебі. – 2004. – № 6.
- [3] Боранбаева А. Ұлттық бірінғай тестілеу – заман талабы // Білімдегі жаңалықтар. – 2004. – № 2.
- [4] Берікұлы Н. Педагогика. – Ақтөбе, 2004.
- [5] Өмірбаева К.О. Оқыту процесіндегі Инновациялық ізденістер. –Ақтөбе, 2002.
- [6] Қоянбаев Ж.Б., Қоянбаев Р.М. Педагогика. – Алматы, 2002.
- [7] Мұхамбетова С.К. Педагогика. – Ақтөбе, 2002.
- [8] Мұхитова Ж. Тест түрлері // Қазақстан мектебі. – 2002. – № 5.
- [9] www.45minut.kz — ҰСТАЗДАРДЫҢ РЕСПУБЛИКАЛЫҚ БАСЫЛЫМЫ Мақсұтқанова Ә.М. Оқытуда тестілеудің тиімділігін арттырудың формалары, 2013.
- [10] Назарбаев Н.Ә. Қазақстанның әлемдегі бәсекеге барынша қабілетті 50 елдің қатарына кіру стратегиясы.
- [11] «Информатика негіздері» журналдары. Қазақстан Республикасы білім беруді дамытудың 2005–2010 жылдарға арналған Мемлекеттік бағдарламасы.
- [12] Салихова А. Оқушылардың шығармашылығын дамыту // Ғылыми-әдістемелік журнал. – 2009. – № 5. Сайттары 2012 ж.

#### REFERENCES

- [1] Sarmanova K. Test dayi'ndaw ta'silderi. Qazaqstan mektebi. 1999. N 9.
- [2] Muqasheva K. Test a'disining ti'imdiligi. Awi'l mektebi. 2004. N 6.
- [3] Boranbaeva A. Ultti'q biringghay testilew – zaman talabi'. Bilimdegi jangali'qtar. 2004. N 2.



- [4] Berikuli' N. Pedagogi"ka. Aqto'be, 2004.
- [5] O'mirbaeva K.O. Oqi'tw procesindegi I"nnovaci"yali'q izdenister. Aqto'be, 2002.
- [6] Qoyanbaev J.B., Qoyanbaev R.M. Pedagogi"ka. Almati', 2002.
- [7] Muhambetova S.K. Pedagogi"ka. Aqto'be, 2002.
- [8] Muhi"tova J. Test tu'rleri. Qazaqstan mektebi. 2002. N 5.
- [9] 9. www.45minut.kz — USTAZDARDI'Ng RESPWBLI"KALI'Q BASI'LI'MI' Maqsutqanova A'.M. Oqi'twda testilew-ding ti"imdiligin artti'rwidi'ng formalari', 2013.
- [10] Nazarbaev N.A'. Qazaqstanni'ng a'lemdegi ba'sekege bari'nsha qabiletti 50 elding qatari'na kirw strategi"yasi'.
- [11] «I'nformati"ka negizderi» jwrnaldari'. Qazaqstan Respwbli"kasi' bilim berwdi dami'twidi'ng 2005–2010 ji'ldargha arnalghan Memlekettik baghdarlamasi'.
- [12] Sali"hova A. Oqwshi'lardi'ng shi'gharmashi'li'ghi'n dami'tw. Ghi'li'mi"-a'distemelik jwrnal. 2009. N 5. Sayttari' 2012 j.

## СИСТЕМА ТЕСТИРОВАНИЯ – ГАРАНТИЯ КАЧЕСТВЕННОГО ОБРАЗОВАНИЯ

П. Б. Уразова

Казахский государственный женский педагогический университет, Алматы, Казахстан

**Ключевые слова:** наука, образование, тест, система, преподаватель, учащийся, методы.

**Аннотация.** В Европейских странах еще в XIX веке в виде опытов система тестов начала применяться в точных науках, далее в целях улучшения и контроля в сфере образования стали внедрять во всех отраслях науки и образования. Система тестирования за годы независимости появилась и в нашей республике. В настоящее время она является единственной оценкой качества образования и контроля, ранее применявшиеся методики вышли из применения и не действительны.

*Поступила 26.11.2014 г.*

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 6, Number 298 (2014), 74 – 80

## FORMAL MODEL OF MORPHOLOGICAL RULES OF AGGLUTINATIVE LANGUAGES

A. A. Sharipbayev, G. T. Bekmanova, A. S. Mukanova, B. Zh. Yergesh

L. N. Gumilyov Eurasian national university, Astana, Kazakhstan.

E-mail: sharalt@mail.ru; gulmira-r@mail.ru; asel\_ms@bk.ru; saturn\_banu@mail.ru

**Key words:** ontology, morphological rules, semantic hypergraph, morphological analysis.

**Abstract.** The paper presents the ontological models of Kazakh language morphology in the form of semantic hypergraph.

УДК 004.89

## ФОРМАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ МОРФОЛОГИЧЕСКИХ ПРАВИЛ КАЗАХСКОГО ЯЗЫКА

А. А. Шарипбаев, Г. Т. Бекманова, А. С. Муканова, Б. Ж. Ергеш

Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилева, Астана, Казахстан

**Ключевые слова:** онтология, морфологические правила, семантический гиперграф, морфологический анализ.

**Аннотация.** В работе приводятся онтологические модели морфологических правил в казахском языке в виде семантических гиперграфов.

Очевидная сложность обработки естественно-языковых процессов вызвана трудностью их формализации. Сложность заключается в невозможности словоизменения слов для какой-либо части речи по заданной траектории без предварительной обработки словаря начальных форм, поскольку существует зависимость словоизменения слова от его смысла, то есть от его семантического содержания. В связи с этим необходимо было выбрать формальные средства представления знаний, которые позволяют описать не только структуру, но и семантические признаки языковых единиц.

Одним из формальных средств представления знаний является язык семантических гиперграфов, в котором можно в зависимости от типов связей реализовывать классифицирующие, функциональные, ситуационные, структурные сети и сценарии. Семантический гиперграф является расширением семантических сетей, где естественным образом представляются  $n$ -арные отношения, которые позволяют задавать не только атрибуты объектов, но и представлять их структурные, «целостные» описания [2,3].

Гиперграф  $H$  определяется парой  $(V, R)$ , где  $V = \{v_i\}$  – множество вершин;  $R = \{r_j\}$  – множество ребер;  $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $j = 1, 2, \dots, m$ ; каждое ребро представляет собой пару из элементов множества  $V$ , т.е.  $r = \{(v_{j_s}, v_{j_t})\}$ ,  $j_s \neq j_t$ ,  $s, t$  – натуральные числа.

