ISSN 1563 – 0285
Индекс 75872
25872

ӘЛ–ФАРАБИ атындағы
ҚАЗАҚ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ
КАЗАХСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени АЛЬ–ФАРАБИ

Х А Б А Р Ш Ы С Ы
В Е С Т Н И К

МАТЕМАТИКА СЕРИЯСЫ
МЕХАНИКА СЕРИЯСЫ
ИНФОРМАТИКА СЕРИЯСЫ

СЕРИЯ МАТЕМАТИКА
СЕРИЯ МЕХАНИКА
СЕРИЯ ИНФОРМАТИКА

АЛМАТЫ № 2 (69) 2011

ISSN 1563 – 0285
Индекс 75872
25872

ӘЛ–ФАРАБИ атындағы
ҚАЗАҚ ҰЛТТЫҚ
УНИВЕРСИТЕТІ

ҚазҰУ
ХАБАРШЫСЫ

МАТЕМАТИКА, МЕХАНИКА,
ИНФОРМАТИКА СЕРИЯСЫ

КАЗАХСКИЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
имени АЛЬ–ФАРАБИ

ВЕСТНИК
КазНУ

СЕРИЯ МАТЕМАТИКА,
МЕХАНИКА, ИНФОРМАТИКА

АЛМАТЫ № 2 (69) 2011

Зарегистрирован в Министерстве культуры, информации и общественного согласия Республики Казахстан, свидетельство 956-Ж от 25.11.1999 г. (Время и номер первичной постановки на учет 766 от 22.04.1992 г.)

СОДЕРЖАНИЕ

Геометрия, топология и анализ

Математическая логика

Дифференциальные уравнения

Теория управления

Вычислительная математика и математическое моделирование

К вопросу о термоупругой деформации тела, погруженного в трехмерное риманово пространство

Н.П. Азанов
Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы
e-mail: azanovnp@zmail.ru

Аннотация

В статье рассматриваются условия совместности Бельтрами – Митчелла для тензора напряжений при термоупругой деформации тела, погруженного в трехмерное субпроективное риманово пространство особого типа.

Обсуждается возможность их использования как условий существования полных интегралов для дифференциальных уравнений Пфаффа особого вида.

В работе рассматривается изотропное тело, погруженное в трехмерное субпроективное риманово пространство особого типа, метрика которого может быть приведена [1] к виду:

$$ds^2 = 2dx_1dx_2 + e\varphi(x_1)dx_3^2, \tag{1}$$

где φ – произвольная функция от x_1, $e = \pm 1$. Тело подвергается бесконечно малой деформации

$$\overline{x}_i = x_i + u_i(x_1, x_2, x_3)\tau.$$

Здесь $u_i(x_1, x_2, x_3)$ - компоненты вектора деформации, τ - бесконечно малый параметр.

Тензор

$$2\gamma_{ij} = \nabla_i u_j + \nabla_j u_i,$$

символ ∇ обозначает ковариантное дифференцирование, бесконечно малой термоупругой деформации состоит из термической деформации $\overset{(1)}{\gamma_{ij}}$ и упругой деформации $\overset{(2)}{\gamma_{ij}}$:

$$\gamma_{ij} = \overset{(1)}{\gamma_{ij}} + \overset{(2)}{\gamma_{ij}}.$$

При термическом расширении изотропное тело деформируется таким образом, что компоненты деформации $\overset{(1)}{\gamma_{ij}}$ определяются выражением

$$\overset{(1)}{\gamma_{ij}} = \alpha t g_{ij},$$

где t – обозначает отклонение температуры тела от состояния, когда деформация и напряжение равны нулю, α – коэффициент линейного расширения тела, а g_{ij} - компоненты метрического тензора (1) субпроективного риманова пространства особого типа.

Компоненты упругой деформации $\overset{(2)}{\gamma_{ij}}$ определяются соотношением [3]

$$\overset{(2)}{\gamma_{ij}} = \frac{1}{E}\left\{(1+\kappa)\, E_{ij} + \kappa\theta g_{ij}\right\}, \tag{2}$$

где E_{ij} - компоненты тензора напряжений, $\theta = g^{ij}E_{ij}$, E - модуль Юнга и κ - коэффициент Пуассона.

Для определения компонент $u_i(x_1,x_2,x_3)$, $i=1,2,3$ вектора деформации получаем систему дифференциальных уравнений

$$\nabla_i u_j + \nabla_j u_i = \frac{2}{E}\left\{(1+\kappa)\,E_{ij} + \kappa\theta g_{ij}\right\} + 2\alpha t g_{ij}. \tag{3}$$

При переходе к частным производным эта система приобретает вид:

$$\begin{cases} \partial_1 u_1(x_1,x_2,x_3) = \dfrac{1}{E}\left\{(1+\kappa)\,E_{11}(x_1,x_2,x_3)\right\}; \\[2ex] \partial_1 u_2(x_1,x_2,x_3) + \partial_2 u_1(x_1,x_2,x_3) = \dfrac{2}{E}\left\{(1+\kappa)\,E_{12}(x_1,x_2,x_3) + \kappa\theta(x_1,x_2,x_3)\right\} + 2\alpha t; \\[2ex] \partial_1 u_3(x_1,x_2,x_3) + \partial_3 u_1(x_1,x_2,x_3) + \dfrac{\varphi'(x_1)}{\varphi(x_1)}u_3(x_1,x_2,x_3) = \dfrac{2}{E}\left\{(1+\kappa)\,E_{13}(x_1,x_2,x_3)\right\}; \\[2ex] \partial_2 u_2(x_1,x_2,x_3) = \dfrac{1}{E}\left\{(1+\kappa)\,E_{22}(x_1,x_2,x_3)\right\}; \\[2ex] \partial_2 u_3(x_1,x_2,x_3) + \partial_3 u_2(x_1,x_2,x_3) = \dfrac{2}{E}\left\{(1+\kappa)\,E_{23}(x_1,x_2,x_3)\right\}; \\[2ex] \partial_3 u_3(x_1,x_2,x_3) + \dfrac{1}{2}e\varphi'(x_1)u_2(x_1,x_2,x_3) = \\[2ex] = \dfrac{1}{E}\left\{(1+\kappa)\,E_{33}(x_1,x_2,x_3) + \kappa\theta(x_1,x_2,x_3)e\varphi(x_1)\right\} + \alpha t e\varphi(x_1). \end{cases} \tag{4}$$

Условия совместности [2] системы (4)

$$\nabla_s\nabla_i\gamma_{jk} + \nabla_j\nabla_k\gamma_{si} - \nabla_s\nabla_k\gamma_{ji} - \nabla_j\nabla_i\gamma_{sk} - R^{m}_{sji.}\gamma_{mk} - R^{m}_{sjk.}\gamma_{im} = g_{pk}DR^{p}_{sji.}$$

сводятся к шести ненулевым дифференциальным уравнениям второго порядка

$$(1+\kappa)\left[\partial_{11}E_{22}(x_1,x_2,x_3) + \partial_{22}E_{11}(x_1,x_2,x_3) - 2\partial_{12}E_{12}(x_1,x_2,x_3)\right] - 2\kappa\partial_{12}\theta(x_1,x_2,x_3) = 0; \tag{5}$$

$$\begin{gathered} \frac{1}{E}\left\{(1+\kappa)\left[\partial_{11}E_{23}(x_1,x_2,x_3) + \partial_{23}E_{11}(x_1,x_2,x_3) - \partial_{13}E_{12}(x_1,x_2,x_3) - \right.\right. \\ \left.\left. -\partial_{12}E_{13}(x_1,x_2,x_3)\right] - \kappa\partial_{13}\theta(x_1,x_2,x_3)\right\} - \partial_{12}\left\{\frac{\varphi'(x_1)}{2\varphi(x_1)}u_3(x_1,x_2,x_3)\right\} = 0; \end{gathered} \tag{6}$$

$$\begin{gathered} \frac{1}{E}\left\{(1+\kappa)\left[\partial_{11}E_{33}(x_1,x_2,x_3) + \partial_{33}E_{11}(x_1,x_2,x_3) - 2\partial_{13}E_{13}(x_1,x_2,x_3)\right] + \right. \\ \left. +\kappa e\partial_{11}\left[\theta(x_1,x_2,x_3)\varphi(x_1)\right]\right\} - \frac{e}{2}\partial_{11}\left\{\varphi'(x_1)u_2(x_1,x_2,x_3)\right\} - \partial_{13}\left\{\frac{\varphi'(x_1)}{\varphi(x_1)}u_3(x_1,x_2,x_3)\right\} + \\ +\alpha t e\varphi''(x_1) = 0; \end{gathered} \tag{7}$$

$$\begin{gathered} \frac{1}{E}\left\{(1+\kappa)\left[\partial_{12}E_{23}(x_1,x_2,x_3) + \partial_{23}E_{12}(x_1,x_2,x_3) - \partial_{13}E_{22}(x_1,x_2,x_3) - \right.\right. \\ \left.\left. -\ \partial_{22}E_{13}(x_1,x_2,x_3)\right] + \kappa\partial_{23}\theta(x_1,x_2,x_3)\right\} - \frac{\varphi'(x_1)}{2\varphi(x_1)}\partial_{22}u_3(x_1,x_2,x_3) = 0; \end{gathered} \tag{8}$$

$$\frac{1}{E}\left\{(1+\kappa)\left[\partial_{12}E_{33}(x_1,x_2,x_3)+\partial_{33}E_{12}(x_1,x_2,x_3)-\partial_{13}E_{23}(x_1,x_2,x_3)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\partial_{23}E_{13}(x_1,x_2,x_3)\right]+\kappa\left[e\partial_{12}\left(\varphi(x_1)\theta(x_1,x_2,x_3)\right)+\partial_{33}\theta(x_1,x_2,x_3)\right]\right\}- \tag{9}$$
$$-\frac{e}{2}\partial_{12}\left\{\varphi'(x_1)u_2(x_1,x_2,x_3)\right\}-\frac{\varphi'(x_1)}{2\varphi(x_1)}\partial_{23}u_3(x_1,x_2,x_3)=0;$$

$$\frac{1}{E}\left\{(1+\kappa)\left[\partial_{22}E_{33}(x_1,x_2,x_3)+\partial_{33}E_{22}(x_1,x_2,x_3)-2\partial_{23}E_{23}(x_1,x_2,x_3)\right]+\right.$$
$$\left.+\kappa e\varphi(x_1)\partial_{22}\theta(x_1,x_2,x_3)\right\}-\frac{e\varphi'(x_1)}{2}\partial_{22}u_2(x_1,x_2,x_3)=0. \tag{10}$$

Уравнения (5) - (10) являются аналогами уравнений Бельтрами - Митчелла [2] для термоупругой деформации тела, погруженного в трехмерное субпроективное риманово пространство особого типа (1).

Уравнения (5), (7) и (8) можно интерпретировать как необходимые и достаточные условия того, что дифференциальное уравнение

$$\left[\frac{1+\kappa}{E}\left(\partial_1E_{12}(x_1,x_2,x_3)-\partial_2E_{11}(x_1,x_2,x_3)\right)+\frac{\kappa}{E}\partial_1\theta(x_1,x_2,x_3)\right]dx_1+$$
$$+\left[\frac{1+\kappa}{E}\left(\partial_1E_{22}(x_1,x_2,x_3)-\partial_2E_{12}(x_1,x_2,x_3)\right)-\frac{\kappa}{E}\partial_2\theta(x_1,x_2,x_3)\right]dx_2+ \tag{11}$$
$$+\left[\frac{1+\kappa}{E}\left(\partial_1E_{23}(x_1,x_2,x_3)-\partial_2E_{13}(x_1,x_2,x_3)\right)-\frac{\varphi'(x_1)}{2\varphi(x_1)}\partial_2u_3(x_1,x_2,x_3)\right]dx_3=0$$

имеет полный интеграл

$$\omega_1(x_1,x_2,x_3)=\int\limits_0^{x_1}\left[\frac{1+\kappa}{E}\left(\partial_1E_{12}(\lambda,x_2,x_3)-\partial_2E_{11}(\lambda,x_2,x_3)\right)+\frac{\kappa}{E}\partial_1\theta(\lambda,x_2,x_3)\right]d\lambda+$$
$$+\int\limits_0^{x_2}\left[\frac{1+\kappa}{E}\left(\partial_1E_{22}(0,\mu,x_3)-\partial_2E_{12}(0,\mu,x_3)\right)-\frac{\kappa}{E}\partial_2\theta(0,\mu,x_3)\right]d\mu+ \tag{12}$$
$$+\int\limits_0^{x_3}\left[\frac{1+\kappa}{E}\left(\partial_1E_{23}(0,0,\nu)-\partial_2E_{13}(0,0,\nu)\right)-\frac{\varphi'(0)}{2\varphi(0)}\partial_2u_3(0,0,\nu)\right]d\nu+\omega_1(0,0,0),$$

где $\omega_1(0,0,0)$ - некоторая константа. Причем

$$\partial_3\omega_1(x_1,x_2,x_3)=\frac{1+\kappa}{E}\left\{\partial_1E_{23}-\partial_2E_{13}\right\}(x_1,x_2,x_3)-\frac{\varphi'(x_1)}{2\varphi(x_1)}\partial_2u_3(x_1,x_2,x_3).$$

Уравнения (8), (9) и (10) можно интерпретировать как необходимые и достаточные условия того, что дифференциальное уравнение

$$\left[\frac{1+\kappa}{E}\left(\partial_2 E_{13}(x_1,x_2,x_3)-\partial_3 E_{12}(x_1,x_2,x_3)\right)-\frac{\kappa}{E}\partial_3\theta(x_1,x_2,x_3)+\right.$$
$$\left.+\frac{\varphi'(x_1)}{2\varphi(x_1)}\partial_2 u_3(x_1,x_2,x_3)\right]dx_1+\left[\frac{1+\kappa}{E}\left(\partial_2 E_{23}(x_1,x_2,x_3)-\partial_3 E_{22}(x_1,x_2,x_3)\right)\right]dx_2+$$
$$+\left[\frac{1+\kappa}{E}\left(\partial_2 E_{33}(x_1,x_2,x_3)-\partial_3 E_{23}(x_1,x_2,x_3)\right)+\frac{e\kappa}{E}\varphi(x_1)\partial_2\theta(x_1,x_2,x_3)-\right.$$
$$\left.-\frac{e\varphi'(x_1)}{2}\partial_2 u_2(x_1,x_2,x_3)\right]dx_3=0 \tag{13}$$

имеет полный интеграл

$$\omega_2(x_1,x_2,x_3)=\int_0^{x_1}\left[\frac{1+\kappa}{E}\left(\partial_2 E_{13}(\lambda,x_2,x_3)-\partial_3 E_{12}(\lambda,x_2,x_3)\right)-\frac{\kappa}{E}\partial_3\theta(\lambda,x_2,x_3)+\right.$$
$$\left.+\frac{\varphi'(\lambda)}{2\varphi(\lambda)}\partial_2 u_3(\lambda,x_2,x_3)\right]d\lambda+\int_0^{x_2}\left[\frac{1+\kappa}{E}\left(\partial_2 E_{23}(0,\mu,x_3)-\partial_3 E_{22}(0,\mu,x_3)\right)\right]d\mu+$$
$$+\int_0^{x_3}\left[\frac{1+\kappa}{E}\left(\partial_2 E_{33}(0,0,\nu)-\partial_3 E_{23}(0,0,\nu)\right)+\frac{e\kappa}{E}\varphi(0)\partial_2\theta(0,0,\nu)-\right.$$
$$\left.-\frac{e\varphi'(0)}{2}\partial_2 u_2(0,0,\nu)\right]d\nu+\omega_2(0,0,0), \tag{14}$$

где $\omega_2(0,0,0)$ - некоторая константа. Причем

$$\partial_1\omega_2(x_1,x_2,x_3)=\frac{1+\kappa}{E}\left\{\partial_2 E_{13}-\partial_3 E_{12}\right\}(x_1,x_2,x_3)+\frac{\varphi'(x_1)}{2\varphi(x_1)}\partial_2 u_3(x_1,x_2,x_3)-\frac{\kappa}{E}\partial_3\theta(x_1,x_2,x_3).$$

Уравнения (6), (7) и (9) можно интерпретировать как необходимые и достаточные условия того, что дифференциальное уравнение

$$\left[\frac{1+\kappa}{E}\left(\partial_1 E_{13}(x_1,x_2,x_3)-\partial_3 E_{11}(x_1,x_2,x_3)\right)+\partial_1\left\{\frac{\varphi'(x_1)}{2\varphi(x_1)}u_3(x_1,x_2,x_3)\right\}\right]dx_1+$$
$$\left[\frac{1+\kappa}{E}\left(\partial_1 E_{23}(x_1,x_2,x_3)-\partial_3 E_{12}(x_1,x_2,x_3)\right)-\frac{\kappa}{E}\partial_3\theta(x_1,x_2,x_3)\right]dx_2+$$
$$+\left[\frac{1+\kappa}{E}\left(\partial_1 E_{33}(x_1,x_2,x_3)-\partial_3 E_{13}(x_1,x_2,x_3)\right)+\frac{e\kappa}{E}\partial_1\left\{\varphi(x_1)\theta(x_1,x_2,x_3)\right\}-\right.$$
$$\left.-\frac{e}{2}\partial_1\left\{\varphi'(x_1)u_2(x_1,x_2,x_3)\right\}-\partial_3\left(\frac{\varphi'(x_3)}{2\varphi(x_1)}u_3(x_1,x_2,x_3)\right)\right]dx_3=0 \tag{15}$$

имеет полный интеграл

$$\omega_3(x_1,x_2,x_3)=\int\limits_0^{x_1}\left[\frac{1+\kappa}{E}\left(\partial_1 E_{13}(\lambda,x_2,x_3)-\partial_3 E_{11}(\lambda,x_2,x_3)\right)+\right.$$
$$\left.+\partial_1\left\{\frac{\varphi'(\lambda)}{2\varphi(\lambda)}u_3(\lambda,x_2,x_3)\right\}\right]d\lambda+\int\limits_0^{x_2}\left[\frac{1+\kappa}{E}\left(\partial_1 E_{23}(0,\mu,x_3)-\partial_3 E_{12}(0,\mu,x_3)\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{\kappa}{E}\partial_3\theta(0,\mu,x_3)\right]d\mu+\int\limits_0^{x_3}\left[\frac{1+\kappa}{E}\left(\partial_1 E_{33}(0,0,\nu)-\partial_3 E_{13}(0,0,\nu)\right)+\right. \qquad (16)$$
$$\left.+\frac{e\kappa}{E}\partial_1\left\{\varphi(0)\theta(0,0,\nu)\right\}-\frac{e}{2}\partial_1\left\{\varphi'(0)u_2(0,0,\nu)\right\}-\partial_3\left(\frac{\varphi'(0)}{2\varphi(0)}u_3(0,0,\nu)\right)\right]d\nu+$$
$$+\omega_3(0,0,0),$$

где $\omega_3(0,0,0)$ - некоторая константа. Причем

$$\partial_2\omega_3(x_1,x_2,x_3)=\frac{1+\kappa}{E}\left(\partial_1 E_{23}(x_1,x_2,x_3)-\partial_3 E_{12}(x_1,x_2,x_3)\right)-\frac{\kappa}{E}\partial_3\theta(x_1,x_2,x_3).$$

Таким образом, условия интегрируемости (5) - (10) в случае метрики (1) могут быть интерпретированы как условия существования полных интегралов (12), (14) и (16) для дифференциальных уравнений (11), (13) и (15).

Заметим, что частные производные полных интегралов связаны соотношением

$$\partial_1\omega_2(x_1,x_2,x_3)-\partial_2\omega_3(x_1,x_2,x_3)+\partial_3\omega_1(x_1,x_2,x_3)=0.$$

Список литературы

[1] *Кручкович Г.И.*, О пространствах В.Ф. Кагана. // в. кн. В.Ф. Каган. Субпроективные пространства. - М.: ФМЛ, 1961. - С. 163 - 198.

[2] *Азанов Н.П.*, Уравнения совместности Сен-Венана и Бельтрами-Митчелла в римановом пространстве. // Труды геометрического семинара. Вып. 19., Казань, 1989. - С. 9 - 13.

[3] *Азанов Н.П.*, Бесконечно малая термоупругая деформация тела, погруженного в риманово пространство. // Вестник КазНУ. Сер. мат., мех., инф. 2010. №2(65). - С. 3 - 10.

О нелокальном возмущении периодической задачи на собственные значения

Н.С. Иманбаев
Шымкентский институт Международного казахско-турецкого ун-тета им. Х.А. Ясави
e-mail: imanbaevnur@mail.ru

Аннотация

В работе рассматривается спектральная задача для оператора кратного дифференцирования с интегральным возмущением в одном из периодических краевых условиях. Построен характеристический определитель спектральной задачи. Показано, что свойство базисности систем корневых функций задачи может меняться при каком угодно малом изменении ядра интегрального возмущения.

Хорошо известно, что система собственных функций оператора, заданного формально самосопряженным дифференциальным выражением, с произвольными самосопряженными краевыми условиями, обеспечивающими дискретный спектр, образует ортонормированный базис пространства L_2. Во многих работах исследовался вопрос о сохранении свойств базисности при некотором (слабом в определенном смысле) возмущении исходного оператора. Например, для случая самосопряженного исходного оператора аналогичный вопрос исследовался в [1 - 3], а для несамосопряженного - в [4]. В настоящей работе рассматривается, близкая к исследованиям [3], спектральная задача:

$$l(u) \equiv -u''(x) = \lambda u(x), \quad 0 < x < 1, \tag{1}$$

$$U_1(u) \equiv u'(0) - u'(1) = 0, \tag{2}$$

$$U_2(u) \equiv u(0) - u(1) = \int_0^1 \overline{p(x)} u(x) dx, \quad p(x) \in L_1(0,1). \tag{3}$$

Если $p(x) \equiv 0$, то задача (1) - (3) является самосопряженной, а система ее собственных функций - обычной тригонометрической системой и образует ортонормированный базис в $L_2(0,1)$. В [3] исследованы вопросы устойчивости базисных свойств периодической задачи для уравнения (1), при возмущении краевого условия (2).

Вопрос о базисности корневых функций оператора с более общими интегральными краевыми условиями положительно решен в [5], где доказана базисность Рисса со скобками при условии регулярности по Биркгофу [6, с.66-67] краевых условий невозмущенной задачи; а при дополнительном предположении усиленной регулярности - базисность Рисса. В нашем случае невозмущенные краевые условия (2), (3) являются регулярными, но не усиленно регулярными краевыми условиями. Поэтому для него не применимы результаты [5], а требуется дополнительное исследование. Из работы [5] следует, что система собственных и присоединенных функций задачи (1) - (3) полна и минимальна в $L_2(0,1)$. В настоящей работе мы построим характеристический определитель спектральной задачи (1)-(3) На основании полученной формулы делаются выводы о неустойчивости свойств базисности Рисса системы собственных функций задачи при интегральном возмущении краевого условия. Одной из особенностей рассматриваемой задачи является то, что сопряженной к (1)-(3), является спектральная задача для нагруженного дифференциального уравнения:

$$l^*(v) = -v''(x) + p(x)v'(0) = \overline{\lambda} v(x), \quad U_1(v) = 0, \quad U_2(v) = 0. \tag{4}$$

Построим сначала характеристический определитель спектральной задачи. Представляя общее решение уравнения (1) по формуле $u(x,\lambda) = C_1 cos\sqrt{\lambda}x + C_2 sin\sqrt{\lambda}x$, и удовлетворяя его краевым условиям (2),(3), получаем линейную систему относительно коэффициентов C_k:

$$\begin{cases} C_1[sin\sqrt{\lambda}] + C_2[1 - cos\sqrt{\lambda}] = 0, \\ C_1\left[1 - cos\sqrt{\lambda} - \int_1^0 \overline{p(x)} cos\sqrt{\lambda}x dx\right] + C_2\left[-sin\sqrt{\lambda} - \int_1^0 \overline{p(x)} sin\sqrt{\lambda}x dx\right] = 0. \end{cases}$$

Ее определитель и будет характеристическим определителем задачи (1)-(3):

$$\triangle_1(\lambda) = \begin{vmatrix} sin\sqrt{\lambda} & 1 - cos\sqrt{\lambda} - \int_1^0 \overline{p(x)} cos\sqrt{\lambda}x dx \\ 1 - cos\sqrt{\lambda} & -sin\sqrt{\lambda} - \int_1^0 \overline{p(x)} sin\sqrt{\lambda}x dx \end{vmatrix} \tag{5}$$

Легко видеть, что характеристический определитель невозмущенной задачи (1)-(3) получается отсюда при $p(x) = 0$. Обозначим его через $\triangle_0(\lambda) = -2(1 - cos\sqrt{\lambda})$. Очевидно, что собственными значениями невозмущенной периодической задачи являются $\lambda_k^0 = (2k\pi)^2$, а собственными функциями $u_{k0}^0 = \sqrt{2}cos(2k\pi)x, \quad u_{k1}^0 = \sqrt{2}sin(2k\pi)x.$

Функцию $p(x)$ представим в виде ряда Фурье по тригонометрической системе:

$$p(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k cos(2k\pi)x + b_k sin(2k\pi)x]. \tag{6}$$

Используя (6), найдем более удобное представление определителя $\triangle_1(\lambda)$. Для этого сначала вычислим входящие в (5) интегралы. Несложные вычисления показывают, что

$$\int_1^0 \overline{p(x)} cos\sqrt{\lambda}x dx = \overline{a_0}\frac{sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{[\overline{a_k}\sqrt{\lambda}sin\sqrt{\lambda} + \overline{b_k}2k\pi(cos\sqrt{\lambda} - 1)]}{\lambda - (2k\pi)^2},$$

$$\int_1^0 \overline{p(x)} sin\sqrt{\lambda}x dx = \overline{a_0}\frac{1 - cos\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{[\overline{a_k}\sqrt{\lambda}(1 - cos\sqrt{\lambda}) + \overline{b_k}2k\pi sin\sqrt{\lambda}]}{\lambda - (2k\pi)^2}.$$

Откуда стандартными преобразованиями определитель (5) приводится к виду:

$$\triangle_1(\lambda) = \triangle_0(\lambda)A(\lambda), \quad A(\lambda) = \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty}\overline{b_k}\frac{2k\pi}{\lambda - (2k\pi)^2}\right]. \tag{7}$$

Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

Теорема 1. *Характеристический определитель задачи (1)-(3) с возмущенными краевыми условиями представим в виде (7), где $\triangle_0(\lambda)$ - характеристический определитель невозмущенной задачи, а b_k - коэффициенты разложения (6) функции $p(x)$ в тригонометрический ряд Фурье.*

В представлении (7) функция $A(\lambda)$ имеет полюса в точках $\lambda = \lambda_k^0$ первого порядка. Однако в этих же точках функция $\triangle_0(\lambda)$ имеет нули второго порядка. Поэтому функция $\triangle_1(\lambda)$, представленная по формуле (7) является целой аналитической функцией переменного λ.

Более просто характеристический определитель (7) выглядит в случае, когда $p(x)$ представляется в виде конечной суммы в (6). То есть, когда существует такой номер N, что $a_k = b_k = 0$ для всех $k > N$. В этом случае формула (7) принимает вид

$$\triangle_1(\lambda) = \triangle_0(\lambda)\left[1 + \sum_{k=1}^{N} \overline{b_k} \frac{2k\pi}{\lambda - (2k\pi)^2}\right] \tag{8}$$

Из этого частного случая формулы (7) несложно обосновать следующее

Следствие 1. *Для любых наперед заданных чисел - комплексного $\widehat{\lambda}$ и натурального $\widehat{m}$ всегда существует такая функция $p(x)$, что $\widehat{\lambda}$ будет являться собственным значением задачи (1)-(3) кратности $\widehat{m}$.*

Из анализа формулы (8) также легко видеть, что $\triangle_1(\lambda_k^0) = 0$ для всех $k > N$. То есть все собственные значения $\lambda_k^0, k > N$ невозмущенной периодической задачи являются собственными значениями возмущенной задачи (1)-(3). Также не трудно убедиться, что сохраняется и кратность собственных значений $\lambda_k^0, k > N$.

Более того, из условия ортогональности тригонометрической системы следует, что в этом случае $\int_1^0 \overline{p(x)} u_{kj}^0(x)dx = 0, j = \overline{0,1}, k > N$. Поэтому собственные функции $u_{kj}^0(x)$ периодической задачи при $k > N$ удовлетворяют краевым условиям (2),(3) и, следовательно, являются собственными функциями задачи (1)-(3). Значит в этом случае системы собственных функций задачи (1)-(3) и система собственных функций периодической задачи (образующая ортонормированный базис) отличаются друг от друга лишь по конечному числу первых членов. Следовательно, система собственных функций задачи (1)-(3) также образует базис Рисса в $L_2(0,1)$.

Очевидно, что множество функций $p(x)$, представимых в виде конечного ряда (6), является плотным в $L_1(0,1)$. Таким образом, доказана

Теорема 2. *Множество функций $p(x) \in L_1(0,1)$ таких, что система собственных функций задачи (1)-(3) образует базис Рисса в $L_2(0,1)$, является плотным в $L_1(0,1)$.*

Покажем теперь, что свойство базисности системы собственных функций задачи (1)-(3) является неустойчивым при сколь угодно малом интегральном возмущении краевого условия (3).

Теорема 3. *Множество функций $p(x) \in L_1(0,1)$ таких, что система собственных функций задачи (1)-(3) не образует даже обычного базиса в $L_2(0,1)$, является плотным в $L_1(0,1)$.*

Доказательство. Пусть в разложении (6) коэффициенты $b_k \neq 0$для всех достаточно больших k. Тогда из (7) не трудно видеть, что $\lambda = \lambda_k^0$ является простым собственным значением задачи (1)-(3). Легко проверить, что $u_k^1 = b_k cos(2k\pi)x - a_k sin(2k\pi)x$ являются собственными функциями задачи (1)-(3), соответствующими $\lambda_k^0 = (2k\pi)^2$. При этом собственной функцией сопряженной задачи (4), соответствующей собственному значению λ_k^0, является $v_k^1(x) = c_k cos(2k\pi)x$.

Так как собственные функции сопряженных задач образуют биортогональную систему, то имеем равенство единице скалярного произведения $(u_k^1, v_k^1) = 1$. Отсюда легко получаем $b_k\overline{c_k} = 2$. Поэтому

$$||u_k^1|| \cdot ||v_k^1|| = \sqrt{1 + \left|\frac{a_k}{b_k}\right|^2}. \tag{9}$$

Обозначим через $\sigma_N(x)$ - частичную сумму ряда Фурье (6). Очевидно, что множество функций, представимых в виде бесконечного ряда $\widetilde{p(x)} = \sigma_N(x) + \sum\limits_{k=N+1}^{\infty} [\widetilde{a_k} cos(2k\pi)x + \widetilde{b_k} sin(2k\pi)x]$, где $\widetilde{a_k} = 2^{-k}$, $\widetilde{b_k} = 2^{-k}/k$, $k > N$, является плотным в $L_1(0,1)$. Но из (9) следует, что при таких функциях $\widetilde{p(x)}$ для соответствующих систем собственных функций прямой и сопряженной задач имеет место $\lim\limits_{k\to\infty} ||u_k^1||||v_k^1|| = \infty$.

То есть не выполнено условие равномерной минимальности [7, с. 66] системы и, следовательно, она не образует даже обычного базиса в $L_2(0,1)$. Теорема 3 доказана.

Так как сопряженные операторы одновременно обладают свойством базисности Рисса корневых функций, то отсюда получаем

Следствие 2. *Множество P функций $p(x) \in L_1(0,1)$, для которых система собственных функций задачи (4) для нагруженного дифференциального уравнения образует базис Рисса в $L_2(0,1)$, всюду плотно в $L_1(0,1)$. Множество $L_1(0,1)\backslash P$ также всюду плотно в $L_1(0,1)$.*

Отметим, что в [8] исследованы вопросы устойчивости базисных свойств периодической задачи для нагруженного уравнения с нагрузкой вида $p(x)v(0)$.

Результаты настоящей работы, в отличие от [5], демонстрируют неустойчивость свойств базисности корневых функций задачи при интегральном возмущении краевых условий, являющихся регулярными, но не усиленно регулярными.

В заключение, автор выражает признательность д.ф.-м.н., профессору М.А. Садыбекову за плодотворное обсуждение результатов.

Список литературы

[1] *Маркус А.С.* О разложении по корневым векторам слабо возмущенного самосопряженного оператора // Докл. АН СССР. 1962. №3, Т.142. – С. 538 – 341.

[2] *Керимов Н.Б., Мамедов Х.Р.* О базисности Рисса корневых функций некоторых регулярных краевых задач // Матем.заметки. – 1998. – Т.64, Вып.4. – С. 448 – 563.

[3] *Макин А.С.* О нелокальном возмущении периодической задачи на собственные значения // Дифференц. уравнения. – 2006. №4, Т.42. – С. 560 – 562.

[4] *Ильин В.А., Крицков Л.В.* Свойства спектральных разложений, отвечающих несамосопряженным операторам // Функциональный анализ. Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. – М.: ВИНИТИ, 2006. – Т.96. – С. 5 – 105.

[5] *Шкаликов А.А.* О базисности собственных функций обыкновенных дифференциальных операторов с интегральными краевыми условиями // Вестник МГУ. Математика и механика. – 1982. – №6. – С. 12 – 21.

[6] *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. –М. – 1969.

[7] *под ред. Крейна* Функциональный анализ. –М. – 1972.

[8] *Иманбаев Н.С., Садыбеков М.А.* Базисные свойства корневых функций нагруженных дифференциальных операторов второго порядка // Доклады НАН РК. 2010. №2. – С. 11 – 13.

Уравнения геодезических метрики Карно-Каратеодори на трехмерной разрешимой группе Ли $SOLV^+$

А.Д. Мажитова
Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы
e-mail: Akmaral.Mazhitova@kaznu.kz

Аннотация

В этой работе мы продолжаем решать субриманову задачу на второй трехмерной разрешимой группе Ли $SOLV^+$ согласно классификационной теореме Аграчева-Барилари [1]. Построение Гамильтоновой системы и дифференциальные уравнения для геодезических было сделано в предыдущей работе. Теперь мы проинтегрируем эти уравнения, что возможно только с помощью привлечения эллиптических функций. Случай геометрии $SOLV^-$ мы рассмотрели в работах [7], [8].

Для трехмерной группы Ли $SOLV^+$ представленную матрицами вида

$$\begin{pmatrix} \cos z & \sin z & x \\ -\sin z & \cos z & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

алгебра Ли которой построена на базисных векторах

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad a_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad a_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

с коммутационными отношениями

$$[a_1, a_2] = 0; \quad [a_1, a_3] = -a_2; \quad [a_2, a_3] = a_1,$$

и левоинвариантной метрикой

$$< a_i, a_j >= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

мы построили функцию Гамильтона

$$H(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = \frac{1}{4}(1 + \sin 2z)p_x^2 + \frac{1}{2}(\cos 2z)p_x p_y + \frac{1}{4}(1 - \sin 2z)p_y^2 + \frac{1}{2}p_z^2. \tag{4}$$

Из известных равенств, выполняющихся для функции Гамильтона

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x}, \quad \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y}, \quad \dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z},$$

$$\dot{p_x} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \dot{p_y} = -\frac{\partial H}{\partial y}, \quad \dot{p_z} = -\frac{\partial H}{\partial z},$$

где точка означает производную по t, выпишем уравнения Гамильтона для (4)

$$\begin{aligned} &\dot{x} = \frac{1}{2}(1+\sin 2z)p_x + \frac{1}{2}(\cos 2z)p_y \\ &\dot{y} = \frac{1}{2}(\cos 2z)p_x + \frac{1}{2}(1-\sin 2z)p_y \\ &\dot{z} = p_z \\ &\dot{p_x} = 0 \\ &\dot{p_y} = 0 \\ &\dot{p_z} = -\frac{1}{2}(\cos 2z)p_x^2 + (\sin 2z)p_x p_y + \frac{1}{2}(\cos 2z)p_y^2. \end{aligned} \tag{5}$$

Система (5) имеет три первых интеграла:

$$I_1 = H, \quad I_2 = p_x, \quad I_3 = p_y,$$

значит наша система дифференциальных уравнений (5) полностью интегрируема. Не теряя общности, будем считать, что все геодезические берут начало в единице группы, то есть справедливы следующие начальные условия для системы (5):

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad z(0) = 0. \tag{6}$$

В дальнейшем будем полагать, что

$$H = \frac{1}{2}, \quad \frac{p_x}{\sqrt{2}} = a, \quad \frac{p_y}{\sqrt{2}} = b.$$

Подставим это все в гамильтониан (4) и получим

$$1 = \frac{1}{2}(1+\sin 2z)p_x^2 + (\cos 2z)p_x p_y + \frac{1}{2}(1-\sin 2z)p_y^2 + p_z^2, \tag{7}$$

значит,

$$p_z^2 = 1 - a^2(1+\sin 2z) - 2ab\cos 2z - b^2(1-\sin 2z),$$

$$p_z^2 = 1 - a^2 - b^2 - 2ab\cos 2z + (b^2-a^2)\sin 2z.$$

Обозначим $A = 1 - a^2 - b^2, B = -2ab, C = b^2 - a^2$, тогда из третьего уравнения системы (5) найдем равенство для нахождения переменной t, подставив полученное выше выражение для p_z

$$t = \int \frac{dz}{\sqrt{A + B\cos 2z + C\sin 2z}}. \tag{8}$$

сделаем замену переменных $\varphi = 2z$, тогда (8) перепишется в виде

$$t = \frac{1}{2}\int \frac{d\varphi}{\sqrt{A + B\cos\varphi + C\sin\varphi}}. \tag{9}$$

Этот интеграл с помощью замены $\varphi = 2\psi + \alpha$, $\tan\alpha = \dfrac{C}{B}$, $p = \sqrt{B^2 + C^2}$ приводится к эллиптическому интегралу в нормальной тригонометрической форме

$$t = \frac{1}{2}\int \frac{d\varphi}{\sqrt{A + B\cos\varphi + C\sin\varphi}} = \frac{1}{2}\cdot 2\int \frac{d\psi}{\sqrt{A - p + 2p\cos^2\psi}} =$$
$$= \int \frac{d\psi}{\sqrt{A + p - 2p\sin^2\psi}}.$$

Так как $A + p = 1$, $p = a^2 + b^2$, получим

$$t = \int \frac{d\psi}{\sqrt{1 - 2(a^2 + b^2)\sin^2\psi}}.$$

Сделав еще одну замену $v = \sin\psi$, получим интеграл Якоби

$$t = \int_0^{\mathrm{sn}t} \frac{dv}{\sqrt{(1 - v^2)(1 - k^2v^2)}},$$

где $k^2 = 2(a^2 + b^2)$.

Таким образом,

$$v = \mathrm{sn}(t, k).$$

Произведем все обратные замены, $v = \sin\psi$, а $\varphi = 2\psi + \alpha = 2z$, тогда, $\psi = z - \frac{\alpha}{2}$, значит

$$\sin\psi = \mathrm{sn}(t, k),$$

имея ввиду, что $\mathrm{sn}(t, k) = \sin(\mathrm{am}(t, k))$

$$z - \frac{\alpha}{2} = \mathrm{am}(t, k),$$

$$z = \mathrm{am}(t, k) + \frac{\alpha}{2} + C_1,$$

где $C_1 - const$ - константа интегрирования. Учитывая начальные условия, а также, что $\mathrm{am}(0, k) = 0$, запишем

$$z(t) = \mathrm{am}(t, k).$$

Теперь выпишем интегралы для $x(t)$:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{a}{\sqrt{2}}\left(1 + 2\mathrm{sn}(t,k)\cdot\mathrm{cn}(t,k)\right) + \frac{b}{\sqrt{2}}\left(\mathrm{cn}^2(t,k) - \mathrm{sn}^2(t,k)\right),$$

$$x(t) = \frac{a}{\sqrt{2}}\int\left(1 + 2\mathrm{sn}(t,k)\cdot\mathrm{cn}(t,k)\right)dt + \frac{b}{\sqrt{2}}\int\left(1 - 2\mathrm{sn}^2(t,k)\right)dt;$$

и для $y(t)$:

$$y(t) = \frac{a}{\sqrt{2}}\int\left(1 - 2\mathrm{sn}^2(t,k)\right)dt + \frac{b}{\sqrt{2}}\int\left(1 - 2\mathrm{sn}(t,k)\cdot\mathrm{cn}(t,k)\right)dt.$$

Используя известные формулы:

$$\frac{d\mathrm{dn}u}{du} = -k^2\mathrm{sn}u\cdot\mathrm{cn}u,$$

$$\int \mathrm{sn}^2 u du = \frac{1}{k^2}\left\{\mathrm{E}(\mathrm{am}u,k) - k'^2 u\right\},$$

и учитывая начальные условия, вычислим

$$x(t) = \left(\frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{b}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}bk'^2}{k^2}\right)t$$

$$-\frac{\sqrt{2}a}{k^2}\mathrm{dn}(t,k) - \frac{\sqrt{2}b}{k^2}\mathrm{E}(\mathrm{am}(t,k),k) + \frac{\sqrt{2}a}{k^2};$$

$$y(t) = \left(\frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}ak'^2}{k^2} + \frac{b}{\sqrt{2}}\right)t+$$

$$+\frac{\sqrt{2}b}{k^2}\mathrm{dn}(t,k) - \frac{\sqrt{2}a}{k^2}\mathrm{E}(\mathrm{am}(t,k),k) - \frac{\sqrt{2}b}{k^2}.$$

Таким образом общие уравнения для геодезических следующие:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \left(\frac{a+b}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}bk'^2}{k^2}\right)t - \frac{\sqrt{2}a}{k^2}\mathrm{dn}(t,k) - \frac{\sqrt{2}b}{k^2}\mathrm{E}(\mathrm{am}(t,k),k) + \frac{\sqrt{2}a}{k^2},\\
y(t) &= \left(\frac{a+b}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}ak'^2}{k^2}\right)t + \frac{\sqrt{2}b}{k^2}\mathrm{dn}(t,k) - \frac{\sqrt{2}a}{k^2}\mathrm{E}(\mathrm{am}(t,k),k) - \frac{\sqrt{2}b}{k^2},\\
z(t) &= \mathrm{am}(t,k).
\end{aligned} \tag{10}$$

Список литературы

[1] *A.Agrachev, and D. Barilari*, Sub-Riemannian structures on 3D Lie groups, arXiv:1007, 4970.

[2] *А.А. Аграчев, Ю.Л. Сачков*, Геометрическая теория управления, - М.: Физматлит, 2005. - 392 с.

[3] *Е.П. Аксенов*, Специальные функции в небесной механике, - М: Наука, 1986. - 321 с.

[4] *U.Boscain, F.Rossi*, Invariant Carnot-Caratheodory metrics on S^3, $SO(3)$, $SL(2)$ and lens spaces, - Preprint SISSA, 2007. - 24 p.

[5] *O.Calin, D.-Ch.Chang, I.Markina*, SubRiemannian geometry on the sphere S^3. //arxiv.org>math>arXiv:0804.1695, - 2008. - 13 p.

[6] *И.С. Градштейн, И.М.Рыжик*, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, - М.: Физматгиз, 1963. - 1100 с.

[7] *А.Д. Мажитова*, Суб-Риманова задача на трехмерной разрешимой группе Ли, - Вестник КазНУ, серия Математика, механика, информатика, № 2(65), 2010 г., Стр. 11-18.

[8] *А.Д. Мажитова*, Геодезический поток субримановой метрики на трехмерной разрешимой группе Ли SOLV. - Сборник материалов Международной научно-практической конференции "Математическое и компьютерное моделирование экологических процессов и актуальные проблемы современного образования 20 октября 2010 года, Тараз. - Стр.279-283.

[9] *Ю.Л. Сачков*, Управляемость и симметрии инвариантных систем на группах Ли и однородных пространствах.М: Физматлит, 2007.

[10] *I.A.Taimanov*, Integrable geodesic flows of non-holonomic metrics. // J.Dynam. Control Sistem 3(1997), - 129-147 p.

О существовании u – ультрафильтров и их свойствах

А.А. Чекеев, М.А. Абдраимова
Кыргызский национальный университет им. Ж. Баласагына, Бишкек, Кыргызстан
e-mail: asyl.ch.top@mail.ru*;* maxabat1105@mail.ru

Аннотация

В этой статье рассматриваются u – ультрафильтры, состоящие из равномерно открытых конуль - множеств. Устанавливаются различные свойства u – ультрафильтров.

Введение

В фундаментальной работе П.С. Александрова [8] при помощи вполне регулярных концов построено Стоун – Чеховское бикомпактное расширение тихоновского пространства. В данной работе доказывается существование u – ультрафильтров, которые являются равномерным аналогом вполне регулярных концов Александрова

1. Необходимые сведения.

Ниже мы воспроизведем нужные нам в дальнейшем свойства равномерно открытых (равномерно конуль) и равномерно замкнутых (равномерно нуль) множеств, введенных М.Г. Хараламбусом ([4-6]).

Каждое равномерное пространство обозначим как uX([1]), где u - равномерность на тихоновском пространстве X, заданная при помощи равномерных покрытий. Через $C^*(uX)$ обозначается множество всех равномерно непрерывных ограниченных функций на равномерном пространстве uX. Для метрического пространства (M, d) через u_d обозначается метрическая равномерность пространства M.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1 ([4-6]). Подмножество $F \subset X$ равномерного пространства uX называется *равномерно замкнутым*, если существует такое равномерно непрерывное отображение $f : uX \to u_d M$, что $F = f^{-1}(N)$, где $N \subset M$ замкнутое подмножество равномерного пространства $u_d M$.

Дополнение до *равномерно замкнутого множества* называется *равномерно открытым.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2 ([4-6]). Подмножество $F \subset X$ равномерного пространства uX называется *равномерно нуль – множеством*, если $F = f^{-1}(0)$ для некоторой функции $f \in C^*(uX)$.

Дополнение до равномерно *нуль - множества* называется равномерно *конуль - множеством.* Другими словами подмножество $U \subset X$ равномерного пространства uX является равномерно *конуль – множеством*, если $U = f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ для некоторой функции $f \in C^*(uX)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3 ([4-6]). *Подмножество $F \subset X$ $(U \subset X)$ равномерно замкнуто (равномерно открыто) тогда и только тогда, когда оно является равномерно нуль (конуль) – множеством.*

Через $\mathfrak{Z}(uX)$ $(\mathcal{L}(uX))$ обозначим семейство всех равномерно нуль (конуль) - множеств.

ТЕОРЕМА 1.4 ([4 - 6]). *Для равномерного пространства uX семейство $\mathfrak{Z}(uX)$ $(\mathcal{L}(uX))$ всех равномерно нуль (конуль) – множеств образует базу замкнутых (открытых) множеств.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5 ([4-6]). Функция $f : uX \to I = [0;1]$ называется C_u^**-функцией,* если $f^{-1}(U)$ является равномерно конуль – множеством для любого открытого множества $U \subset I$, или, что эквивалентно, $f^{-1}(F)$ является равномерно нуль – множеством для любого замкнутого множества $F \subset I$, т.е. $f^{-1}(F) \in \mathfrak{Z}(uX)$ и $f^{-1}(U) \in \mathcal{L}(uX)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.6 ([4]). *Семейство $\mathfrak{Z}(uX)$ $(\mathcal{L}(uX))$ замкнуто относительно конечных (счетных) объединений и счетных (конечных) пересечений.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.7 ([4], Лемма 3). *Пусть $F_1, F_2 \in \mathfrak{Z}(uX)$ и $F_1 \cap F_2 = \emptyset$. Тогда существует такая C_u^*- функция $f : uX \to I$, что $F_1 = f^{-1}(0)$ и $F_2 = f^{-1}(1)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $F_1, F_2 \in \mathfrak{Z}(uX)$, что существуют такие равномерно непрерывные функции $g_i : uX \to I$, что $F_1 = g_1^{-1}(0)$ и $F_2 = g_2^{-1}(0)$. По условию $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, следовательно $g_1 + g_2 > 0$. Положим $f = g_1/(g_1 + g_2)$, $f(x) = g_1(x)/(g_1(x) + g_2(x))$. Тогда имеем функцию $f : uX \to I$, которая, в общем случае, не является равномерно непрерывной. Имеем $F_1 = f^{-1}(0)$ и $F_2 = f^{-1}(1)$ и для любых $0 < a,\ b < 1$ имеем:

$$f^{-1}([0;a)) = \cup\left\{g_1^{-1}([0, pa/(1-a))) \cap g_2^{-1}((p;1]) : p \in \mathbb{Q}_p\right\},$$
$$f^{-1}((b,1]) = \cup\left\{g_1^{-1}((pb/(1-b),1]) \cap g_2^{-1}([0,p)) : p \in \mathbb{Q}_p\right\},$$

где $\mathbb{Q}_p \subset I$ множество всех рациональных чисел интервала $[0;1]$. Согласно предложению 1.6., $f^{-1}([0;a))$ и $f^{-1}((b,1])$ - равномерно конуль – множества, т.е. $f^{-1}([0,a)) \in \mathcal{L}(uX)$ и $f^{-1}((b,1]) \in \mathcal{L}(uX)$. Любое открытое множество $U \subset I$ интервала I является счетным объединением конечных пересечений множеств вида $[0,a)$ и $(b,1]$, поэтому $f^{-1}(U)$ открыто в X и следовательно f- является u- функцией.

2. Основные результаты

Напомним определения *u-отделимости, u-вложенности, u-окрестности, u-системы* ([7]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1 ([7]). Подмножества $A, B \subseteq X$ равномерного пространства uX называется *u-отделенными*, если существует такая C_u^*-функция $f : uX \to I = [0,1]$, что $f(A) = 0$ и $f(B) = 1$. Если A u-отделено от $X \backslash B$, тогда B называется *u-окрестностью* A.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2 ([7]). Пусть $A, B \subseteq X$ подмножества. Множество A называется *u-вложенным* в множество B, если A u-отделено от $X \backslash B$, т.е. существует такая C_u^*-функция $f : uX \to I$, что $f(A) = 0$ и $f(X \backslash B) = 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3 ([7]). Семейство ξ подмножеств равномерного пространства uX называется *u-системой,* если для любого $K \in \xi$ существует $B \in \xi$ такое, что B u-вложено в K, другими словами каждое $K \in \xi$ является u-окрестностью некоторого $B \in \xi$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. Центрированная система открытых множеств, являющаяся u-системой, называется *u-центрированной* системой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5. Предфильтр (фильтр), который является u - системой называется *u - предфильтром (фильтром).*

ТЕОРЕМА 2.6. *Пусть η - u - центрированная система и θ - семейство всевозможных конечных пересечений элементов η. Тогда θ - u - центрированная система.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По построению θ - центрированная система. Покажем, что θ является u - системой.

Пусть $U_1, U_2, ..., U_n$ элементы η, тогда $\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i$ элемент θ, т.е. $\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i \in \theta$. Для каждого $U_i \in \eta$, $i = 1, 2, ..., n$ найдется $V_i \in \eta$, $i = 1, 2, ..., n$ такое, что V_i u - вложено в U_i для каждого $i = 1, 2, ..., n$, поэтому существуют такие C_u^* - функции $f_i : uX \to I$, что $f_i (V_i) = \{0\}$, $f_i (X \backslash U_i) = \{1\}$, $i = 1, 2, ..., n$. Тогда имеем $Z_{i1}^0 = f_i^{-1} (0) \supset V_i, Z_{i2}^1 = f_i^{-1} (1) \supset X \backslash U_i, i = 1, 2, ..., n$, $Z_{i1}^0 \bigcap Z_{i2}^1 = \emptyset$ и $Z_{i1}^0 \in \mathfrak{Z} (uX), Z_{i2}^1 \in \mathfrak{Z} (uX), i = 1, 2, ..., n$. Следовательно, существуют такие функции $g_{i1} \in C^* (uX), g_{i2} \in C^* (uX)$, что $g_{i1}^{-1} (0) = Z_{i1}^0$, $g_{i2}^{-1} (0) = Z_{i2}^1$, $i = 1, 2, ..., n$. Так как $Z_{i1}^0 \bigcap Z_{i2}^1 = \emptyset$, $i = 1, 2, ..., n$, когда $\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} Z_{i1}^0\right) \bigcap \left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} Z_{i2}^1\right) = \emptyset$ ([4]). Тогда, согласно связям кольцевых свойств кольца $C^* (uX)$ и равномерно нуль – множеств, имеем для функции $f = g_{1z} + g_{2z} + ... + g_{n1} \in C^* (uX)$, $g^{-1} (0) = (g_{1z} + g_{2z} + ... + g_{n1})^{-1} (0) = \bigcap\limits_{i-1}^{n} Z_{i1}^0$ и для функции $f = g_{1z} \cdot g_{2z} \cdot ... \cdot g_{nz} \in C^* (uX)$, $f^{-1} (0) = (g_{1z} \cdot g_{2z} \cdot ... \cdot g_{nz})^{-1} (0) = \overset{n}{\underset{i-1}{\cup}} Z_{iz}^1$ и, следовательно, $\overset{n}{\underset{i=1}{\cap}} Z_{i1}^0 \in \mathfrak{Z} (uX)$, $\overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} Z_{i2}^1 \in \mathfrak{Z} (uX)$. Тогда существует такая C_u^* - функция $F : uX \to I$, что $F\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} Z_{i1}^0\right) = \{0\}$ и $F\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} Z_{i2}^1\right) = \{1\}$. Далее имеем, $\bigcap\limits_{i=1}^{n} V_i \subset \bigcap\limits_{i=1}^{n} Z_{i1}^0$ и $\bigcup\limits_{i=1}^{n} (X \backslash U_i) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} Z_{i2}^1$, следовательно $F\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} V_i\right) = \{0\}$, $F\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} X \backslash U_i\right) = \{0\}$. Ясно, что $F\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} X \backslash U_i\right) = F\left(X \backslash \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i\right) = \{0\}$, следовательно, $\bigcap\limits_{i=1}^{n} V_i$ u - вложено в $\bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i$. Это доказывает то, что семейство θ - является u - системой. Итак, семейство θ - u - центрированные семейство.

СЛЕДСТВИЕ 2.6.1. *Если η - u - центрированная система и θ - семейство всевозможных конечных пересечений из η, тогда $\xi = \eta \cup \theta$ является u - предфильтром.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что для любых $U \in \eta$ $V \in \theta$ всегда $U \bigcap V \neq \emptyset$, а так как η и θ являются u - центрированными системами найдутся $U' \in \eta$ и $V' \in \theta$ такие, что U' u - вложено в U, U' u - вложено в V. Тогда как и в доказательство теоремы 2.6, нетрудно показать, что $U' \bigcap V'$ u - вложено в $U \bigcap V$. Итак, семейство ξ является u - системой.

Пусть U_1, U_2 из ξ произвольны. Тогда найдутся V_1, V_2 из ξ u - вложенные в U_1 и U_2, соответственно. Ясно, что $U_3 = V_1 \bigcap V_2$ u - вложено в $U_1 \bigcap U_2$ и $U_3 \in \xi$ т.е. $U_3 \subset U_1 \bigcap U_2$. Итак, семейство ξ - u - предфильтр.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.7. *Всякий фильтр порожденный u - предфильтром является u- фильтром.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть η - u - предфильтр и $\xi = \{K \subset X\colon$ существует $N \in \eta$ и $N \subset K\}$. Ясно, что ξ – фильтр. Покажем, что ξ - u - семейство. Пусть $K \in \xi$ произвольно $N \in \eta$ такое, что $N \subset K$. Семейство η - u предфильтр, поэтому найдется такое $U \in \eta$, что U - u - вложено в K, т.е. существует C_u^* - функции $f : uX \to I$ такая, что $f (U) = \{0\}, f (X \backslash N) = \{1\}$. Следовательно, $f (X \backslash K) = \{1\}$ т.к. $X \backslash K \subset X \backslash N$. Итак, $f (U) = \{0\}, f (X \backslash K) = \{1\}$, т.е. U - u - вложено в K и K является u - окрестностью U.

Это означает, что фильтр ξ является u - системой. Итак, ξ - u - фильтр.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.8. Всякая u - центрированная система не являющаяся подсистемой никакой отличной от нее u - центрированной системы называется *максимальной u - центрированной системой.*

ТЕОРЕМА 2.9. *Всякая максимальная u - центрированная система является u - фильтром.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть η - максимальная u - центрированная система и θ - всевозможные конечные пересечения элементов η. Тогда в силу теоремы 2.6 и максимальность η следует, что $\eta = \theta$. А в силу следствия 2.6.1 следует, что $\xi = \eta \cup \theta = \eta$ является u - предфильтром. Теперь из предложения 2.7 и максимальность η следует, что η - u - фильтр.

Эта теорема дает нам право дать другое эквивалентное определение максимальной u - центрированной системы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.10. Максимальная u - центрированная система называется *u - ультрафильтром.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.11. *Если ξ - u - ультрафильтр и открытое множество U является u - окрестности некоторого элемента из ξ, тогда $U \in \xi$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть открытое множество U является u - окрестностью некоторого элемента u – ультрафильтра ξ. Тогда $U \bigcap K \neq \emptyset$ для любого $K \in \xi$. Семейство $\xi' = \xi \bigcup \{U\}$ является u – центрированной системой, но ξ - u - ультрафильтр, следовательно $\xi' = \xi$. Отсюда следует, что $U \in \xi$.

Из принципа максимальности Куратовского – Цорна ([3]), вытекает следующее.

ТЕОРЕМА 2.12. *Всякая u-центрированная система содержится по крайней мере в одном u-ультрафильтре.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\Phi(\mathcal{E})$ - множество всех u - центрированных систем на множестве $\mathcal{E}$ всех открытых множеств равномерного пространства uX. Упорядочим $\Phi(\mathcal{E})$ следующим образом: если $\xi_1 \in \Phi(\mathcal{E})$ и $\xi_2 \in \Phi(\mathcal{E})$, то $\xi_1 < \xi_2$ тогда и только тогда, когда $\xi_1 \subset \xi_2$, т.е. ξ_1 содержится в ξ_2 как множество. Если покажем, что упорядоченное множество $(\Phi(\mathcal{E}), <)$ индуктивно, т.е. что для любой цепи $\mathcal{C} \subset (\Phi(\mathcal{E}), <)$ существует $\tilde{\xi} \in \Phi(\mathcal{E})$, являющиеся мажорантой для C. Тогда из принципа максимальности Куратовского – Цорна ([3]), будет следовать существование в $(\Phi(\mathcal{E}), <)$ максимального элемента ξ^*.

Любая u - центрированная система $\xi \in \mathcal{C}$ является некоторым подмножеством E всех открытых множеств на uX. Положим $\tilde{\xi} = \cup\{\xi : \xi \in \mathcal{C}\}$. Проверим, что $\tilde{\xi}$ - u - центрированная система. Пусть $U_1, U_2, ..., U_k$ - произвольный конечный набор из $\tilde{\xi}$. По определению семейства $\tilde{\xi}$ существуют такие $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k \in \mathcal{C}$ что $U_i \in \xi_i$, $i = 1, 2, ..., k$. Так как $\mathcal{C}$ - цепь в упорядоченном множестве $(\Phi(\mathcal{E}), <)$, то существует перестановка $i_1, i_2, ..., i_k$ чисел $1, 2, ..., k$ такая, что $\xi_{i1} < \xi_{i2} < ... < \xi_{ik}$. Тогда $\xi_{i1} \subset \xi_{i2} \subset ... \subset \xi_{ik}$. Итак, $U_i \in \xi_{ik}$ для всех $i_1, i_2, ..., i_k$. Поскольку ξ_{ik} - u - центрированная система, то $\bigcap\limits_{i=1}^{k} U_i \neq \emptyset$. Пусть теперь $U \in \tilde{\xi}$ - произвольный элемент. Тогда существует индекс j такой, что $1 \leq j \leq k$ и $U \in \xi_i$. Поскольку ξ_j - u - центрированная система, что существует $V \in \xi_j \subset \tilde{\xi}$ u - вложенное в U. Итак, $\tilde{\xi}$ - u - центрированная система. Из определения $\tilde{\tilde{\xi}}$ следует, что $\xi \subset \tilde{\tilde{\xi}}$ для любого $\xi \in \mathcal{C}$ и $\tilde{\tilde{\xi}} \in \Phi(\mathcal{E})$. Последнее означает, что $\xi < \tilde{\tilde{\xi}}$ для любого $\xi \in \mathcal{C}$. Таким образом $\tilde{\tilde{\xi}}$ - мажоранта цепи $\mathcal{C} \subset (\Phi(\mathcal{E}), <)$. На основании принципа Куратовского – Цорна мы заключаем, что в упорядоченном множестве $(\Phi(\mathcal{E}), <)$ существует максимальный элемент ξ^*. Покажем, что ξ^* - является u - ультрафильтром, т.е. максимальная u - центрированная система. Пусть $U \in \mathcal{E} \backslash \xi^*$. Пологая $\xi' = \xi^* \bigcup \{U\}$. Если ξ' - u - центрированная система, то U является u - окрестностью некоторого элемента из ξ^*, следовательно, по предложению 2.11., $U \in \xi^*$, но $U \notin \xi^*$. Тогда семейство ξ' не u- центрировано, т.е. $\xi' \notin \Phi(\mathcal{E})$ и ξ^* - является u - ультрафильтром.

ТЕОРЕМА 2.13. *Семейство ξ_x-всех окрестностей точки $x \in X$ равномерного пространства uX является u-ультрафильтром.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показано, что для любой открытой окрестности O_x точки $x \in X$ найдется такая окрестность U_x этой же точки, что U_x u-отделена от O_x. В силу тихоновости равномерного пространства uX, существует такая равномерно непрерывная функция $f : uX \to I$, что $f(x) = 0$ и $f(X \backslash O_x) = 1$ ([8]). Тогда функция $g : uX \to I$ определенная как $g(x) = f(x)$, если $f(x) = 1$, $g(x) = 0$, если $f(x) \leq \frac{1}{2}$ и $g(x) = 2\left(f(x) - \frac{1}{2}\right)$, если $\frac{1}{2} < f(x) < 1$ равномерно непрерывна и окрестность $U_x = \left\{x \in X : f(x) < \frac{1}{2}\right\}$ искомая. Имеем $x \in U_x \subseteq \overline{U_x} = \left\{x \in X : f(x) \leq \frac{1}{2}\right\} \subset O_x$, $g(U_x) = 0$ и $g(X \backslash O_x) = 1$. Так как всякая равномерно непрерывная ограниченная функция является C_u^*-функцией ([4-6]) окрестность U_x u-вложена в O_x.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.14. *Семейство ξ_z всех открытых u - окрестностей множества $Z \subseteq X$ в равномерном пространстве uX является u - системой на uX.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $U \in \xi_z$, т.е. U является произвольной открытой u-окрестностью множества $Z \subseteq X$. Пусть $f : uX \to I$ такая C_u^*-функция, что $f(\mathrm{Z}) = 0$, и $f(X \backslash U) = 1$. Положим $U_1 = f^{-1}\left(\left[0; \frac{1}{3}\right)\right)$ и $U_2 = f^{-1}\left(\left(\frac{2}{3}; 1\right]\right)$. Тогда $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, $Z \subset U_1$, $X \backslash U \subset U_2$ и, в силу непрерывности всякой C_n^* - функции имеем $\overline{U_1} = f^{-1}\left(\left[0; \frac{1}{3}\right]\right)$ и $\overline{U_2} = f^{-1}\left(\left[\frac{2}{3}; 1\right]\right)$. Ясно, что $\overline{U_1}, \overline{U_2}\_$ - равномерно замкнуты и $\overline{U_1} \bigcap \overline{U_2}\_ = \emptyset$. Имеем следующее включение $X \backslash U \subset U_2 \subset \overline{U_2} \subset X \backslash \overline{U_1} \subset X \backslash U_1 \subset X \backslash Z$. По предложению 1.6 существует такая C_n^* - функция $\varphi : uX \to I$, что $g\left(\overline{U_2}\right) = \{1\}$ и $g\left(\overline{U_1}\right) = \{0\}$. Тогда тем более $g\left(X \backslash U\right) = \{1\}$ и $g\left(U_1\right) = \{0\}$, следовательно, U является u - окрестностью U_1. Это доказывает то, что ζ_{Z} - является u - системой.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.15. *Пусть $Z \in \mathfrak{Z}(uX)$ и $Z \neq \emptyset$. Тогда множество ξ_{Z} всех u - окрестностей множества Z непусто, т.е. $\xi_Z \neq \emptyset$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно такая функция $f : uX \to I$, что $f(x) = 0$ для всех $x \in X$ равномерно непрерывна, и следовательно, является C_u^* - функцией и $f(Z) = 0$, где $Z \in \mathfrak{Z}(uX)$ и $f(X \backslash X) = f(\emptyset) = 1$, т.е. множество Z u - вложено в X, т.е. $X \in \xi_{\mathrm{Z}}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.16. *Пусть ξ- является u-ультрафильтром на равномерном пространстве uX и $Z \in \mathfrak{Z}(uX)$-некоторое равномерно нуль-множество. Если $Z \cap K \neq \emptyset$ для любого $K \in \xi$, тогда $\xi_z \subset \xi$, где ξ_z-семейство всех u-окрестностей множества $Z \in X$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предложения 2.15 вытекает, что семейство ξ_z всех u-окрестностей множества $Z \in \mathfrak{Z}(uX)$ не пусто (предложение 2.15), т.е. $\xi_z \neq \emptyset$. Тогда $\xi_z \cup \xi$

-u- центрированная система открытых множеств, но ξ-u- ультрафильтр, следовательно $\xi_z \cup \xi = \xi$, т.е. $\xi_z \subset \xi$.

Список литературы

[1] *Isbell J.R.* Uniform spaces. Providence. (1964).

[2] *Энгелькинг Р.* Общая топология. – М.: Мир, 1986.

[3] *Архангельский А.В., Пономарев В.И.* Основы общей топологии в задачах и упражнениях. – М.: Наука, 1974.

[4] *Charalambus M.G.* Uniform Dimension Function. Ph. D. dissertation. Univ. of London. 1971.

[5] *Charalambus M.G.* A new covering dimension function for uniform spaces. // J. London Math, Soc. 211 (1975) P. 137–143.

[6] *Charalambus M.G.* Further theory and application of covering dimension of uniform spaces. // Czech. Math. Journ. 1991. Vol. 41 (116). P. 378–394.

[7] *Чекеев А.А., Абдраимова М.А.* О новом подходе к построению бикомпактных расширений равномерных пространств // Изв.НАН КР №1, Бишкек 2010, С. 52–55.

[8] *Александров П.С.* О бикомпактных расширениях топологических пространств // Матем. сб. 5 (1939), С. 403–423.

О сильной нормальности тихоновских и равномерных постранств

А.А. Чекеев[1], Ч.А. Аблабекова[2]
[1]*Кыргызский национальный университет им. Ж. Баласагына, Бишкек, Кыргызстан*
[2]*Кыргызский государственный университет строительства транспорта архитектуры им. Н. Исанова, Бишкек, Кыргызстан*
e-mail: asyl.ch.top@mail.ru; achacha@mail.ru

Аннотация

Введены классы сильно нормальных, равномерно сильно нормальных и функционально равномерно R – паракомпактных пространств. Доказано, что в классе функционально равномерно R – паракомпактных пространств $\mathcal{M}$ – универсальность равносильна равномерной сильной нормальности.

Введение.

В работе введены равномерный аналог сильной нормальности тихоновских и "функциональный" аналог равномерных парокомпактов по Райсу (равномерные R – парокомпакты), которые введены в работах [3] и [7], соответственно. Это: функционально равномерно R – паракомпактные пространства и равномерно сильно нормальные пространства. Для введенных классов равномерных пространства, посредством описания их баз установлены их различные характеристики.

1. Необходимые сведения.

Необходимую информацию о равномерных пространствах можно найти в книгах [1], [2], [10].

Пусть X – тихоновское пространство. Через $\mathcal{U}_X$ – обозначается *универсальная* равномерность пространства X ([1], [2]). Покрытие, состоящее из *конуль- множеств* ([4]), называется *функционально открытым.* Все функционально открытые множества образуют базу топологии тихоновского пространства ([4]).

Предложение 1.1 ([1], [2]). *Универсальная равномерность $\mathcal{U}_X$ тихоновскгое пространства X обладают базой, состоящей из всех локально конечных функционально открытых покрытий.*

Определение 1.2 ([3]). Тихоновское пространство X называется *сильно нормальным,* если универсальная равномерность пространство $\mathcal{U}_X$ состоит из всех открытых покрытий пространства X.

Определение 1.3 ([6]). Равномерное пространство и $(X,\mathcal{U})$ называется $\mathcal{M}$– универсальным, если для всякого равномерно непрерывеного отображения $f : (X,\mathcal{U}) \to (M,\rho)$ равномерного пространства $(X,\mathcal{U})$ в метрическое пространство (M,ρ) отображение $f : (X,\mathcal{U}) \to (M,\mathcal{U}_M)$ остается равномерно непрерывеным, где $\mathcal{U}_M$– универсальная равномерность метрическое пространство (M,ρ).

Определение 1.4 ([7]).Покрытие α равномерного пространства $(X,\mathcal{U})$ называется *равномерно локально конечным*, если существует равномерное покрытие $\beta \in \mathcal{U}$, каждый элемент которого пересекается лишь конечным числом элементов покрытий α.

Определение 1.5 ([7]). Равномерное пространство $(X,\mathcal{U})$ называется *равномерно R – паракомпактным*, если в любое открытое покрытие можно вписать равномерно локально конечное открытое покрытие.

Определение 1.6 ([8], [9]). Подмножество $O \subset X$ равномерного пространства $(X,\mathcal{U})$ называется *равномерно открытым*, если существует такое равномерно непрерывеное отображения $f : (X,\mathcal{U}) \to (M,\rho)$ равномерного пространства $(X,\mathcal{U})$ в метрическое пространство (M,ρ), что $O = f^{-1}(V)$ для некоторого открытого множества $V \subset M$.

Предложение 1.2 ([8], [9]). *Подмножество $O \subset X$ равномерного пространства $(X,\mathcal{U})$ равномерно открыто тогда и только тогда, когда $O = f^{-1}((0,1])$для некоторой равномерно непрерывеной функции $f : (X,\mathcal{U}) \to I = [0,1]$.*

2. Основные результаты.

Следующие предложения устанавливают характеристику сильно нормальных пространств посредством базы универсальной равномерности.

Предложение 1.1 . *Тихоновское пространство X сильно нормально тогда и только тогда, когда универсальная равномерность $\mathcal{U}_X$ обладает базой из всех функционально открытых покрытий.*

Доказательство. Пусть X сильно нормально и α – произвольное открытое покрытие X. Поскольку все функционально открытые множества образуют базу тихоновской топологии пространство X, для каждого $A \in \alpha$ найдется семейство β_A функционально открытых множеств такое, что $A = \cup \beta_A$. Тогда семейство $\beta = \{\beta_A : A \in \alpha\}$– функционально открытое покрытие, вписанное в покрытие α.

Пусть $\mathcal{B}'$– семейство всех функционально открытых покрытий сильно нормального пространство X. Тогда $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{U}_X$. Для любых $\alpha, \beta \in \mathcal{B}'$ покрытие $\alpha \wedge \beta = \{A \cap B : A \in \beta, B \in \beta\}$ – функционально открыто, следовательно $\alpha \wedge \beta \in \mathcal{B}'$.

Пусть $\mathcal{B}$ база равномерности $\mathcal{U}_X$, состоящее из всех локально конечных функционально открытых покрытий. Тогда $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}'$. Пусть $\alpha \in \mathcal{B}'$ произвольно, тогда существует локально конечное функционально открытое покрытие $\beta \in \mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}'$, звездно вписанное в α. Итак, $\mathcal{B}'$ образует базу универсальной равномерности $\mathcal{U}_X$сильно нормального пространства X.

Обратно, пусть универсальная равномерность $\mathcal{U}_X$ обладает базой $\mathcal{B}'$, состоящей из всех функционально открытых покрытий и $\mathcal{U}$ множество всех открытых покрытий пространства X. Пусть $\alpha \in \mathcal{U}$ произвольное открытое покрытие. Тогда, как мы показали выше, существует $\beta \in \mathcal{B}'$, вписанное в α, т.е. $\alpha \in \mathcal{U}_X$. Итак, $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}_X$. С другой стороны универсальная равномерность $\mathcal{U}_X$ обладает базой $\mathcal{B}$, состоящей из всех локально конечных функционально открытых покрытий (предложение 1.1), следовательно $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}'$. Тогда $\mathcal{U}_X \subseteq \mathcal{U}$. Итак $\mathcal{U}_X \subseteq \mathcal{U}$ и $\mathcal{U}_X$– состоит из всех открытых покрытий, следовательно X– сильно нормально.

Класс сильно нормальных пространств достаточно широк, т. к. всякий парокомпакт X, наделенный равномерностью $\mathcal{U}_X$, является сильно нормальным пространством [7], но простые примеры показывают существование сильно нормальных пространств, не являющихся парокомпактными ([5], задачи 6. Д.).

Следующее определение являются "функциональным" аналогом равномерных R – паракомпактов.

Определение 1.2. Равномерное пространство $(X,\mathcal{U})$ называется *функционально равномерно R – паракомпактным.*, если в любое равномерно открытое покрытие можно вписать равномерно локально конечное равномерно открытое покрытие.

Предложение 1.3 . *Тихоновское пространство X сильно нормально тогда и только тогда, когда равномерное пространство $(X,\mathcal{U}_X)$ функционально равномерно R – паракомпактно.*

Доказательство. Пусть X сильно нормально и α– функционально открытое покрытие. Так как $\alpha \in \mathcal{U}_X$, то существует локально конечное функционально открытое покрытие β, вписанное в α. У каждой точки $x \in X$ существует открытая окрестность V_x, пересекающаяся лишь с конечным числом элементов покрытия β. Тогда открытое покрытие $\{V_x : x \in X\}$ есть элемент $\mathcal{U}_X$, следовательно, β с равномерно локально конечно. Это означает, что равномерное пространство $(X,\mathcal{U}_X)$– функционально равномерно R – паракомпактно.

Обратно, если $(X,\mathcal{U}_X)$ функционально равномерно R– паракомпактно, тогда, как было показано в доказательстве предложения 1.1., универсальная равномерностью $\mathcal{U}_X$ обладает базой из всех функционально открытых покрытий, т. е. $\mathcal{U}_X$– состоит из всех открытых покрытий X, следовательно, X– сильно нормально.

Теорема 1.4 *Равномерное пространство $(X,\mathcal{U})$ функционально равномерно R– паракомпактно тогда и только тогда, когда, для любого равномерно открытого покрытия α покрытие $\alpha^{\angle} = \{\cup\alpha' : \alpha' \subset \alpha$ и α' – конечно$\}$ есть равномерное покрытие, т.е. $\alpha^{\angle} \in \mathcal{U}$.*

Доказательство. Пусть равномерное пространство $(X,\mathcal{U})$ функционально равномерно R - паракомпактно и α– произвольное равномерно открытое покрытие. Тогда существует равномерно локально конечное равномерно открытое покрытие β, вписанное в α. Пусть $\gamma \in \mathcal{U}$такое равномерное покрытие, что каждый элемент γ пересекается лишь конечным числом элементов в β. Тогда γ вписано в $\beta^{\angle}$ и, тем более, вписано в $\alpha^{\angle}$, следовательно $\alpha^{\angle} \in \mathcal{U}$.