В настоящее время онтология является мощным и распространенным инструментом моделирования отношений между объектами различных предметных областей. Принято классифицировать онтологии по степени зависимости от задач или прикладной области, по модели

представления онтологических знаний и его выразительным возможностям и другим параметрам [4, 5]. Прикладные онтологии описывают концепты, которые зависят как от онтологии задач, так и от онтологии предметной области.

Прикладная онтология разрабатывается на основе общих принципов построения онтологий, но с учетом использования в качестве модели представления знаний семантических гиперграфов. Данный формализм позволяет определить онтологию  $O$  в виде тройки:  $(V, R, K)$ , где  $V$  – множество понятий проблемной среды (вершины гиперграфа),  $R$  – множество отношений между понятиями (дуги и ребра гиперграфа), а  $K$  – множество имен понятий и отношений в данной предметной области.

В данной статье предлагается использовать семантические гиперграфы для представления описания не только атрибутов, но и структуры морфологических единиц казахского языка с учетом их семантики.

**Морфологический анализ в казахском языке.** Казахский язык относится к тюркской группе языков и характеризуется большим числом словоформ для каждого слова, образованных путем добавления к его концу суффиксов и окончаний. Для него определен строгий порядок аффиксов. В начале к корню слова прибавляются суффиксы затем окончания множественности, притяжательные окончания, падежные окончания, окончания спряжения [6].

Процесс словоизменения основывается на детальном анализе начальной формы слова с целью выделения его морфологических признаков и считывания его семантических признаков из базы знаний. Далее определяется траектория словообразования и словоизменения, происходит сам процесс словообразования и словоизменения на основе семантического гиперграфа.

Морфологические признаки в казахском языке выделяются по следующему принципу. Определяется последняя буква начальной формы слова и относится к одной из категорий. В соответствии с этими признаками осуществляется добавление того или иного окончания. Морфологические признаки казахского языка представлены на рисунке 1.

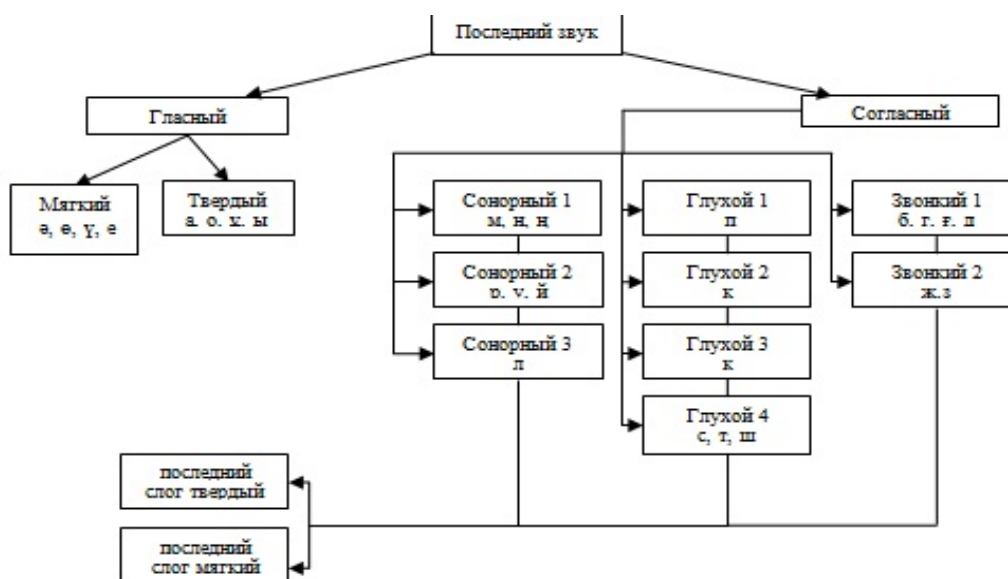


Рисунок 1 – Дерево морфологических признаков

С помощью семантического гиперграфа формализуются правила добавления суффиксов и окончаний к основам. На основе такого гиперграфа генерируются словоформы казахского языка и порождается структура словаря начальных форм в виде синхронизированного дерева.

Синхронизированное дерево представляется с помощью линейных скобочных записей в виде строк, содержащих символы, помечающие узлы дерева, а также открывающие и закрывающие круглые скобки. Между деревьями и их линейными скобочными записями существует взаимно однозначное соответствие. На рисунке 2 приводятся примеры деревьев и соответствующие им линейные скобочные записи.

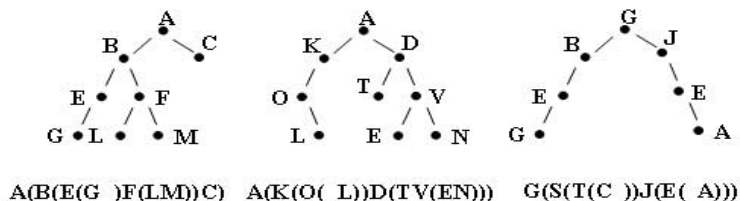


Рисунок 2 – Деревья и линейные скобочные записи

В казахском языке существует 9 частей речи (*имя существительное*(zaes), *прилагательное*(syas), *числительное*(saes), *глагол*(etis), *местоимение*(esim), *наречие*(uste), *союзы*(shyl), *послеслоги*(elsz), *междометие*(odag)), 5 из которых словоизменяются по падежам, лицам, числам. Ниже подробно будем рассматривать для этих частей речи онтологические модели и формальные правила образованные через скобочную запись, которые необходимы для морфологического синтеза слов казахского языка.

**Анализ имен существительных.** Для имен существительных в качестве семантических признаков начальных форм выступают одушевленность(jand) и неодушевленность (jans) имен существительных. В зависимости от этого признака и определяется траектория словоизменения имени существительного. Имя существительное в казахском языке спрягается (jikt) и изменяется по падежам (sept), а также числам (kopt) и имеет притяжательную форму (taul). На рисунке 3 показана онтологическая модель имени существительного с учетом семантических признаков.