Обратно, пусть $\gamma^{\angle} \in \mathcal{U}$ для любого равномерно открытого покрытия γ. Пусть $\alpha \in \mathcal{U}$ сильно звездно вписано в $\gamma^{\angle}$. Тогда (1.4.5 [10]) существует равномерная псевдометрика $\rho : X\times X \to \mathbb{R}^+ = [0,+\infty)$ такая что $\rho(x,y) < 1$ тогда и только тогда, когда $y \in \alpha(x)$, для всех $x, y \in X$. Это означает, что $\langle\Gamma\rangle_{\tau_\rho} \neq \emptyset$ для любого $\Gamma \in \gamma^{\angle}$ и покрытие $\left\langle\gamma^{\angle}\right\rangle = \{\langle\Gamma\rangle_{\tau_\rho} : \Gamma \in \gamma^{\angle}\}$– открытое покрытие псевдометрического пространства (X,ρ). В силу теоремы Стоуна ([11]), в покрытиие $\left\langle\gamma^{\angle}\right\rangle$ можно вписать открытое локально конечное покрытие β псевдометрического пространства (X,ρ). Так как псевдоравномерность $\mathcal{U}_\rho$, порожденная псевдометрикой ρ, содержится в равномерности $\mathcal{U}$, то $\left\langle\gamma^{\angle}\right\rangle$ и β является равномерно открытыми покрытиями равномерного пространства $(X,\mathcal{U})$ ([8], ([9]). Для каждого $B \in \beta$ положим $\xi_B = \{B \cap \Gamma^i_B : i = 1,2,\ldots,n(B)\}$, где $B \subset \left\langle\bigcup_{i=1}^{n(B)} \Gamma^i_B\right\rangle_{\tau_\rho}$ и $\bigcup_{i=1}^{n(B)} \Gamma^i_B \in \gamma^{\angle}$. Пусть $\xi = \{\xi_B : B \in \beta\}$. Тогда ξ – является локально конечным равномерно открытым покрытием равномерного пространства $(X,\mathcal{U})$, вписанным в покрытие γ. Это легко следует из построения покрытия ξ. В силу локальной конечности покрытия β, у каждой точки $x \in X$ существует равномерно открытая окрестность V_x, пересекающаяся лишь с конечным числом элементов покрытияβ. По условию теоремы для равномерно открытого покрытия η =$\{V_x : x \in X\}$, выполнено $\eta^{\angle} \in \mathcal{U}$. Ясно, что каждый элемент покрытия $\eta^{\angle}$ пересекается лишь с конечным числом элементов покрытия ξ, следовательно ξ является равномерно локально конечным равномерно открытым покрытием, вписанным в равномерно открытое покрытие γ.

Определение 1.5. Равномерное пространство $(X,\mathcal{U})$ называется *равномерно сильно нормальным, если* равномерность $\mathcal{U}$ обладает базой, состоящей из всех равномерно открытых покрытий.

Лемма 1.6. *Всякое равномерно сильно нормальное равномерное пространство $\mathcal{M}$– универсально.*

Доказательство. Пусть $(X,\mathcal{U})$ равномерно сильно нормальное пространство и $f : (X,M) \to (M,\mathcal{U}_\rho)$– равномерно непрерывное отображение $(X,\mathcal{U})$ в метрическое равномерное пространство $(X,\mathcal{U}_\rho)$, где $\mathcal{U}_\rho$ – равномерность, порожденная метрикой ρ. Пусть $\mathcal{U}_M$– универсальная равномерность метрического пространства (M,ρ). В силу парокомпактности (X,τ_ρ)(теорема Стоуна [11]), где τ_ρ– топология, порожденная метрикой ρ, универсальная равномерность $\mathcal{U}_M$ состоит из всех открытых покрытий пространства (X,τ_ρ) [7]. Пусть $\alpha \in \mathcal{U}_M$– произвольное открытое покрытие. Тогда $f^{-1}(A)$– равномерно открыто в X для любого $A \in \alpha$ и покрытие $\{f^{-1}(A) : A \in \alpha\} \in \mathcal{U}$ равномерно. Это означает, что отображение $f : (X,\mathcal{U}) \to (M,\mathcal{U}_M)$ – равномерно непрерывно, следовательно, $(X,\mathcal{U})$ - $\mathcal{M}$– универсальное равномерное пространство.

Лемма 1.7. *Всякое функционально равномерно R– паракомпактное $\mathcal{M}$– универсальное равномерное пространство является равномерно сильно нормальным.*

Доказательство. Пусть α– произвольное равномерно открытое покрытие функционально равномерно R – паракомпактного $\mathcal{M}$– универсального пространства $(X,\mathcal{U})$. Тогда существует равномерно локально конечное равномерно открытое покрытие β, вписанное в α. Покрытие β имеет вид $\beta = \{f_s^{-1}((0;1]) : s \in S\}$, где $f_s : (X,\mathcal{U}) \to I = [0;1]$ – равномерно непрерывная функция для любого $s \in S$. В силу равномерно локальной конечности покрытия β определена функция $f(x) = \sum_{s \in S} f_s(x)$, для любых $x \in X$, т. к. существует равномерное покрытие $\gamma \in \mathcal{U}$ такое, что для любого $\Gamma \in \gamma$, существует конечное $S_\Gamma = \{s_1, s_2, \ldots, s_k\} \subset S$ и для всех $x \in \Gamma$ выполнено $f(x) = f_{s_1}(x) + f_{s_2}(x) + \ldots + f_{s_k}(x)$ и $f(x) = 0$для всех $s \in S \backslash S_\Gamma$. В силу того, что покрытие γ равномерно, то функция $f : (X,\mathcal{U}) \to (\mathbb{R}, \mathbf{U}_{|*|})$ – равномерно непрерывна, где $\mathcal{U}_{|*|}$ – равномерность, порожденная метрикой $\rho(x,y) = |x - y|$. Равномерное пространство $(X,\mathcal{U})$- $\mathcal{M}$– универсально, следовательно отображение $f : (X,\mathcal{U}) \to (\mathbb{R}, \mathbf{U}_\mathbb{R})$ также равномерно непрерывно, $\mathcal{U}_\mathbb{R}$ – универсальная равномерность числовой прямой $\mathbb{R}$. Тогда покрытие β – равномерно, т. е. $\beta \in \mathcal{U}$, следовательно $\alpha \in \mathcal{U}$.

Теорема 1.8. *Пусть $(X,\mathcal{U})$ функционально $\mathbb{R}$ – паракомпактное равномерное пространство. Тогда следующие условия равносильны:*

1. $(X,\mathcal{U})$ *– равномерно сильно нормально*
2. $(X,\mathcal{U})$ *- $\mathcal{M}$– универсально*

Доказательство. $(1 \Rightarrow 2)$. Вытекает из леммы 1.6.

$(2 \Rightarrow 1)$. Вытекает из леммы 1.7.

Список литературы

[1] *Энгелькинг Р.* Общая топология. – М.: Мир. 1986.

[2] *Irbell J.R.* Uniform spaces. Providence. 1964.

[3] *Shapiro H.L., Smith F.A.* Neighbourhoods of the diagonal and strong normality properties // Proc. Amer. Math. Soc. 71. 1978. P. 329-333.

[4] *Gilman H., Jenison M.* Ring of continuons functions. Princeton. 1960.

[5] *Келли Дж.Л.* Общая топология. – М.: Наука. 1981.

[6] *Hager A.W.* Some nerly fine uniform spaces // Proc. London Math. Soc. 1974. Vol. 28 (3). P. 517-546.

[7] *Rice M.D.* A note on uniform paracompactness // Proc. Amer. Math. Soc. 1977. Vol. 62 (2). P. 359-362.

[8] *Chazalambus M.G.* Uniform Dimension Function. Ph.D. dissertation. Univ. of London. 1971.

[9] *Chatalambus M.G* A new covering chmension function for uniform spaces // J. CityplaceLondon Math. Soc. 1975. Vol. 11 (2). P. 137-143.

[10] *Борубаев А.А., Чекеев А.А.* Равномерные пространства. – Бишкек. 2003.

[11] *Stone A.H.* Paracompactness and product spaces // Bull. Amer. Math. Soc. 1948. 54. P. 977-982

О максимальных центрированных системах равномерно – нуль множеств

А.А. Чекеев, Г.О. Намазова
Кыргызский национальный университет им. Ж. Баласагына, Бишкек, Кыргызстан
e-mail: asyl.ch.top@mail.ru; guliza_n@mail.ru

Аннотация

В данной статье рассматривается специальный класс максимальных центрированных систем, состоящий из равномерно замкнутых нуль - множеств, так называемые z_u – ультрафильтры. Изучается свойства z_u – ультрафильтров и их связь с множеством максимальных идеалов кольца $C^*(uX)$.

В данной работе демонстрируется процедура построения максимальных центрированных систем, состоящих из равномерно замкнутых (нуль – множеств) [3-5], которые существуют в силу принципа максимальности Куратовского – Цорна [2]. Множество $C^*(uX)$ всех равномерно непрерывных ограниченных функций равномерного пространства uX ([1], [5], [8]) относительно поточечного сложения и поточечного умножения образует коммутативное кольцо с единицей, где роль единицы играет тождественно равная $1 \in \mathbb{R}$ функция, т.е. $f(x) \equiv 1$ для любых $x \in X$ и кольцевые операции определяются как: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ и $(fg)(x) = f(x)g(x)$ для любого $f, g \in C^*(uX)$ и $x \in X$.

Множество $f^{-1}(0) \subseteq X$, где $f \in C^*(uX)$ называется *равномерно нуль – множеством* и обозначается как $\boldsymbol{Z}(f) = f^{-1}(0) = \{x \in X : f(x) = 0\}$. Символ $\boldsymbol{Z}$ можно трактовать, как отображение кольца $C^*(uX)$ на множество всех равномерно нуль – множеств равномерного пространства uX. Итак, $\boldsymbol{Z} : C^*(uX) \to \mathfrak{Z}(uX)$ и $\boldsymbol{Z}(f) \in \mathfrak{Z}(uX)$ для любого $f \in C^*(uX)$.

Ясно, что $\boldsymbol{Z}(f) = \boldsymbol{Z}(|f|) = \boldsymbol{Z}(f^n)$ для всех $n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{Z}(\mathbf{0}) = X$, где $0(x) \equiv 0$ для любого $x \in X$ и $\boldsymbol{Z}(1) = \emptyset$. Также имеем $\boldsymbol{Z}(fg) = \boldsymbol{Z}(f) \cup \boldsymbol{Z}(g)$ и $\boldsymbol{Z}(f^2 + g^2) = \boldsymbol{Z}(|f| + |g|) = \boldsymbol{Z}(f) \cap \boldsymbol{Z}(g)$.

Дополнения до равномерно нуль – множеств называются *равномерно конуль – множествами* и, если U- равномерно конуль – множество, тогда $X \backslash U \in \mathfrak{Z}(uX)$, т.е. существует такая функция $f \in C^*(uX)$, что $f(X \backslash U) = 0$ или $f^{-1} = (U) = \mathbb{R} \backslash \{0\}$. Множество всех равномерно конуль – множеств равномерного пространства uX будет обозначаться через $\mathcal{L}(uX)$.

Остановимся на связях между алгебраическими свойствами кольца $C^*(uX)$ и тополого – равномерными свойствами равномерного пространства uX.

Напомним, что *идеалом* кольца $C^*(uX)$ называется собственное подкольцо I кольца $C^*(uX)$ обладающее свойством: если $f \in I$ и $g \in C^*(uX)$ произвольно, тогда $gf \in I$.

Пересечение каждого семейства идеалов является снова идеалом и из принципа максимальности Хаусдорфа выводится тот факт, что всякий идеал содержится в некотором *максимальном*, по включению, идеале.

Идеал I кольца $C^*(uX)$ называется простым, если из $f \cdot g \in I$ следует, что либо $f \in I$, либо $g \in I$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 ([Г.Ж.]). *Всякий максимальный идеал является простым.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Непустое подсемейство $\xi \subset \mathfrak{Z}(uX)$ называется z_u*–центрированным на* uX, если $\cap\eta \neq \emptyset$ для любого конечного подсемейства $\eta \subset \xi$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Непустое подсемейство $\mathcal{P} \subset \mathfrak{Z}(uX)$ называется z_u-*предфильтром*, если выполнены условия:
1° $\emptyset \in \mathcal{P}$; 2^0. если $\boldsymbol{Z}_1, Z_2 \in \mathcal{P}$, тогда существует $\boldsymbol{Z}_3 \in \mathcal{P}$ такое, что $\boldsymbol{Z}_3 \subset \boldsymbol{Z}_1 \cap \boldsymbol{Z}_2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Непустое подсемейство $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{Z}(uX)$ называется z_u-*фильтром на* uX, если выполнены условия:

1^0. $\emptyset \notin \mathfrak{F}$;
2^0. если $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{F}$ тогда $Z_1 \cap Z_2 \in \mathfrak{F}$;
3^0. если $Z \in F$, $Z' \in \mathfrak{Z}\ (uX)$ и $Z \subset Z'$, тогда $Z' \in \mathfrak{F}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Если* $\mathcal{P}-z_u-$*предфильтр на* uX*, тогда* $\mathfrak{F} = \{Z \in \mathfrak{Z}(uX)$ *существует* $V \in \mathcal{P}$*, для которого* $V \subset \mathbf{Z}\}$ *является* z_u-*фильтром.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1^0. $\emptyset \in \mathfrak{F}$ из определения 3. Пусть $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{F}$, тогда существует $V_1, V_2 \in \mathcal{P}$ такие, что $V_1 \subset Z_1$ и $V_2 \subset Z_2$. В силу 2^0 определения 3 найдется $V_3 \in \mathcal{P}$ такое, что $V_3 \subset V_1 \cap V_2$, тогда $V_3 \subset Z_1 \cap Z_2$ и, следовательно, $Z_1 \cap Z_2 \in \mathfrak{F}$. Условие 3^0 определения 4. вытекает из самого определения семейства $\mathfrak{F}$.

СЛЕДСТВИЕ 5.1. *Всякая* z_u-*центрированная система множеств содержит в некотором* z_u-*фильтре.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\xi - z_u-$центрированная система, тогда семейство $\mathcal{P}$ состоящее из всевозможных конечных пересечений элементов ξ является z_u- предфильтром. Это следует из того, что если $Z_1, Z_2, ..., Z_n \in \xi$ и $Z_1 \cap Z_2 \cap ... \cap Z_n = Z \neq \emptyset$, то $Z \in \mathfrak{Z}(uX)$ ([3–5]). Следовательно, $\mathcal{P}$ является подсемейством $\mathfrak{Z}(uX)$ и обладает всеми свойствами определения 3. Тогда $\mathcal{P}$ содержится в некотором z_u-фильтре $\mathfrak{F}$ (предложение 5).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Пусть* $\xi-z_u-$*предфильтр на* uX *и* $Z' \in \mathfrak{Z}(uX)$ *такое, что* $Z' \cap Z \neq \emptyset$ *для любого* $Z \in \xi$*. Тогда семейство* $\xi' = \xi \cup \{Z'\}$ *является* z_u-*центрированным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\eta \cup \{Z'\} \subset \xi'$ произвольное конечное подсемейство, где $\eta \subset \xi$. Так как $\xi - z_u-$предфильтр, существует $V \in \xi$ такое, что $V \subset \cap\eta$. По условию $V \cap Z' \neq \emptyset$. Тогда $\cap(\eta \cup \{Z'\}) \neq \emptyset$. Это означает, что $\xi'-$является z_u-центрированным семейством.

Через $\mathcal{Y}(\mathfrak{Z}(uX))$ обозначим множество всех z_u-центрированных семейств на uX. $\mathcal{Y}(\mathfrak{Z}(uX))$ естественным образом упорядочивается отношением «". Полагаем для $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{Y}(\mathfrak{Z}(uX))$, $\xi_1 < \xi_2$ тогда и только тогда, когда $\xi_1 \subset \xi_2$. Максимальные элементы упорядоченного множества называются *максимальными* z_u-*центрированными системами.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. *Всякая максимальная* z_u-*центрированная система является* z_u-*фильтром.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из предложений 5 и 8 и свойства максимальности.

ТЕОРЕМА 8. *Если* I *идеал в* $C^*(uX)$*, тогда семейство* $\mathbf{Z}(I) = \{\mathbf{Z}(f) : f \in I\}$ *является* z_u-*фильтром на* uX*. Обратно, если* F *является* z_u-*фильтром на* uX*, тогда семейство* $\mathbf{Z}^{-1}(\mathfrak{F}) = \{f : \mathbf{Z}(f) \in \mathfrak{F}\}$ *является идеалом в* $C^*(uX)$*.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1^0. $1 \notin I$, следовательно $\emptyset \notin \boldsymbol{Z}(I)$. 2^0. Пусть $Z_1, Z_2 \in \boldsymbol{Z}(I)$ и $f_1, f_2 \in I$ таковы, что $Z_1 = \boldsymbol{Z}(f_1)$ и $Z_2 = \boldsymbol{Z}(f_2)$. Поскольку I идеал, $f_1^2 + f_1^2 \in I$. Следовательно, $Z_1 \cap Z_2 = \boldsymbol{Z}(f_1^2 + f_1^2) \in \boldsymbol{Z}(I)$.

3^0. Пусть $Z \in \boldsymbol{Z}(I)$, $Z' \in \mathfrak{Z}(uX)$ и $Z \subset Z'$. Пусть $f \in I$, $f' \in C^*(uX)$ таковы, что $Z = \boldsymbol{Z}(f)$ и $Z' = \boldsymbol{Z}(f')$. Поскольку I идеал в $C^*(uX)$, $ff' \in I$. Тогда $Z' = Z \cup Z' = \boldsymbol{Z}(f) \cup \boldsymbol{Z}(f') = \boldsymbol{Z}(ff') \in \boldsymbol{Z}(I)$. Обратно, пусть $J = Z^{-1}(\mathfrak{F})$. Т.к. $\emptyset \notin \mathfrak{F}$, получаем $1 \notin J$.

Пусть $f, g \in J$ и $h \in C^*(uX)$. Тогда $\boldsymbol{Z}(f-g) \supseteq \boldsymbol{Z}(f) \cap \boldsymbol{Z}(g) \in \mathfrak{F}$ и $\boldsymbol{Z}(hf) \in \mathfrak{F}$. По условиям $2^0, 3^0$ определения z_u-фильтра, имеем, $f-g \in J$ и $hf \in J$ и J идеал в $C^*(uX)$.

Максимальный z_u-фильтр называется z_u-*ультрафильтром.* Таким образом, z_u-*ультрафильтр* максимальное подсемейство $\mathfrak{Z}(uX)$ со свойством центрированности. Это следует из принципа максимальности Хаусдорфа или Куратовского – Цорна ([1]).

ТЕОРЕМА 9. *Каждое z_u-центрированное семейство в $\mathfrak{Z}(uX)$ содержится в некотором z_u-ультрафильтре.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что упорядоченное множество $\mathcal{Y}(\mathfrak{Z}(uX))$ индуктивно, т.е. что для любой цепи $\mathcal{A} \subset (\mathcal{Y}(\mathfrak{Z}(uX)), <)$ существует $\tilde{\xi} \in \mathcal{Y}(\mathfrak{Z}(uX))$, являющееся мажорантой для $\mathcal{A}$. Положим $\tilde{\xi} = \cup\{\xi : \xi \in \mathcal{A}\}$,тогда $\tilde{\xi} \subset \mathfrak{Z}(uX)$. Покажем, что $\tilde{\xi}-$ снова z_u-центрированная система равномерно нуль - множеств. Пусть $Z_1, ..., Z_k$ произвольная конечная подсистема $\tilde{\xi}$. Тогда существует $\xi_1, ..., \xi_k \in \mathcal{A}$ такие, что $Z_i \in \xi_i$, $i = 1, 2, 3, ..., k$. По условию $\mathcal{A}$ цепь в $(\mathcal{Y}(\mathfrak{Z}(uX)), <)$, следовательно, существует такая перестановка $i_1, ..., i_k$ чисел $1, ..., k$, что $\xi_{i_1} < ... < \xi_{i_k}$ и, что равносильно $\xi_{i_1} \subset ... \subset \xi_{i_k}$. Следовательно, $Z_i \in \xi_{i_k}$ для всех $i = 1, ..., k$. Поскольку $\xi_{i_k} - z_u-$центрировано, $\cap\{\boldsymbol{Z}_i\colon i = 1, ..., k\} \neq \emptyset$ Итак, $\tilde{\xi} - z_u-$ центрированное семейство, $\tilde{\xi} \in \mathcal{Y}(\mathfrak{Z}(uX))$ и $\xi \subset \tilde{\xi}$ для любого $\xi \in \mathcal{A}$. Это равносильно тому, что $\xi < \tilde{\xi}$ для любого $\xi \in \mathcal{A}$. Итак, $\tilde{\xi}$ мажоранта гнезда $\mathcal{A}$. Тогда га основании принципа максимальности Куратовского – Цорна ([1]), следует, что в упорядоченном множестве $(\mathcal{Y}(\mathfrak{Z}(uX)), <)$ существует максимальный элемент $\xi*$. Покажем максимальность $\xi*$. Пусть $Z \in (\mathfrak{Z}(uX)) \backslash \xi*$. Положим $\xi' = \xi * \cup\{Z\}$. Тогда $\xi* \subset \xi'$ и $\xi* \neq \xi'$. Если $\xi' - z_u-$центрированное семейство, тогда $\xi' \in \mathcal{Y}(\mathfrak{Z}(uX))$, $\xi* < \xi'$ и $\xi* \neq \xi'$. Это противоречит максимальности $\xi*$ в $(\mathcal{Y}(\mathfrak{Z}(uX)), <)$. Итак, $\xi'-$не z_u-центрированное семейство. Это означает, что $\xi*$- максимальное z_u-центрированное семейство.

ТЕОРЕМА 10. *(а) Если M максимальный идеал в $C^*(uX)$, тогда $\mathbf{Z}(M)$ является z_u-ультрафильтром в uX.*
(б) Если $\mathfrak{F}$ z_u-ультрафильтр на uX, тогда $\mathbf{Z}^{-1}(\mathfrak{F})$ является максимальным идеалом в $C^*(uX)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а). Пусть M максимальный идеал в $C^*(uX)$, тогда в силу теоремы 2, $\boldsymbol{Z}(M)$ является z_u-фильтром. Пусть $\mathfrak{F}$ z_u-фильтр и $\boldsymbol{Z}(M) \subseteq \mathfrak{F}$, тогда $\boldsymbol{Z}^{-1}(\mathfrak{F})$ идеал в $C^*(uX)$ и $\boldsymbol{Z}^{-1}(\mathfrak{F}) \supset M$, но M максимальный идеал, поэтому $\boldsymbol{Z}^{-1}(\mathfrak{F}) = M$ и $\mathfrak{F} = \boldsymbol{Z}(M)$.

Пункт (б) доказывается аналогично.

СЛЕДСТВИЕ 10.1. *Отображение $\mathbf{Z} : C^*(uX) \to \mathfrak{Z}(uX)$ осуществляет биекцию между множеством всех максимальных идеалов кольца $C^*(uX)$ и множеством всех z_u-ультрафильтров на uX.*

СЛЕДСТВИЕ 10.2. *Если $\mathfrak{F}$ z_u-ультрафильтр и $Z_1 \cup Z_2 \in \mathfrak{F}$, тогда $Z_1 \in \mathfrak{F}$, либо $Z_2 \in \mathfrak{F}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $\boldsymbol{Z}^{-1}(\mathfrak{F})$ является максимальным идеалом в $C^*(uX)$ и $\boldsymbol{Z}(fg) \supseteq \boldsymbol{Z}(f) \cup \boldsymbol{Z}(g) \in Z_1 \cup Z_2 \in \mathfrak{F}$ для которых $f, g \in C^*(uX)$ и $fg \in \boldsymbol{Z}^{-1}(\mathfrak{F})$. В силу предложения

1, $\boldsymbol{Z}^{-1}(\mathfrak{F})$ простой идеал, следовательно либо $f \in \boldsymbol{Z}^{-1}(\mathfrak{F})$, либо $g \in \boldsymbol{Z}^{-1}(\mathfrak{F})$. Тогда $Z_1{=}\boldsymbol{Z}(f) \in \mathfrak{F}$ либо $Z_2{=}\boldsymbol{Z}(g) \in \mathfrak{F}$

ТЕОРЕМА 11. *(а). Пусть M максимальный идеал в $C^*(uX)$, если $\mathbf{Z}(f) \cap \mathbf{Z}(g) \neq \emptyset$ для любого $g \in M$, тогда $f \in M$ и $\mathbf{Z}(f) \in \mathbf{Z}(M)$.*

(б). Пусть $\mathfrak{F}$ z_u−ультрафильтр на uX, если $Z \in \mathfrak{Z}(uX)$ и $Z \cap F \neq \emptyset$ для любого $F \in \mathfrak{F}$, тогда $Z \in \mathfrak{F}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 4 следует, что (а) эквивалентно (б). Если выполнен пункт (б), тогда $\mathfrak{F}\cup\{Z\}$ центрированное семейство в $\mathfrak{Z}(uX)$, а т.к. $\mathfrak{F}$ z_u−ультрафильтр, тогда $\mathfrak{F} \cup \{Z\} \subseteq \mathfrak{F}$ и $Z \in \mathfrak{F}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. Идеал I в $C^*(uX)$ называется *z_u−идеалом*, если из того что $\boldsymbol{Z}(f) \in \boldsymbol{Z}(I)$ следует, что $f \in I$ или, это равносильно тому, что $I = \boldsymbol{Z}^{-1}(\boldsymbol{Z}(I))$.

Для всякого идеала J кольца $C^*(uX)$ идеал $I = \boldsymbol{Z}^{-1}(\boldsymbol{Z}(J))$ является наименьшим z_u−идеалом содержащим J. Ясно, что всякий максимальный идеал является z_u−идеалом. Итак, отображение $\boldsymbol{Z} : C^*(uX) \to \mathfrak{Z}(uX)$ осуществляет биекцию между множеством всех z_n−идеалов кольца $C^*(uX)$ и множеством всех z_u−фильтров равномерного пространства uX.

Напомним, что идеал I кольца $C^*(uX)$ называется *простым*, если из того, что $fg \in I$ следует или $f \in I$ и $g \in I$.

ТЕОРЕМА 13. *Каждый z_u−идеал в $C^*(uX)$ является пересечением некоторого числа простых идеалов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь теоремой O.18. ([8]). Пусть I есть пересечение простых идеалов. Тогда $I = \{f^n : f \in I,\ n \in \mathbb{N}\}$. Ясно, что $\boldsymbol{Z}(f^n) = \boldsymbol{Z}(f)$ для каждого $n \in \mathbb{N}$ и $f^n \in I$ влечет $f \in I$, т.е. $I = \boldsymbol{Z}^{-1}(\boldsymbol{Z}(I))$ и I−является z_u−идеалом. Обратно, если I – z_u−идеал, тогда $f^n \in I$ влечет $f \in I$ и I является пересечением некоторого числа простых идеалов.

ТЕОРЕМА 14. *Если I является простым z_u - идеалом кольца $C^*(uX)$, тогда $\mathbf{Z}(I)$ является простым z_u- фильтром на uX и, обратно, если Z простой z_u- фильтр на uX, то $\mathbf{Z}(\mathfrak{F})$ простой идеал кольца $C^*(uX)$.*

ТЕОРЕМА 15. *Пусть $\mathfrak{F}$- простой z_u - фильтр на uX. Тогда $\mathfrak{F}$ имеет точку прикосновения x тогда и только тогда, когда x является предельной точкой для $\mathfrak{F}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть x - точка прикосновения простого z_u- фильтра $\mathfrak{F}$. Пусть V произвольная окрестность точки x являющиеся нуль – множеством, т.е. $V \in \mathfrak{Z}(uX)$ и $x \in \langle V \rangle$. Тогда существует такие $W \in \mathfrak{Z}(uX)$, что $x \in X \backslash W \subset V$. Это следует из того факта, что $\mathfrak{Z}(uX)$ образует базу замкнутых множеств uX. Тогда имеем $W \cup V = X \in \mathfrak{F}$, следовательно $V \in \mathfrak{F}$ т.к. $x \notin W$. Это означает, что $\mathfrak{F}$ сходится к точке x. Обратное утверждение очевидно, т.к. $\cap\left\{\overline{F} : F \in \mathfrak{F}\right\} = \{x\} \neq \emptyset$.

Список литературы

[1] *Архангельский А.В., Пономарев В.И.* Основы общей топологии в задачах и упражнениях. – М.: Наука, 1974.

[2] *Борубаев А.А.* Равномерные пространства и равномерно непрерывные отображения. – Фрунзе, Илим. 1990.

[3] *Charalambus M.G.* Uniform Dimension Function. Ph. D. dissertation. Univ. of London. 1971.

[4] *Charalambus M.G.* A new covering dimension function for uniform spaces. J. London Math, Soc. 211 (1975) P. 137–143.

[5] *Charalambus M.G.* Further theory and application of covering dimension of uniform spaces. Czech. Math. Journ. 1991. Vol. 41 (116). P. 378–394.

[6] *Энгелькинг Р.* Общая топология. – М.: Мир, 1986.

[7] *Gillman L., Jerison M.* Ring of Continuous Functions. New York (1976).

[8] *Isbell J.R.* Uniform spaces. Providence. (1964).

Families without Friedberg but with positive numberings in the Ershov hierarchy

Mustafa Manat
Kazakh National University, Al-Farabi ave., 71, Almaty, 050038, Kazakhstan
e-mail: manat.mustafa@gmail.com

Аннотация

Abstract

We point out that for every ordinal notation a of a nonzero ordinal, there are families of Σ^{-1}_a sets having computable positive numberings, but no computable Friedberg numberings: this answers for all levels (whether finite or infinite) of the Ershov hierarchy.

Introduction

The results of Talasbaeva's paper [9] and of this paper are partly motivated by the observation that for the arithmetical hierarchy, questions about the existence of Friedberg numberings for a family may be reduced to the existence of positive numberings. Indeed, Goncharov and Sorbi [6] show that if a family of Σ^0_n sets, $n \geq 2$, has positive numberings then it has Friedberg numberings as well. A natural problem is to see to what extent this, or similar circumstances, carry over to the Ershov hierarchy. It is shown in [9] that for every finite level n of the Ershov hierarchy, every infinite family containing $\emptyset$ if n is even, or ω if n is odd, has infinitely many positive undecidable numberings, which are pairwise incomparable with respect to Rogers reducibility of numberings. (For $n = 1$ this was first proved by Badaev [1].) We prove something similar for all levels Σ^{-1}_a of the Ershov hierarchy, where a is the ordinal notation of any nonzero computable ordinal: in particular we show that if a is notation of an infinite computable ordinal, and $\mathcal{A}$ is an infinite family of Σ^{-1}_a sets, containing some set A which belongs to some finite level of the Ershov hierarchy, then $\mathcal{A}$ has infinitely many positive undecidable numberings, which are pairwise incomparable with respect to Rogers reducibility. As a consequence, the family of all Σ^{-1}_a sets has positive undecidable numberings, verifying Conjecture 15 of [2] for all levels of the Ershov hierarchy. (Of course, for finite levels this conjecture had been verified by Talasbaeva's theorem). A straightforward observation, derived as a consequence of Ospichev's theorem on the existence, at all levels, of families without Friedberg numberings, allows us to show also that at every level there exist families with positive numberings but without Friedberg numberings, answering negatively Question 17 of [2].

We refer to Kleene's system O of ordinal notations for computable ordinals, as presented in[8]. If $a \in O$, then the symbol $|a|_O$ indicates the ordinal denoted by a. We begin by recalling the definition of the Ershov hierarchy, [3, 4, 5]. Our characterization below is due to Ospichev [7].

Definition 1. If a is a notation for a computable ordinal, then a set of numbers A is said to be Σ^{-1}_a (or $A \in \Sigma^{-1}_a$) if there are a computable function $f(z,t)$ and a partial computable function $\gamma(z,t)$ such that, for all z,

1. $A(z) = \lim_t f(z,t)$, with $f(z,0) = 0$; (here and in the following, for a given set X, $X(x)$ denotes the value of the characteristic function of X on x;)
2. (a) $\gamma(z,t)\downarrow \Rightarrow \gamma(z,t+1)\downarrow$, and $\gamma(z,t+1) \leq_O \gamma(z,t) <_O a$;

(b) $f(z,t+1) \neq f(z,t) \Rightarrow \gamma(z,t+1) \downarrow\neq \gamma(z,t)$.

We call the partial function γ the *mind–change function* for A, relatively to f.

A Σ^{-1}_a–*approximation* to a Σ^{-1}_a–set A, is a pair $\langle f,\gamma\rangle$, where f and γ are respectively a computable function and a partial computable function satisfying 1. and 2., above, for A.

If the ordinal $|a|_O = n$ is finite, we also write Σ^{-1}_n instead of Σ^{-1}_a, as notations for finite ordinals are unique.

Following the general approach to the theory of numberings proposed by [6], we can give the following definition:

Definition 2. A Σ^{-1}_a–*computable numbering*, or simply a *computable numbering*, of a family $\mathcal{A}$ of Σ^{-1}_a–sets is an onto function $\pi:\omega\to\mathcal{A}$, such that the set

$$\{\langle k,x\rangle : x\in\pi(k)\}\in\Sigma^{-1}_a.$$

Therefore it is easy to see that a computable numbering of a family $\mathcal{A}$ of Σ^{-1}_a–sets is an onto function $\pi:\omega\to\mathcal{A}$ for which there exist a computable function $f(k,x,t)$ and a partial computable function $\gamma(k,x,t)$, such that for all k,x,t,

1. $\pi(k)(x)=\lim_t f(k,x,t)$, with $f(k,x,0)=0$;
2. $\gamma(k,x,t)\downarrow\Rightarrow \gamma(k,x,t+1)\downarrow$; $\gamma(k,x,t+1)\leq_O \gamma(k,x,t) <_O a$; and $f(k,x,t+1)\neq f(k,x,t)\Rightarrow \gamma(k,x,t+1)\downarrow\neq\gamma(k,x,,t)$.

We recall (see e.g. [7]) that there is an effective indexing $\{\nu_e\}_{e\in\omega}$ of all computable numberings of families of Σ^{-1}_a sets, i.e. an indexing satisfying

$$\{\langle e,k,x\rangle : x\in\nu_e(k)\}\in\Sigma^{-1}_a;$$

and from e one has (see [7]) an effective way of getting a computable function f_e and a partial computable function γ_e witnessing that the set $\{\langle k,x\rangle : x\in\nu_e(k)\}$ is Σ^{-1}_a, as in Definition 2.

We will write $Comp^{-1}_a(\mathcal{A})$ to denote the set of computable numberings of a family $\mathcal{A}\in\Sigma^{-1}_a$. A family $\mathcal{A}\in\Sigma^{-1}_a$ is *computable* if $Comp^{-1}_a(\mathcal{A})\neq\emptyset$. If α,β are numberings of a same family, let $\alpha\leq\beta$ if there is a computable function f such that $\alpha=\beta\circ f$. The relation $\leq$ is a reducibility (called *Rogers reducibility)*, and gives rise to a degree structure, where a degree (called a *Rogers degree*) is the equivalence class of a numbering under the equivalence relation $\equiv$ generated by $\leq$: the set of Rogers degrees of the elements in $Comp^{-1}_a(\mathcal{A})$ is denoted by $\mathfrak{R}^{-1}_a(\mathcal{A})$, and called the *Rogers semilattice* of $\mathcal{A}$: it is well known that if $\mathfrak{R}^{-1}_a(\mathcal{A})\neq\emptyset$ then $\mathfrak{R}^{-1}_a(\mathcal{A})$ is an upper semilattice. An infinite subset $X\subseteq\mathfrak{R}^{-1}_a(\mathcal{A})$ is an *antichain* if for every pair of Rogers degrees $\mathbf{a},\mathbf{b}\in X$ we have $\mathbf{a}\not\leq\mathbf{b}$ and $\mathbf{b}\not\leq\mathbf{a}$.

Definition 3. a numbering of a family $\mathcal{A}$. Then α is called a *Friedberg* numbering, if $\alpha(i)\neq\alpha(j)$ for every $i\neq j$; α is called *decidable* if $\{\langle i,j\rangle : \alpha(i)=\alpha(j)\}$ is a decidable set; α is *positive* if $\{\langle i,j\rangle : \alpha(i)=\alpha(j)\}$ is a computably enumerable (c.e.) set.

Of course, if α is a Friedberg numbering, then α is decidable; and every decidable numbering is positive. Moreover, the following obvious and well known fact holds:

Lemma. If $\mathcal{A}$ is infinite, and α is a decidable numbering of $\mathcal{A}$, then $\mathcal{A}$ has a Friedberg numbering β with $\alpha\equiv\beta$.

proof. Let $\mathcal{A}$ be infinite, and suppose that $\alpha\in Com^{-1}_a(\mathcal{A})$ is decidable. Then define $\beta\in Com^{-1}_a(\mathcal{A})$ by:

- $\beta(0)=\alpha(0)$;

- suppose that $\beta(j) = \alpha(i_j)$, all $j \le n$, and define $\beta(n+1) = \alpha(i)$, where i is the least number such that $\alpha(i) \neq \alpha(i_j)$, for all $j \le n$.

It follows that $\beta \in Com_a^{-1}(\mathcal{A})$, β is a Friedberg numbering, and $\beta \le \alpha$. The converse reducibility $\alpha \le \beta$ follows from the well known fact that the Rogers degree of every decidable (in fact, positive) numbering is minimal.

The main theorem

We now show that at each level of the Ershov hierarchy there are infinite families without Friedberg numberings, but with positive numberings.

Theorem. For every ordinal notation a, $a >_O 1$, there exists an infinite family $\mathcal{A}$ such that $Com_a^{-1}(\mathcal{A})$ has no Friedberg numberings but it has positive numberings.

proof. We show here that a slight modification of Ospichev's proof in [7] produces immediately an infinite Σ_a^{-1}–computable family without Friedberg numberings, but with a positive numbering. Let us fix a uniform effective listing $\{\nu_e\}_{e\in\omega}$ of all Σ_a^{-1}–numberings. We build a Σ_a^{-1}–computable family $\mathcal{A}$ without Friedberg numberings, by building a positive numbering α of the family. We define α by defining $f(e,x,s)$ (i.e. $\alpha(e)(x) = \lim_s f(e,x,s)$) and a corresponding mind-change function γ. (We refer again here for notations and notions, to Definition 2).

The construction is by stages. At each subsequent stage, all parameters maintain the same values as at the previous stage, unless explicitly redefined.

Stage 0. Define $f(e,x,0) = 0$, $\gamma(e,x,0) =\uparrow$, for all e, x.

Step 1. Define, for all e, e', k,

$$f(2e, 3e, 1) = f(2e+1, 3e, 1) = 1$$

and

$$\gamma(e', 3k, 1) = 1 :$$

the definition $\gamma(e', 3k, 1) = 1$ (recall that $|1|_O = 0$) shows that these values $\alpha(e')(3k)$ will never be redefined. Also notice that if $k \neq e'$ then $\alpha(2e')(3k) = \alpha(2e'+1)(3k) = 0$. This will have the effect that, for $i \neq j$,

$$\alpha(i) = \alpha(j) \Rightarrow \{i,j\} = \{2e, 2e+1\}, \text{ for some } e. \tag{1}$$

Define also

$$\gamma(2e, 3e+2, 1) = \gamma(2e+1, 3e+1, 1) = 1 :$$

thus the values

$$f(2e, 3e+2, 1) = f(2e+1, 3e+1, 1) = 0$$

will never be redefined. Hence eventually $3e+2 \notin \alpha(2e)$ and $3e+1 \notin \alpha(2e+1)$.

Finally define

$$f(2e, 3e+1, 1) = f(2e+1, 3e+2, 1) = 1$$

and

$$\gamma(2e+1, 3e+1, 1) = \gamma(2e+1, 3e+2, 1) = 2 :$$

these values will be allowed to change at most once.

Thus at stage 1 we have reserved for $\alpha(e')$, with $e' \in \{2e, 2e+1\}$ (each e), three fixed coding locations, namely the numbers in the interval $[3e, 3e+2]$: notice that at this stage,

$$\begin{array}{lll} \alpha(2e)(3e) = 1 & \alpha(2e)(3e+1) = 1 & \alpha(2e)(3e+2) = 0 \\ \alpha(2e+1)(3e) = 1 & \alpha(2e+1)(3e+1) = 0 & \alpha(2e+1)(3e+2) = 1: \end{array}$$

among these values, only $\alpha(2e)(3e+1)$ and $\alpha(2e+1)(3e+2)$ may change, and they are allowed to change at most once.

Stage $s > 1$. Consider all $e \leq s$. We *take action on* e if s is the first stage at which there are $i, j \leq s$, with $i \neq j$, such that

$$\nu_e(i, 3e+1, s) = \nu_e(j, 3e+2, s) = 1,$$

(we may assume without loss of generality that $\nu_e(k, t) = 0$ for all k, and all $t \leq 1$). Then pick the least such pair i, j, define

$$f(2e, 3e+1, s) = f(2e+1, 3e+2, s) = 0:$$

these values will never be redefined and thus we set

$$\gamma(2e, 3e+1, s) = \gamma(2e+1, 3e+2, s) = 1.$$

Moreover, for all $e' \neq 2e, 2e+1$, perform the *diagonalization procedure* by letting

$$f(e', 3e+1, s) = 1 - \nu_e(i, 3e+1, s) \quad f(e', 3e+2), s) = 1 - \nu_e(j, 3e+2, s)$$

and

$$\gamma(e', 3e+1, s) = \gamma_e(i, 3e+1, s) \quad \gamma(e', 3e+2, s) = \gamma_e(j, 3e+2, s)$$

where γ_e is a mind-change function corresponding to ν_e.

If there is $t < s$ at which we took action on e, then for all $e' \neq 2e, 2e+1$ proceed with the diagonalization procedure, by letting

$$f(e', 3e+1, s) = 1 - \nu_e(i, 3e+1, s) \quad f(e', 3e+2), s) = 1 - \nu_e(j, 3e+2, s)$$

and

$$\gamma(e', 3e+1, s) = \gamma_e(i, 3e+1, s) \quad \gamma(e', 3e+2, s) = \gamma_e(j, 3e+2, s).$$

Verification. We follow closely [?]. Let $\mathcal{A}$ be the family numerated by α. It is straightfoward to see that $\mathcal{A}$ is Σ_a^{-1}–computable, as witnessed by the computable function f and the mind-changing function γ.

Next we show that no ν_e is a Friedberg numbering for $\mathcal{A}$. If there is no stage s at which there are distinct $i, j \leq s$ such that $\nu_e(i, 3e+1, s) = \nu_e(j, 3e+2), s) = 1$, then after stage 1 we never redefine $\alpha(2e)(3e+1)$ and $\alpha(2e+1)(3e+2)$, hence $3e+1 \in \alpha(2e)$ and $3e+2 \in \alpha(2e+1)$; on the other hand, the family enumerated by ν_e does not contain distinct sets, one of them containing $3e+1$, and the other one containing $3e+2$; thus ν_e does not enumerate $\mathcal{A}$.

Otherwise, there is a least stage at which we take action on e relatively to some pair i, j. We first observe that in this case, $\alpha(2e) = \alpha(2e+1)$. To see this let k be any number: if $k \in [3e, 3e+2]$ then $\alpha(2e)(k) = \alpha(2e+1)(k) = 0$; otherwise, let $k \in [3e', 3e'+2]$, with $e' \neq e$: if we never take action on e', then $\alpha(2e)(k) = \alpha(2e+1)(k) = 0$, as we never modify the default value taken at stage 0; if at some stage we take action on e' relatively to a pair i', j', then $\alpha(2e)(3e') = \alpha(2e+1)(3e') = 0$, $\alpha(2e)(3e'+1) = \alpha(2e+1)(3e'+1) = 1 - \nu_{e'}(i')(3e'+1)$ and $\alpha(2e)(3e'+2) = \alpha(2e+1)(3e'+2) = 1 - \nu_{e'}(j')(3e'+1)$.

There are now two cases to be considered:

1. $3e+1 \in \nu_e(i)$ or $3e+2 \in \nu_e(j)$. Assume for instance that $3e+1 \in \nu_e(i)$: the other case is treated similarly. Again we show that ν_e does not enumerate $\mathcal{A}$: if $e' \neq 2e, 2e+1$ then by diagonalization $\nu_e(i) \neq \alpha(e')$ as $\alpha(e')(3e+1) = 1 - \nu_e(i)(3e+1)$; on the other hand, $3e+1 \notin \alpha(2e+1)$ by what done at stage 1, and, by the action taken on e, $3e+1 \notin \alpha(2e)$; thus $\nu(i) \neq \alpha(2e), \alpha(2e+1)$.

2. $3e+1 \notin \nu_e(i)$ and $3e+2 \notin \nu_e(j)$. Then if ν_e numbers $\mathcal{A}$ we have that i, j are distinct indices of $\alpha(2e) = \alpha(2e+1)$, since by diagonalization $\nu_e(i)$ can only be $\alpha(2e)$ or $\alpha(2e+1)$, and similarly $\nu_e(j)$ can only be $\alpha(2e)$ or $\alpha(2e+1)$. Thus ν_e is not a Friedberg numbering.

Next, we show that $\mathcal{A}$ is infinite: this follows from the fact that if $e \neq e'$ then $\alpha(2e) \neq \alpha(2e')$ as $3e \in \alpha(2e)$ but $3e \notin \alpha(2e')$ (and symmetrically, $3e' \in \alpha(2e')$ but $3e' \notin \alpha(2e)$.

It remains to show that α is positive. Notice that, for distinct i, j, equation (1) holds, and on the other hand we have:

$$\alpha(2e) = \alpha(2e+1) \Leftrightarrow (\exists s)(\exists i, j)[i \neq j \text{ and } \nu_e(i, 3e+1, s) = \nu_e(j, 3e+2, s) = 1]:$$

indeed, we have already observed that the right-to-left implication holds, as if we take action on e at some stage, the eventually $\alpha(2e) = \alpha(2e+1)$. As to the opposite implication, the construction ensures for instance that if we never take action on e, then $\alpha(2e)(3e+1) = 1$ and $\alpha(2e+1)(3e+1) = 0$.

Question 17 of [2] asks whether, for any $n \geq 1$, families of Σ_n^{-1} sets with positive numberings have also decidable numberings. We show in fact that this is not so for every level (finite or infinite) of the Ershov hierarchy:

Corollary For every ordinal notation a of a nonzero computable ordinal, there exists a family $\mathcal{A}$ such that $Com_a^{-1}(\mathcal{A})$ has no decidable numberings but it has infinitely many positive numberings, whose Rogers degrees form an antichain.

*proof.*By Lemma, and the first proof of Theorem.

Reference

[1] *S. Badaev.* Positive enumerations. // Sib. Mat. Zh., 18(3):483–496, 1977.

[2] *S. Badaev and S. Goncharov.* The theory of numberings: open problems. / In P. A. Cholak, S. Lempp, M. Lerman, and R. A. Shore, editors, *Computability Theory and its Applications*, volume 257 of *Contemporary Mathematics*, pages 23–38. American Mathematical Society, Providence, 2000.

[3] *Yu. L. Ershov.* A hierarchy of sets, I. // Algebra and Logic, 7:47–73, 1968.

[4] *Yu. L. Ershov.* A hierarchy of sets, II. // Algebra and Logic, 7:15–47, 1968.

[5] *Yu. L. Ershov.* A hierarchy of sets, III. // Algebra and Logic, 9:34–51, 1970.

[6] *S. Goncharov and A. Sorbi.* Generalized computable numerations and non-trivial Rogers semilattices. // Algebra and Logic, 36(6):359–369, 1997.

[7] *S. Ospichev.* Computable family of Σ_a^{-1}-sets without Friedberg numberings. // 6th Conference on Computability in Eueope, CiE 2010, 6th Conference on Computability in Eueope, CiE 2010. Ponta Delgada, Azores, pages 311–315, 2010.

[8] *H. Rogers, Jr.* Theory of Recursive Functions and Effective Computability. McGraw-Hill, New York, 1967.

[9] *T. Talasbaeva.* Positive numberings of families of sets in the Ershov hierarchy. // Algebra and Logic, 42(6):413–418, 2003.

Description of positively existentially closed models in any class of Σ-structures with unary predicates axiomatizable by any h-universal sentence

A.M. Kungozhin
al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan
e-mail: kalmas@mail.ru

Abstract

It was shown that any finitely h-universally axiomatized class of models in unary predicate signature has a finite number of positively existentially closed models, and all them are finite. Proposed the example of a class of models which described by the infinite number of h-universal sentences and its class of positively existential closed models is not elementary.

1 Introduction. Examples.

We take definitions of notions of the positive logic from [1] and repeat some of them.

We consider a signature Σ with an equality and relations, and we form as usually the first order formulas using $\neg$, $\wedge$, $\vee$ and $\exists$. *Positive* formulas are formed without negation, i.e. only using $\wedge$, $\vee$ and $\exists$; its can be written as $(\exists\overline{y})f(\overline{x},\overline{y})$, where $f(\overline{x},\overline{y})$ is a quantifier free positive formula.

A homomorphism from the Σ-structure $\mathcal{M}$ into the Σ-structure $\mathcal{N}$ is an application h from the underlying set M of $\mathcal{M}$ into the underlying set N of $\mathcal{N}$ such that, for each $\overline{a}$ from M, if $\overline{a}$ satisfies the atomic formula $A(\overline{x})$, so does $h(\overline{a})$; we do not assume the reciprocal, so that $h(\overline{a})$ may satisfy furthermore atomic formulas than $\overline{a}$, and in particular h may not be injective. If there exists an homomorphism from $\mathcal{M}$ to $\mathcal{N}$, we say that $\mathcal{N}$ is a *continuation* of $\mathcal{M}$, and that $\mathcal{M}$ is a *beginning* of $\mathcal{N}$. (We use the words extension/restriction only when h is an embedding, i.e. when $\overline{a}$ and $h(\overline{a})$ satisfy the same atomic formulas).

If h is an homomorphism, then every positive formula $(\exists\overline{y})f(\overline{x},\overline{y})$ satisfied by $\overline{a}$ is also satisfied by $h(\overline{a})$. We say that h is an *immersion* if we have the converse, that is if $\overline{a}$ and $h(\overline{a})$ satisfy the same positive formulas; we say then that $\mathcal{M}$ is *immersed*, or *positively existentially closed*, in $\mathcal{N}$. An immersion is an embedding, but positively existentially closed is weaker than the robinsonian notion, since we consider only positive existential formulas.

An *h-universal sentence* is by definition the negation of a positive sentence; it can be written $\neg(\exists\overline{y})f(\overline{y})$, or equivalently $(\forall\overline{y})\neg f(\overline{y})$, where $f(\overline{y})$ is free and positive.

If C is a class of Σ-structures, we say that an element $\mathcal{M}$ of C is *positively existentially closed* in C if every homomorphism from $\mathcal{M}$ into any member of C is an immersion.

In this work we consider the signature $\Sigma = \langle =, A_1, A_2, ..., A_m\rangle$. Where $=$ is a binary predicate of equality, and $\{A_i\}$ are unary predicates. An h-universal sentence φ may have any number of quantifiers. We consider examples and transformation of the sentence φ with only two quantifiers, but they can be easily generalized to any number of quantifiers.

First we omit the cases where Σ-structures axiomatized by false sentences:

1. $\neg\exists x\exists y(x = y) \sim \forall x\forall y(x \neq y) \sim False$.

2. $\neg\exists x\exists y[(x = y) \vee F(x, y)] \sim \forall x\forall y[(x \neq y) \wedge \neg F(x, y)] \sim False$, where $F(x, y)$ is any free formula with two variables.

Some cases could be reduced to the cases with one quantifier which author described before [2].

3. $\neg\exists x\exists yF(x) \sim \neg\exists xF(x)$, where $F(x)$ is any free formula with one variable.

4. $\neg\exists x\exists y[F(x) \vee G(y)] \sim \forall x\forall y\neg[F(x) \vee G(y)] \sim \forall x\forall y[\neg F(x) \wedge \neg G(y)] \sim \forall x[\neg F(x) \wedge \neg G(x)] \sim \neg\exists x[F(x) \vee G(x)]$, where $F(x)$ and $G(x)$ are free formulas with one variable.

5. $\neg\exists x\exists y[(x = y) \wedge F(x, y)] \sim \forall x\forall y[(x \neq y) \vee \neg F(x, y)] \sim \forall x[\neg F(x, x)] \sim \neg\exists x F(x, x)$, where $F(x, y)$ is any free formula with two variables.

We are interesting in this paper with cases which are not reduced to the case with one quantifier. For example:

6. $\neg\exists x\exists y[F(x) \wedge G(y)] \nsim \neg\exists x[F(x) \wedge G(x)]$.

But we can consider this sentence as a disjunction of two sentences since:

6'. $\neg\exists x\exists y[F(x) \wedge G(y)] \sim [\neg\exists x F(x)] \vee [\neg\exists x G(x)]$.

2 Transformations of the formula φ with unary predicates in general case.

We can present any h-universal sentence φ with n quantifiers and unary predicates in the following form:

$$\varphi = \neg\exists^{(n)}\overline{x} \bigvee [\bigwedge A_i(x_1) \wedge \bigwedge A_i(x_2) \wedge ... \wedge \bigwedge A_i(x_n) \wedge \bigwedge (x_s = x_s) \wedge \bigwedge (x_s = x_t)]$$

where $\{A_i\}$ - unary predicates, and some atomic subformulas may be absent.

If in some conjunction exists only identically true subformula(s) $x_s = x_s$ then this sentence φ is false (see Examples 1 and 2). Otherwise we can eliminate the identically true subformulas $x_s = x_s$ since $\psi \wedge True = \psi$.

If in some conjunction exist only identities $x_s = x_t$ $(s \neq t)$ then this sentence φ is false. Since $\neg\exists^{(n)}\overline{x}[[\bigwedge(x_s = x_t)] \vee F(\overline{x})] \sim \forall^{(n)}\overline{x}[[\bigvee(x_s \neq x_t)] \wedge \neg F(\overline{x})] \sim False$. Otherwise we can eliminate the identities $x_s = x_t$ with a little changing of some variables since, for example $[\bigwedge A_i(x_s) \wedge \bigwedge A_j(x_t) \wedge (x_s = x_t)] \sim [\bigwedge A_i(x_s) \wedge \bigwedge A_j(x_s)]$.

Consider the next equal transformations of the consistent sentence φ:

$$\varphi = \neg\exists^{(n)}\overline{x} \bigvee [\bigwedge A_i(x_1) \wedge \bigwedge A_i(x_2) \wedge ... \wedge \bigwedge A_i(x_n)] \sim$$

$$\sim \forall^{(n)}\overline{x} \bigwedge \neg[\bigwedge A_i(x_1) \wedge \bigwedge A_i(x_2) \wedge ... \wedge \bigwedge A_i(x_n)] \sim$$

$$\sim \bigwedge \forall^{(n)}\overline{x} \neg[\bigwedge A_i(x_1) \wedge \bigwedge A_i(x_2) \wedge ... \wedge \bigwedge A_i(x_n)] \sim$$

$$\sim \bigwedge \forall^{(n)}\overline{x}[\bigvee \neg A_i(x_1) \vee \bigvee \neg A_i(x_2) \vee ... \vee \bigvee \neg A_i(x_n)] \sim$$

$$\sim \bigwedge [\forall x \bigvee \neg A_i(x) \vee \forall x \bigvee \neg A_i(x) \vee ... \vee \forall x \bigvee \neg A_i(x)] \sim$$

$$\sim \bigvee \bigwedge [\forall x \bigvee \neg A_i(x)] \sim \bigvee \forall x \bigwedge [\bigvee \neg A_i(x)] \sim$$

$$\sim \bigvee \forall x \bigvee [\bigwedge \neg A_i(x)] \sim \bigvee \neg\exists x \bigwedge [\bigvee A_i(x)].$$

In a similar way for any finite number of h-universal axioms we can get an equivalent disjunction of h-universal sentences with one quantifier each.

3 Structure of the positively existentially closed models in the class of Σ-structures with unary predicates axiomatizable by any h-universal sentence (special case).

Before to start consideration of general case lets begin with special case to understanding better general case after.

Let axiomatizing sentence φ has a next structure:

$$\varphi = \bigvee \neg\exists x \bigwedge A_i(x) \sim \bigvee \forall x \bigvee \neg A_i(x).$$

According to the results of the case with one quantifier we know that if the model $\mathcal{M} = \langle M, =, A_1, A_2, ..., A_n\rangle$ is positively existentially closed in the class of Σ-structures axiomatizable by the h-universal subsentence $\neg\exists x \bigwedge_{i\in I} A_i(x) \sim \forall x \bigvee_{i\in I} \neg A_i(x)$ then the number of elements of the underlying set M is equal to $|I|$; for any element $a \in M$ exists a single relation A_{i_a} $(i_a \in I)$ which is not satisfied in the model $\mathcal{M}$ by the element a and other relations are satisfied in the model $\mathcal{M}$ by this element; for any relation A_i $(i \in I)$ exists a single element $a_i \in M$ by which this relation is not satisfied in the model $\mathcal{M}$ and this relation is satisfied in the model $\mathcal{M}$ by other elements.

But the sentence is a disjunction of such subsentences. It means that each Σ-structure axiomatizable at least by one of these subsentences. Each subsentence has the own single positively existentially closed model. But some of them are continuations of others (the corresponding e.c. model of the subsentence $\forall x \bigvee_{i\in I} \neg A_i(x)$ is a continuation of the corresponding e.c. model of the subsentence $\forall x \bigvee_{i\in J} \neg A_i(x)$ if and only if $J \subset I$).

Proposition If the model $\mathcal{M} = \langle M, =, A_1, A_2, ..., A_n\rangle$ is positively existentially closed in the class of Σ–structures with unary predicates axiomatizable by any h-universal sentence $\varphi = \bigvee_I \forall x \bigvee_{i\in I} \neg A_i(x)$ then it has the corresponding subsentence $\forall x \bigvee_{i\in I} \neg A_i(x)$ with maximal set of indexes I; the number of elements of the underlying set M is equal to the number of predicates met in the corresponding subsentence ($|I|$); for any element $a \in M$ exists a single relation A_{i_a} $(i_a \in I)$ which is not satisfied in the model $\mathcal{M}$ by the element a and other relations are satisfied in the model $\mathcal{M}$ by this element; for any relation A_i met in the corresponding subsentence exists a single element $a_i \in M$ which does not satisfy this relation in the model $\mathcal{M}$ and this relation is satisfied in the model $\mathcal{M}$ by other elements. The number of such positively existentially closed models is equal to the number of such maximal sets I.

Proof: Let $\mathcal{M} = \langle M, =, A_1, A_2, ..., A_n\rangle$ be a positively existentially closed model in the class of Σ-structures axiomatizable by the h-universal sentence φ.

Since the sentence φ is satisfied in the model $\mathcal{M}$ then for any element $a \in M$ there is at least one relation A_{i_a} which is not satisfied in the model $\mathcal{M}$ by the element a. Suppose that there is one more relation A_{j_a} which is not satisfied in the model $\mathcal{M}$ by the element a. Consider the model $\mathcal{N}$ with the same underlying set where predicates same defined like in the model $\mathcal{M}$ except that relation A_{j_a} which is satisfied in the model $\mathcal{N}$ by the element a. Then the identical map is a homomorphism. But the formula $A_{j_a}(x)$ is satisfied in the model $\mathcal{N}$ and not satisfied in the model $\mathcal{M}$ by the element a. It means that the model $\mathcal{M}$ is not positively existentially closed, contradiction.

Suppose that some predicate A_i is not satisfied by at least two elements a_1 and a_2 from the underlying set M. One can easily construct a homomorphism h from the model $\mathcal{M}$ into the model $\mathcal{N} = \langle N, =, A_1, A_2, ..., A_n\rangle$ where a_1 and a_2 correspond to one element, other elements are saved, all relations are saved. Since it is not an injunction the formula $x_1 = x_2$ could not be satisfied in the models $\mathcal{M}$ and $\mathcal{N}$ by $\overline{a} = (a_1, a_2)$ and $h(\overline{a})$ the same time, contradiction.

Let S be a set of indexes such that $i \in S$ iff $A_i(a)$ is not satisfied by some element $a \in M$. If exists $i \in S$ which does not belong to some set I of indexes of subsentence $\forall x \bigvee_{i\in I} \neg A_i(x)$ then this subsentence is not satisfied in the model $\mathcal{M}$. If the set S is not a subset of each maximal set I of indexes then the sentence φ is not satisfy in the model $\mathcal{M}$, contradiction. Then S is a subset of some maximal set I of indexes.

Let the set S be a proper subset of maximal set I of indexes. Consider the existentially closed model $\mathcal{N}$ corresponding to the subsentence $\forall x \bigvee_{i \in I} \neg A_i(x)$. One can easily construct a homomorphism h from the model $\mathcal{M}$ into the model $\mathcal{N}$. But the positive formula $\exists y \bigwedge_{i \in S} A_i(y)$ is satisfied in the model $\mathcal{N}$ and not satisfied in the model $\mathcal{M}$, contradiction.

Finally it is easy to show that each existentially closed model $\mathcal{M}$ corresponding to the subsentence $\forall x \bigvee_{i \in I} \neg A_i(x)$ of maximal set I of indexes is existentially closed in the class of Σ-structures axiomatizable by the h-universal sentence φ.

4 Structure of the positively existentially closed model in the class of Σ-structures with unary predicates axiomatizable by any h-universal sentence (general case).

Let axiomatizing sentence φ has a next structure: $\varphi = \bigvee \neg \exists x \bigwedge [\bigvee A_i(x)] \sim \bigvee \forall x \bigvee [\bigwedge \neg A_i(x)]$.

According to the results of the case with one quantifier we know that if the model $\mathcal{M} = \langle M, =, A_1, A_2, ..., A_n \rangle$ is positively existentially closed in the class of Σ-structures axiomatizable by the h-universal subsentence $\neg(\exists x) \bigwedge_{i \in I} [\bigvee_{j \in J_i} A_j(x)]$ (remember that such presentation should be minimal, i.e. any disjunction could not be a subformula of any other disjunction, otherwise it can be reduced by the rule $\phi \wedge (\phi \vee \psi) = \phi$) then the number of elements of the underlying set M is equal to $m = |I|$: $\{a_1, a_2, ..., a_m\}$; for any element $a_i \in M$ the relation $A_l(a_i)$ is not satisfied in the model $\mathcal{M}$ by the element a_i if and only if the predicate A_l presented in the i-th disjunction of the subsentence, otherwise the relation $A_l(a_i)$ is satisfied in the model $\mathcal{M}$.

Actually each element a_i has an own type: a maximal set of atomic formulas $A_l(x)$ which is consistent with a subsentence. Each subsentence defines the set of types. Types of each subsentence could not be subsets of each other.

But the sentence φ is a disjunction of such subsentences. It means that each Σ-structure axiomatizable at least by one of these subsentences. Each subsentence has the own single positively existentially closed model.

Some of them are continuations of others. The corresponding e.c. model of the subsentence $\neg(\exists x) \bigwedge_{i \in I_1} [\bigvee_{j \in J_i} A_j(x)]$ is a continuations of the corresponding e.c. model of the subsentence $\neg(\exists x) \bigwedge_{i \in I_2} [\bigvee_{j \in J_i} A_j(x)]$ if and only if the set of types I_1 dominates the set of types of I_2.

Set of sets $\{S_i\}_{i \in I}$ *dominates* the set of sets $\{T_j\}_{j \in J}$ iff for any set T_j exists a set S_i such that $T_j \subset S_i$.

Proposition If the model $\mathcal{M} = \langle M, =, A_1, A_2, ..., A_n \rangle$ is positively existentially closed in the class of Σ-structures with unary predicates axiomatizable by any h-universal sentence φ then it has the corresponding subsentence $\neg(\exists x) \bigwedge_{i \in I} [\bigvee_{j \in J_i} A_j(x)]$ with a dominating set of indexes $\{J_i\}_{i \in I}$; the number of elements of the underlying set M is equal to $m = |I|$: $\{a_1, a_2, ..., a_m\}$; for any element $a_i \in M$ the relation $A_l(a_i)$ is not satisfied in the model $\mathcal{M}$ by the element a_i if and only if the predicate A_l presented in the i-th disjunction of the subsentence, otherwise the relation $A_l(a_i)$ is satisfied in the model $\mathcal{M}$. The number of such positively existentially closed models is equal to the number of such dominating sets of types.

Proof: Let $\mathcal{M} = \langle M, =, A_1, A_2, ..., A_n \rangle$ be a positively existentially closed model in the class of Σ-structures axiomatizable by the h-universal sentence φ.

Each element from the underlying set M has a type. These types should be different for each element, otherwise we can construct noninjective homomorphism from the model $\mathcal{M}$ into the model

$\mathcal{N}$ with different types of elements.

Since the sentence φ is satisfied in the model $\mathcal{M}$ then some subsentences $\neg(\exists x)\bigwedge_{i\in I}[\bigvee_{j\in J_i} A_j(x)]$ are satisfied in the model $\mathcal{M}$. Then the set of types of the positively existentially closed model corresponding to each subsentence $\neg(\exists x)\bigwedge_{i\in I}[\bigvee_{j\in J_i} A_j(x)]$ should dominate the set of types of the model $\mathcal{M}$, i.e. we can construct homomorphisms from the model $\mathcal{M}$ to the e.c. models corresponding to these subsentences. Since the model $\mathcal{M}$ is existentially closed then all these homomorphisms should be immersions, i.e. dominations should be noninjective. Otherwise we can not construct an injective homomorphism and formula $x_1 = x_2$ is satisfied in continuation and not satisfied in the model $\mathcal{M}$.

Since the model $\mathcal{M}$ is existentially closed the set of types of its elements could not be strictly dominated by the set of types of the e.c. model corresponding to any subsentence $\neg(\exists x)\bigwedge_{i\in I}[\bigvee_{j\in J_i} A_j(x)]$ of the sentence φ. Otherwise the sentence $\exists^{(|I|)}\overline{y}\bigwedge_{i\in I}\bigwedge_{j\in\overline{J_i}} A_j(y_i)$ is satisfied in the corresponding e.c. model but not satisfied in the model $\mathcal{M}$, contradiction.

Finally it is easy to show that each existentially closed model $\mathcal{M}$ corresponding to the subsentence $\neg(\exists x)\bigwedge_{i\in I}[\bigvee_{j\in J_i} A_j(x)]$ of dominating set of types is existentially closed in the class of Σ-structures axiomatizable by the h-universal sentence φ.

From the last proposition easily follows the following theorem.

Theorem 1 *Any finitely h-universally axiomatized class of models in unary predicate signature has a finite number of positively existentially closed models, and all them are finite.*

5 The example of the class of models axiomatizabled by the h-universal sentences which class of positively existential closed models is not elementary.

The next example shows that there is a class of models which described by the infinite number of h-universal sentences and its class of positively existential closed models is not elementary. This example proposed by professor Bruno Poizat which improves proposed example by author and contains only unary predicates.

Example Let A_i - unary relations, $i \in \omega$. Let this class is described by the following sentences: some elements have properties A_i but only one of them: $(\neg\exists x(A_i(x)\&A_j(x)),\ i \neq j \in \omega)$. Then the subclass of positively existential closed models of this class is not elementary.

Proof: It is easy to understand that that the class of positively existential closed models of this class consists of models $\mathcal{M}$ such that: 1) M contains infinite number of elements with property A_i for each $i \in \omega$, 2) there are not other elements in the model $\mathcal{M}$.

Let understand that this class is not axiomatizable. Indeed, all such models does not contain elements which have not properties A_i. However, the model $\mathcal{N}$, which is the extension of a positively existential closed model $\mathcal{M}$ by a single isolated element c will be consistent with the theory T of the model $\mathcal{M}$. Lets prove it. It is enough to realize that the model $\mathcal{N}$ is compatible with any finite part of the theory T. Since the finite part of the theory T contains a limited number of signature symbols A_i and to describe the isolation of the element c necessary infinite number of formulas, then the model $\mathcal{N}$ is consistent with this final part of a theory T.

REFERENCE

[1] *Ben Yaacov I., Poizat B.*, Fondaments de la Logique Positive, The Journal of Symbolic Logic, vol. 82 (2007), pp. 1141-1162.

[2] *Kungozhin A.* Description of positively existentially closed models in any class of Σ-structures axioma-tizable by the finite number of h-universal sentences with one quantifier, Preprint.

Всюду разрешимые краевые задачи для неоднородного дифференциального уравнения четвертого порядка с переменными коэффициентами

Б.Е. Кангужин, А.С. Аипенова, А.А. Жамалбекова
Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан
e-mail: kanbalta.@mail.ru, a.aipenova@mail.ru

Аннотация

В работе дано полное описание всюду разрешимых краевых задач для неоднородного дифференциального уравнения четвертого порядка с переменными коэффициентами на отрезке. Для наглядности все результаты иллюстрируются на неоднородных дифференциальных уравнениях четвертого порядка с переменными коэффициентами на отрезке.

1 Введение

Известно [1], что для неоднородного дифференциального уравнения четвертого порядка с переменными коэффициентами всюду разрешимой задачей является задача Коши, то есть для всюду разрешимости краевые условия выбираются специальным образом. В данной работе предлагается еще один способ постановки всюду разрешимых краевых задач для неоднородных дифференциальных уравнений четвертого порядка с переменными коэффициентами. Для наглядности все результаты иллюстрируются на неоднородных дифференциальных уравнениях четвертого порядка с переменными коэффициентами на отрезке. В настоящей статье описаны всевозможные всюду разрешимые краевые задачи для неоднородного дифференциального уравнения четвертого порядка с переменными коэффициентами на отрезке. Метод работы идейно близок к методам работ [2, 3, 4].

2 Вспомогательные утверждения и доказательства теорем

Теорема 1. В пространстве $L_2[0,1]$ решение задачи Коши для неоднородного дифференциального уравнения четвертого порядка с переменными коэффициентами вида

$$y^{''''}(x)+p_1(x)y^{'''}(x)+p_2(x)y^{''}(x)+p_3(x)y^{'}(x)+p_4(x)y(x)=f(x), 0\leq x\leq 1, \tag{1}$$

с начальными условиями

$$y(0)=0, y^{'}(0)=0, y^{''}(0)=0, y^{'''}(0)=0, \tag{2}$$

задается формулой

$$y(x)=\int_0^x k(x,t)f(t)dt, \tag{3}$$

где

$$k(x,t)=\frac{1}{\Delta(t)}\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) & y_4(x)\\ y_1^{''}(t) & y_2^{''}(t) & y_3^{''}(t) & y_4^{''}(t)\\ y_1^{'}(t) & y_2^{'}(t) & y_3^{'}(t) & y_4^{'}(t)\\ y_1(t) & y_2(t) & y_3(t) & y_4(t)\end{vmatrix}, \tag{4}$$

$$\Delta(t)=\begin{vmatrix} y_1^{'''}(t) & y_2^{'''}(t) & y_3^{'''}(t) & y_4^{'''}(t)\\ y_1^{''}(t) & y_2^{''}(t) & y_3^{''}(t) & y_4^{''}(t)\\ y_1^{'}(t) & y_2^{'}(t) & y_3^{'}(t) & y_4^{'}(t)\\ y_1(t) & y_2(t) & y_3(t) & y_4(t)\end{vmatrix}. \tag{5}$$

Здесь $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$, $y_4(x)$ - решения однородного дифференциального уравнения четвертого порядка с переменными коэффициентами.

Доказательства теоремы 1 приведены в работе [1].

Пусть $h(x)$ - произвольная четырежды дифференцируемая на отрезке [0, 1] функция, примем $h''''(x) \in L_2[0,1]$. Введем новую функцию по формуле:

$$I(x) = \int_0^x k(x,t) \left[h''''(t) + p_1(t)h'''(t) + p_2(t)h''(t) + p_3(t)h'(t) + p_4(t)h(t)\right] dt \qquad (6)$$

Какими свойствами обладает $I(x)$ функция? Вычислим значение функции $I(x)$ в точке $x = 0$.

$$I(0) = \int_0^0 k(0,t) \left[h''''(t) + p_1(t)h'''(t) + p_2(t)h''(t) + p_3(t)h'(t) + p_4(t)h(t)\right] dt = 0 \qquad (7)$$

Теперь найдем производную первого порядка функции $I(x)$ и найдем ее значение в точке $x = 0$.

$$I'(x) = \int_0^x k_x'(x,t) \left[h''''(t) + p_1(t)h'''(t) + p_2(t)h''(t) + p_3(t)h'(t) + p_4(t)h(t)\right] dt +$$

$$+ k(x,x) \left[h''''(x) + p_1(x)h'''(x) + p_2(x)h''(x) + p_3(x)h'(x) + p_4(x)h(x)\right],$$

так как $k(x,x) = 0$, то получим следующую формулу:

$$I'(x) = \int_0^x k_x'(x,t) \left[h''''(t) + p_1(t)h'''(t) + p_2(t)h''(t) + p_3(t)h'(t) + p_4(t)h(t)\right] dt \qquad (8)$$

$$I'(0) = \int_0^0 k_x'(0,t) \left[h''''(t) + p_1(t)h'''(t) + p_2(t)h''(t) + p_3(t)h'(t) + p_4(t)h(t)\right] dt = 0 \qquad (9)$$

Найдем производную второго порядка функции $I(x)$:

$$I''(x) = \int_0^x k_x''(x,t) \left[h''''(t) + p_1(t)h'''(t) + p_2(t)h''(t) + p_3(t)h'(t) + p_4(t)h(t)\right] dt +$$

$$+ k_x'(x,x) \left[h''''(x) + p_1(t)h'''(x) + p_2(t)h''(x) + p_3(t)h'(x) + p_4(t)h(x)\right],$$

так как $k_x'(x,x) = 0$, отсюда следует:

$$I''(x) = \int_0^x k_x''(x,t) \left[h''''(t) + p_1(t)h'''(t) + p_2(t)h''(t) + p_3(t)h'(t) + p_4(t)h(t)\right] dt \qquad (10)$$

$$I''(0) = \int_0^0 k_x''(0,t) \left[h''''(t) + p_1(t)h'''(t) + p_2(t)h''(t) + p_3(t)h'(t) + p_4(t)h(t)\right] dt = 0 \qquad (11)$$

Найдем производную третьего порядка функции $I(x)$:

$$I'''(x) = \int_0^x k_x'''(x,t) \left[h''''(t) + p_1(t)h'''(t) + p_2(t)h''(t) + p_3(t)h'(t) + p_4(t)h(t)\right] dt +$$

$$+ k_x''(x,x) \left[h''''(x) + p_1(x)h'''(x) + p_2(x)h''(x) + p_3(x)h'(x) + p_4(x)h(x)\right],$$

так как $k_x^{''}(x,x)=0$, то получим следующую формулу:

$$I^{'''}(x)=\int_0^x k_x^{'''}(x,t)\left[h^{''''}(t)+p_1(t)h^{'''}(t)+p_2(t)h^{''}(t)+p_3(t)h^{'}(t)+p_4(t)h(t)\right]dt \qquad (12)$$

$$I^{'''}(0)=\int_0^0 k_x^{'''}(0,t)\left[h^{''''}(t)+p_1(t)h^{'''}(t)+p_2(t)h^{''}(t)+p_3(t)h^{'}(t)+p_4(t)h(t)\right]dt=0 \quad (13)$$

Найдем производную четвертого порядка функции $I(x)$:

$$I^{''''}(x)=\int_0^x k_x^{''''}(x,t)\left[h^{''''}(t)+p_1(t)h^{'''}(t)+p_2(t)h^{''}(t)+p_3(t)h^{'}(t)+p_4(t)h(t)\right]dt+$$

$$+k_x^{'''}(x,x)\left[h^{''''}(x)+p_1(x)h^{'''}(x)+p_2(x)h^{''}(x)+p_3(x)h^{'}(x)+p_4(x)h(x)\right],$$

так как $k_x^{'''}(x,x)=1$, то получим следующую формулу:

$$I^{''''}(x)=\int_0^x k_x^{''''}(x,t)\left[h^{''''}(t)+p_1(t)h^{'''}(t)+p_2(t)h^{''}(t)+p_3(t)h^{'}(t)+p_4(t)h(t)\right]dt+$$

$$+\left[h^{''''}(x)+p_1(x)h^{'''}(x)+p_2(x)h^{''}(x)+p_3(x)h^{'}(x)+p_4(x)h(x)\right] \qquad (14)$$

Если взять линейную комбинацию (6), (8), (10), (12), (14) в виде $I^{''''}(x)+p_1(x)I^{'''}(x)+p_2(x)I^{''}(x)+p_3(x)I^{'}(x)+p_4(x)I(x)$, то получим

$$I^{''''}(x)+p_1(x)I^{'''}(x)+p_2(x)I^{''}(x)+p_3(x)I^{'}(x)+p_4I(x)=$$

$$=\int_0^x\left[k_x^{''''}(x,t)+p_1(x)k_x^{'''}(x,t)+p_2(x)k_x^{''}(x,t)+p_3(x)k_x^{'}(x,t)+p_4(x)k(x,t)\right]*$$

$$*\left[h^{''''}(t)+p_1(t)h^{'''}(t)+p_2(t)h^{''}(t)+p_3(t)h^{'}(t)+p_4(t)h(t)\right]dt+$$

$$+h^{''''}(x)+p_1(x)h^{'''}(x)+p_2(x)h^{''}(x)+p_3(x)h^{'}(x)+p_4(x)h(x),$$

то есть

$$I^{''''}(x)+p_1(x)I^{'''}(x)+p_2(x)I^{''}(x)+p_3(x)I^{'}(x)+p_4(x)I(x)=$$

$$=h^{''''}(x)+p_1(x)h^{'''}(x)+p_2(x)h^{''}(x)+p_3(x)h^{'}(x)+p_4(x)h(x). \qquad (15)$$

Здесь учтено, что при $0\le t<x<1$, $k_x^{''''}(x,t)+p_1(x)k_x^{'''}(x,t)+p_2(x)\,k_x^{''}(x,t)+p_3(x)\,k_x^{'}(x,t)+p_4(x)\,k(x,t)=0$.