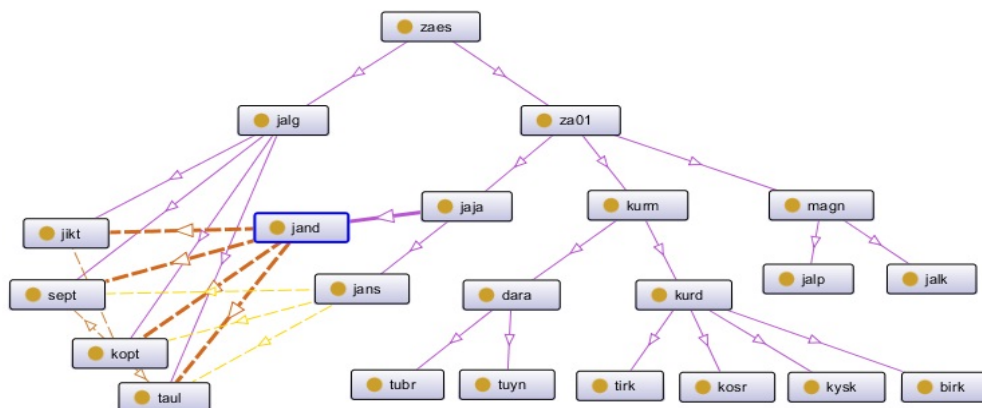


Рисунок 3 – Онтологическая модель имени существительного

Если представить онтологию в виде гиперграфа, то его вершины и ребра будут:

$$V = \{jand, jans\},$$

$$E = \{(jand, jikt), (jand, sept), (jand, kopt), (jand, taul), (jans, sept), (jans, kopt), (jans, taul)\}.$$

Из указанного семантического гиперграфа можно получить формальные правила с помощью скобочной записи. Количество формальных правил для имени существительного 4500. Далее для одного одушевленного существительного с помощью формальных правил автоматически генерируется 93 словоформы (словарных статей), а для неодушевленного существительного генерируется 82 словоформы. Также имя существительное возможно образовать из других частей речи.

Пример словоизменения одушевленного существительного «бала» - «ребенок» содержит все словоформы данного существительного и их морфологическую информацию, которая содержит в сокращенном обозначении информацию о том, в каком числе, падеже находится существительное, от какого лица происходит действие и его принадлежность тому или иному лицу. В таблице 1 приведено изменение по падежам существительного «бала».

Таблица 1 – Изменение по падежам существительного «бала».

Правила	Explanation	Пример
((жежа01))!at0	(зат есім, жанды, 01 дауысты)! атау септік	((бала))
((жежа01)ның)!іл	((зат есім, жанды, 01 дауысты)ның)! ілік септік	((бала)ның)
((жежа01)ға)!ба	((зат есім, жанды, 01 дауысты)ға)! барыс септік	((бала)ға)
((жежа01)ны)!та	((зат есім, жанды, 01 дауысты)ны)! табыс септік	((бала)ны)
((жежа01)да)!жс	((зат есім, жанды, 01 дауысты)да)! жатыс септік	((бала)да)
((жежа01)дан)!шы	((зат есім, жанды, 01 дауысты)дан)! шығыс септік	((бала)дан)
((жежа01)мен)!кө	((зат есім, жанды, 01 дауысты)мен)! Көмектес септік	((бала)мен)

**Анализ имен прилагательных.** Для имен прилагательных в качестве семантических признаков начальных форм выступают возможности образования из него сравнительной и/или превосходной степени прилагательного, а также выступают такие признаки, как относительные (kats) и качественные (sapa), простые (dara), сложные (kurd), производные (tuyn) и т.д. Онтологическая модель имени прилагательного представлена на рисунке 4.

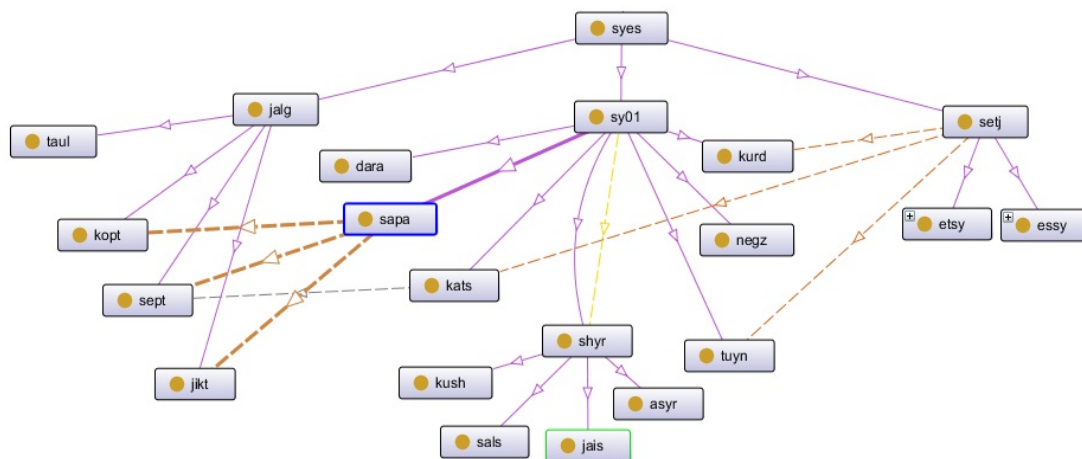


Рисунок 4 – Онтологическая модель имени прилагательного

Определить, возможно ли из данного прилагательного образовать сравнительную степень прилагательного и с помощью каких конкретно суффиксов, может только эксперт. Это касается и возможности использования вспомогательных слов при образовании превосходных степеней прилагательных. В данном случае разметку семантических признаков в базе знаний осуществлял специалист-лингвист.

Если представить онтологию в виде гиперграфа, то его вершины и ребра будут:

$$V = \{kats, sapa\},$$

$$E = \{(kats, sept), (sapa, sept), (sapa, kopt), (sapa, jikt)\}.$$

Разряды прилагательного, субстантивирюясь, изменяются по падежам, спрягается по лицам и принимают аффиксы принадлежности. В таблице 2 приведено изменение прилагательного «ақылды» – «умный».

Таблица 2 – прилагательное «ақылды» - «умный».

Правила	Объяснение	Пример
((сы011р)рақ)!сыса	сын есім, дауысты, рақ жұрнақ	(ақылды)рақ – «умнее»
((сы014л)лау)!сыса	салыстырмалы шырай	(ақылды)лау – «умнее» өте ақылды – «очень умный»
((сы01)ның)!іл	сын есім, ілік септік	(ақылды)ның – «умного»
((сы01)мын)!жк11	сын есім, I-жақ жіктік жалғау	(ақылды)мын – «я умный»
((сы01)сың)!жі22	сын есім, II-жақ жіктік жалғау	(ақылды)сың – «ты умный»

С помощью добавления 135 суффиксов образуется имя прилагательное из других частей речи. В результате из 45000 слов словаря генерируется 66000 прилагательных.

**Анализ имен числительных.** Имена числительные по составу в казахском языке разделяют на простые (dara) и сложные (kurd). Например, простые: бір - один, он - десять, жүз - сто, мың - тысяча; сложные: он бес - пятнадцать, бес жүз - пятьсот, елу мың - пятьдесят тысяч.

Словообразование сложных имен числительных возможно реализовать автоматически, поскольку в большинстве случаев они образуются из простых числительных путем всевозможных сочетаний разряда числительного и простых числительных.

*Пример.* Образование сложного числительного «он бір» – «одиннадцать» происходит путем соединения числительных «он» – «десять» и «бір» – «один». Сложное числительное «жүз он бір» – «сто одиннадцать» происходит путем соединения числительных «жүз» – «сто», «он» – «десять» и «бір» – «один» .

По значению имена числительные делятся на шесть групп, которые образуются из простого или сложного числительного путем присоединения соответствующих окончаний или суффиксов. В большинстве случаев все группы числительных автоматически образуются из количественных путем присоединения суффиксов. Онтологическая модель имени числительного представлена на рисунке 5.

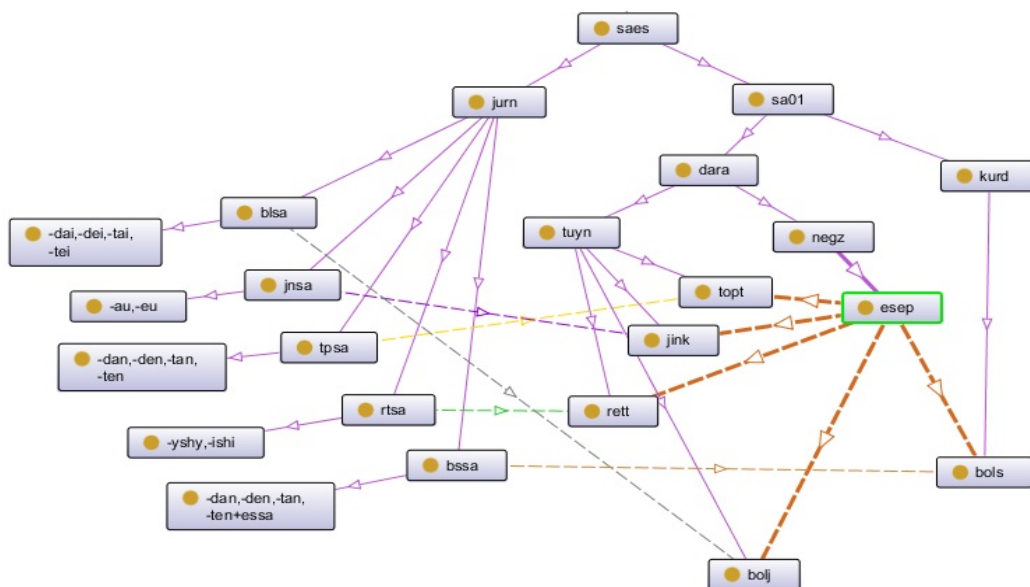


Рисунок 5 – Онтологическая модель имени числительного

Если представить онтологию в виде гиперграфа, то его вершины и ребра будут:

$$V = \{esep, journ\},$$

$$E = \{(esep, topt), (esep, jink), (esep, rett), (esep, bolj), (esep, bols)\}.$$

**Словоизменение и словообразование глаголов.** Глагол наряду с именем существительным – сложная для словообразования и словоизменения часть речи. Словообразование и словоизменение происходит как автоматически, так и по результатам заполненной лингвистом базы знаний.

Необходимо отметить, что глаголы словоизменяются по лицам и числам, а также происходит словообразование новых видов глаголов из других частей речи. Онтологическая модель глагола представлена на рисунке 6.

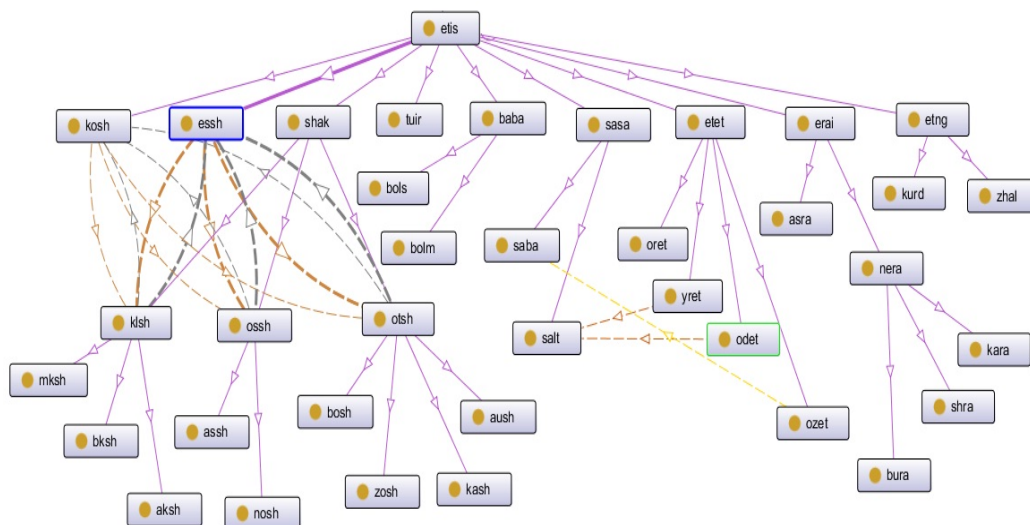


Рисунок 6 – Онтологическая модель глагола

Если представить онтологию в виде гиперграфа, то его вершины и ребра будут:

$$V = \{essh, kosh, saba, salt\},$$

$$E = \{(essh, klish), (essh, ossh), (essh, otsh), (kosh, klish), (kosh, ossh), (kosh, otsh), (saba, oset), (salt, yret), (salt, odet)\}.$$

Ниже приведены формальные правила словоизменения и словообразования глагола:

(((етот01)п) отыр)мын)!окжі11  
 (((етот01)п) отыр)мыз)!окжі11  
 (((етот01)п) отыр)сын)!окжі22  
 (((етот01)п) отыр)сындар)!окжі22  
 (((етот01)п) отыр)сыз)!окжі2\*  
 (((етот01)п) отыр)сыздар)!окжі2\*  
 (((етот01)п) отыр))!окжі33  
 (((ет01)т)кыз)дыр)!өг  
 (((ет01)т)кыз)ғыз)!өг  
 (((ет01)т)тыр)т)кыз)!өг  
 (((ет01)т)тыр)т)кыз)дыр)!өг  
 (((ет01)т)кыз)дыр)т)!?г  
 (((ет01)т)тыр)т)кыз)дыр)т)!өг  
 (((ет01)т)ты)!өе  
 (((ет01)т)қан)!өе  
 (((ет01)т)атын)!өе  
 (((ет01)т)ар)!ке

С помощью формальных правил образуются новые глаголы и отглагольные формы из других частей речи. В результате из 45000 слов словаря генерируется 395 000 глаголов.

**Словоизменение местоимений.** В качестве семантических признаков начальных форм для местоимения является деление в зависимости от его значения на 7 групп: личные, указательные, вопросительные, возвратные, неопределенные, отрицательные, определительные.

Онтологическая модель местоимений представлена на рисунке 7.