Таким образом мы показали, что значение самой функции $I(x)$ и производной первого, второго,третьего порядка в точке $x=0$ равно нулю и существует производная четвертого порядка, причем выполняется соотношение (15).

С другой стороны если вспомнить формулу Лагранжа, то $I(x)$ функцию можно переписать в виде:

$$I(x)=\int_0^x k(x,t)\left[h^{''''}(t)+p_1(t)h^{'''}(t)+p_2(t)h^{''}(t)+p_3(t)h^{'}(t)+p_4(t)h(t)\right]dt=$$

$$=\int_0^x h(t)\left[k_t^{''''}(x,t)-(p_1(t)k(x,t))_t^{'''}+(p_2(t)k(x,t))_t^{''}-(p_3(t)k(x,t))_t^{'}+p_4(t)k(x,t)\right]dt-$$

$$-h(x)+k_t^{'''}(x,0)h(0)-k_t^{''}(x,0)[h^{'}(0)+p_1^{''}(0)h(0)]+k_t^{'}(x,0)[h^{''}(0)+p_1^{'}(0)h^{'}(0)+$$
$$+p_2^{'}(0)h(0)]-k(x,0)[h^{'''}(0)+p_1(0)h^{''}(0)+p_2(0)h^{'}(0)+p_3(0)h(0)]. \quad (16)$$

где $\begin{matrix} y_1(0)=1 & y_1^{'}(0)=0 & y_1^{''}(0)=0 & y_1^{'''}(0)=0 \\ y_2(0)=0 & y_2^{'}(0)=1 & y_2^{''}(0)=0 & y_2^{'''}(0)=0 \\ y_3(0)=0 & y_3^{'}(0)=0 & y_3^{''}(0)=1 & y_3^{'''}(0)=0 \\ y_4(0)=0 & y_4^{'}(0)=0 & y_4^{''}(0)=0 & y_4^{'''}(0)=1 \end{matrix}$ начальные значения фундаментальной системы решений $y_1(x), y_2(x), y_3(x), y_4(x)$. То есть (16) формула примет следующий вид:

$$I(x)=h(x)-k_t^{'''}(x,0)h(0)+k_t^{''}(x,0)[h^{'}(0)+p_1^{''}(0)h(0)]-$$
$$-k_t^{'}(x,0)[h^{''}(0)+p_1^{'}(0)h^{'}(0)+p_2^{'}(0)h(0)]+$$
$$+k(x,0)[h^{'''}(0)+p_1(0)h^{''}(0)+p_2(0)h^{'}(0)+p_3(0)h(0)=$$
$$=h(x)-h(0)y_1(x)-h^{'}(0)y_2(x)-h^{''}(0)y_3(x)-h^{'''}(0)y_4(x). \quad (17)$$

Удобно вести обозначение $M(x)=h(x)-I(x)$. Найдем производную первого и второго, третьего, четвертого порядка функции $M(x)$.

$$M^{'}(x)=h^{'}(x)-I^{'}(x),$$
$$M^{''}(x)=h^{''}(x)-I^{''}(x).$$
$$M^{'''}(x)=h^{'''}(x)-I^{'''}(x).$$
$$M^{''''}(x)=h^{''''}(x)-I^{''''}(x).$$

Если взять линейную комбинацию $M^{''''}(x)+p_1(x)M^{'''}(x)+p_2(x)M^{''}(x)+p_3(x)M^{'}(x)+p_4(x)M(x)$, то в результате для любой гладкой функции $h(x)$ получим соотношение

$$M^{''''}(x)+p_1(x)M^{'''}(x)+p_2(x)M^{''}(x)+p_3(x)M^{'}(x)+p_4(x)M(x)=$$
$$=h^{''''}(x)-I^{''''}(x)+p_1(x)h^{'''}(x)-p_1(x)I^{'''}(x)+p_2(x)h^{''}(x)-p_2(x)I^{''}(x)+p_3(x)h^{'}(x)-$$
$$-p_3(x)I^{'}(x)+p_4(x)h(x)-p_4(x)I(x)=0,$$

или

$$M^{''''}(x)+p_1(x)M^{'''}(x)+p_2(x)M^{''}(x)+p_3(x)M^{'}(x)+p_4(x)M(x)=0. \quad (18)$$

Теперь используем граничные условия (7), (9), (11), (13) тогда для произвольной гладкой функции $h(x)$ имеем граничные соотношения

$$h(x)|_{x=0}-M(x)|_{x=0}=0,$$
$$h^{'}(x)|_{x=0}-M^{'}(x)|_{x=0}=0,$$
$$h^{''}(x)|_{x=0}-M^{''}(x)|_{x=0}=0,$$
$$h^{'''}(x)|_{x=0}-M^{'''}(x)|_{x=0}=0.$$

В силу произвольности $h(x)$ при $t\in[0,1]$ убеждаемся в справедливости следующего свойства функции $k(x,t)$:

$$k(x,t)|_{x=0,\,t=0}=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}k(x,t)|_{x=0,\,t=0} = 0,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}k(x,t)|_{x=0,\,t=0} = 0.$$

$$\frac{\partial^3}{\partial t^3}k(x,t)|_{x=0,\,t=0} = -1. \tag{19}$$

Поэтому сформулируем необходимые для дальнейшего результаты в виде отдельного утверждение.

Теорема 2. *Функция $k(x,t)$ задачи Коши для неоднородного дифференциального уравнения четвертого порядка с переменными коэффициентами на отрезке обладает свойствами:*
1) $k(P,Q) = k(Q,P), \forall Q,P \in [0,1]$,
2) $k(P,Q) \leq 0, \forall Q,P \in [0,1]$,
3) $k_x^{''''}(Q,P) + p_1(Q)k_x^{'''}(Q,P) + p_2(Q)k^{''}(Q,P) + p_3(Q)k^{'}(Q,P) + p_4(Q)k(Q,P) = 0$, $\forall Q,P \in [0,1]$,
4) при $P = Q$, $k(P,Q) = 0$
5) при $P = Q = 0$ справедливо соотношение (19).

Теперь образуем новую функцию по формуле:

$$W(x) = \int_0^x k(x,t)f(t)dt + h(x) - I(x). \tag{20}$$

где $h(x)$ - произвольная достаточно гладкая функция. $I(x)$ - определяется по формуле (6).

3 Основные результаты

Теорема 3. *Функция $W(x)$, введенная по формулам (20), является решением следующей задачи:*

$$W^{''''}(x) + p_1(x)W^{'''}(x) + p_2(x)W^{''}(x) + p_3(x)W^{'}(x) + p_4(x)W(x) = f(x), 0 \leq x \leq 1, \tag{21}$$

$$W(x)|_{x=0} = h(x)|_{x=0}, \tag{22}$$

$$W^{'}(x)|_{x=0} = h^{'}(x)|_{x=0},$$

$$W^{''}(x)|_{x=0} = h^{''}(x)|_{x=0},$$

$$W^{'''}(x)|_{x=0} = h^{'''}(x)|_{x=0},$$

где $h(x)-$ произвольная достаточно гладкая функция.

Причем решение краевой задачи (21), (22) единственно, то есть решение зависит только от граничных значений $h(x)\big|_{x=0}$, $h^{'}(x)\big|_{x=0}$, $h^{''}(x)\big|_{x=0}$, $h^{'''}(x)\big|_{x=0}$ но не зависит от $h(x)$, $h^{'}(x)$, $h^{''}(x)$, $h^{'''}(x)$ когда $0 < x < 1$.

Доказательство. Заметим, что из соотношения (17) представление (20) можно переписать в виде

$$W(x) = \int_0^x k(x,t)f(t)dt + h(0)y_1(x) + h^{'}(0)y_2(x) + h^{''}(0)y_3(x) + h^{'''}(0)y_4(x). \tag{23}$$

Проверим какими свойствами обладает $W(x)$ функция. Вычислим значение функции $W(x)$ в точке $x=0$.

$$W(0)=\int_0^0 k(0,t)f(t)dt+h(0)y_1(0)+h^{'}(0)y_2(0)+h^{''}(0)y_3(0)+h^{'''}(0)y_4(0)=h(0). \quad (24)$$

Найдем производную $W^{'}(x)$, $W^{''}(x)$, $W^{'''}(x)$, $W^{''''}(x)$ и найдем значение $W^{'}(x)|_{x=0}$, $W^{''}(x)|_{x=0}$, $W^{'''}(x)|_{x=0}$.

$$W^{'}(x)=\int_0^x k_x^{'}(x,t)f(t)dt+k(x,x)f(x)+h(0)y_1^{'}(x)+h^{'}(0)y_2^{'}(x)+h^{''}(0)y_3^{'}(x)+$$
$$+h^{'''}(0)y_4^{'}(x), \quad (25)$$

$$W^{'}(0)=\int_0^0 k_x^{'}(0,t)f(t)dt+h(0)y_1^{'}(0)+h^{'}(0)y_2^{'}(0)+h^{''}(0)y_3^{'}(0)+h^{'''}(0)y_4^{'}(0)=h^{'}(0). \quad (26)$$

$$W^{''}(x)=\int_0^x k_x^{''}(x,t)f(t)dt+k_x^{'}(x,x)f(x)+h(0)y_1^{''}(x)+h^{'}(0)y_2^{''}(x)+h^{''}(0)y_3^{''}(x)+$$
$$+h^{'''}(0)y_4^{''}(x), \quad (27)$$

$$W^{''}(0)=\int_0^0 k_x^{''}(0,t)f(t)dt+h(0)y_1^{''}(0)+h^{'}(0)y_2^{''}(0)+h^{''}(0)y_3^{''}(0)+h^{'''}(0)y_4^{''}(0)=h^{''}(0), \quad (28)$$

$$W^{'''}(x)=\int_0^x k_x^{'''}(x,t)f(t)dt+k_x^{''}(x,x)f(x)+h(0)y_1^{'''}(x)+h^{'}(0)y_2^{'''}(x)+h^{''}(0)y_3^{'''}(x)+$$
$$+h^{'''}(0)y_4^{'''}(x), \quad (29)$$

$$W^{'''}(0)=\int_0^0 k_x^{'''}(0,t)f(t)dt+h(0)y_1^{'''}(0)+h^{'}(0)y_2^{'''}(0)+h^{''}(0)y_3^{'''}(0)+$$
$$+h^{'''}(0)y_4^{'''}(0)=h^{'''}(0), \quad (30)$$

$$W^{''''}(x)=\int_0^x k_x^{''''}(x,t)f(t)dt+f(x)+h(0)y_1^{''''}(x)+h^{'}(0)y_2^{''''}+h^{''}(0)y_3^{''''}(x)+h^{'''}(0)y_4^{''''}(x). \quad (31)$$

Если взять линейную комбинацию (23), (25), (27), (29), (31) в виде $W^{''''}(x)+p_1(x)W^{'''}(x)+p_2(x)W^{''}(x)+p_3(x)W^{'}(x)+p_4(x)W(x)$, то получим

$$W^{''''}(x)+p_1(x)W^{'''}(x)+p_2(x)W^{''}(x)+p_3(x)W^{'}(x)+p_4(x)W(x)=$$
$$=\int_0^x \left[k_x^{''''}(x,t)+p_1(x)k_x^{'''}(x,t)+p_2(x)k_x^{''}(x,t)+p_3(x)k_x^{'}(x,t)+p_4(x)k(x,t)\right]f(t)dt+$$
$$+h(0)\left[y_1^{''''}(x)+p_1(x)y_1^{'''}(x)+p_2(x)y_1^{''}(x)+p_3(x)y_1^{'}(x)+p_4(x)y_1(x)\right]+$$
$$+h^{'}(0)\left[y_2^{''''}(x)+p_1(x)y_2^{'''}(x)+p_2(x)y_2^{''}(x)+p_3(x)y_2^{'}(x)+p_4(x)y_2(x)\right]+$$
$$+h^{''}(0)\left[y_3^{''''}(x)+p_1(x)y_3^{'''}(x)+p_2(x)y_3^{''}(x)+p_3(x)y_3^{'}(x)+p_4(x)y_3(x)\right]+$$
$$+h^{'''}(0)\left[y_4^{''''}(x)+p_1(x)y_4^{'''}(x)+p_2(x)y_4^{''}(x)+p_3(x)y_4^{'}(x)+p_4(x)y_4(x)\right]+f(x),$$

$$W^{''''}(x) + p_1(x)W^{'''}(x) + p_2(x)W^{''}(x) + p_3(x)W^{'}(x) + p_4(x)W(x) = f(x). \qquad (32)$$

Из формул (24), (26), (28), (30), (32) вытекает утверждение теоремы 3.

Теперь покажем, как используя теорему 3 можно получать новые граничные корректно разрешимые задачи для неоднородного дифференциального уравнения третьего порядка с переменными коэффициентами на отрезке $[0, 1]$.

Для этого достаточно, чтобы функция $h(x)$ непрерывным образом зависела от функции $f(x)$, то есть пусть существует непрерывный в смысле нормы $L_2[0, 1]$ оператор K, отображающий $f(x)$ в $h(x)$. Напомним $h(x)$ - гладкая функция. Итак, пусть $h = Kf(x)$. Тогда задача (21), (22) примет вид

$$W^{''''}(x) + p_1(x)W^{'''}(x) + p_2(x)W^{''}(x) + p_3(x)W^{'}(x) + p_4(x)W(x) = f(x), 0 \le x \le 1, \qquad (33)$$

$$W(x)|_{x=0} - K(W^{''''} + p_1W^{'''} + p_2W^{''} + p_3W^{'} + p_4W)(x)|_{x=0} = 0, \qquad (34)$$

$$\frac{d}{dx}W(x)|_{x=0} - \frac{d}{dx}K(W^{''''} + p_1W^{'''} + p_2W^{''} + p_3W^{'} + p_4W(x))|_{x=0} = 0.$$

$$\frac{d^2}{dx^2}W(x)|_{x=0} - \frac{d^2}{dx^2}K(W^{''''} + p_1W^{'''} + p_2W^{''} + p_3W^{'} + p_4W(x))(x)|_{x=0} = 0.$$

$$\frac{d^3}{dx^3}W(x)|_{x=0} - \frac{d^3}{dx^3}K(W^{''''} + p_1W^{'''} + p_2W^{''} + p_3W^{'} + p_4W(x))(x)|_{x=0} = 0.$$

Условия (34) накладываемые на функцию $W(x)$, можно интерпретировать как дополнительные условия для того, чтобы уравнение (33) при любой правой части $f(x)$ имело единственное решение. Таким образом, задача (33), (34) представляет корректную всюду разрешимую задачу с новыми "краевыми"условиями вида (34). Итак, справедливо

Теорема 4. *Для любого непрерывного в смысле $L_2[0, 1]$оператора K отображающего пространство $\{f\} \in L_2[0, 1]$ во множество гладких функции $\{h\} \in W_2^4[0, 1]$ задача (33), (34) имеет единственное устойчивое в смысле $L_2[0, 1]$ решение при всех правых частях $f(x)$ из $L_2[0, 1]$.*

Теперь докажем обратное утверждение.

Теорема 5. *Если уравнение (33) при всех правых частях $f(x)$ из $L_2[0, 1]$ с некоторыми дополнительными условиями имеет единственное устойчивое в смысле $L_2[0, 1]$ решение, то найдется непрерывный в смысле $L_2[0, 1]$ оператор K, отображающий пространство $\{f\} \in L_2[0, 1]$ в множество гладких функции $\{h\} \in W_2^4[0, 1]$, такой что дополнительное условие эквивалентно условию вида (34) с оператором K.*

Доказательство. Пусть уравнение (33) с некоторыми дополнительными условиями однозначно разрешимо для любой правой части $f(x)$. Соответствующее единственное решение обозначим через $W(x, f)$. Для удобства введем новую функцию $u_0(x, f) = \int_0^x k(x, t)f(t)dt$. Рассмотрим разность $\upsilon(x) = W(x, f) - u_0(x, f)$. Функция $\upsilon(x)$ удовлетворяет условию $\upsilon^{''''} + p_1\upsilon^{'''} + p_2\upsilon^{''} + p_3\upsilon^{'} + p_4\upsilon = 0$. Таким образом, для любого f единственным образом находим υ, то есть существует линейный оператор $\upsilon = Kf(x)$. С другой стороны, введем новую функцию $\omega(x, f) = u_0(x, f) + \upsilon(0, f)y_1(x) + \upsilon^{'}(0, f)y_2(x) + $ $+ \upsilon^{''}(0, f)y_3(x) + \upsilon^{'''}(0, f)y_4(x)$. Последняя формула аналогична формуле (23). В данном случае роль $h(x)$ играет функция $\upsilon(x)$. Следовательно, выше приведенные рассуждения из теоремы 3 показывают, что

$$\omega^{''''}(x) + p_1(x)\omega^{'''}(x) + p_2(x)\omega^{''}(x) + p_3(x)\omega^{'}(x) + p_4(x)\omega(x) = f(x), \qquad (35)$$

$$\begin{aligned} \omega(x)|_{x=0} &= \upsilon(x,f)|_{x=0}, \\ \frac{d}{dx}\omega(x)|_{x=0} &= \frac{d}{dx}\upsilon(x,f)|_{x=0}, \\ \frac{d^2}{dx^2}\omega(x)|_{x=0} &= \frac{d^2}{dx^2}\upsilon(x,f)|_{x=0}, \\ \frac{d^3}{dx^3}\omega(x)|_{x=0} &= \frac{d^3}{dx^3}\upsilon(x,f)|_{x=0}, \end{aligned} \tag{36}$$

где $\upsilon(x) = Kf(x)$ или $\upsilon(x) = K(\omega'''' + p_1\omega''' + p_2\omega'' + p_3\omega' + p_4\omega)(x)$. С другой стороны, ясно что $W(x,f) = u_0(x,f) + \upsilon(x)$. Следовательно, имеем

$$W''''(x) + p_1(x)W'''(x) + p_2(x)W''(x) + p_3(x)W'(x) + p_4(x)W(x) = f(x), 0 \le x \le 1,$$

$$\begin{aligned} W(x,f)|_{x=0} &= \upsilon(x,f)|_{x=0}, \\ \frac{d}{dx}W(x,f)|_{x=0} &= \frac{d}{dx}\upsilon(x,f)|_{x=0}. \\ \frac{d^2}{dx^2}W(x,f)|_{x=0} &= \frac{d^2}{dx^2}\upsilon(x,f)|_{x=0}. \\ \frac{d^3}{dx^3}W(x,f)|_{x=0} &= \frac{d^3}{dx^3}\upsilon(x,f)|_{x=0}. \end{aligned} \tag{37}$$

Сравнивая соотношение (36) и (37) видим, что $W(x,f) = \omega(x,f)$, то есть дополнительные условия для однозначной разрешимости имеют вид:

$$W(x)|_{x=0} - K(W'' + p_1W' + p_2W)(x)|_{x=0} = 0,$$

$$\frac{d}{dx}W(x)|_{x=0} - \frac{d}{dx}K(W'''' + p_1W''' + p_2W'' + p_3W' + p_4W)(x)|_{x=0} = 0.$$

$$\frac{d}{dx}W(x)|_{x=0} - \frac{d^2}{dx^2}K(W'''' + p_1W''' + p_2W'' + p_3W' + p_4W)(x)|_{x=0} = 0.$$

$$\frac{d}{dx}W(x)|_{x=0} - \frac{d^3}{dx^3}K(W'''' + p_1W''' + p_2W'' + p_3W' + p_4W)(x)|_{x=0} = 0.$$

Остается заметить, что оператор K-непрерывен в смысле $L_2[0,1]$ и отображает пространство $L_2[0,1]$ в $W_2^4[0,1]$. Теорема 5 полностью доказана.

Список литературы

[1] *Наймарк М.А.*, Линейные дифференциальные операторы. - М.: Наука, 1969. - 528 с.

[2] *Кальменов Т.Ш., Отелбаев М.О.*, О регулярных задачах для уравнения Лаврентьева - Бицадзе. // Диф. уравнения. 1981. Т.17, №5. - С. 873-885.

[3] *Кальменов Т.Ш.*, О регулярных краевых задачах для волнового уравнения // Диф. уравнения. 1981. Т.17, №5. - С. 1105-1121.

[4] *Павлов Б.С.*, Теория расширений и явнорешаемые модели // Успехи мат. наук, Т.42, №6(258), 1987. - С. 99-131.

Всюду разрешимые краевые задачи для неоднородных систем дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами

Д.Б. Нурахметов, К.С. Туленов, Д. Дәуітбек
Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан,
e-mail: tulen.kz@mail.ru; dos-mm@mail.ru

Аннотация

В работе дано полное описание всюду разрешимых краевых задач для неоднородных систем дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами на отрезке.

1 Введение

Известно [1], что для неоднородных систем дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами всюду разрешимой задачей является задача Коши, то есть для всюду разрешимости краевые условия выбираются специальным образом. В данной работе предлагается еще один способ постановки всюду разрешимых краевых задач для неоднородных систем дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами. Для наглядности все результаты иллюстрируются на неоднородные системы дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами на отрезке. В настоящей статьи описаны всевозможные всюду разрешимые краевые задачи для неоднородных систем дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами на отрезке.

2 Вспомогательные утверждения и доказательства теорем

Теорема 1 *В пространства $L_2[0,1]$ решение задачи Коши для системы неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами вида:*

$$\begin{cases} a_1\frac{dx_1}{dt}+a_2\frac{dx_2}{dt}=f_1(t)-c_1x_1(t)-c_2x_2(t), \\ b_1\frac{dx_1}{dt}+b_2\frac{dx_2}{dt}=f_2(t)-d_1x_1(t)-d_2x_2(t) \end{cases} \quad 0<t<1; \tag{1}$$

$$f_1(t),f_2(t)\in L_2[0,1],$$
$$a_1b_2\neq a_2b_1,$$
$$\frac{c_1}{a_1}=\alpha=\frac{d_1}{b_1},$$
$$\frac{c_2}{a_2}=\beta=\frac{d_2}{b_2}$$

с начальными условиями:

$$x_1(0)=0,x_2(0)=0 \tag{2}$$

задается формулой:

$$\begin{cases} x_1(t)=\int_0^t k_1(t,\xi)\varphi(\xi)d\xi, \\ x_2(t)=\int_0^t k_2(t,\xi)\psi(\xi)d\xi \end{cases} \tag{3}$$

где

$$k_1(t,\xi)=e^{\alpha(\xi-t)} \qquad k_2(t,\xi)=e^{\beta(\xi-t)} \tag{4}$$

$$\varphi(\xi)=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} f_1(\xi) & a_2 \\ f_2(\xi) & b_2 \end{vmatrix} \qquad \psi(\xi)=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} a_1 & f_1(\xi) \\ b_1 & f_2(\xi) \end{vmatrix} \qquad \Delta=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \tag{5}$$

Доказательство Докажем, что правая часть соотношения (3) удовлетворяет краевой задаче (1), (2). Для этого находим $x_1^{'}(t)$, $x_2^{'}(t)$.

$$\begin{cases} x_1^{'}(t) = \varphi(t) - \alpha\int_0^t k_1(t,\xi)\varphi(\xi)d\xi, \\ x_2^{'}(t) = \psi(t) - \beta\int_0^t k_2(t,\xi)\psi(\xi)d\xi \end{cases} \tag{6}$$

Теперь формулу (6) поставим левую часть формулы (1).

$$a_1x_1^{'}(t) + a_2x_2^{'}(t) = a_1\varphi(t) - a_1\alpha\int_0^t k_1(t,\xi)\varphi(\xi)d\xi + a_2\psi(t) - a_2\beta\int_0^t k_2(t,\xi)\psi(\xi)d\xi =$$
$$a_1\tfrac{b_2f_1(t)-a_2f_2(t)}{a_1b_2-a_2b_1} + a_2\tfrac{a_1f_2(t)-b_1f_1(t)}{a_1b_2-a_2b_1} - c_1x_1(t) - c_2x_2(t) = f_1(t) - c_1x_1(t) - c_2x_2(t),$$
$$b_1x_1^{'}(t) + b_2x_2^{'}(t) = b_1\varphi(t) - b_1\alpha\int_0^t k_1(t,\xi)\varphi(\xi)d\xi + b_2\psi(t) - b_2\beta\int_0^t k_2(t,\xi)\psi(\xi)d\xi =$$
$$b_1\tfrac{b_2f_1(t)-a_2f_2(t)}{a_1b_2-a_2b_1} + b_2\tfrac{a_1f_2(t)-b_1f_1(t)}{a_1b_2-a_2b_1} - d_1x_1(t) - d_2x_2(t) = f_2(t) - d_1x_1(t) - d_2x_2(t)$$

Из формулы (3) выполнение начальных условий очевидно.

Теорема 1 доказана.

Сформулируем необходимые для дальнейшего результаты в виде отдельного утверждения.

Лемма 1 *Функции $k_1(t,\xi)$, $k_2(t,\xi)$ задачи Коши для системы неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами на отрезке обладает свойствами:*

1)$k_i(P,Q) = k_i(Q,P), i = 1,2; \forall P,Q \in [0,1]$,
2)$k_i(P,Q) > 0, i = 1,2; \forall P,Q \in [0,1]$,
3)$(k_1)_t^{'}(P,Q) + \alpha k_1(P,Q) = 0, (k_2)_t^{'}(P,Q) + \beta k_2(P,Q) = 0, \forall P,Q \in [0,1]$,
4) *при* $P = Q, k_i(P,Q) = 1, i = 1,2$
5) *при* $P = Q = 0, k_i(P,Q) = 1, i = 1,2.$

Теперь образуем новую функцию по формуле:

$$\begin{cases} W_1(t) = \int_0^t k_1(t,\xi)\varphi(\xi)d\xi + h_1(0)k_1(t,0), \\ W_2(t) = \int_0^t k_2(t,\xi)\psi(\xi)d\xi + h_2(0)k_2(t,0) \end{cases} \tag{7}$$

Теорема 2 *Функции $W_1(t)$, $W_2(t)$, введенные по формуле (7), является решением следующей задачи:*

$$\begin{cases} a_1\frac{dW_1}{dt} + a_2\frac{dW_2}{dt} = f_1(t) - c_1W_1(t) - c_2W_2(t), \\ \\ b_1\frac{dW_1}{dt} + b_2\frac{dW_2}{dt} = f_2(t) - d_1W_1(t) - d_2W_2(t) \end{cases} \quad 0<t<1; \tag{8}$$

$$\begin{cases} W_1(t)|_{t=0} = h_1(t)|_{t=0}, \\ W_2(t)|_{t=0} = h_2(t)|_{t=0} \end{cases} \tag{9}$$

где $h_1(t)$, $h_2(t)$-произвольные достаточно гладкие функций.

Причем решение краевой задачи (8), (9) единственно, то есть решение зависит, только от граничных значений $h_1(t)|_{t=0}$, $h_2(t)|_{t=0}$, но не зависит от $h_1(t)$, $h_2(t)$ когда $0 < t < 1$.

Доказателство Преобразуем формулу (6) и используем формулу (3):

$$\begin{cases} x_1^{'}(t) + \alpha x_1(t) = \varphi(t), \\ x_2^{'}(t) + \beta x_2(t) = \psi(t) \end{cases} \tag{10}$$

Пусть $h_1(t)$, $h_2(t)-$ произвольные дифференцируемые на отрезке $[0,1]$ функции. Введем новую функции $I_1(t)$, $I_2(t)-$ следующим образом:

$$\begin{cases} I_1(t)=\int_0^t k_1(t,\xi)[h_1^{'}(\xi)+\alpha h_1(\xi)]d\xi, \\ I_2(t)=\int_0^t k_2(t,\xi)[h_2^{'}(\xi)+\beta h_2(\xi)]d\xi \end{cases} \tag{11}$$

Какими свойствами обладают $I_1(t), I_2(t)$ функции? Вычислим значение функции $I_1(t)$, $I_2(t)$ в точке $t=0$.

$$\begin{cases} I_1(0)=\int_0^0 k_1(0,\xi)[h_1^{'}(\xi)+\alpha h_1(\xi)]d\xi=0, \\ I_2(0)=\int_0^0 k_2(0,\xi)[h_2^{'}(\xi)+\beta h_2(\xi)]d\xi=0 \end{cases} \tag{12}$$

Теперь найдем производные первого порядка функции $I_1(t)$, $I_2(t)$ и найдем их значение в точке $t=0$.

$$I_1^{'}(t)=k_1(t,t)[h_1^{'}(t)+\alpha h_1(t)]+\int_0^t(k_1)_t^{'}(t,\xi)[h_1^{'}(\xi)+\alpha h_1(\xi)]d\xi,$$
$$I_2^{'}(t)=k_2(t,t)[h_2^{'}(t)+\beta h_2(t)]+\int_0^t(k_2)_t^{'}(t,\xi)[h_2^{'}(\xi)+\beta h_2(\xi)]d\xi$$

так как $k_1(t,t)=1$, $k_2(t,t)=1$ и $(k_1)_t^{'}(t,\xi)=-\alpha k_1(t,\xi)$, $(k_2)_t^{'}(t,\xi)=-\beta k_2(t,\xi)$, то получим следующую формулу:

$$\begin{cases} I_1^{'}(t)=h_1^{'}(t)+\alpha h_1(t)-\alpha\int_0^t k_1(t,\xi)[h_1^{'}(\xi)+\alpha h_1(\xi)]d\xi, \\ I_2^{'}(t)=h_2^{'}(t)+\beta h_2(t)-\beta\int_0^t k_2(t,\xi)[h_2^{'}(\xi)+\beta h_2(\xi)]d\xi \end{cases} \tag{13}$$

$$I_1^{'}(0)=h_1^{'}(0)+\alpha h_1(0)-\alpha\int_0^0 k_1(0,\xi)[h_1^{'}(\xi)+\alpha h_1(\xi)]d\xi=h_1^{'}(0)+\alpha h_1(0),$$
$$I_2^{'}(0)=h_2^{'}(0)+\beta h_2(0)-\beta\int_0^0 k_2(0,\xi)[h_2^{'}(\xi)+\beta h_2(\xi)]d\xi=h_2^{'}(0)+\beta h_2(0)$$

то есть

$$\begin{cases} I_1^{'}(0)=h_1^{'}(0)+\alpha h_1(0), \\ I_2^{'}(0)=h_2^{'}(0)+\beta h_2(0) \end{cases} \tag{14}$$

Если взять линейную комбинацию (11), (13) в виде $I_1^{'}(t)+\alpha I_1(t)$, $I_2^{'}(t)+\beta I_2(t)$ то получим

$$I_1^{'}(t)+\alpha I_1(t)=h_1^{'}(t)+\alpha h_1(t)-\alpha\int_0^t k_1(t,\xi)[h_1^{'}(\xi)+\alpha h_1(\xi)]d\xi+\alpha\int_0^t k_1(t,\xi)[h_1^{'}(\xi)+\alpha h_1(t)]d\xi,$$
$$I_2^{'}(t)+\beta I_2(t)=h_2^{'}(t)+\beta h_2(t)-\beta\int_0^t k_2(t,\xi)[h_2^{'}(\xi)+\beta h_2(\xi)]d\xi+\beta\int_0^t k_2(t,\xi)[h_2^{'}(\xi)+\beta h_2(t)]d\xi$$

то есть

$$\begin{cases} I_1^{'}(t)+\alpha I_1(t)=h_1^{'}(t)+\alpha h_1(t), \\ I_2^{'}(t)+\beta I_2(t)=h_2^{'}(t)+\beta h_2(t) \end{cases} \tag{15}$$

С другой стороны если вспомнить формулу Лагранжа, то $I_1(t)$, $I_2(t)$ функции можно переписать в виде:

$$I_1(t)=\int_0^t k_1(t,\xi)[h_1^{'}(\xi)+\alpha h_1(\xi)]d\xi=k_1(t,\xi)h_1(\xi)|_0^t-\int_0^t[(k_1)_\xi^{'}(t,\xi)h_1(\xi)-\alpha k_1(t,\xi)h_1(\xi)]d\xi$$
$$I_2(t)=\int_0^t k_2(t,\xi)[h_2^{'}(\xi)+\beta h_2(\xi)]d\xi=k_2(t,\xi)h_2(\xi)|_0^t-\int_0^t[(k_2)_\xi^{'}(t,\xi)h_2(\xi)-\beta k_2(t,\xi)h_2(\xi)]d\xi$$

так как $k_1(t,t)=1$, $k_2(t,t)=1$ и $(k_1)_\xi^{'}(t,\xi)=\alpha k_1(t,\xi)$, $(k_2)_\xi^{'}(t,\xi)=\beta k_2(t,\xi)$, то получим следующую формулу:

$$\begin{cases} I_1(t)=h_1(t)-h_1(0)k_1(t,0), \\ I_2(t)=h_2(t)-h_2(0)k_2(t,0) \end{cases} \tag{16}$$

Удобно вести обозначение $M_1(t)=h_1(t)-I_1(t)$, $M_2(t)=h_2(t)-I_2(t)$. Найдем производные первого порядка функции $M_1(t), M_2(t)$.

$$\begin{cases} M_1'(t) = h_1'(t) - I_1'(t), \\ M_2'(t) = h_2'(t) - I_2'(t) \end{cases}$$

Если взять линейную комбинацию $M_1'(t) + \alpha M_1(t)$, $M_2'(t) + \beta M_2(t)$, то в результате для любых гладких функции $h_1(t)$, $h_2(t)$ получим соотношение

$$\begin{array}{c} M_1'(t) + \alpha M_1(t) = h_1'(t) - I_1'(t) + \alpha h_1(t) - \alpha I_1(t) = 0 \\ M_2'(t) + \beta M_2(t) = h_2'(t) - I_2'(t) + \beta h_2(t) - \beta I_2(t) = 0 \end{array}$$

или

$$\begin{cases} M_1'(t) + \alpha M_1(t) = 0, \\ M_2'(t) + \beta M_2(t) = 0 \end{cases} \tag{17}$$

Теперь используем граничную условию (12), тогда для произвольных гладких функции $h_1(t)$, $h_2(t)$ имеем соотношения

$$\begin{cases} h_1(t)|_{t=0} - M_1(t)|_{t=0} = 0, \\ h_2(t)|_{t=0} - M_2(t)|_{t=0} = 0 \end{cases} \tag{18}$$

Теперь образуем новую функцию по формуле:

$$\begin{cases} W_1(t) = \int_0^t k_1(t,\xi)\varphi(\xi)d\xi + h_1(t) - I_1(t), \\ W_2(t) = \int_0^t k_2(t,\xi)\psi(\xi)d\xi + h_2(t) - I_2(t) \end{cases} \tag{19}$$

где $h_1(t)$, $h_2(t)$ - произвольные достаточно гладкие функций. $I_1(t)$, $I_2(t)$ - определяется по формуле (16).

Заметим, что из соотношения (16) представление (19) можно переписать в виде (7).

Проверим, какими свойствами обладают $W_1(t)$, $W_2(t)$ функции. Вычислим значений функции $W_1(t)$, $W_2(t)$ в точке $t = 0$.

$$\begin{cases} W_1(0) = \int_0^0 k_1(0,\xi)\varphi(\xi)d\xi + h_1(0)k_1(0,0) = h_1(0), \\ W_2(0) = \int_0^0 k_2(0,\xi)\psi(\xi)d\xi + h_2(0)k_2(0,0) = h_2(0) \end{cases} \tag{20}$$

Найдем производные $W_1'(t)$, $W_2'(t)$ и найдем значении $W_1'(t)|_{t=0}$, $W_2'(t)|_{t=0}$.

$$\begin{cases} W_1'(t) = -\alpha \int_0^t k_1(t,\xi)\varphi(\xi)d\xi + k_1(t,t)\varphi(t) - \alpha h_1(0)k_1(t,0), \\ W_2'(t) = -\beta \int_0^t k_2(t,\xi)\psi(\xi)d\xi + k_2(t,t)\psi(t) - \beta h_2(0)k_2(t,0) \end{cases} \tag{21}$$

$$\begin{cases} W_1'(0) = -\alpha \int_0^0 k_1(0,\xi)\varphi(\xi)d\xi + \varphi(0) - \alpha h_1(0)k_1(0,0) = \varphi(0) - \alpha h_1(0), \\ W_2'(0) = -\beta \int_0^0 k_2(0,\xi)\psi(\xi)d\xi + \psi(t) - \beta h_2(0)k_2(0,0) = \psi(0) - \beta h_2(0) \end{cases} \tag{22}$$

Преобразуем формулу (21) и используем формулу (7):

$$\begin{array}{l} W_1'(t) = -\alpha[\int_0^t k_1(t,\xi)\varphi(\xi)d\xi + h_1(0)k_1(t,0)] + \varphi(t) = -\alpha W_1(t) + \varphi(t), \\ W_2'(t) = -\beta[\int_0^t k_2(t,\xi)\psi(\xi)d\xi + h_2(0)k_2(t,0)] = -\beta W_2(t) + \psi(t) \end{array}$$

то есть

$$\begin{cases} W_1'(t) = -\alpha W_1(t) + \varphi(t), \\ W_2'(t) = -\beta W_2(t) + \psi(t) \end{cases} \tag{23}$$

Теперь формулу (23) поставим в левую часть формулы (8):

$a_1W_1'(t) + a_2W_2'(t) = a_1[-\alpha W_1(t) + \varphi(t)] + a_2[-\beta W_2(t) + \psi(t)] =$
$-c_1W_1(t) - c_2W_2(t) + \frac{a_1b_2f_1(t) - a_1a_2f_2(t) + a_2a_1f_2(t) - a_2b_1f_1(t)}{a_1b_2 - a_2b_1} = f_1(t) - c_1W_1(t) - c_2W_2(t),$
$b_1W_1'(t) + b_2W_2'(t) = b_1[-\alpha W_1(t) + \varphi(t)] + b_2[-\beta W_2(t) + \psi(t)] =$
$-d_1W_1(t) - d_2W_2(t) + \frac{b_1b_2f_1(t) - b_1a_2f_2(t) + b_2a_1f_2(t) - b_2b_1f_1(t)}{a_1b_2 - a_2b_1} = f_2(t) - d_1W_1(t) - d_2W_2(t)$

то есть

$$\begin{cases} a_1W_1'(t) + a_2W_2'(t) = f_1(t) - c_1W_1(t) - c_2W_2(t), \\ \\ b_1W_1'(t) + b_2W_2'(t) = f_2(t) - d_1W_1(t) - d_2W_2(t) \end{cases} \quad 0<\text{t}<1; \tag{24}$$

Из формул $(24), (20)$ вытекает утверждение теоремы 2.