Личные, указательные и возвратные местоимения склоняются по правилам, определенным для каждой группы. Местоимения других групп склоняются лишь частично, некоторые местоимения вообще не склоняются. Для них определен семантический признак склонения или несклонения. Притяжательная форма (тәуелдік жалғау(taul)) и форма спряжения (жіктік жалғау(jikt)) существует только для некоторых местоимений.

Таким образом, в качестве семантических признаков местоимений можно выделить склонение местоимений, существование притяжательной формы, формы спряжения и принадлежность к той или иной группе местоимений.

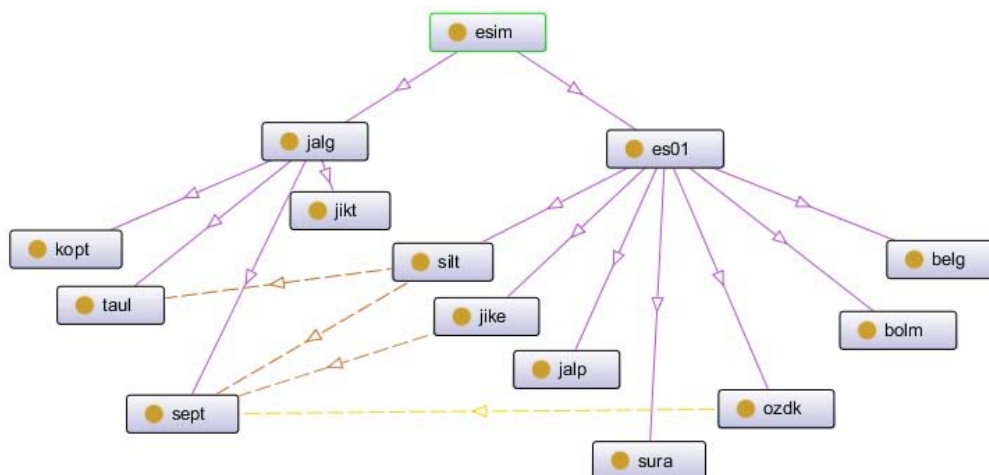


Рисунок 7 – Онтологическая модель местоимений

Если представить онтологию в виде гиперграфа, то его вершины и ребра будут:

$$V = \{silt, jike, ozdk\},$$

$$E = \{(silt, taul), (silt, sept), (jike, sept), (ozdk, sept)\}.$$

**Вывод.** Построены онтологические модели морфологических правил казахского языка, что позволило записать формальные правила словоизменения и словообразования каждой части речи для автоматической генерации базы данных объемом более 3 200 000 словоформ (словарных статей) из базы знаний (база знаний содержит семантические признаки, расставленные лингвистом) объемом 40 000 начальных форм слов.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Chomsky N. *The Logical Structure of Linguistic Theory*. – Plenum Press, 1975. – P. 573.
- [2] Berge C.C. *Graphs and Hypergraphs*. – Elsevier Science Ltd., 1985
- [3] Vizing V.G. About a coloring of insidentor in the hypergraph // *Diskretn. Anal. Issled. Oper.*, Ser. 1, 14:3, 2007. – P. 40-45.
- [4] Gruber T.R. *A Translation Approach to Portable Ontology Specifications* // *Knowledge Acquisition*, 5(2), 1993. – P. 199-220.
- [5] Gruber T.R. *Toward Principles for the Design of Ontologies Used for Knowledge Sharing*. *International Journal Human-Computer Studies*. – 1995. – Vol. 43, Issues 5-6. – P. 907-928.
- [6] Қазақ грамматикасы. Фонетика, сөзжасам, морфология, синтаксис. – Астана, 2002.

#### REFERENCE

- [1] Chomsky N. *The Logical Structure of Linguistic Theory*. *Plenum Press*, 1975. P. 573.
- [2] Berge C.C. *Graphs and Hypergraphs*, Elsevier Science Ltd. 1985.
- [3] Vizing V.G. *About a coloring of insidentor in the hypergraph*. *Diskretn. Anal. Issled. Oper.*, Ser. 1, 14:3, 2007. P. 40-45.
- [4] Gruber T.R. *A Translation Approach to Portable Ontology Specifications*. *Knowledge Acquisition*, 5(2), 1993. P. 199-220.
- [5] Gruber T.R. *Toward Principles for the Design of Ontologies Used for Knowledge Sharing*. *International Journal Human-Computer Studies*. 1995. Vol. 43, Issues 5-6. P. 907-928.
- [6] *Kazakh grammar. Phonetics, word formation, morphology, syntax*. Astana, 2002 (In Kazakh).

### ҚАЗАҚ ТІЛІНІҢ МОРФОЛОГИЯЛЫҚ ЕРЕЖЕЛЕРІНІҢ ФОРМАЛДЫ МОДЕЛІ

А. Ә. Шәріпбаев, Г. Т. Бекманова, Ә. С. Мұқанова, Б. Ж. Ергеш

Л. Н. Гумилев атындағы Евразиялық ұлттық университеті, Астана, Қазақстан

**Аннотация.** Жұмыста қазақ тілінің морфологиялық ережелерінің онтологиялық модельдері семантикалық гиперграфтар түрінде көрсетіледі.

Поступила 26.11.2014 г.



## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

## PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 6, Number 298 (2014), 81 – 85

## ABOUT THE THEOREM OF LIVSHITS

I. O. Orazov, A. Sh. Shaldanbaev

M. Auezov South-Kazakhstan State University, Shymkent, Kazakhstan

**Key words:** Livshits Theorem, eigenvalues, dissipative operator, completely continuous operator.**Abstract.** In this paper, we obtain some identities recalling trace formula operators.

УДК 517.9

## ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ЛИВЩИЦА

И. О. Оразов, А. Ш. Шалданбаев

Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, Шымкент, Казахстан

**Ключевые слова:** теорема Лившица, собственные значения, диссипативный оператор, вполне непрерывный оператор.**Аннотация.** В работе получены некоторые тождества, напоминающие формулы следов операторов.

В работе [1] была получена следующая теорема.

ТЕОРЕМА (М. С. Лившиц). Пусть  $A$  – простой диссипативный или вполне непрерывный оператор причем  $s_p(A_j) < \infty$ .Для того чтобы система корневых векторов оператора  $A$  было полной, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{Im} \lambda_j(A) = s_p(A_j), \quad (1)$$

где  $A_j = \frac{A - A^*}{2i}$ ,  $\lambda_j(A)$  – собственные значения оператора  $A$ ,  $s_p A_j$  – матричный след оператора  $A_j$  [см. 2, 127].Напомним, что ограниченный оператор, определенный в гильбертовом пространстве  $H$ , называется диссипативным, если его мнимая компонента  $A_j = \frac{(A - A^*)}{2i}$  является неотрицательным оператором.Ограниченный оператор  $A$ , заданный в гильбертовом пространстве  $H$  называется простым, если  $A$  и  $A^*$  не имеют общего инвариантного подпространства, на котором бы они совпали.Подпространство  $H_0 \subset H$  называется инвариантным подпространством оператора  $A$ , если для любого  $f$  из вектор  $Af$  также принадлежит  $H_0$ .Основная идея настоящей работы состоит в том, что если полнота корневых векторов оператора  $A$  нам известно из других соображений, то формулу (1) можем использовать для численных расчетов.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Применив формулу (1) к оператору

$$L_k^{-1} f(x) = \frac{1}{2} \left[ \int_0^x f(1-t) dt - \int_x^1 f(1-t) dt \right] + \left( k + \frac{1}{2} \right) \int_0^1 f(t) dt, k \in \mathbb{C} \quad (2)$$

заданного в пространстве  $H = L^2(0,1)$ , получить числовые тождества, вроде формул следов [2, с. 125].

## 2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

ЛЕММА 1. Оператор  $L_k^{-1}$

- а) самосопряжен тогда и только тогда, когда  $Imk = 0$ ;
- б) диссипативен тогда и только тогда, когда  $Imk > 0$ ;
- в) нормален, самосопряжен и действительный одновременно ;
- г) если  $Imk < 0$ , то диссипативен оператор  $(-L_k^{-1})$ .

ЛЕММА 2. Для того чтобы система корневых векторов оператора  $L_k^{-1}$  была полной, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{j=1}^{\infty} Im \lambda_j(L_k^{-1}) = Imk. \quad (3)$$

Напомним, что вектор  $\varphi \in H$  ( $\varphi \neq 0$ ) называется корневым вектором оператора  $A$ , отвечающим собственному числу  $\lambda_0$ , если  $(A - \lambda_0 I)^n \varphi = 0$  при некотором натуральном числе  $n$ .

Оператор  $L_k^{-1}$  является обратным оператором к оператору  $L_k$ , для которого справедлива лемма 3.

ЛЕММА 3. Если

$$(a) \quad k^2 + k + \frac{1}{2} \neq 0 \quad (4)$$

то спектральная задача

$$\begin{cases} L_k u = u'(1-x) = \mu u(x); & x \in (0,1) \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} (k+1)u(0) - ku(1) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

имеет бесконечное множество собственных значений:

$$\{\mu_n^{\pm}\} = \left\{ \arccos \frac{k^2 + k}{k^2 + k + \frac{1}{2}} + 2n\pi \right\}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \text{ при } Imk < 0 \quad (7)$$

или

$$\{\mu_n^{\pm}\} = \left\{ -\arccos \frac{k^2 + k}{k^2 + k + \frac{1}{2}} + 2n\pi \right\}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \text{ при } Imk > 0$$

и соответствующих им собственных векторов;

$$u_n^{\pm} = \frac{k \cos \mu_n^{\pm} x + (k+1) \sin \mu_n^{\pm} x}{\sqrt{k^2 + k + \frac{1}{2}}}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (8)$$

которые при  $k \neq \bar{k}$  образуют базис Рисса пространства, переходящей при  $Imk \rightarrow 0$  в ортонормированный базис.

$$(б) \quad k^2 + k + \frac{1}{2} = 0.$$

то задача (5)-(6) не имеет собственных значений.

Из этой леммы следует, что корневые векторы операторы  $L_k^{-1}$  полны в пространстве  $H$ , учитывая вполне непрерывность оператора  $L_k^{-1}$ , мы получим утверждение леммы 2. Отметим, что эта лемма имеет независимое доказательство от результатов работы [1].

ЛЕММА 4. Если

- (а)  $k^2 + k + \frac{1}{2} \neq 0;$
- (б)  $Imk > 0$  , и  $Rek + \frac{1}{2} > 0$  ,

то имеет место формула

$$Imk = -\sum_{-\infty}^{+\infty} (-\infty)^{n} (+\infty)^{-n} [Im arc cos \frac{(k^2 + k)}{(k^2 + k + 1/2)}] / 2n\pi + arc cos \frac{(k^2 + k)}{(k^2 + k + 1/2)} ]^{1/2}$$

ЛЕММА 5. Если

- (а)  $k^2 + k + \frac{1}{2} \neq 0;$
- (б)  $Imk > 0$  ,  $Rek + \frac{1}{2} < 0$  ,

то имеет место формула

$$Imk = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{Im arc cos \frac{k^2 + k}{k^2 + k + \frac{1}{2}}}{2n\pi - arc cos \frac{k^2 + k}{k^2 + k + \frac{1}{2}}} \tag{10}$$

### 3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

ТЕОРЕМА 1. Если  $k$  - вещественная величина, то имеет место формула

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left(2n\pi + arc cos \frac{k^2 + k}{k^2 + k + \frac{1}{2}}\right)^2} = k^2 + k + \frac{1}{2}. \tag{11}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Несложно показать , что

$$\lim_{Imk \rightarrow 0} \frac{k - \bar{k}}{\mu_n^{\pm} - \bar{\mu}_n^{\pm}} = - \frac{|k^2 + k + \frac{1}{2}|}{|k|^2 + Re k + \frac{1}{2}}$$

где  $\mu_n^{\pm}$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) собственные значения задачи (5)-(6).

Заметим , что

$$\begin{aligned} \mu_n^+ &= 2n\pi + arc cos \frac{k^2 + k}{k^2 + k + \frac{1}{2}}, \bar{\mu}_n^+ = 2n\pi + arc cos \frac{\overline{k^2 + k}}{\overline{k^2 + k + \frac{1}{2}}} \\ \mu_n^+ - \bar{\mu}_n^+ &= arc cos \frac{\frac{k^2 + k}{k^2 + k + \frac{1}{2}} - arc cos \frac{k^2 + k}{k^2 + k + \frac{1}{2}}}{k^2 + k + \frac{1}{2}} = 2 Im arccos \left( k^2 + k \right) \end{aligned}$$

при  $Rek + \frac{1}{2} > 0$ . и

$$\mu_n^- - \bar{\mu}_n^- = -arc cos \frac{\frac{k^2 + k}{k^2 + k + \frac{1}{2}} + arc cos \frac{k^2 + k}{k^2 + k + \frac{1}{2}}}{k^2 + k + \frac{1}{2}} = -2 Im cos \left( k^2 + k \right),$$

при  $Rek + \frac{1}{2} < 0$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \lim_{Imk \rightarrow 0} \frac{k - \bar{k}}{\mu_n^+ - \bar{\mu}_n^+} &= \lim_{Imk \rightarrow 0} \frac{2Imk}{2Im\mu_n^+} = \lim_{Imk \rightarrow 0} \frac{Imk}{Im\mu_n^+} = \\ &= \lim_{Imk \rightarrow 0} \frac{Imk}{Im \arccos \frac{k^2 + k}{k^2 + k + \frac{1}{2}}} = - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{2n\pi + \arccos \frac{k^2 + k}{k^2 + k + \frac{1}{2}}} \right] = \\ &= - \frac{|k^2 + k + \frac{1}{2}|}{|k|^2 + Re k + \frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Поскольку после перехода к пределу  $k$  – вещественно, то

$$k^2 + k + \frac{1}{2} = \left(k + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{4}, \Rightarrow \left|k^2 + k + \frac{1}{2}\right| = k^2 + k + \frac{1}{2},$$

$$|k|^2 = k^2, \quad Re k = k,$$

поэтому

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{2n\pi + \arccos \frac{k^2 + k}{k^2 + k + \frac{1}{2}}} \right] = k^2 + k + \frac{1}{2}. \quad (11)$$

Это есть искомая формула.