Преобразуем формулу (21):

$$\begin{cases} W_1'(t) + \alpha W_1(t) = \varphi(t), \\ W_2'(t) + \beta W_2(t) = \psi(t) \end{cases} \tag{25}$$

Теперь покажем, как используя теорему 2 можно получать новые граничные корректно разрешимые задачи для системы неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами на отрезке $[0, 1]$.

Для этого достаточно, чтобы функции $h_1(t)$, $h_2(t)$ непрерывным образом зависали от функции $\varphi(t), \psi(t)$. То есть, пусть существует непрерывный оператор K, отображающий $\varphi(t), \psi(t)$ в $h_1(t)$, $h_2(t)$. Напомним $h_1(t)$, $h_2(t)$-гладкие функции. Итак, пусть $h_1 = K\varphi(t)$, $h_2 = K\psi(t)$. Тогда задача $(18), (19)$ примет вид

$$\begin{cases} a_1W_1'(t) + a_2W_2'(t) = f_1(t) - c_1W_1(t) - c_2W_2(t), \\ \\ b_1W_1'(t) + b_2W_2'(t) = f_2(t) - d_1W_1(t) - d_2W_2(t) \end{cases} \quad 0<\text{t}<1; \tag{26}$$

$$\begin{cases} W_1(t)|_{t=0} - K(W_1' + \alpha W_1)(t)|_{t=0} = 0, \\ W_2(t)|_{t=0} - K(W_2' + \beta W_2)(t)|_{t=0} = 0 \end{cases} \tag{27}$$

Условия (27), накладываемые на функции $W_1(t)$, $W_2(t)$, можно интерпретировать как дополнительные условия для того, чтобы уравнение (26) при любой правой части имело единственное решение. Таким образом, задача $(26), (27)$ представляет корректную всюду разрешимую задачу с новыми внутренне краевыми условиями вида (27). Итак, справедлива.

Теорема 3 *Для любого непрерывного оператора K, отображающего пространство $\varphi, \psi \in L_2[0, 1]$ во множестве гладких функций $h_1, h_2 \in W_2^2[0, 1]$ задачи $(26), (27)$ имеет единственное устойчивое решение при всех допустимых правых частях $\varphi(t), \psi(t)$.*

Теперь докажем обратное утверждение.

Теорема 4 *Если система уравнении (26) при всех правых частях $f_1(t)$, $f_2(t)$ с некоторыми дополнительными условиями имеет единственное устойчивое решение, то найдется непрерывный оператор K, отображающий пространство $\varphi, \psi \in L_2[0, 1]$ во множестве гладких функции $h_1, h_2 \in W_2^2[0, 1]$, такое, что дополнительное условие примет вид (27).*

Доказателство Пусть уравнение (26) с некоторыми дополнительными условиями однозначно разрешимо для любой правой части $\varphi(t)$, $\psi(t)$. Соответствующее единственное решение обозначим через $W_1(t, \varphi)$, $W_2(t, \psi)$. Для удобства введем новую функцию $u_{01}(t, \varphi) = \int_0^t k_1(t, \xi) \cdot$ $\cdot \varphi(\xi) d\xi$, $u_{02}(t, \psi) = \int_0^t k_2(t, \xi)\psi(\xi) d\xi$. Рассмотрим разность $\upsilon_1(t) = W_1(t, \varphi) - u_{01}(t, \varphi)$, $\upsilon_2(t) = W_2(t, \psi) - u_{02}(t, \psi)$. Функции $\upsilon_1(t)$, $\upsilon_2(t)$ удовлетворяют условием $\upsilon_1'(t) + \alpha\upsilon_1(t) = 0$, $\upsilon_2'(t) + \beta\upsilon_2(t) = 0$ Таким образом, для любых φ, ψ единственным образом находим υ_1, υ_2, то есть

$\upsilon_1 = K\varphi(t)$, $\upsilon_2 = K\psi(t)$. С другой стороны, введем новые функции $\omega_1(t,\varphi) = u_{01}(t,\varphi) + \upsilon_1(0,\varphi)k_1(t,0)$, $\omega_2(t,\psi) = u_{02}(t,\psi) + \upsilon_2(0,\psi)k_2(t,0)$. Последняя формула аналогично формуле (7). В данном случае роль $h_1(t)$, $h_2(t)$ играет функции $\upsilon_1(t)$, $\upsilon_2(t)$. Следовательно, выше приведенные рассуждение из теоремы 3 показывают, что

$$\begin{cases} a_1\omega_1^{'}(t) + a_2\omega_2^{'}(t) = f_1(t) - c_1\omega_1(t) - c_2\omega_2(t), \\ \\ b_1\omega_1^{'}(t) + b_2\omega_2^{'}(t) = f_2(t) - d_1\omega_1(t) - d_2\omega_2(t) \end{cases} \quad 0<t<1; \tag{28}$$

$$\begin{cases} \omega_1(t)|_{t=0} = \upsilon_1(t,\varphi)|_{t=0}, \\ \omega_2(t)|_{t=0} = \upsilon_2(t,\psi)|_{t=0} \end{cases} \tag{29}$$

где $\upsilon_1 = K\varphi(t)$, $\upsilon_2 = K\psi(t)$ или $\upsilon_1 = K(\omega_1^{'} + \alpha\omega_1)(t)$, $\upsilon_2 = K(\omega_2^{'} + \beta\omega_2)(t)$.

С другой стороны, ясно что $W_1(t,\varphi) = u_{01}(t,\varphi) + \upsilon_1(t)$, $W_2(t,\psi) = u_{02}(t,\psi) + \upsilon_2(t)$. Следовательно, имеем

$$\begin{cases} a_1W_1^{'}(t) + a_2W_2^{'}(t) = f_1(t) - c_1W_1(t) - c_2W_2(t), \\ \\ b_1W_1^{'}(t) + b_2W_2^{'}(t) = f_2(t) - d_1W_1(t) - d_2W_2(t) \end{cases} \quad 0<t<1; \tag{30}$$

$$\begin{cases} W_1(t,\varphi)|_{t=0} = \upsilon(t,\varphi)|_{t=0}, \\ W_2(t,\psi)|_{t=0} = \upsilon(t,\psi)|_{t=0} \end{cases} \tag{31}$$

Сравнивая соотношения (29) и (30) видно, что $W_1(t,\varphi) = \omega_1(t,\varphi)$, $W_2(t,\psi) = \omega_2(t,\psi)$, то есть дополнительные условия для однозначной разрешимости имеют вид

$$W_1(t)|_{t=0} - K(W_1^{'} + \alpha W_1)(t)|_{t=0} = 0,$$
$$W_2(t)|_{t=0} - K(W_2^{'} + \beta W_2)(t)|_{t=0} = 0$$

Теорема 4 полностью доказана.

Список литературы

[1] *Степанов В.В.*, Курс дифференциальных уравнений. - М.: 1959. - С. 312 - 317.

[2] *Кальменов Т.Ш., Отелбаев М.О.*, О регулярных задачах для уравнения Лаврентьева - Бицадзе. // Диф. уравнения. 1981. т.17, №5. - С. 873 - 885.

[3] *Кальменов Т.Ш.*, О регулярных краевых задачах для волнового уравнения. // Диф. уравнения. 1981. т.17, №5. - С. 1105 - 1121.

[4] *Павлов Б.С.*, Теория расширений и явнорешаемые модели. // Успехи мат. наук, т.42, №6(258), 1987. - С. 99 - 131.

[5] *Kanguzhin B.E., Nurakhmetov D.B.*, Boundary Value Problems for 2nd Order Non-homogeneous Differential Equations with Variable Coefficients. // Journal of Xinjiang University (Natural Science Edition), Vol. 28, №1, Feb. 2011. - P. 46 - 56.

[6] *Гантмахер Ф.Р.*, Теория матриц. - М.: Наука, 1988. - С. 70 - 86.

Корректная разрешимость неоднородных систем линейных алгебраических уравнений при правых частях из подпространств

А.К. Шаймерденова, А.М.Тлеулесова, Л.Н.Темирбекова
КазНУ имени аль-Фараби, г.Алматы, Казахстан
e-mail: altinay86@mail.ru

Аннотация

В работе дано полное описание корректных краевых задач для линейных систем алгебраических уравнений. Решения этих задач найдены для общего случая. Для наглядности все результаты иллюстрируются на неоднородных системах алгебраических уравнений.

1 Введение При численном решений краевых задач для дифференциальных уравнений, мы на самом деле ищем решения алгебраических систем уравнений. Такую систему получаем, аппроксимируя дифференциальное уравнение и краевые условия. К примеру, для дифференциального уравнения второго порядка

$$y''(x) + q(x)y(x) = f(x), \quad 0 < x < b \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$\begin{array}{l} y(0) = 0 \\ y(b) = 0 \end{array} \tag{2}$$

явное аналитическое решение найти невозможно. Удобно численным методом с заданной точностью найти приближенные решения в определенных точках. Задачу (1), (2), заменяя на разностное уравнение, получаем следующую систему алгебраических уравнений

$$\begin{array}{l} y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} + q_i y_i = b_i, \ \ i = \overline{1, n-1} \\ y_0 = 0 \\ y_n = 0 \end{array} \tag{3}$$

где $q_i = h^2 q(x_i), b_i = h^2 f_i$, h-шаг аппроксимаций. Таким образом, мы получили матричную систему из n+1-го уравнений и n+1-ой неизвестных. Распишем систему (3) в матрично-векторной форме

$$\begin{pmatrix} 1 & -2+q_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & -2+q_2 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2+q_3 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2+q_4 & 1 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2+q_5 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ ... \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ ... \\ b_{n-2} \\ b_{n-1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

И это только один из возможных случаев, если взять вместо дифференциального уравнения второго порядка уравнение более высокого порядка или взять другую его аппроксимацию и другие краевые условия мы приходим к матрично-векторной системе с матрицей другой структуры . Поэтому, можно рассмотреть сразу общий случай

$$\begin{array}{l} l(y) = f(x), \quad 0 < x < b \\ U_1(y) = g_1(f), \ U_2(y) = g_2(f) \end{array}$$

Соответственно, если введем обозначения, тогда в общем случае вместо системы (4) получим систему вида

$$\begin{bmatrix} A \\ \\ C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{b} \\ \\ \vec{0} \end{bmatrix} \tag{5}$$

где $\vec{Y} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & ... & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & ... & c_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ c_{n-m,1} & c_{n-m,2} & ... & c_{n-m,n} \end{pmatrix}$,

$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}$, $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$.

Отметим, что здесь и в дальнейшем $1 \leq m < n$, и что матрица A порождается дифференциальным уравнением, а матрица C вытекает из краевых условий. Допустим, что задача (5) однозначно разрешима при всех правых частях $\vec{b}$.

Постановка задачи: Существует ли другие, кроме условий задаваемых матрицей C, условия, чтобы матричное уравнение $A\vec{Y} = \vec{b}$ с этими дополнительными условиями имело единственное решение при всех $\vec{b}$? Выписать общий вид таких дополнительных условий.

Поставленная задача в случае дифференциальных уравнений хорошо известна [1].

2 Корректная разрешимость неоднородных систем линейных алгебраических уравнений при правых частях из подпространств

Теорема 1 *Решение задачи (5) задается формулой*

$$\vec{Y_0} = L_0^{-1}\,\vec{b} \tag{6}$$

где через L_0^{-1} *- обозначим первых* m *столбцов матрицы* $\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}^{-1}$, *при* $\det \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} \neq 0$.

Доказательство: (6) формула получена матричным методом и легко проверяется подставлением решения в систему.

Перепишем матричное уравнение (5) в виде системы матричных уравнений

$$\begin{cases} A\vec{Y} = \vec{b} \\ C\vec{Y} = \vec{0} \end{cases} \tag{7}$$

Согласно теореме 1 ее решение задается по формуле (6). Система (7) состоит из неоднородного уравнения $A\vec{Y} = \vec{b}$ и однородного уравнения $C\vec{Y} = \vec{0}$.

Теперь рассмотрим тот случай, когда второе уравнение также является неоднородным.

Теорема 2 *Для любых векторов* $\vec{p}$ *и* $\vec{b}$ *система*

$$\begin{cases} A\vec{Y} = \vec{b} \\ C\vec{Y} = \vec{p} \end{cases}$$

имеет единственное решение

$$\vec{Y} = L_0^{-1}\vec{b}_0 + L_0^{-1}\vec{p}_0$$

где $\vec{b}_0 = \begin{pmatrix} \vec{b} \\ \vec{0} \end{pmatrix}$, $\vec{p}_0 = \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{p} \end{pmatrix}$.

Доказательство теоремы 2 осуществляется непосредственной проверкой.

Теперь покажем как из теоремы 2 получить ответ на поставленную задачу. Для этого достаточно предполагать, чтобы вектор $\vec{p}$ непрерывным образом зависит от $\vec{b}$, то есть $\vec{p} = F(\vec{b})$. Таким образом, можем сформулировать утверждение

Теорема 3 *Пусть F - любая непрерывная функция, отображающая векторное пространство $\mathbb{C}^m$ в векторное пространство $\mathbb{C}^{n-m}$. Система*

$$\begin{cases} A\vec{Y} = \vec{b} \\ C\vec{Y} - F\left(A\vec{Y}\right) = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение при всех правых частях $\vec{b}$. Причем решение системы непрерывно зависит от $\vec{b}$ и для него верно представление

$$\vec{Y} = L_0^{-1}\begin{pmatrix} \vec{b} \\ \vec{0} \end{pmatrix} + L_0^{-1}\begin{pmatrix} \vec{0} \\ F(\vec{b}) \end{pmatrix} \qquad (8)$$

Таким образом, в теореме 3 указаны те дополнительные условия $C\vec{Y} - F\left(A\vec{Y}\right) = 0$ которые сохраняют единственность решения.

Существенным нетривиальным моментов данной работы является следующая теорема

Теорема 4 *Допустим уравнение $A\vec{Y} = \vec{b}$ с некоторыми дополнительными условиями имеет единственное устойчивое решение при всех правых частях $\vec{b} \in \mathbb{C}^m$. Тогда существует непрерывное отображение F из $\mathbb{C}^m$ в $\mathbb{C}^{n-m}$ такое, что дополнительные условия эквивалентны следующим условиям*

$$C\vec{Y} - F\left(A\vec{Y}\right) = 0$$

Здесь эквивалентность систем уравнений понимается в том смысле, что решения одной системы являются решениями другой и обратно.

Доказательство: По условию теоремы 4 уравнение $A\vec{Y} = \vec{b}$ с некоторыми дополнительными условиями имеет единственное решение, которое обозначим через $\vec{Y}\left(\vec{b}\right)$. Введем разность

$$\vec{V} = \vec{Y}\left(\vec{b}\right) - \vec{Y}_0$$

Ясно, что вектор $\vec{V}$ удовлетворяет однородного уравнению

$$A\vec{V} = \vec{0} \qquad (9)$$

Таким образом, каждому вектору $\vec{b} \in \mathbb{C}^m$ соответствует единственный вектор $\vec{V}$, который является решением однородного уравнения (9). Следовательно, каждому вектору $\vec{b} \in \mathbb{C}^m$ соответствует единственный вектор $C\vec{V} \in \mathbb{C}^{n-m}$, который непрерывным образом зависит от вектора $\vec{b}$. Иначе говоря, существует непрерывное отображение F из $\mathbb{C}^m$ в $\mathbb{C}^{n-m}$, определяемое по формуле

$$F\left(\vec{b}\right) = C\,\vec{V}\left(\vec{b}\right) \tag{10}$$

Введем вектор $\vec{W} = \vec{Y}_0 + L_0^{-1}\begin{pmatrix} \vec{0} \\ C\vec{V}\left(\vec{b}\right) \end{pmatrix}$. Сравнение с формулой (8) позволяет утверждать, что $\vec{W}$ решение системы

$$\begin{cases} A\vec{W} = \vec{b} \\ C\vec{W} = C\vec{V}\left(\vec{b}\right) \end{cases} \tag{11}$$

Рассмотрим разность $\vec{W} - \vec{Y}(\vec{b})$. Тогда имеем соотношения

$$\begin{cases} A\left(\vec{W} - \vec{Y}\left(\vec{b}\right)\right) = \vec{0} \\ C\left(\vec{W} - \vec{Y}\left(\vec{b}\right)\right) = 0 \end{cases}$$

которая имеет единственное решение. Следовательно,$\vec{W} = \vec{Y}\left(\vec{b}\right)$, то есть $\vec{Y}\left(\vec{b}\right)$ удовлетворяет всем тем условиям, которым удовлетворяет $\vec{W}$. С другой стороны, $\vec{W}$ удовлетворяет системе (11). Поэтому система (11) удовлетворяет также $\vec{Y}\left(\vec{b}\right)$, то есть

$$\begin{cases} A\vec{Y}\left(\vec{b}\right) = \vec{b} \\ C\vec{Y}\left(\vec{b}\right) = F\left(\vec{b}\right) \end{cases}$$

Заметим, что здесь учтено равенство (10).

В теоремах 3 и 4 дополнительные условия могут быть нелинейными. В общем случае, отображение F может быть и нелинейным. Если требовать линейность от дополнительных условий, то отображение F также становится линейным. Следовательно, отображение F должно задаваться произвольной матрицей D из $\mathbb{C}^m$ в $\mathbb{C}^{n-m}$. Матрица D имеет размерность $(n-m)\times m$.

Теорема 5 *Определитель матрицы* $\begin{bmatrix} A \\ \\ C - DA \end{bmatrix}$ *не зависит от матрицы D, т.е.*

$$\det\begin{pmatrix} A \\ C - DA \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}$$

Доказательство: Берем левую часть этого соотношения и с помощью элементарных преобразований получим правую часть:

$$\det\begin{pmatrix} A \\ C - DA \end{pmatrix} = \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \\ c_{11} - \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_{1j}a_{j1} & c_{12} - \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_{1j}a_{j2} & \dots & c_{1n} - \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_{1j}a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-m,1} - \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_{n-m,j}a_{j1} & c_{n-m,2} - \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_{n-m,j}a_{j2} & \dots & c_{n-m,n} - \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_{n-m,j}a_{jn} \end{bmatrix}$$

первую строку умножаем на α_{11}, вторую строку на α_{12}, третью строку на α_{13} ... m-ю строку на α_{1m} и складываем первые $m+1$ строк, результат пишем в $m+1$-ой строке. Потом первую строку умножим на α_{21}, вторую строку на α_{22}, третью строку на α_{23} ... m-ю строку на α_{2m} и сложив первые m строк с $m+2$-ой строкой и результат пишем в $m+2$-ой строке. Так продолжаем для всех строк и, наконец, первую строку умножим на $\alpha_{n-m,1}$, вторую строку на $\alpha_{n-m,2}$, третью строку на $\alpha_{n-m,3}$ ... m-ю строку на $\alpha_{n-m,m}$ и сложив первые m строк с последней строкой и результат пишем в n-ой строке. После этих элементарных преобразований определитель имеет такой вид

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \\ c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-m,1} & c_{n-m,2} & \dots & c_{n-m,n} \end{bmatrix}$$

то есть, получился определитель $\det\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}$. Теорема 5 полностью доказана.

Теорема 6 *Решение задачи*

$$\begin{bmatrix} A \\ \\ C-DA \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \vec{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{b} \\ \\ \vec{0} \end{bmatrix} \qquad (12)$$

задается формулой

$$\vec{Y}_D = \vec{Y}_0 + \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ D \end{pmatrix}\vec{b}$$

Доказательство: Если систему напишем в удобном виде для доказательства

$$\begin{cases} A\vec{Y} = \vec{b} \\ C\vec{Y} = D\vec{b} \end{cases}$$

преобразуем, то получаем решение системы (12)

$$\vec{Y} = \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \vec{b} \\ D\vec{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \vec{b} \\ \vec{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \vec{0} \\ D\vec{b} \end{pmatrix} = \vec{Y}_0 + \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ D \end{pmatrix}\vec{b}$$

Теорема доказана.

Список литературы

[1] *Гантмахер Ф.Р.*, Теория матриц. – М.: Физматлит. 2004. – 560 с.

[2] *Самарский А.А., Гулин А.В.*, Численные методы. – М.: Наука. 1989. – 432 с.

Оптимальное управление фазовыми системами

С.А. Айсагалиев, Ш.А. Айпанов
Институт математики и механики КазНУ им. аль-Фараби
e-mail: Serikbai.Aisagaliev@kaznu.kz

Аннотация

Разработан конструктивный метод решения краевых задач оптимального управления для динамических систем с цилиндрическим фазовым простанством.

Постановка задачи. Рассматривается фазовая система, описываемая дифференциальными уравнениями вида

$$\begin{aligned} &\dot{x} = Ax + B\varphi(\sigma,t) + Du(t), \ \ \dot{\sigma} = Cx + R\varphi(\sigma,t) + Ev(t), \\ &x(t_0) = x_0, \ \ \sigma(t_0) = \sigma_0, \ \ t \in I = [t_0, t_1], \end{aligned} \tag{1}$$

где A, B, D, C, R, E – постоянные матрицы порядков $(n\times n)$, $(n\times m)$, $(n\times r)$, $(m\times n)$, $(m\times m)$, $(m\times s)$ соответственно. Функция $\varphi(\sigma,t) = (\varphi_1(\sigma_1,t),\dots,\varphi_m(\sigma_m,t))$ является периодической по σ, т.е. $\varphi(\sigma,t) = \varphi(\sigma+\Delta,t)$, что означает $\varphi_i(\sigma_i,t) = \varphi_i(\sigma_i+\Delta_i,t)$, $i=\overline{1,m}$, где $\Delta_1,\dots,\Delta_m$ – периоды.

Ограничения на управления $u(t) = (u_1(t),\dots,u_r(t))$, $v(t) = (v_1(t),\dots,v_s(t))$ имеют вид

$$u(t) \in U = \{u(\cdot) \in L_2(I,R^r) \mid \alpha_i(t) \le u_i(t) \le \beta_i(t), \ \ i=\overline{1,r}, \ \ t \in I\}, \tag{2}$$

$$v(t) \in V = \{v(\cdot) \in L_2(I,R^s) \mid \gamma_i(t) \le v_i(t) \le \delta_i(t), \ \ i=\overline{1,s}, \ \ t \in I\}, \tag{3}$$

где $\alpha(t) = (\alpha_1(t),\dots,\alpha_r(t))$, $\beta(t) = (\beta_1(t),\dots,\beta_r(t))$, $\gamma(t) = (\gamma_1(t),\dots,\gamma_s(t))$, $\delta(t) = (\delta_1(t),\dots,\delta_s(t))$, $t\in I$ – заданные непрерывные функции.

Краевые условия для системы (1) имеют вид

$$(x(t_0) = x_0, \ x(t_1) = x_1) \in S_0 \times S_1 \subset R^{2n}, \tag{4}$$

$$(\sigma(t_0) = \sigma_0, \ \sigma(t_1) = \sigma_1) \in S_2 \times S_3 \subset R^{2m}, \tag{5}$$

где $x_0 \in S_0 \subset R^n$, $x_1 \in S_1 \subset R^n$, $\sigma_0 \in S_2 \subset R^m$, $\sigma_1 \in S_3 \subset R^m$; S_i, $i=\overline{0,3}$ – заданные множества.

Для системы (1) заданы фазовые ограничения вида

$$x(t) \in G_1(t) = \{x \in R^n \mid \omega(t) \le F(x(t),t) \le \lambda(t), \ \ t\in I\}, \tag{6}$$

$$(\sigma(t) \in G_2(t) = \{\sigma \in R^m \mid \varepsilon(t) \le P(\sigma(t),t) \le \zeta(t), \ \ t\in I\}, \tag{7}$$

где $F(x,t) = (F_1(x,t),\dots,F_{n1}(x,t))$, $P(\sigma,t) = (P_1(\sigma,t),\dots,P_{m1}(\sigma,t))$ – заданные функции, непрерывные по (x,t), (σ,t) соответственно.

Для системы (1) заданы также интегральные ограничения

$$g_j(x,\sigma,u,v) = \int_{t_0}^{t_1} f_{0j}(x(t),\sigma(t),u(t),v(t),x_0,x_1,\sigma_0,\sigma_1,t)\,dt \le c_j, \ \ j=\overline{1,p}, \tag{8}$$

$$g_j(x,\sigma,u,v) = \int_{t_0}^{t_1} f_{0j}(x(t),\sigma(t),u(t),v(t),x_0,x_1,\sigma_0,\sigma_1,t)\,dt = c_j, \ \ j=\overline{p+1,l}, \tag{9}$$

где $f_{0j}(x, \sigma, u, v, x_0, x_1, \sigma_0, \sigma_1, t)$, $j = \overline{1, l}$ – заданные функции, непрерывные по совокупности аргументов; c_j, $j = \overline{1, l}$ – заданные числа.

Требуется минимизировать функционал

$$J(x, \sigma, u, v) = \int_{t_0}^{t_1} F_0(x(t), \sigma(t), u(t), v(t), x_0, x_1, \sigma_0, \sigma_1, t)\, dt \to \inf \tag{10}$$

на множестве решений дифференциального уравнения (1) при ограничениях на управления (2), (3), краевых условиях (4), (5), фазовых ограничениях (6), (7) и интегральных ограничениях (8), (9). Здесь $F_0(x, \sigma, u, v, x_0, x_1, \sigma_0, \sigma_1, t)$ – заданная функция, непрерывная по совокупности аргументов.

Совокупность переменных $(u, v, x_0, x_1, \sigma_0, \sigma_1) \in \Xi = U \times V \times S_0 \times S_1 \times S_2 \times S_3$ называется допустимым управлением для задачи (1)-(9), если решение дифференциального уравнения (1), исходящее из точки $(x(t_0) = x_0,\ \sigma(t_0) = \sigma_0) \in S_0 \times S_2$ удовлетворяет условию $(x(t_1) = x_1,\ \sigma(t_1) = \sigma_1) \in S_1 \times S_3$, кроме того, справедливы включения $x(t; x_0, \sigma_0, u, v) \in G_1(t) \subset R^n$, $\sigma(t; x_0, \sigma_0, u, v) \in G_2(t) \subset R^m$ и вдоль решения системы (1) выполняются условия $g_j \le c_j$, $j = \overline{1, p}$; $g_j = c_j$, $j = \overline{p+1, l}$. Множество всех допустимых управлений обозначим через Σ, где $\Sigma \subset \Xi$.

Ставятся следующие задачи:

Задача 1. Найти необходимые и достаточные условия того, что множество Σ непусто.

Задача 2. Найти оптимальное управление $(u_*(t), v_*(t), x_0^*, x_1^*, \sigma_0^*, \sigma_1^*) \in \Sigma$, доставляющее минимум функционалу (10), и оптимальную траекторию $x_*(t) = x_*(t; x_0^*, \sigma_0^*, u_*,\ v_*)$, $\sigma_*(t) = \sigma_*(t; x_0^*, \sigma_0^*, u_*, v_*)$, $t \in I$, где $x_*(t) \in G_1(t)$, $\sigma_*(t) \in G_2(t)$, $g_j(x_*, \sigma_*, u_*, v_*) \le c_j$, $j = \overline{1, p}$; $g_j(x_*, \sigma_*, u_*, v_*) = c_j$, $j = \overline{p+1, l}$.

Выше сформулирована общая постановка задачи оптимального управления для фазовых систем. В частных случаях могут быть поставлены задачи оптимального управления с фиксированными концами траекторий, а также задачи, где отсутствуют фазовые или интегральные ограничения и др. Задачи управления движением маятниковых и роторных систем в механике, синхронных машин в электроэнергетике, навигационных систем в радиотехнике, вибрационного оборудования в технике сводятся к решению задач оптимального управления вида (1)-(10). В данной статье предлагается метод решения указанных задач на основе принципа погружения, изложенного в работах [1-5].

Преобразования. Вводя следующие векторы и матрицы

$$X = \begin{pmatrix} x \\ \sigma \end{pmatrix},\quad A_1 = \begin{pmatrix} A & O_{nm} \\ C & O_{mm} \end{pmatrix},\quad B_1 = \begin{pmatrix} B \\ R \end{pmatrix},\quad B_2 = \begin{pmatrix} D \\ O_{mr} \end{pmatrix},\quad B_3 = \begin{pmatrix} O_{ns} \\ E \end{pmatrix},$$

уравнение (1), ограничения (2)-(9) запишем в виде

$$\dot{X} = A_1 X + B_1 \varphi(\sigma, t) + B_2 u(t) + B_3 v(t),\quad t \in I, \tag{11}$$

$$X_0 = X(t_0) = (x_0, \sigma_0) \in S_0 \times S_2,\quad X_1 = X(t_1) = (x_1, \sigma_1) \in S_1 \times S_3, \tag{12}$$

$$u(t) \in U,\quad v(t) \in V,\quad P_1 X = x,\quad P_2 X = \sigma, \tag{13}$$

$$P_1 X \in G_1(t),\quad P_2 X \in G_2(t),\quad t \in I, \tag{14}$$

$$g_j(X, u, v) \le c_j,\quad j = \overline{1, p};\quad g_j(X, u, v) = c_j,\quad j = \overline{p+1, l}, \tag{15}$$

где $P_1 = (I_{nn},\ O_{nm})$, $P_2 = (O_{mn},\ I_{mm})$,

$$g_j(X,u,v) = \int_{t_0}^{t_1} f_{0j}(X(t),u(t),v(t),X_0,X_1,t)\,dt, \quad j = \overline{1,l}. \tag{16}$$

Функционал (10) запишется в виде

$$J(X,u,v) = \int_{t_0}^{t_1} F_0(X(t),u(t),v(t),X_0,X_1,t)\,dt \to \inf. \tag{17}$$

Вводя обозначения $\eta_j(t) = \int_{t_0}^{t} f_{0j}(X(\tau),u(\tau),v(\tau),X_0,X_1,\tau)\,d\tau, \quad j = \overline{1,l}, \quad t \in I$, интегральные ограничения (15), (16) можно представить в виде

$$\dot\eta(t) = f_0(X(t),u(t),v(t),X_0,X_1,t), \quad t \in I, \tag{18}$$

$$\begin{gathered}\eta(t_0) = 0, \quad \eta(t_1) = \bar c \in Q, \quad Q = \{\bar c = (\bar c_1,\dots,\bar c_p,\bar c_{p+1},\dots,\bar c_l) \mid \\ \bar c_j = c_j - d_j, \quad d_j \ge 0, \quad j = \overline{1,p}; \quad \bar c_j = c_j, \quad j = \overline{p+1,l}\},\end{gathered} \tag{19}$$

где $f_0 = (f_{01},\dots,f_{0l})$, $\eta = (\eta_1,\dots,\eta_l)$.

Введем далее следующие векторы и матрицы

$$Y = \begin{pmatrix} X \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \sigma \\ \eta \end{pmatrix}, \quad \bar A = \begin{pmatrix} A & O_{nm} & O_{nl} \\ C & O_{mm} & O_{ml} \\ O_{ln} & O_{lm} & O_{ll} \end{pmatrix}, \bar B_1 = \begin{pmatrix} B \\ R \\ O_{lm} \end{pmatrix}, \quad \bar B_2 = \begin{pmatrix} D \\ O_{mr} \\ O_{lr} \end{pmatrix}, \quad \bar B_3 = \begin{pmatrix} O_{ns} \\ E \\ O_{ls} \end{pmatrix},$$

$$\bar B_4 = \begin{pmatrix} O_{nl} \\ O_{ml} \\ I_{ll} \end{pmatrix}, \bar P_1 = (I_{nn},\ O_{nm},\ O_{nl}), \quad \bar P_2 = (O_{mn},\ I_{mm},\ O_{ml}), \quad \bar P_3 = (O_{ln},\ O_{lm},\ I_{ll}).$$

С использованием этих обозначений оптимизационную задачу (11)-(19) можно записать в виде: минимизировать функционал

$$J(Y,u,v) = \int_{t_0}^{t_1} F_0(\bar P_1 Y(t), \bar P_2 Y(t), u(t), v(t), \bar P_1 Y_0, \bar P_2 Y_0, \bar P_1 Y_1, \bar P_2 Y_1, t)\,dt \to \inf \tag{20}$$

при условиях

$$\begin{gathered}\dot Y = \bar A Y + \bar B_1 \varphi(\bar P_2 Y, t) + \bar B_2 u(t) + \bar B_3 v(t) + \\ + \bar B_4 f_0(\bar P_1 Y(t), \bar P_2 Y(t), u(t), v(t), \bar P_1 Y_0, \bar P_1 Y_1, t), \quad t \in I,\end{gathered} \tag{21}$$

с краевыми условиями

$$Y_0 = Y(t_0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ \sigma_0 \\ O_{l1} \end{pmatrix} \in S_0 \times S_2 \times O_{l1}, \quad Y_1 = Y(t_1) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \sigma_1 \\ \bar c \end{pmatrix} \in S_1 \times S_3 \times Q, \tag{22}$$

с фазовыми ограничениями

$$\bar P_1 Y(t) \in G_1(t), \quad \bar P_2 Y(t) \in G_2(t), \quad t \in I, \tag{23}$$

и с ограничениями на управления

$$u(t) \in U, \ \ v(t) \in V. \tag{24}$$

Таким образом, на первом этапе решения сформулированных выше задач уравнения движения приводятся к виду (21), где интегральные ограничения заменены соответствующими дифференциальными уравнениями с краевыми условиями.

Принцип погружения. На втором этапе решения задачи рассматривается линейная система управления следующего вида

$$\dot{y} = \bar{A}y + \bar{B}_1 w_1(t) + \bar{B}_2 w_2(t) + \bar{B}_3 w_3(t) + \bar{B}_4 w_4(t), \ \ t \in I \tag{25}$$

с краевыми условиями

$$y(t_0) = Y_0 \in S_0 \times S_2 \times O_{l1}, \ \ y(t_1) = Y_1 \in S_1 \times S_3 \times Q, \tag{26}$$

при управлениях

$$w_1(\cdot) \in L_2(I, R^m), \ \ w_2(\cdot) \in L_2(I, R^r), \ \ w_3(\cdot) \in L_2(I, R^s), \ \ w_4(\cdot) \in L_2(I, R^l). \tag{27}$$

Уравнение (25) получается на основе (22) путем замены $\varphi(\sigma, t)$, $u(t)$, $v(t)$, f_0 на $w_1(t)$, $w_2(t)$, $w_3(t)$, $w_4(t)$ соответственно.

Пусть $\bar{B} = (\bar{B}_1, \bar{B}_2, \bar{B}_3, \bar{B}_4)$, $w(t) = (w_1(t), w_2(t), w_3(t), w_4(t)) \in L_2(I, R^{m+r+s+l})$. Тогда соотношения (25)-(27) можно записать в виде

$$\dot{y} = \bar{A}y + \bar{B}w(t), \ \ t \in I, \tag{28}$$

$$y(t_0) = Y_0, \ \ y(t_1) = Y_1, \tag{29}$$

$$w(\cdot) \in L_2(I, R^{m+r+s+l}). \tag{30}$$

Найдем множество W всех управлений $w(t)$, $t \in I$, каждый элемент которого переводит траекторию системы (28) из начальной точки Y_0 в момент времени t_0 в конечное состояние Y_1 в момент времени t_1.

Рассмотрим методы построения множества W, основанные на теории управляемости, приведенной в [1-5]. По исходным данным $\bar{A}$, $\bar{B}$, Y_0, Y_1 определим следующие векторы и матрицы

$$\begin{aligned}
&a = e^{\bar{A}(t_0 - t_1)} Y_1 - Y_0, \ \ C(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} e^{\bar{A}(t_0 - t)} \bar{B} \bar{B}^* e^{-\bar{A}^*(t_0 - t)} dt, \\
&C(t_0, t) = \int_{t_0}^{t} e^{\bar{A}(t_0 - \tau)} \bar{B} \bar{B}^* e^{-\bar{A}^*(t_0 - \tau)} d\tau, \ \ C(t, t_1) = C(t_0, t_1) - C(t_0, t), \\
&\Lambda_1(t, Y_0, Y_1) = \bar{B}^* e^{\bar{A}^*(t_0 - t)} C^{-1}(t_0, t_1) a, \ \ N_1(t) = -\bar{B}^* e^{\bar{A}^*(t_0 - t)} C^{-1}(t_0, t_1) e^{\bar{A}(t_0 - t_1)}, \\
&\Lambda_2(t, Y_0, Y_1) = e^{-\bar{A}(t_0 - t)} C(t, t_1) C^{-1}(t_0, t_1) Y_0 + e^{-\bar{A}(t_0 - t)} C(t_0, t) C^{-1}(t_0, t_1) e^{\bar{A}(t_0 - t_1)} Y_1, \\
&N_2(t) = e^{-\bar{A}(t_0 - t)} C(t_0, t) C^{-1}(t_0, t_1) e^{\bar{A}(t_0 - t_1)}, \ \ t \in I.
\end{aligned}$$

Теорема 1 . *Пусть матрица $C(t_0, t_1)$ положительно определена. Тогда управление $w(\cdot) \in L_2(I, R^{m+r+s+l})$ переводит траекторию системы (28) из начальной точки $Y_0 \in S_0 \times S_2 \times O_{l1}$ в конечное состояние $Y_1 \in S_1 \times S_3 \times Q$ тогда и только тогда, когда*

$$w(t) \in W = \{w(\cdot) \in L_2(I, R^{m+r+s+l}) \mid w(t) = \mu(t) + \Lambda_1(t, Y_0, Y_1) + N_1(t) z(t_1, \mu), \ \ t \in I\}, \tag{31}$$

где $\mu(\cdot) \in L_2(I, R^{m+r+s+l})$ *– произвольная функция,* $z(t) = z(t,\mu)$, $t \in I$ *является решением дифференциального уравнения*

$$\dot{z} = \bar{A}z + \bar{B}\mu(t), \;\; z(t_0) = 0, \;\; t \in I. \tag{32}$$

Решение дифференциального уравнения (28), соответствующее управлению $w(t) \in W$ *(см. (31)), имеет вид*

$$y(t) = z(t) + \Lambda_2(t, Y_0, Y_1) + N_2(t)z(t_1,\mu), \;\; t \in I. \tag{33}$$

Как следует из теоремы 1, компоненты управления $w(t) = (w_1(t), w_2(t), w_3(t), w_4(t)) \in W$ определяются по формулам

$$w_i(t) = \mu_i(t) + \bar{B}_i^* e^{\bar{A}^*(t_0-t)}C^{-1}(t_0,t_1)a - \bar{B}_i^* e^{\bar{A}^*(t_0-t)}C^{-1}(t_0,t_1)e^{\bar{A}(t_0-t_1)}z(t_1,\mu), \tag{34}$$

где $i = \overline{1,4}$; $\mu_1(\cdot) \in L_2(I,R^m)$, $\mu_2(\cdot) \in L_2(I,R^r)$, $\mu_3(\cdot) \in L_2(I,R^s)$, $\mu_4(\cdot) \in L_2(I,R^l)$ – произвольные функции.