Теперь пусть  $k \rightarrow -\frac{1}{2}$ , тогда

$$\lim_{k \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{k^2 + k}{k^2 + k + \frac{1}{2}} = \lim_{k \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{\left(k + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}{\left(k + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} = -1, \rightarrow \arccos(-1) = \pi.$$

следовательно

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2n\pi + \pi)^2} = \frac{1}{4}. \quad (12)$$

В самом деле известна [3.,с.270] формула

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

следовательно

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2n\pi + \pi)^2} &= \frac{1}{\pi^2} \left[ \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{(2n+1)^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \right] = \\ &= \frac{\pi}{\pi^2} \times \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \right] = \end{aligned}$$

что совпадает с формулой (12).

Если  $k = 0$ , то  $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$ , поэтому из формулы (11) имеем  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2n\pi + \frac{\pi}{2})^2} = \frac{1}{2}$ .

Эти формулы также совпадают с формулами из [3., с.270].

ТЕОРЕМА 2. Если  $k$  – вещественная величина, то имеет место формула

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2n\pi + \varphi)^2} = \frac{1}{2(1 - \cos \varphi)},$$

$$\varphi = \arccos \frac{k^2 + k}{k^2 + k + \frac{1}{2}},$$

где

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формулы

$$\varphi = \arccos \frac{k^2 + k}{k^2 + k + \frac{1}{2}} \quad \text{имеем,} \quad \cos \varphi = \frac{k^2 + k}{k^2 + k + \frac{1}{2}}.$$

Отсюда, полагая  $k^2 + k = z$ , получим

$$\cos \varphi = \frac{z}{z + \frac{1}{2}}, \quad \frac{z + \frac{1}{2}}{z} = \frac{1}{\cos \varphi}, \quad 1 + \frac{1}{2z} = \frac{1}{\cos \varphi},$$

$$z = \frac{\cos \varphi}{2(1 - \cos \varphi)}, \rightarrow k^2 + k = \frac{\cos \varphi}{2(1 - \cos \varphi)}.$$

Тогда, в силу формулы (11), имеем

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2n\pi + \varphi)^2} = \frac{\cos \varphi}{2(1 - \cos \varphi)} + \frac{1}{2} = \frac{\cos \varphi + 1 - \cos \varphi}{2(1 - \cos \varphi)} = \frac{1}{2(1 - \cos \varphi)}.$$

$$0 < x \leq \frac{\pi}{2}$$

ТЕОРЕМА 3. Если  $x$ , то имеет место формула

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(n + x)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi x}.$$

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Лившиц М.С. О спектральном разложении линейных несамосопряженных операторов // Матем. сборник. – 34 (76): 1 (1954). – С. 145-198.  
 [2] Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Наука, 1965. – 448 с.  
 [3] Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: Наука, 1969. – 544 с.

#### REFERENCES

- [1] Livshic M.S. O spektral'nom razlozhenii lineinyh nesamosopryazhennyh operatorov. Matem. sbornik. 34 (76): 1 (1954). 145-198 (in Russ.).  
 [2] Gohberg I.C., Krein M.G. Vvedenie v teoriyu lineinyh nesamosopryazhennyh operatorov v gil'bertovom prostranstve. M.: Nauka, 1965. 448 (in Russ.).  
 [3] Demidovich B.P. Sbornik zadach I uprazhnenii po matematicheskomu analizu. M.: Nauka, 1969. 544 (in Russ.).

#### ЛИВЩИЦІЇ БІР ТЕОРЕМА ТУРАЛЫ

И. О. Оразов, А. Ш. Шалданбаев

М. О. Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті, Шымкент, Қазақстан

**Аннотация.** Еңбекте операторлардың іздер формуласына ұқсас тепе-теңдіктер алынды.

Поступила 26.11.2014 г.

МАЗМҰНЫ

Теориялық және тәжірибелік зерттеулер

<i>Балғымбаева Ш.А., Нұрбаева Д.М., Нұрмухамедова Ж.М.</i> Тегіс периодты функциялар кластарын толқыншалармен жуықтау.....	3
<i>Алексеева Л.А.</i> Уравнение трансформации и его обобщенные решения в дифференциальной алгебре бикватернионов.....	8
<i>Байгісова Қ.Б.</i> Тығыздық функционал теориясына негізделген металдардағы вакансиялардың миграция энергиясын есептеудің заманауи әдістері.....	21
<i>Беков А.А., Шыныбаев М.Д., Досыбеков С.К., Тасқұлова А.М., Астемісова К.С., Үсіпбекова Д.И.</i> Хилл өрісіндегі сынау денесінің цилиндрлік координаттары.....	26
<i>Есқалиев М.Е., Избасарова Г.Қ.</i> Дөңгелек тесікті шектік аймақтағы серпінді пластикалық қысымды тарату туралы.....	33
<i>Жадраев Р.Ж.</i> Көлденең деформация коэффициентінің өзгеруін ескеріп үшөлшемді термосерпінділік есебін шешу.....	40
<i>Исабаева С.Н., Дүйсенова Н.Б.</i> Corel Draw векторлық графикасының технологиялық мүмкіндіктері.....	44
<i>Калбаева А.Т., Қуракбаева С.Д., Бренер А.М.</i> Ортотроптық ортадағы су бөгетін жырып өткен судың сүзгілену есебін шешудің алгоритмі.....	49
<i>Көшеров Т.С., Серік А.С.</i> Изотермиялық күйдіру барысындағы поликристалды кремний бетінің морфологиялық өзгерістері.....	55
<i>Кулпешов Б.Ш.</i> Жартылай реттелген құрылымдарында қисындылық критерийі.....	60
<i>Сәрсенгелдин М.М., Қоспанова Г.</i> Пәнаралық байланыстардың студенттердің оқу үлгеріміне әсері.....	64
<i>Уразова П.Б.</i> Тестілеу жүйесі – сапалы білім кепілі.....	69
<i>Шәріпбаев А.Ә., Бекманова Г.Т., Мұқанова Ә.С., Ергеш Б.Ж.</i> Қазақ тілінің морфологиялық ережелерінің формалды моделі.....	74
<i>Оразов И.О., Шалданбаев А.Ш.</i> Лившицтің бір теорема туралы.....	81

## СОДЕРЖАНИЕ

## Теоретические и экспериментальные исследования

<i>Балгимбаева Ш.А., Нурбаева Д.М., Нурмухамедова Ж.М.</i> Приближение всплесками классов гладких периодических функций многих переменных.....	3
<i>Алексеева Л.А.</i> Уравнение трансформации и его обобщенные решения в дифференциальной алгебре бикватернионов.....	8
<i>Байгисова К.Б.</i> Современные методы расчета энергии миграции вакансий в металлах на основе теории функционала плотности.....	21
<i>Беков А.А., Шинибаев М.Д., Досыбеков С.К., Таскулова А.М., Астемесова К.С., Усипбекова Д.И.</i> Цилиндрические координаты пробного тела в поле тяготения Хилла.....	26
<i>Ескалиев М.Е., Избасарова Г.К.</i> О распределении упругопластических напряжений в предельной зоне с круглым отверстием.....	33
<i>Жадраев Р.Ж.</i> Решение трехмерных задач термоупругости с учетом изменения коэффициента поперечной деформации.....	40
<i>Исабаева С.Н., Дуйсенова Н.Б.</i> Технологические возможности векторной графики Corel Draw.....	44
<i>Калбаева А.Т., Куракбаева С.Д., Бренер А.М.</i> Алгоритм решения задач фильтрации воды через дамбу с прорывами в ортотропной среде.....	49
<i>Койшеров Т.С., Серик А.С.</i> Изменение морфологии поверхности поликристаллического кремния при изотермических отжигах.....	55
<i>Кулпешов Б.Ш.</i> Критерий связности в частично упорядоченных структурах.....	60
<i>Сарсенгельдин М.М., Коспанова Г.</i> Влияние междисциплинарных связей на математическое образование студентов.....	64
<i>Уразова П.Б.</i> Система тестирования – гарантия качественного образования.....	69
<i>Шарипбаев А.А., Бекманова Г.Т., Муканова А.С., Ергеиш Б.Ж.</i> Формальная модель морфологических правил казахского языка.....	74
<i>Оразов И.О., Шалданбаев А.Ш.</i> Об одной теореме Лившица.....	81

CONTENTS

**Theoretical and experimental researches**

<i>Balgimbayeva Sh.A., Nurbayeva D.M., Nurmukhamedova Zh.M.</i> Approximation of classes of smooth periodic functions of several variables by wavelets.....	3
<i>Alexeyeva L.A.</i> The equation of transformation and its generalized decisions in differential algebra of biquaternions.....	8
<i>Baigisova K.B.</i> Modern methods of calculation of migration energy of vacancies in metals on the basis of density functional theory.....	21
<i>Bekov A.A., Shinibayev M.D., Dosibekov S.K., Taskulova A.M., Astemesova K.S., Usipbekova D.I.</i> Cylindrical coordinates of a test body in the Hill's gravitational field.....	26
<i>Yeskaliyev M., Izbassarova G.</i> About distributions of plastic stresses in limiting area with a circular hole.....	33
<i>Zhadrayev R.Zh.</i> Solution of three-dimensional thermoelasticity problems with provision of changing transverse deformation coefficient.....	40
<i>Isabayeva S.N., Duisenova N.B.</i> Teaching in higher educational establishments by means of Corel Draw.....	44
<i>Kalbaeva A.T., Kurakbaeva S.D., Brener A.M.</i> Solving algorithm for problems of water filtration through a dam with breaks in orthotropic media.....	49
<i>Kosherov T., Serik A.</i> Changes of morphological surface of polycrystalline silicon under the isothermal annealing.....	55
<i>Kulpeshov B.Sh.</i> Criterion for connectivity in partially ordered structures.....	60
<i>Sarsengeldin M.M., Kospanova G.</i> Interdisciplinary connections and their influence on mathematical education of students.....	64
<i>Urazova F.</i> Testing system – guarantee of qualitative education.....	69
<i>Sharipbayev A.A., Bekmanova G.T., Mukanova A.S., Yergesh B.Zh.</i> Formal model of morphological rules of agglutinative languages.....	74
<i>Orazov I.O., Shaldanbaev A.Sh.</i> About the theorem of Livshits.....	81



**Publication Ethics and Publication Malpractice  
in the journals of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan**

For information on Ethics in publishing and Ethical guidelines for journal publication see <http://www.elsevier.com/publishingethics> and <http://www.elsevier.com/journal-authors/ethics>.

Submission of an article to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan implies that the described work has not been published previously (except in the form of an abstract or as part of a published lecture or academic thesis or as an electronic preprint, see <http://www.elsevier.com/postingpolicy>), that it is not under consideration for publication elsewhere, that its publication is approved by all authors and tacitly or explicitly by the responsible authorities where the work was carried out, and that, if accepted, it will not be published elsewhere in the same form, in English or in any other language, including electronically without the written consent of the copyright-holder. In particular, translations into English of papers already published in another language are not accepted.

No other forms of scientific misconduct are allowed, such as plagiarism, falsification, fraudulent data, incorrect interpretation of other works, incorrect citations, etc. The National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan follows the Code of Conduct of the Committee on Publication Ethics (COPE), and follows the COPE Flowcharts for Resolving Cases of Suspected Misconduct ([http://publicationethics.org/files/u2/New\\_Code.pdf](http://publicationethics.org/files/u2/New_Code.pdf)). To verify originality, your article may be checked by the Cross Check originality detection service <http://www.elsevier.com/editors/plagdetect>.

The authors are obliged to participate in peer review process and be ready to provide corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. All authors of a paper should have significantly contributed to the research.

The reviewers should provide objective judgments and should point out relevant published works which are not yet cited. Reviewed articles should be treated confidentially. The reviewers will be chosen in such a way that there is no conflict of interests with respect to the research, the authors and/or the research funders.

The editors have complete responsibility and authority to reject or accept a paper, and they will only accept a paper when reasonably certain. They will preserve anonymity of reviewers and promote publication of corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. The acceptance of a paper automatically implies the copyright transfer to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan.

The Editorial Board of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan will monitor and safeguard publishing ethics.

Правила оформления статьи для публикации в журнале смотреть на сайте:

[www:nauka-nanrk.kz](http://www.nauka-nanrk.kz)  
[physics-mathematics.kz](http://physics-mathematics.kz)

Редактор *М. С. Ахметова*  
Верстка на компьютере *Д. Н. Калкабековой*

Подписано в печать 08.12.2014.  
Формат 60x881/8. Бумага офсетная. Печать – ризограф.  
5,7 п.л. Тираж 300. Заказ 6.