Функцию $y(t)$, $t \in I$, определяемую по формуле (33), представим в виде $y(t) = (y_1(t), y_2(t), y_3(t))$, где $y_1(t) = \bar{P}_1 y(t)$, $y_2(t) = \bar{P}_2 y(t)$, $y_3(t) = \bar{P}_3 y(t)$, $t \in I$. Рассмотрим следующую задачу оптимального управления: минимизировать функционал (см. (20)-(24))

$$\begin{aligned} &J(z,\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4,u,v,x_0,x_1,\sigma_0,\sigma_1,d) = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} F_0(\bar{P}_1 y(t), \bar{P}_2 y(t), u(t), v(t), x_0, x_1, \sigma_0, \sigma_1, t)\, dt \to \inf \end{aligned} \tag{35}$$

при условиях

$$\begin{aligned} &J_1(z,\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4,u,v,x_0,x_1,\sigma_0,\sigma_1,d,p,q) = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} [|w_1(t) - \varphi(\bar{P}_2 y(t),t)|^2 + |w_2(t) - u(t)|^2 + |w_3(t) - v(t)|^2 + \\ &+ |w_4(t) - f_0(\bar{P}_1 y(t), \bar{P}_2 y(t), u(t), v(t), x_0, x_1, \sigma_0, \sigma_1, t)|^2 + \\ &+ |p(t) - F(\bar{P}_1 y(t),t)|^2 + |q(t) - P(\bar{P}_2 y(t),t)|^2]\, dt = 0, \end{aligned} \tag{36}$$

$$\dot{z}(t) = \bar{A}z + \bar{B}_1\mu_1(t) + \bar{B}_2\mu_2(t) + \bar{B}_3\mu_3(t) + \bar{B}_4\mu_4(t), \;\; z(t_0) = 0, \;\; t \in I, \tag{37}$$

$$\mu_1(\cdot) \in L_2(I,R^m), \;\; \mu_2(\cdot) \in L_2(I,R^r), \;\; \mu_3(\cdot) \in L_2(I,R^s), \;\; \mu_4(\cdot) \in L_2(I,R^l), \tag{38}$$

$$p(t) \in V_1 = \{p(\cdot) \in L_2(I,R^{n_1} \mid \omega(t) \le p(t) \le \lambda(t), \;\; t \in I\}, \tag{39}$$

$$q(t) \in V_2 = \{q(\cdot) \in L_2(I,R^{m_1} \mid \varepsilon(t) \le q(t) \le \zeta(t), \;\; t \in I\}, \tag{40}$$

$$\begin{aligned} &u(t) \in U, \;\; v(t) \in V, \;\; x_0 \in S_0, \;\; x_1 \in S_1, \\ &\sigma_0 \in S_2, \;\; \sigma_1 \in S_3, \;\; d \in \Gamma = \{d \in R^p \mid d \ge 0\}. \end{aligned} \tag{41}$$

Теорема 2 . *Пусть матрица* $C(t_0,t_1)$ *положительно определена. Тогда исходная задача оптимального управления (1)-(10) равносильна задаче (35)-(41).*

Заметим, что в отличие от краевой задачи оптимального управления с фазовыми и интегральными ограничениями (1)-(10), задача (35)-(41) является задачей оптимального управления со свободным правым концом траекторий без фазовых и интегральных ограничений. Переход от исходной задачи (1)-(10) к равносильной задаче (35)-(41) назовем принципом погружения. Для полученной оптимизационной задачи (35)-(41) могут быть применены известные численные методы решения экстремальных задач в функциональных пространствах.

Существование допустимых управлений. Рассмотрим решение задачи 1. Для существования допустимого управления необходимо доказать, что краевая задача (1)-(9) имеет хотя бы одно решение, т.е. множество Σ непусто. Для решения задачи 1 рассмотрим следующую оптимизационную задачу: минимизировать функционал

$$\begin{aligned} &J_1(z,\mu,u,v,x_0,x_1,\sigma_0,\sigma_1,d,p,q) = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} F_1(z(t),\mu(t),u(t),v(t),x_0,x_1,\sigma_0,\sigma_1,d,p(t),q(t),t)\,dt \to \inf \end{aligned} \tag{42}$$

при условиях (37)-(41), где

$$F_1 = |w_1-\varphi|^2 + |w_2-u|^2 + |w_3-v|^2 + |w_4-f_0|^2 + |p-F|^2 + |q-P|^2. \tag{43}$$

Решение оптимизационной задачи вида (42),(37)-(41) приведено в [6].

Теорема 3 . *Пусть матрица $C(t_0,t_1)$ положительно определена. Для существования допустимого управления для задачи (1)-(10) необходимо и достаточно, чтобы значение $J_1(\bar z_*,\ \bar\mu_*,\ \bar u_*,\ \bar v_*,\ \bar x_0^*,\bar x_1^*,\bar\sigma_0^*,\bar\sigma_1^*,\bar d_*,\bar p_*,\bar q_*) = J_{1*} = 0$, где $(\bar\mu_*,\bar u_*,\bar v_*,\bar x_0^*,\bar x_1^*,\bar\sigma_0^*,\bar\sigma_1^*,\bar d_*,\bar p_*,\bar q_*)$ – оптимальное управление в задаче (42), (37)-(41).*

Иными словами, если $J_{1*}=0$, то краевая задача (1)-(9) имеет решение, т.е. существует допустимое управление для задачи (1)-(10); если $J_{1*}>0$, то краевая задача (1)-(9) не имеет решения, в этом случае задача оптимального управления (1)-(10) также не будет иметь решения.

Сформулированная задача оптимального управления (42), (37)-(41) может быть решена с использованием известных численных методов, в частности, с помощью метода проекции градиента. Пусть $J_{1*}=0$, т.е. допустимое управление существует. Вычислим значение функционала качества $J(\bar z_*,\bar\mu_*,\bar u_*,\bar v_*,\bar x_0^*,\bar x_1^*,\bar\sigma_0^*,\bar\sigma_1^*,\bar d_*,\bar p_*,\bar q_*)=\gamma_0$.

Построение оптимального управления. Введем переменную

$$x_{n+1}(t) = \int_{t_0}^{t} F_0(x(\tau),\sigma(\tau),u(\tau),v(\tau),x_0,x_1,\sigma_0,\sigma_1,\tau)\,d\tau, \quad t\in I.$$

Тогда

$$\dot x_{n+1}(t) = F_0(x(t),\sigma(t),u(t),v(t),x_0,x_1,\sigma_0,\sigma_1,t), \quad t\in I, \tag{44}$$

$$x_{n+1}(t_0)=0, \quad x_{n+1}(t_1)=\gamma, \tag{45}$$

где γ – некоторое число. Вводя следующие векторы и матрицы

$$\begin{aligned} &\Sigma = \begin{pmatrix} x \\ \eta \\ x_{n+1} \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} \bar A \\ O_{1,n+m+l} \end{pmatrix}, \quad B_{01} = \begin{pmatrix} \bar B_1 \\ O_{1m} \end{pmatrix}, \quad B_{02} = \begin{pmatrix} \bar B_2 \\ O_{1r} \end{pmatrix}, \\ &B_{03} = \begin{pmatrix} \bar B_3 \\ O_{1s} \end{pmatrix}, \quad B_{04} = \begin{pmatrix} \bar B_4 \\ O_{1l} \end{pmatrix}, \quad B_{05} = \begin{pmatrix} \bar O_{n+m+l,1} \\ 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

уравнения (21), (44) запишем в виде

$$\begin{aligned} &\dot\Sigma(t) = A_0\Sigma(t) + B_{01}\varphi(P_{20}\Sigma,t) + B_{02}u(t) + B_{03}v(t) + \\ &+B_{04}f_0(P_{10}\Sigma,P_{20}\Sigma,u(t),v(t),P_{10}\Sigma_0,P_{20}\Sigma_1,t) + \\ &+B_{05}F_0(P_{10}\Sigma,P_{20}\Sigma,u(t),v(t),P_{10}\Sigma_0,P_{20}\Sigma_1,t), \quad t\in I, \end{aligned} \tag{46}$$

где $P_{10} = (\bar{P}_1,\ 0)$, $P_{20} = (\bar{P}_2,\ 0)$. Краевые условия (22), (45) запишутся в виде

$$\Sigma_0 = \Sigma(t_0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ \sigma_0 \\ O_{l1} \\ 0 \end{pmatrix} \in S_0 \times S_2 \times O_{l1} \times O_{11}, \Sigma_1 = \Sigma(t_1) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \sigma_1 \\ \bar{c} \\ \gamma \end{pmatrix} \in S_1 \times S_3 \times Q \times R^1. \quad (47)$$

Фазовые ограничения (23) будут иметь вид

$$P_{10}\Sigma(t) \in G_1(t),\ \ P_{20}\Sigma(t) \in G_2(t),\ \ t \in I, \quad (48)$$

ограничения на управления $u(t)$, $v(t)$ определяются включениями (24).

Линейная управляемая система, соответствующая (46), (47), имеет вид

$$\dot{\xi} = A_0\xi + B_{01}w_{01}(t) + B_{02}w_{02}(t) + B_{03}w_{03}(t) + B_{04}w_{04}(t) + B_{05}w_{05}(t), \quad (49)$$

с краевыми условиями

$$\xi(t_0) = \Sigma_0,\ \ \xi(t_1) = \Sigma_1, \quad (50)$$

с управлениями

$$\begin{array}{l} w_{01}(\cdot) \in L_2(I, R^m),\ \ w_{02}(\cdot) \in L_2(I, R^r),\ \ w_{03}(\cdot) \in L_2(I, R^s), \\ w_{04}(\cdot) \in L_2(I, R^l),\ \ w_{05}(\cdot) \in L_2(I, R^1). \end{array} \quad (51)$$

Введем матрицу $B_0 = (B_{01}, B_{02}, B_{03}, B_{04}, B_{05})$ и вектор состояния $w_0(t) = (w_{01},\ w_{02},\ w_{03},$ $w_{04},\ w_{05})$ и запишем (49)-(51) в виде

$$\dot{\xi} = A_0\xi + B_0 w_0(t),\ \ t \in I, \quad (52)$$

$$\xi(t_0) = \Sigma_0,\ \ \xi(t_1) = \Sigma_1, w_0(\cdot) \in L_2(I, R^{m+r+s+l+1}). \quad (53)$$

Определим векторы и матрицы для (52),(53) следующим образом

$$\begin{array}{l} a_0 = e^{A_0(t_0-t_1)}\Sigma_1 - \Sigma_0,\ \ C_0(t_0,t_1) = \int\limits_{t_0}^{t_1} e^{A_0(t_0-t)}B_0B_0^* e^{A_0^*(t_0-t)}dt, \\ \Lambda_{10}(t,\Sigma_0,\Sigma_1) = B_0^* e^{A_0^*(t_0-t)}C_0^{-1}(t_0,t_1)a_0, \\ N_{10}(t) = -B_0^* e^{A_0^*(t_0-t)}C_0^{-1}(t_0,t_1)e^{A_0(t_0-t_1)}, \\ \Lambda_{20}(t,\Sigma_0,\Sigma_1) = e^{-A_0(t_0-t)}C_0(t,t_1)C_0^{-1}(t_0,t_1)\Sigma_0 + \\ +e^{-A_0(t_0-t)}C_0(t_0,t)C_0^{-1}(t_0,t_1)e^{A_0(t_0-t_1)}\Sigma_1, \\ N_{20}(t) = e^{-A_0^*(t_0-t)}C_0(t_0,t)C_0^{-1}(t_0,t_1)e^{A_0(t_0-t_1)},\ \ t \in I. \end{array}$$

Теорема 4 . *Пусть матрица $C_0(t_0,t_1)$ положительно определена. Тогда управление $w_0(\cdot) \in L_2(I, R^{m+r+s+l+1})$ переводит траекторию системы (52) из начальной точки Σ_0 в конечное состояние Σ_1 тогда и только тогда, когда*

$$\begin{array}{l} w_0(t) \in W_0 = \{w_0(\cdot) \in L_2(I, R^{m+r+s+l+1}\ | \\ w_0(t) = \mu_0(t) + \Lambda_{10}(t,\Sigma_0,\Sigma_1) + N_{10}(t)z_0(t_1,\mu_0),\ \ i \in I\}, \end{array} \quad (54)$$

где $\mu_0(\cdot) \in L_2(I, R^{m+r+s+l+1})$ – произвольная функция, $z_0(t) = z_0(t,\mu)$, $t \in I$ является решением дифференциального уравнения

$$\dot{z}_0 = A_0z_0 + B_0\mu_0(t),\ \ z_0(t_0) = 0,\ \ t \in I. \quad (55)$$

Решение дифференциального уравнения (52), соответствующее управлению $w_0(t) \in W_0$, имеет вид

$$\xi(t) = z_0(t) + \Lambda_{20}(t,\Sigma_0,\Sigma_1) + N_{20}(t)z_0(t_1,\mu_0),\ \ t \in I. \quad (56)$$

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления: минимизировать функционал

$$\begin{aligned}&J_2(z_0,\mu_0,u,v,x_0,x_1,\sigma_0,\sigma_1,d,p,q) =\\&=\int_{t_0}^{t_1}[|w_{01}(t)-\varphi(P_{20}\xi(t),t)|^2+|w_{02}(t)-u(t)|^2+|w_{03}(t)-v(t)|^2+\\&+|w_{04}(t)-f_0(P_{10}\xi(t),P_{20}\xi(t),u(t),v(t),x_0,x_1,\sigma_0,\sigma_1,t)|^2+\\&+w_{05}(t)-F_0(P_{10}\xi(t),P_{20}\xi(t),u(t),v(t),x_0,x_1,\sigma_0,\sigma_1,t)|^2+\\&+|p(t)-F(P_{10}\xi(t),t)|^2+|q(t)-P(P_{20}\xi(t),t)|^2dt\to\inf\end{aligned}\tag{57}$$

при условиях

$$\dot z_0(t)=A_0z_0+B_0\mu_0(t),\ \ z(t_0)=0,\ \ t\in I,\tag{58}$$

$$\begin{aligned}&\mu_0(t)=(\mu_{01}(t),\mu_{02}(t),\mu_{03}(t),\mu_{04}(t),\mu_{05}(t))\in\\&\in L_2(I,R^m)\times L_2(I,R^r)\times L_2(I,R^s)\times L_2(I,R^l)\times L_2(I,R^1),\end{aligned}\tag{59}$$

$$u(t)\in U,\ \ v(t)\in V,\ \ p(t)\in V_1,\ \ q(t)\in V_2,\tag{60}$$

$$x_0\in S_0,\ \ x_1\in S_1,\ \ \sigma_0\in S_2,\ \ \sigma_1\in S_3,\ \ d\in\Gamma,\tag{61}$$

где функция $\xi(t)$, $t\in I$ определяется по формуле (56); $w_0(t)=(w_{01}(t),\,w_{02}(t),\,w_{03}(t),\,w_{04}(t),$ $w_{05}(t))\in L_2(I,R^m)\times L_2(I,R^r)\times L_2(I,R^s)\times L_2(I,R^l)\times L_2(I,R^1)$ вычисляется по формуле (54).

Установим связь между решениями оптимизационной задачи (42), (37)-(41) и решениями оптимизационной задачи (57)-61). Пусть матрица $C(t_0,t_1)>0$, $(\bar\mu_*(t),\ \bar u_*(t),\ \bar v_*(t),\ \bar x_0^*,\ \bar x_1^*,$ $\bar\sigma_0^*,\ \bar\sigma_1^*,\ \bar d_*,\ \bar p_*(t),\ \bar q_*(t))$ – оптимальное управление для задачи (42),(37)-(41), соответствующее значению $J_{1*}=0$. Пусть $\bar w_*(t)=(\bar w_{1*}(t),\bar w_{2*}(t),\bar w_{3*}(t),\bar w_{4*}(t))=\bar\mu_*(t)+\Lambda_1(t,\bar x_0^*,\bar\sigma_0^*,\bar x_1^*,\bar\sigma_1^*,\bar c_*)+$ $N_1(t)z(t_1,\bar\mu_*)$, $t\in I$.

Теорема 5 . *Пусть матрица $C_0(t_0,t_1)>0$ и выполнены равенства $w_{01}(t)=\bar w_{1*}(t)$, $w_{02}(t)=$ $\bar w_{2*}(t)$, $w_{03}(t)=\bar w_{3*}(t)$, $w_{04}(t)=\bar w_{4*}(t)$, $t\in I$. Тогда, если*

$$w_{05}(t)=F_0(\bar x_*(t),\bar\sigma_*(t),\bar u_*(t),\bar v_*(t),\bar x_0^*,\bar x_1^*,\bar\sigma_0^*,\bar\sigma_1^*,t),\ \ t\in I,\tag{62}$$

то $w_0(t)=(\bar w_{1*}(t),\bar w_{2*}(t),\bar w_{3*}(t),\bar w_{4*}(t),\bar w_{05}(t))\in L_2(I,R^{m+r+s+l+1})$ – оптимальное управление для задачи (57)-(61), соответствующее значению $J_{2*}=0$, где $w_{05}(t)$, $t\in I$ определяется по формуле (62), причем $\int_{t_0}^{t_1}w_{05}(t)\,dt=\gamma_0$.

Обозначим через $F_2(z_0(t),z_0(t_1),\mu_0(t),u(t),v(t),x_0,x_1,\sigma_0,\sigma_1,d,p(t),q(t),t)$, $t\in I$ подинтегральную функцию в функционале (57). Тогда $J_2(z_0,\theta)=\int_{t_0}^{t_1}F_2(z_0(t),z_0(t_1),\theta,t)\,dt$, где $\theta=$ $(\mu_0,u,v,x_0,x_1,\sigma_0,\sigma_1,d,p,q)$ – управление.

Теорема 6 . *Пусть матрица $C_0(t_0,t_1)>0$, функция $F_2(z_0,\bar z_0,\theta,t)$, $\bar z_0=z_0(t_1)$ имеет непрерывные производные по совокупности аргументов $(z_0,\bar z_0,\theta,t)$ вместе с частными производными по переменным $(z_0,\bar z_0,\theta)$, удовлетворяющим условиям Липшица. Тогда функционал (57) при условиях (58) – (61) непрерывен и дифференцируем по Фреше в любой точке $\theta\in L_2(I,$ $R^{m+r+s+l+1})\times U\times V\times S_0\times S_1\times S_2\times S_3\times\Gamma\times V_1\times V_2=X\subset H=L_2(I,R^{m+r+s+l+1})\times L_2(I,R^r)\times$ $L_2(I,R^s)\times R^n\times R^n\times R^m\times R^m\times R^p\times L_2(I,R^{n_1})\times L_2(I,r^{m_1})$, причем его градиент $J_2'(\theta)=$*

$(J'_{21}(\theta),\, J'_{22}(\theta),\, J'_{23}(\theta),\, J'_{24}(\theta),\, J'_{25}(\theta),\, J'_{26}(\theta),\, J'_{27}(\theta),\, J'_{28}(\theta),\, J'_{29}(\theta),\, J'_{210}(\theta)) \in H$ *вычисляется по формулам*

$$
\begin{aligned}
&J'_{21}(\theta) = \frac{\partial F_2(z_0, \bar z_0, \theta, t)}{\partial \mu_0} - B_0^*\psi, \;\; J'_{22}(\theta) = \frac{\partial F_2(z_0, \bar z_0, \theta, t)}{\partial u},\\
&J'_{23}(\theta) = \frac{\partial F_2(z_0, \bar z_0, \theta, t)}{\partial v}, \;\; J'_{24}(\theta) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial F_2(z_0, \bar z_0, \theta, t)}{\partial x_0}\, dt,\\
&J'_{25}(\theta) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial F_2(z_0, \bar z_0, \theta, t)}{\partial x_1}\, dt, \;\; J'_{26}(\theta) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial F_2(z_0, \bar z_0, \theta, t)}{\partial \sigma_0}\, dt,\\
&J'_{27}(\theta) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial F_2(z_0, \bar z_0, \theta, t)}{\partial \sigma_1}\, dt, \;\; J'_{28}(\theta) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial F_2(z_0, \bar z_0, \theta, t)}{\partial d}\, dt,\\
&J'_{29}(\theta) = \frac{\partial F_2(z_0, \bar z_0, \theta, t)}{\partial p}, \;\; J'_{210}(\theta) = \frac{\partial F_2(z_0, \bar z_0, \theta, t)}{\partial q},
\end{aligned} \tag{63}
$$

где $\psi(t),\ t \in I$ *– решение сопряженной системы*

$$
\dot\psi = \frac{\partial F_0(z_0, \bar z_0, \theta, t)}{\partial z_0} - A_0^*\psi, \;\; \psi(t_1) = -\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial F_2(z_0, \bar z_0, \theta, t)}{\partial \bar z_0}. \tag{64}
$$

Кроме того, градиент функционала $J'_2(\theta)$ *удовлетворяет условию Липшица*

$$
\|J'_2(\theta_1) - J'_2(\theta_2)\| \le K\|\theta_1 - \theta_2\|, \;\; \forall \theta_1, \theta_2 \in X, \tag{65}
$$

где $K = const > 0$ *– постоянная Липшица.*

Доказательства аналогичных теорем приведены в [7]. На основе соотношений (63)-(65) строим последовательность $\{\theta_n\} \subset X$, где $\theta_n = (\mu_{0n},\, u_n,\, v_n,\, x_{0n},\, x_{1n},\, \sigma_{0n},\, \sigma_{1n},\, d_n,\, p_n,\, q_n) \in X$ по следующему алгоритму:

$$
\begin{aligned}
&\mu_{0,n+1} = \mu_{0n} - \alpha_n J'_{21}(\theta_n), \;\; u_{n+1} = P_U[u_n - \alpha_n J'_{22}(\theta_n)],\\
&v_{n+1} = P_V[v_n - \alpha_n J'_{23}(\theta_n)], \;\; x_{0,n+1} = P_{S_0}[x_{0n} - \alpha_n J'_{24}(\theta_n)],\\
&x_{1,n+1} = P_{S_1}[x_{1n} - \alpha_n J'_{25}(\theta_n)], \;\; \sigma_{0,n+1} = P_{S_2}[\sigma_{0n} - \alpha_n J'_{26}(\theta_n)],\\
&\sigma_{1,n+1} = P_{S_3}[\sigma_{1n} - \alpha_n J'_{27}(\theta_n)], \;\; d_{n+1} = P_\Gamma[d_n - \alpha_n J'_{28}(\theta_n)],\\
&p_{n+1} = P_{V_1}[p_n - \alpha_n J'_{29}(\theta_n)], \;\; q_{n+1} = P_{V_2}[q_n - \alpha_n J'_{210}(\theta_n)], \;\; n = 0, 1, 2, \ldots,
\end{aligned} \tag{66}
$$

где $\alpha_n \le 2/(K + 2\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ – постоянная Липшица из (65). В частности, при $\varepsilon = K/2 > 0$ значение $\alpha_n = 1/K > 0$.

Теорема 7 . *Пусть выполнены условия теоремы 6, множество* $\Lambda_0 = \{\theta \in X \mid J_2(\theta) \le J_2(\theta_0)\}$ *ограничено, функция* $F_2(z_0; \bar z_0, \theta, t)$ *выпукла по переменным* $(z_0, \bar z_0, \theta) \in R^{n+m+l+1} \times R^{n+m+l+1} \times R^{m+r+s+l+1}$. *Тогда*

1) множество Λ_0 *слабо бикомпактно;*

2) последовательность $\{\theta_n\} \subset X$*, определяемая по формуле (66), является минимизирующей, т.е.* $\lim_{n\to\infty} J_2(\theta_n) = \inf_{\theta \in X} J_2(\theta) = J_2(\theta_*)$, $\theta_* \in X_*$*;*

3) справедлива следующая оценка скорости сходимости $0 < J_2(\theta_n) - J_2(\theta_*) \le c_1/n$, $c_1 = const > 0$, $n = 1, 2, \ldots$*;*

4) множество $X_* = \{\theta_* \in X \mid J_2(\theta_*) = \min_{\theta \in X} J_2(\theta)\} \neq \emptyset$*;*

5) последовательность $\{\theta_n\} \subset X$ *слабо сходится к точке* $\theta_* \in X_*$*, т.е.* $\theta_n \xrightarrow{сл} \theta_*$ *при* $n \to \infty$*;*

6) если $J_{2*} = 0$, $\theta_n \xrightarrow{сл} \theta_*$ *при* $n \to \infty$*, где* $\theta_* = (\bar{\bar{\mu}}_{0*}, \bar{\bar{u}}_*, \bar{\bar{v}}_*, \bar{\bar{x}}_{0*}, \bar{\bar{x}}_{1*}, \bar{\bar{\sigma}}_{0*}, \bar{\bar{\sigma}}_{1*}, \bar{\bar{d}}_*, \bar{\bar{p}}_*, \bar{\bar{q}}_*) \in X_*$*, то задача (1)-(10) имеет решение, причем* $J(\bar{\bar{x}}_*, \bar{\bar{\sigma}}_*, \bar{\bar{u}}_*, \bar{\bar{v}}_*) = \int_{t_0}^{t_1} F_0(\bar{\bar{x}}_*(t), \bar{\bar{\sigma}}_*(t), \bar{\bar{u}}_*(t), \bar{\bar{v}}_*(t), \bar{\bar{x}}_{0*}(t), \bar{\bar{x}}_{1*}, \bar{\bar{\sigma}}_{0*}, \bar{\bar{\sigma}}_{1*}, t)\, dt = \gamma_1$*, где* $\bar{\bar{x}}_*(t)$, $\bar{\bar{\sigma}}_*(t)$, $t \in I$ *– решение дифференциального уравнения (1).*

Доказательства аналогичных теорем можно найти в [7].

На основе изложенных выше результатов предлагается следующий алгоритм решения задач 1, 2.

Этап 1. С помощью принципа погружения исходная краевая задача оптимального управления (1)-(10) приводится к задаче оптимального управления (35)-(41).

Этап 2. Определяется допустимое управление путем решения оптимизационной задачи (42),(37)-(41). Вычисляется значение γ_0 функционала (10), соответствующее допустимому управлению. В общем случае γ_0 не является минимальным значением функционала (10).

Этап 3. Применяя принцип погружения, получим задачу оптимального управления вида (57)-(61).

Этап 4. Решаем задачу (57)-(61) при различных значениях $x_{n+1}(t_1)$ с помощью минимизирующей последовательности (66). Полагаем, что функционал (10) ограничен снизу, т.е. $J \geq \bar{m}$. Тогда минимальное значение функционала находится между $\bar{m}$ и γ_0.

Выберем значение $x_{n+1}(t_1) = (\bar{m} + \gamma_0)/2 = \gamma_1$, $\bar{m} \leq \gamma_1 \leq \gamma_0$. Если при таком выборе $J_{2*} = 0$, то задаем значение $x_{n+1}(t_1) = \gamma_2$, где $\gamma_2 = (\bar{m} + \gamma_1)/2$ и т.д. Если $J_{2*} > 0$, то выберем значение $x_{n+1}(t_1) = \gamma_3$, где $\gamma_3 = (\gamma_1 + \gamma_0)/2$ и т.д.

Список литературы

[1] *Айсагалиев С.А.* Управлемость некоторой системы дифферениальных уравнений // Дифференциальные уравнения, 1991. – Т. 27, № 9. – С. 1475-1486.

[2] *Айсагалиев С.А., Айсагалиева С.С.* Конструктивный метод решения задачи управляемости для обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения, 1993. – Т. 29, № 4. – С. 555-567.

[3] *Айсагалиев С.А.* Краевые задачи обыкновенных дифференциальных уравнений // Доклады НАН РК, 1993. – № 2. – С. 3-8.

[4] *Айсагалиев С.А.* Оптимальное управление линейными системами с закрепленными концами траекторий и ограниченным управлением // Дифференциальные уравнения, 1996. – Т. 32, № 8. – С. 1011-1017.

[5] *Айсагалиев С.А.* Управляемость и оптимальное управление в нелинейных системах // Известия РАН. Теория и системы управления, 1993. – № 3. – С. 96-106.

[6] *Айсагалиев С.А., Айпанов Ш.А., Иманкул Т.Ш.* Управляемость динамических систем с цилиндрическим фазовым пространством // Вестник Национальной инженерной академии РК. – 2011. – № 1. – 9 с. (в печати).

[7] *Айсагалиев С.А.* Конструктивная теория краевых задач оптимального управления. – Алматы: Қазақ университеті, 2007. – 328 с.

Абсолютная устойчивость регулируемых систем с ограниченными ресурсами в простом критическом случае

С.А. Айсагалиев, Е.Б. Злобина, М.О. Кенжебаева
Институт математики и механики КазНУ им. аль-Фараби, Алматы
г.Алматы, ул.Масанчи, 39/47, e-mail: serikbai.aisagaliev@kaznu.kz

Аннотация

Предлагается новый эффективный алгебраический критерий абсолютной устойчивости положения равновесия нелинейных регулируемых систем в простом критическом случае, путем оценки несобственных интегралов вдоль решения системы.

Постановка задачи. Уравнение движения регулируемых систем в простом критическом случае имеет вид

$$\dot{x} = Ax + B\varphi(\sigma),\ \dot{\eta} = \varphi(\sigma),\ \sigma = Dx + E\eta,\ x(0) = x_0,\ \eta(0) = \eta_0, t \in I = [0, \infty), \tag{1}$$

где A, B, D, E — постоянные матрицы порядков $n{\times}n$, $n{\times}1$, $1{\times}n$, $1{\times}1$, соответственно, матрица A – гурвицева, т.е. $Re\lambda_j(A){<}0$, $j{=}\overline{1,n}$, $\lambda_j(A)$ $j{=}\overline{1,n}$ – собственные значения матрицы A.

Функция

$$\varphi(\sigma){\in}\Phi_0{=}\{\varphi(\sigma){\in}C(R^1, R^1)/0 < \varphi(\sigma)\sigma{<}\mu_0\sigma^2, \sigma \neq 0, \forall\sigma, \sigma{\in}R^1, \varphi(0) = 0, \}. \tag{2}$$

Из (2) следует, что $0 < \dfrac{\varphi(\sigma)}{\sigma} < \mu_0$, $\forall\sigma, \sigma \in R^1$. Пусть $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малое положительное число, такое, что

$$0 < \varepsilon \leq \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma} < \mu_0 + \varepsilon,\ \ \forall\sigma, \sigma \in R^1,$$

Представим функцию $\varphi(\sigma){\in}\Phi_0$ в виде суммы $\varphi(\sigma) = \varepsilon\sigma + \overline{\varphi}(\sigma)$, $\sigma \in R^1$, $\overline{\varphi}(0) = 0$. Тогда $0 < \frac{\overline{\varphi}(\sigma)}{\sigma} < \mu_0$ Для систем с ограниченными ресурсами функция

$$\begin{gathered}\overline{\varphi}(\sigma) \in \Phi_1 = \{\overline{\varphi}(\sigma) \in C(R^1, R^1)/0 < \overline{\varphi}(\sigma)\sigma < \mu_0\sigma^2, \sigma \neq 0, \forall\sigma, \sigma \in R^1,\\ \overline{\varphi}(0) = 0, |\overline{\varphi}(\sigma)| \leq \overline{\varphi}, 0 < \overline{\varphi} < \infty\}.\end{gathered} \tag{3}$$

Положение равновесия системы (1), (2) определяется из решения алгебраических уравнений $Ax_*{+}B\varphi(\sigma_*){=}0$, $\sigma_*{=}Dx_*{+}E\eta_*$. Так как матрица A — гурвицева , функция $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$ обращается в нуль только при $\sigma = 0$, то в случае, когда $E \neq 0$, система (1), (2) имеет единственное положение равновесия $(x_* = 0, \eta_* = 0)$, где $\sigma_* = 0$.

Положение равновесия $(x_* = 0, \eta_* = 0)$ системы (1), (2) называется абсолютно устойчивым, если матрицы A,

$$A_1(\mu) = \begin{pmatrix} A + B\mu D & B\mu E \\ \mu D & \mu E \end{pmatrix},\ \ 0 < \varepsilon \leq \mu < \overline{\mu}_0,\ \ \mu_0 \leq \overline{\mu}_0$$

— гурвицевы и для всех $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$ решение дифференциального уравнения (1) обладает свойством $\lim\limits_{t\to\infty} x(t; 0, x_0, \eta_0, \varphi) = 0$, $\lim\limits_{t\to\infty} \eta(t; 0, x_0, \eta_0, \varphi) = 0$ $\forall x_0$, η_0, $|x_0| < \infty$, $|\eta_0| < \infty$.

Критерием абсолютной устойчивости для системы (1), (2) называют алгебраические соотношения, связывающие матрицы (A, B, D, E, μ_0), при выполнении которых положение равновесия $(x_* = 0, \eta_* = 0)$ абсолютно устойчиво.

Ставится задача: Найти новый эффективный критерий абсолютной устойчивости положения равновесия $(x_* = 0, \eta_* = 0)$ системы (1), (2), (3), который выделяет в пространстве конструктивных параметров системы область шире, чем известные критерии.

Исследованию абсолютной устойчивости регулируемых систем в простом критическом случае посвящены много работ. Среди них следует отметить монографии [1-4]. В работах [5, 6] предложены алгебраические критерии абсолютной устойчивости на основе частотного критерия. Эти критерии могут быть применены и к исследованию системы с ограниченными ресурсами. Однако их проверка чрезвычайно сложна. Поэтому разработка новых эффективных методов исследования абсолютной устойчивости является актуальной.

В работах [7-12] приведены результаты исследования абсолютной устойчивости регулируемых систем на основе оценки несобственных интегралов вдоль решения системы. Данная работа является продолжением этих исследований и в ней использованы дополнительное сведение, которое позволяет получит более эффективный критерий.

Неособое преобразование. Одним из основных требований, предъявляемых критерию абсолютной устойчивости, является простота его проверки. Для этого необходимо неособое преобразование исходной системы (1).

Характеристический полином матрицы A имеет вид

$$\Delta(\lambda) = |\lambda I_n - A| = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \ldots + a_1\lambda + a_0,$$

где I_n — единичная матрица порядка $n \times n$, a_i, $i = \overline{0, n}$ — известные числа. Как следует из теоремы Гамильтона-Кэли $\Delta(A) = 0$. Тогда

$$A^n = -a_{n-1}A^{n-1} - a_{n-2}A^{n-2} - \ldots - a_1 A - a_0 I_n.$$

Лемма 1 . *Пусть вектор-строка $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$ такой, что*

$$\theta B = 0,\ \theta AB = 0, \theta A^2 B = 0, \ldots, \theta A^{n-2}B = 0, \theta A^{n-1}B \neq 0. \tag{4}$$

Тогда первое уравнение из (1) может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} &\dot{y}_1 = y_2, \dot{y}_2 = y_3, \ldots, \dot{y}_{n-1} = y_n, \\ &\dot{y}_n = -a_0 y_1 - a_1 y_2 - \ldots - a_{n-1} y_n + \theta A^{n-1} B\varphi(\sigma), \end{aligned} \tag{5}$$

где $y_1 = \theta x$, $y_2 = \theta A x$, $\ldots$, $y_n{=}\theta A^{n-1}x$, $x = x(t)$, $y_i = y_i(t)$, $i{=}\overline{1, n}$.

Доказательство. Умножая слева на θ систему $\dot{x}{=}Ax{+}B\varphi(\sigma)$, имеем $\theta\dot{x} = \theta Ax{+}\theta B\varphi(\sigma){=}$ $= \theta Ax$, в силу того, что $\theta B = 0$. Отсюда с учетом того, что $y_1 = \theta x$, $y_2 = \theta Ax$, получим $\dot{y}_1 = y_2$. Из $\theta\dot{x} = \theta Ax$ следует $\theta\ddot{x} = \theta A x = \theta A^2 x + \theta AB\varphi(\sigma) = \theta A^2 x$, где $\theta AB = 0$. Следовательно, $\dot{y}_2 = y_3$, где $y_3 = \theta A^2 x$ и так далее. В результате имеем $\dot{y}_{n-1} = y_n$, где $y_{n-1}{=}\theta A^{n-2}x$, $\theta A^{n-2}B{=}0$, $y_n{=}\theta A^{n-1}x$. Тогда $\dot{y}_n{=}\theta A^{n-1}\dot{x}{=}\theta A^{n-1}(Ax{+}B\varphi){=}\theta A^n x{+}\theta A^{n-1}B\varphi$, где $\theta A^n x = \theta(-a_{n-1}A^{n-1} - a_{n-2}A^{n-2}{-}\ldots{-}a_1 A - a_0 I_n)x{=}{-}a_0 y_1{-}a_1 y_2{-}\ldots{-}a_{n-1}y_n$, $\theta A^{n-1}B{\neq}0$. Лемма доказана.

Лемма 2 . *Пусть выполнены условия леммы 1, и пусть, кроме того, ранг матрицы*

$$R = \|\theta^*, A^*\theta^*, \ldots, A^{*n-1}\theta^*\| \tag{6}$$

порядка $n \times n$ равен n, где $(*)$ — знак транспонирования. Тогда:

1) существует вектор-строка $\beta = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1})$ такой, что

$$\sigma = \beta_0 y_1 + \beta_1 y_2 + \ldots + \beta_{n-1} y_n + E\eta; \tag{7}$$

2)существует вектор-строка $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ *такой, что*

$$\dot{\sigma} = \alpha_0 y_1 + \alpha_1 y_2 + \ldots + \alpha_{n-1} y_n + R\varphi(\sigma), \tag{8}$$

где $C = DA, R = DB + E$;

3) если $y_1 = \theta x = 0,\ y_2 = \theta A x = 0, \ldots,\ y_n = \theta A^{n-1} x = 0$, *то* $x = 0$.

Свойства решений. Для оценки несобственных интегралов вдоль решения системы (1) - (3), а также системы (5), (7) необходимо исследования свойства решения указанных систем.

Теорема 1 . *Пусть выполнены условия лемм 1,2, и пусть, кроме того, матрицы* A,

$$A_1(\varepsilon) = \begin{pmatrix} A + B\varepsilon D & B\varepsilon E \\ \varepsilon D & \varepsilon E \end{pmatrix}$$

— гурвицевы, функция $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$ *и функция* $\overline{\varphi}(\sigma) \in \Phi_1$.

Тогда верны оценки

$$|x(t)| \le l_1,\ |\dot{x}(t)| \le l_2,\ |\eta(t)| \le l_3,\ |\dot{\eta}(t)| \le l_4, t \in I, \tag{9}$$

$$|\sigma(t)| \le c_0,\ |\dot{\sigma}(t)| \le c_1\ \ \forall t, t \in I, \tag{10}$$

$$|y_i(t)| \le m_{i1},\ \ |\dot{y}_i(t)| \le m_{i2},\ \ i = \overline{1,n},\ t \in I, \tag{11}$$

где $l_i = const > 0,\ i = \overline{1,4},\ c_i = const > 0,\ i = 0,1,\ m_{i1} = const > 0,\ m_{i2} = const > 0,\ i = \overline{1,n}$. *Кроме того, функции* $x(t),\ y_i(t),\ i = \overline{1,n},\ \sigma(t),\ t \in I$ *— равномерно непрерывны.*

Теорема 2 . *Пусть выполнены условия лемм 1,2. Тогда вдоль решения системы* (5), (7) *верны тождества*

$$\varphi(\sigma(t)) = \kappa^{-1}[\omega(t) + a_0 y_1(t) + a_1 y_2(t) + \ldots + a_{n-1} y_n(t)], t \in I, \tag{12}$$

$$\sigma(t) = \beta_0 y_1(t) + \beta_1 y_2(t) + \ldots + \beta_{n-1} y_n(t) + E\eta(t), t \in I, \tag{13}$$

$$\dot{\sigma}(t) = \delta_0 \omega(t) + \delta_1 y_1(t) + \ldots + \delta_n y_n(t), t \in I, \tag{14}$$

где $\omega(t) = \dot{y}_n(t),\ t \in I, \kappa = \theta A^{n-1} B$.

Несобственные интегралы. На основе тождеств (12)-(14) и включения (2) могут быть получены оценки несобственных интегралов вдоль решения системы (5), (7), (8).

Теорема 3 . *Пусть выполнены условия лемм 1,2, матрицы* $A,\ A_1(\varepsilon)$ *гурвицевы, функция* $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$. *Тогда для любой величины* $\tau_1 > 0$ *вдоль решения системы (5), (7),* (2) *несобственный интеграл*

$$\begin{aligned} I_1 = \lim_{T\to\infty} \int_0^T [\varphi(\sigma(t))\tau_1\sigma(t) - \varphi(\sigma(t))\tau_1\mu_0^{-1}\varphi(\sigma(t))]dt = \lim_{T\to\infty} \int_0^T [N_0\omega^2(t) + \\ + N_1 y_1^2(t) + \ldots + N_n y_n^(t)]dt + \lim_{T\to\infty} \int_0^T \left[\frac{d}{dt}F_1(t)\right] dt + \lim_{T\to\infty} \int_0^T \left[\frac{d}{dt}S_1(t)\right] dt \ge 0, \end{aligned} \tag{15}$$

$$\left| \lim_{T\to\infty} \int_0^T \left[\frac{d}{dt}F_1(t)\right] dt \right| < \infty,\ \ \left| \lim_{T\to\infty} \int_0^T \left[\frac{d}{dt}S_1(t)\right] dt \right| < \infty, \tag{16}$$

где $S_1(t) = \dfrac{1}{2}E\tau_1\eta^2(t), F_1(t) = y^*(t)P_0 y(t), t \in I, y = (y_1, \ldots, y_n),\ \omega(t) = \dot{y}_n(t),\ y_i = y_i(t),\ t \in I$, $i = \overline{1,n}, P_0$ *— постоянная матрица порядка* $n \times n$.

Теорема 4 . *Пусть выполнены условия лемм 1, 2. Тогда для любых величин* $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ *вдоль решения системы* (5), (7), (2) *несобственный интеграл*

$$I_2 = \lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T [\gamma_0\omega(t) + \gamma_1 y_1(t) + \ldots + \gamma_n y_n(t)]^2 dt = \lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T [\Gamma_0\omega^2(t) + \Gamma_1 y_1^2(t) + \ldots + \Gamma_n y_n^2(t)]dt + \lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T \left[\frac{d}{dt}F_2(t)\right] dt \geq 0, \tag{17}$$

$$\left|\lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T \left[\frac{d}{dt}F_2(t)\right] dt\right| < \infty, \tag{18}$$

где $F_2(t) = y^*(t)P_1 y(t), t \in I, P_1$ *— постоянная матрица порядка* $n \times n$.

Теорема 5 . *Пусть выполнены условия лемм 1, 2. Тогда для любой величины* τ_2 *вдоль решения системы* (2), (5), (7) *несобственный интеграл*

$$I_3 = \lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T \varphi(\sigma(t))\tau_2\dot\sigma(t)dt = \lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T [M_0\omega^2(t) + M_1 y_1^2(t) + \ldots + M_n y_n^2(t)]dt + \lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T \left[\frac{d}{dt}F_3(t)\right] dt = -\int\limits_0^{\sigma(0)} \varphi(\sigma)\tau_2 d\sigma + \lim_{T\to\infty}\int\limits_0^{\sigma(T)} \varphi(\sigma)\tau_2 d\sigma < \infty, \tag{19}$$

$$\left|\lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T \left[\frac{d}{dt}F_3(t)\right] dt\right| < \infty, \tag{20}$$

где $F_3(t) = y^*(t)P_2 y(t), t \in I, P_2$ *— постоянная матрица порядка* $n \times n$.

Теорема 6 . *Пусть выполнены условия лемм 1,2, и пусть, кроме того, существует непрерывная по* σ *функция* $\psi(\sigma)$, $\sigma \in R^1$ *такая, что функция* $\sigma(t)$, $t \in I$ *является решением уравнения*

$$\dot\sigma(t) + W\varphi(\sigma) + \Sigma\psi(\sigma) = 0,$$

где W, Σ *— некоторые числа. Тогда вдоль решения системы* (2), (5), (7) *несобственный интеграл*

$$I_4 = \lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T \tau_3\psi(\sigma(t))\dot\sigma(t)dt = \lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T [L_0\omega^2(t) + L_1 y_1^2(t) + \ldots + L_n y_n^2(t)]dt + \lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T \left[\frac{d}{dt}F_4(t)\right] dt = \int\limits_{\sigma(0)}^{\sigma(T)} \tau_3\psi(\sigma)d\sigma < \infty, \tag{21}$$

$$\left|\lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T \left[\frac{d}{dt}F_4(t)\right] dt\right| = |\lim_{T\to\infty} F_4(T) - F_4(0)| < \infty. \tag{22}$$

Теорема 7 *Пусть выполнены условия леммы 1, 2. Тогда для любых величин h_0, h_1 вдоль решения системы (2), (5), (7) несобственный интеграл.*

$$I_5 = \lim_{T\to\infty}\int_0^T \tau_4\left[h_0\dot\sigma(t) + h_1\varphi(\sigma(t))\right]^2 = \lim_{T\to\infty}\int_0^T \Big[H_0\omega^2(t) + H_1y_1^2 + \dots$$
$$\dots + H_ny_n^2(t)\Big]dt + + \lim_{T\to\infty}\int_0^T \left[\frac{d}{dt}F_5(t)\right]dt \geq 0, \qquad (23)$$

$$|\lim_{T\to\infty}\int_0^T \left[\frac{d}{dt}F_5(t)\right]dt| < \infty, \qquad (24)$$

где функция $F_5(t) = y^*(t)P_4y(t), t \in I$, P_4 — постоянная матрица порядка $n\times n$.

Абсолютная устойчивость. На основе оценок (15), (16), (17), (18), (19) – (24) могут быть сформулированы критерий абсолютной устойчивости исходной системы (1) – (3).

Теорема 8 . *Пусть выполнены следующие условия:*

1) матрицы A, $A_1(\mu)$, $0 < \varepsilon \leq \mu \leq \bar\mu_0$, $\mu_0 \leq \bar\mu_0$ — гурвицевы, функция $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$, $\varphi(\sigma) = \varepsilon\sigma + \bar\varphi(\sigma)$, $\bar\varphi(\sigma) \in \Phi_1$;

2) существует вектор $\theta^* \in R^n$ такой, что $\theta B = 0$, $\theta AB = 0, \dots, \theta A^{n-2}B = 0$, $\kappa = \theta A^{n-1}B \neq 0$;

3) ранг матрицы $R = \|\theta^*, A^*\theta^*, \dots, A^{*n-1}\theta^*\|$ равен n;

4) выполнены равенства $N_i + \Gamma_i = M_i, i = \overline{0,n}, E \neq 0$.

Тогда положение равновесия системы (1), (2), (3) абсолютно устойчиво.

Теорема 9 . *Пусть выполнены условия 1) – 3) теоремы 8, и пусть, кроме того, верны равенства*

$$N_i + \Gamma_i = L_i, i = \overline{0,n}. \qquad (25)$$

Тогда положение равновесия системы (1) – (3) абсолютно устойчиво.

Теорема 10 .*Пусть выполнены условия 1) – 3) теоремы 8, и пусть, кроме того, верны равенства*

$$N_i + \Gamma_i = M_i + L_i, i = \overline{0,n}. \qquad (26)$$

Тогда положение равновесия системы (1) – (3) абсолютно устойчиво.

Теорема 11 . *Пусть выполнены условия 1) – 3) теоремы 8, и пусть, кроме того, верны равенства*

$$H_i + \Gamma_i = M_i + L_i, i = \overline{0,n}. \qquad (27)$$

функция $\varphi(\sigma)$ – равномерно непрерывна по σ. Тогда

$$\lim_{T\to\infty}\left[h_0\dot\sigma(t) + h_1\varphi(\sigma(t))\right] = 0. \qquad (28)$$

Если, кроме того, решение системы

$$h_0\dot z + h_1\varphi(z) = 0 \qquad (29)$$

абсолютной устойчиво, то положение равновесия системы (1) – (3) абсолютно устойчиво.

Теорема 12 .*Пусть выполнены условия 1) – 3) теоремы 8, и пусть, кроме того, верны равенства*

$$N_i + \Gamma_i + H_i = M_i + L_i, i = \overline{0, n}. \tag{30}$$

Тогда:

1) положение равновесия системы (1) – (3) абсолютно устойчиво;

2) если, кроме того, функция $\varphi(\sigma)$ – равномерно непрерывна, то

$$\lim_{T\to\infty} [h_0\dot{\sigma}(t) + h_1\varphi(\sigma(t))] = 0. \tag{31}$$

Пример. Уравнения движения системы имеет вид

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = x_1 - x_2, \\ &\dot{x}_2 = 3x_1 - 2x_2 + \varphi(\sigma), \\ &\dot{\eta} = \varphi(\sigma), \\ &\sigma = -3x_1 + x_2 - 1,5\eta, t \in I = [0, \infty) \end{aligned} \tag{32}$$

где функция $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$, $\varphi(\sigma) = \varepsilon\sigma + \bar{\varphi}(\sigma)$, $\bar{\varphi}(\sigma) \in \Phi_1$, $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малое число.

Для данного примера матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, D = (-3, 1), E = -1,5 \neq 0, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\Delta(\lambda) = det(\lambda I_2 - A) = \lambda^2 + \lambda + 1$, $\theta = (\theta_1, \theta_2)$, $\theta B = \theta_2 = 0$, $\theta AB = \kappa = -\theta_1 \neq 0$, где $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, то $\theta = (1, 0)\theta_1$, матрица A – гурвицева. Пусть $\theta_1 = 1$. Тогда $\kappa = -1$. Уравнения движения (5) запишется в виде

$$\dot{y}_1 = y_2, \dot{y}_2 = -y_1 + y_2 - \varphi(\sigma).$$

Векторы $\theta = (1, 0)$, $\theta A = (1; -1)$, матрица $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, ранг $R = 2$.

Легко убедиться в том, что

$$\sigma(t) = -2y_1 - y_2 - 1,5\eta, \dot{\sigma}(t) = -2y_2 - \omega - 1,5\varphi(\sigma), \omega = \dot{y}_2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} &\varphi(\sigma(t)) = -y_1(t) - y_2(t) - \omega(t), t \in I, \\ &\sigma(t) = -2y_1(t) - y_2(t) - 1,5\eta(t), t \in I, \\ &\dot{\sigma}(t) = -1,5y_1(t) - 0,5y_2(t) + 0,5\omega, t \in I. \end{aligned} \tag{33}$$

Матрица

$$A_1(\mu) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 - 3\mu & -2 + \mu & -1,5\mu \\ -3\mu & \mu & -1,5\mu \end{pmatrix}, 0 < \varepsilon \leq \mu < \bar{\mu}_0,\ \mu_0 \leq \bar{\mu}_0.$$

Характеристический полином матрицы $A_1(\mu)$ равен $\Delta_1(\lambda) = det(\lambda I_3 + A_1) = \lambda^3 + (0,5\mu + +1)\Delta^2 + (1 - 0,5\mu)\lambda + 1,5\mu$. Для гурвицевости матрицы $A_1(\mu)$ необходимо и достаточно, $0 < \varepsilon \leq \mu \leq \bar{\mu}_0$, где $\bar{\mu}_0 = -3 + \sqrt{13} = 0,60551275464$.

I. Проверим условия теоремы 8. Выше были приведены проверка условия 1)-2) теоремы 8. Для проверки условия 4) теоремы 8, необходимы вычисления несобственных интегралов

I_1, I_2, I_3.

а) вычислим значение несобственного интеграла I_1. Значение

$$I_1 = \lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T \left[\varphi(\sigma(t))\tau_1\sigma(t) - \varphi(\sigma(t))\tau_1\mu_0^{-1}\varphi(\sigma(t))\right]dt = \lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T \Big[N_0\omega^2(t)+ \\ +N_1y_1^2(t) + N_2y_2^2(t)\Big] + \lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T \left[\tfrac{d}{dt}F_1(t)\right]dt + \lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T \left[\tfrac{d}{dt}S_1(t)\right]dt, \tag{34}$$

где

$N_0 = -\tau_1\mu_0^{-1},\ N_1 = 2\tau_1 - \tau_1\mu_0^{-1},\ N_2 = -\tau_1 + \tau_1\mu_0^{-1}$,
$F_1(t) = \left(\frac{3}{2} - \tau_1\mu_0^{-1}\right)y_1^2(t) + \left(\frac{1}{2} - \tau_1\mu_0^{-1}\right)y_2^2(t) + \left(2 - 2\tau_1\mu_0^{-1}\right)y_1(t)y_2(t), t \in I$,
$S_1(t) = -0,75\eta^2(t), t \in I$.

б) Значение

$$I_2 = \lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T \left[\gamma_0\omega + \gamma_1y_1 + \gamma_2y_2\right]^2 dt = \lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T \Big[\Gamma_0\omega^2(t)+ \\ +\Gamma_1y_1^2(t) + \Gamma_2y_2^2\Big]dt + \lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T \left[\tfrac{d}{dt}F_2(t)\right]dt, \tag{35}$$

где

$\Gamma_0 = \gamma_0^2, \Gamma_1 = \gamma_1^2, \Gamma_2 = \gamma_2^2 - 2\gamma_0\gamma_1,\ F_2(t) = \gamma_1\gamma_2y_1^2(t) + 2\gamma_0\gamma_1y_1(t)y_2(t) + \gamma_0\gamma_1y_2^2(t),\ t \in I$.

в) Значение

$$I_3 = \lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T \varphi(\sigma(t))\tau_2\dot\sigma(t)dt = \lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T \Big[M_0\omega^2(t)+ \\ +M_1y_1^2(t) + M_2y_2^2\Big]dt + \lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T \left[\tfrac{d}{dt}F_3(t)\right]dt, \tag{36}$$

где

$M_0 = -0,5\tau_2, M_1 = -1,5\tau_2, M_1 = 2,5\tau_2$,
$F_3(t) = -\frac{1}{2}\tau_2y_1^2(t) - 2\tau_2y_1(t)y_2(t), t \in I$.

Несобственные интегралы (34)-(36) вычислены на основе тождества (33). Теперь равенства $N_i + \Gamma_i = M_i,\ i = 0, 1, 2$ запишутся так:

$$N_0 + \Gamma_0 = M_0 :\ \ -\tau_1\mu_0^{-1} + \gamma_0^2 = -0,5\tau_2 \tag{37}$$

$$N_1 + \Gamma_1 = M_1 :\ \ 2\tau_1 - \tau_1\mu_0^{-1} + \gamma_1^2 = -1,5\tau_2 \tag{38}$$

$$N_2 + \Gamma_2 = M_2 :\ \ -\tau_1 + \tau_1\mu_0^{-1} + \gamma_2^2 - 2\gamma_0\gamma_1 = 2,5\tau_2 \tag{39}$$

Из (37)-(39), получим

$$\mu_0 = \frac{2\gamma_0^2 - 4\gamma_1^2 - 2\gamma_2^2 + 4\gamma_0\gamma_1}{7\gamma_0^2 + \gamma_1^2 + 2\gamma_2^2 - 4\gamma_0\gamma_1},\ \ \tau_1 = \frac{\gamma_0^2 - 2\gamma_1^2 - \gamma_2^2 + 2\gamma_0\gamma_1}{3},\ \ \tau_2 = 2\tau_1\mu_0^{-1} - 2\gamma_0^2.$$

Рассмотрим два случая: $a)\tau_2 > 0$; $b)\tau_2 < 0$. В случае $\tau_2 > 0$ имеем следующее решение: $\gamma_1 = 0,\ \gamma_2 = 0,\ \tau_1 = \frac{\gamma_0^2}{3},\ \tau_2 = \frac{\gamma_0^2}{3}$, значение $\mu_0 = \frac{2}{7}$. Такое значение $\mu_0 = \frac{2}{7}$ можно получить применением частотного критерия.

В случае $\tau_2 < 0$, решением является: $\gamma_0 = 1,5\gamma_1$, $\gamma_2 = 0$, $\tau_1 = \frac{3,25}{3}\gamma_1^2$, $\tau_2 = -\frac{2,75}{3}\gamma_1^2$, значение $\mu_0 = \frac{3,25}{5,375} = 0,604651162790697 < \bar{\mu}_0 = 0,60551275464$.

II. Проверим условия теоремы 10. Выше были приведены проверка условия 1)-3) теоремы 8. Так как $\psi(\sigma) = -\Sigma^{-1}[\dot{\sigma} + W\varphi(\sigma)] = \alpha\dot{\sigma} + \gamma\varphi(\sigma)$, где $\alpha = -\Sigma^{-1}$, $\gamma = -\Sigma^{-1}W$. Тогда в силу тождества (33) имеем

$$\psi(\sigma(t)) = (0,5\alpha - \gamma)\omega(t) + (1,5\alpha - \gamma)y_1(t) + (-0,5\alpha - \gamma)y_2(t), t \in I.$$

Произведение

$$\psi(\sigma(t))\tau_3\dot{\sigma}(t) = L_0\omega^2(t) + L_1y_1^2(t) + L_2y_2^2(t) + \frac{d}{dt}F_4(t), t \in I,$$

где $L_0 = 0,25\bar{\alpha} - 0,5\bar{\gamma}$, $L_1 = 2,25\bar{\alpha} - 1,5\bar{\gamma}$, $L_2 = -1,25\bar{\alpha} + 2,5\bar{\gamma}$, $\bar{\alpha} = \alpha\tau_3$, $\bar{\gamma} = \tau_3\gamma$, $F_4(t) = -\frac{1}{4}(1,5\bar{\alpha} - \bar{\gamma})y_1^2(t) + \frac{1}{4}(-0,5\bar{\alpha} - \bar{\gamma})y_2^2(t) + (1,5\bar{\alpha} - 2\bar{\gamma})y_1(t)y_2(t), t \in I$.

Равенства $N_i + \Gamma_i = M_i + L_i, i = 0, 1, 2$ запишутся так:

$$-\tau_1\mu_0^{-1} + \gamma_0^2 = -0,5\tau_2 + 0,25\bar{\alpha} - 0,5\bar{\gamma}, \tag{40}$$

$$2\tau_1 - \tau_1\mu_0^{-1} + \gamma_1^2 = -1,5\tau_2 + 2,25\bar{\alpha} - 1,5\bar{\gamma}, \tag{41}$$

$$-\tau_1 + \tau_1\mu_0^{-1} + \gamma_2^2 - 2\gamma_0\gamma_1 = 2,5\tau_2 - 1,25\bar{\alpha} + 2,5\bar{\gamma}. \tag{42}$$

Из (40)-(42) имеем

$$\mu_0 = \frac{2\gamma_0^2 - 4\gamma_1^2 - 2\gamma_2^2 + 4\gamma_0\gamma_1 + 6\bar{\alpha}}{7\gamma_0^2 + \gamma_1^2 + 2\gamma_2^2 - 4\gamma_0\gamma_1 - 1,5\bar{\alpha}}, \tag{43}$$

$$\tau_1 = \frac{\gamma_0^2 - 2\gamma_1^2 - \gamma_2^2 + 2\gamma_0\gamma_1 + 3\bar{\alpha}}{3}, \tag{44}$$

$$\tau_1 = \frac{\gamma_0^2 + \gamma_1^2 + 2\gamma_2^2 - 4\gamma_0\gamma_1 - 3\bar{\gamma}}{3}, \tag{45}$$

Из (43), (45) при $\gamma_0 = 1,5\gamma_1$, $\gamma_2 = 0$, $\tau_2 = 0$, получим предельные значения $\mu_0 = = 0,605551275463989$, $\bar{\alpha} = 0,001400659140695\gamma_1^2$, $\bar{\gamma} = -\frac{11}{12}\gamma_1^2$, $\tau_1 = 1,084733992474028\gamma_1^2$.

Заметим, что предельное значение $\mu_0 = \bar{\mu}_0$. Следовательно, теорема 10 дает необходимые и достаточные условия абсолютной устойчивости системы (32), $\bar{\varphi}(\sigma) \in \Phi_1$

Заключение. Реальные системы автоматического управления имеют ограниченные ресурсы. Для систем с одним интегрирующим звеном уравнения движения имеет вид (1), где нелинейный коэффициент усиления исполнительного привода удовлетворяет условию $0 < \varepsilon \leq \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma} < \mu_0 + \varepsilon$, $\forall\sigma$, $\sigma \in R^1$, где $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малое число. Существование такого числа $\varepsilon > 0$ является необходимым условием в простом критическом случае. Включение $\bar{\varphi}(\sigma) \in \Phi_1$ соответствует тому, что обобщенные силы приводящие в движение объекта управления ограничены. Поэтому постановка задачи адекватно описывает реальные процессы в системах автоматического управления.

В статье предлагается метод отличный от известных методов исследования абсолютной устойчивости. На основе априорной оценки несобственных интегралов вдоль решения системы. Неособым преобразованием исходная система приводится к специальному виду, что позволяет представить подынтегральную функцию в виде суммы двух слагаемых, где первое слагаемое является квадратичной формой приведенной к диагональному виду, а второе слагаемое ограничено.

Такое представление подынтегральной функции, в конечном счете, приводит к легко проверяемых критериев абсолютной устойчивости. Как показано на примере, в частности, предлагаемый метод дает известные результаты. В общем случае, в пространстве конструктивных параметров системы выделяет области шире, нежели известные методы.

Список литературы

[1] *Лурье А.Н.* Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования.// -М.:-Л.: Гостехиздат, 1951, 216 с.

[2] *Айзерман М.А., Гантмахер Ф.Р.* Абсолютная устойчивость регулируемых систем.// - М.: Изд-во АН СССР, 1963, 270 с.

[3] *Якубович В.А.* Решение некоторых матричных неравенств, встречающихся в теории автоматического регулирования.// - ДАН СССР, 1962, т.143, №6, с.131-136.

[4] *Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия.
- М.: Наука, 1978, 400 с.

[5] *Айсагалиев С.А.* Об определении области абсолютной устойчивости вынужденных движений в нелинейных системах. – Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, 1969, №5, с.38-48.

[6] *Айсагалиев С.А.* Об определении области абсолютной устойчивости системы управления снесколькими нелинейными элементами. – АН СССР, Автоматика и телемеханика, 1970, №12, с.83-94.

[7] *Айсагалиев С.А.* К теории абсолютной устойчивость релгулируемых систем. // – Дифференциальные уравнения, Минск-Москва, 1994, т.30, №5, с.748-757.

[8] *Айсагалиев С.А.* К теории управляемости регулируемых и фазовых систем. АН СССР, Автоматика и телемеханика, 1987, №5, с.3-10.

[9] *Айсагалиев С.А.* Обобщенные теоремы об абсолютной устойчивости регулируемых систем. – Доклады НАН РК, 1992, №2, с.4-9.

[10] *Айсагалиев С.А., Злобина Е.Б.* Общая теория об абсолютной устойчивости регулируемых систем. – Вестник НАН РК, 1999, №3, с.5-10.

[11] *Айсагалиев С.А.* Теория регулируемых систем. - Алматы: Қазақ университетi, 2000. -234 с.

[12] *Айсагалиев С.А., Букша В.А.* Расширение фазового пространства в теории абослютной устойчивости. – Вестник КазНУ, сер. математика, механика и информатика, 2006, №3(50). - с.8499.

Абсолютная устойчивость регулируемых систем с ограниченными ресурсами в критическом случае

С.А. Айсагалиев, Д.Г. Шаназаров
Институт математики и механики КазНУ им. аль-Фараби, Алматы
г.Алматы, ул.Масанчи, 39/47, e-mail: serikbai.aisagaliev@kaznu.kz

Аннотация

Разработан новый эффективный алгебраический критерий абсолютной устойчивости положения равновесия нелинейных систем автоматического управления с ограниченными ресурсами в критическом случае, путем оценки несобственных интегралов вдоль решения системы.

Введение. Исследованию абсолютной устойчивости регулируемых систем в основном и критических случаях посвящены много работ. Среди них следует отметить монографии [1-4]. Существуют два подхода к исследованию абсолютной устойчивости регулиреумых систем: метод А.И. Лурье [2], метод В.М. Попова [3]. Связь между этими методами установлена в работах В.А. Якубовича и его учеников [4]. Разрешающие уравнения А.И. Лурье были получены на основе второго метода Ляпунова путем выбора функции Ляпунова в виде "квадратичная форма плюс интеграл от нелинейностей". В конечном счете, метод А.И. Лурье сводится к разрешимости матричных неравенств. Естественно, для решения прикладных задач такой подход довольно сложен.

Частотный критерий абсолютной устоичивости В.М. Попова является необходимым и достаточным условием разрешимости матричных неравенств А.И. Лурье, более того, для одномерных систем частотный критерий допускает геометрическую интерпретацию, что позволяет легко проверить разрешимость матричных неравенств при фиксированных значениях конструктивных параметров системы. Однако, для многомерных систем частотный критерий не имеет геометрическую интерпретацию, как в случае одномерных, и его проверка в этих случаях является достаточно сложной задачей. Сложность проверки частотных критериев, необходимость выделения области абсолютной устойчивости в пространстве конструктивных параметров системы привели к созданию алгебраических критериев абсолютной устойчивости путем сведения частотных критериев к проверке положительности полиномов на положительной полуоси [5, 6].

Заметим, что частотный критерий был получен на основе априорных оценок несобственного интеграла. В данной работе также используются априорные оценки несобственных интегралов, однако конечный результат сформулирован в виде $(n+1)$ равенств не зависящих от параметров изменяющихся в пределах от 0 до ∞.

В работах [7-10] приведены результаты исследования абсолютной устойчивости регулируемых систем на основе оценок несобственных интегралов вдоль решения системы. Данная работа является продолжением этих исследований.

Постановка задачи. Уравнение движения нелинейных систем автоматического управления в критическом случае имеет вид

$$\begin{aligned} &\dot{x} = Ax + B\varphi(\sigma),\ \frac{d\xi}{dt} = \eta,\ \frac{d\eta}{dt} = \varphi(\sigma),\ \sigma = Dx + E\eta + F\xi, \\ &x(0) = x_0,\ \xi(0) = \xi_0,\ \eta(0) = \eta_0, t \in I = [0, \infty), \end{aligned} \tag{1}$$

где A, B, D, E, F – постоянные матрицы порядков $n{\times}n$, $n{\times}1$, $1{\times}n$, $1{\times}1$, $1{\times}1$, соответственно, матрица A – гурвицева, т.е. $Re\lambda_j(A){<}0$, $j{=}\overline{1,n}$, $\lambda_j(A)$ – собственные значения матрицы A.

Функция

$$\begin{aligned}\varphi(\sigma)\in\Phi_0=\{\varphi(\sigma)\in C(R^1,R^1)/\varphi(\sigma)=\varepsilon\sigma+\overline{\varphi}(\sigma), 0\le\overline{\varphi}(\sigma)\sigma\le\mu_0\sigma^2,\\ \overline{\varphi}(0)=0, |\overline{\varphi}(\sigma)|\le\overline{\varphi}_*, 0<\overline{\varphi}_*<\infty, \forall\sigma,\sigma\in R^1\}.\end{aligned} \quad (2)$$

где $\varepsilon>0$ – сколь угодно малое число.

Положение равновесия системы (1), (2) определяется из решения алгебраических уравнений

$$Ax_*+B\varphi(\sigma_*)=0, \eta_*=0, \varphi(\sigma_*)=0, \sigma_*=Dx_*+E\eta_*+F\xi_*.$$

Так как матрица A – гурвицева, $\varphi(\sigma_*)=0$ только при $\sigma_*=0$, то система (1), (2) имеет единственное положение равновесия $(x_*=0, \xi_*=0, \eta_*=0)$, при $F\neq 0$.

Положение равновесия $(x_*=0, \xi_*=0, \eta_*=0)$ системы (1), (2) называется абсолютно устойчивым, если матрицы A,

$$A_1(\mu)=\begin{pmatrix}A+B\mu D & B\mu F & B\mu E\\ 0 & 0 & 1\\ \mu D & \mu F & \mu E\end{pmatrix}, \ 0<\varepsilon\le\mu<\overline{\mu}_0, \ \mu_0\le\overline{\mu}_0$$

— гурвицевы (асимптотическая устойчивость в малом) и для всех $\varphi(\sigma)\in\Phi_0$ решение дифференциального уравнения (1) обладает свойством $\lim\limits_{t\to\infty}x(t;0,x_0,\xi_0,\eta_0,\varphi)=x_*=0$, $\lim\limits_{t\to\infty}\xi(t;0,x_0,\eta_0,\xi_0,\varphi)=\xi_*=0$, $\lim\limits_{t\to\infty}\eta(t;0,x_0,\eta_0,\xi_0,\varphi)=\eta_*=0$, для любых x_0, ξ_0, η_0, $|x_0|<\infty$, $|\xi_0|<\infty$, $|\eta_0|<\infty$.

Критерием абсолютной устойчивости для системы (1), (2) называют алгебраические соотношения, связывающие матрицы (A,B,D,E,F,μ_0), при выполнении которых положение равновесия $(x_*=0, \xi_*=0, \eta_*=0)$ абсолютно устойчиво.

Ставится задача: Найти новый эффективный критерий абсолютной устойчивости положения равновесия системы (1), (2), на основе оценки несобственных интегралов вдоль решения системы.

Неособое преобразование. Одним из основных требований, предъявляемых к критерию абсолютной устойчивости, является простота его проверки. Одним из путей достижения указанной цели необходимость неособого преобразования исходной системы (1).

Как следует из включения (2) уравнение движения (1) может быть представлено в виде

$$\dot z=A_1z+B_1\overline{\varphi}(\sigma), \sigma=Sz, z(0)=z_0, t\in I=[0,\infty) \quad (3)$$

где

$$z=\begin{pmatrix}x\\ \xi\\ \eta\end{pmatrix}, A_1=A_1(\varepsilon)=\begin{pmatrix}A+B\varepsilon D & B\varepsilon F & B\varepsilon E\\ 0 & 0 & 1\\ \varepsilon D & \varepsilon F & \varepsilon E\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}B\\ 0\\ 1\end{pmatrix}, S=\begin{pmatrix}D, F, E\end{pmatrix},$$

$\varepsilon>0$ – сколь угодно малое число, функция

$$\begin{aligned}\overline{\varphi}(\sigma)\in\Phi_1=\{\overline{\varphi}(\sigma)\in C(R^1,R^1)/, 0\le\overline{\varphi}(\sigma)\sigma\le\mu_0\sigma^2, \overline{\varphi}(0)=0,\\ |\overline{\varphi}(\sigma)|\le\overline{\varphi}_*, 0<\overline{\varphi}_*<\infty, \forall\sigma,\sigma\in R^1\},\end{aligned} \quad (4)$$

матрица $A_1=A_1(\varepsilon)$ порядка $(n+2)\times(n+2)$ – гурвицева.

Характеристический полином матрицы A_1 имеет вид

$$\Delta(\lambda)=|\lambda I_{n+2}-A_1|=\lambda^{n+2}+a_{n+1}\lambda^{n+1}+a_n\lambda^n+\ldots+a_1\lambda+a_0,$$

где I_{n+2} — единичная матрица порядка $(n+2)\times(n+2$. Как следует из теоремы Гамильтона-Кэли матрица $\Delta(A_1)=0$. Тогда

$$A_1^{n+2}=-a_{n+1}A_1^{n+1}-a_nA_1^n-\ldots-a_1A_1-a_0I_{n+2}.$$

где $a_i=a_i(\varepsilon), i=\overline{0,n+1}$.

Лемма 1 . *Пусть вектор-строка* $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n, \theta_{n+1}, \theta_{n+2}) \in R^{n+2}$ *такой, что*

$$\theta B_1 = 0,\ \theta A_1 B_1 = 0, \ldots, \theta A_1^n B_1 = 0, \theta A_1^{n+1} B_1 \neq 0. \tag{5}$$

Тогда уравнение (3) может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} &\dot{y}_1 = y_2, \dot{y}_2 = y_3, \ldots, \dot{y}_{n+1} = y_{n+2}, \\ &\dot{y}_{n+2} = -a_0 y_1 - a_1 y_2 - \ldots - a_{n+1} y_{n+2} + \theta A_1^{n+1} B_1 \overline{\varphi}(\sigma), \end{aligned} \tag{6}$$

где $y_1 = \theta z,\ y_2 = \theta A_1 z,\ \ldots,\ y_{n+2} = \theta A_1^{n+1} z,\ z = z(t),\ y_i = y_i(t),\ i = \overline{1, n+2}.$

Лемма 2 . *Пусть выполнены условия леммы 1, и пусть, кроме того, ранг матрицы*

$$R = \|\theta^*, A_1^* \theta^*, \ldots, A_1^{*n+1} \theta^*\| \tag{7}$$

порядка $(n+2) \times (n+2)$ *равен* $(n+2)$, *где* $(*)$ — *знак транспонирования. Тогда:*

1) существует вектор-строка $\beta = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{n+1}) \in R^{n+2}$ *такой, что*

$$\sigma = \beta_0 y_1 + \beta_1 y_2 + \ldots + \beta_n y_{n+1} + \beta_{n+1} y_{n+2}; \tag{8}$$

2) если $y_1 = \theta z = 0,\ y_2 = \theta A_1 z = 0, \ldots,\ y_{n+2} = \theta A_1^{n+1} z = 0,$ *то* $z = 0.$

Свойства решений. Можно показать, что решение системы (1), (2), а также системы (6), (8), (4) ограничены. Эти свойства решений могут быть использованы при оценке несобственных интегралов.

Теорема 1 . *Пусть матрицы* A, $A_1(\varepsilon)$ – *гурвицевы, т.е.* $Re\lambda_j(A_1) < 0,\ j = \overline{1, n+2}$, *функция* $\overline{\varphi}(\sigma) \in \Phi_1$, *и пусть, кроме того, выполнены равенства (5) и ранг* $R = n+2$. *Тогда верны оценки*

$$|z(t)| \leq c_0, \quad |\dot{z}(t)| \leq c_1, \quad t \in I = [0, \infty), \quad c_0, c_1 = const < \infty, \tag{9}$$

$$|y_i(t)| \leq m_{i1}, \quad |\dot{y}_i(t)| \leq m_{i2}, \quad i = \overline{1, n+2},\ t \in I, \tag{10}$$

$$|\sigma(t)| \leq c_2,\ |\dot{\sigma}(t)| \leq c_3\ \ \forall t, t \in I, \tag{11}$$

где $m_{i1} = const < \infty, m_{i2} = const < \infty,\ c_i = const < \infty,\ i = 0, 1, 2, 3.$

Кроме того, функции $z(t)$, $y_i(t)$, $i = \overline{1, n+2}$, $\sigma(t)$, $t \in I$ — *равномерно непрерывны.*

Теорема 2 . *Пусть выполнены условия лемм 1, 2, величина* $\kappa = \theta A_1^{n+1} B_1 \neq 0$. *Тогда вдоль решения системы (6), (8), (4) верны тождества:*

$$\overline{\varphi}(\sigma(t)) = \kappa^{-1} \omega(t) + \kappa^{-1} a_0 y_1(t) + \ldots + \kappa^{-1} a_{n+1} y_{n+2}(t),\ t \in I, \tag{12}$$

$$\sigma(t) = \beta_0 y_1(t) + \beta_1 y_2(t) + \ldots + \beta_n y_{n+1}(t) + \beta_{n+1} y_{n+2}(t),\ t \in I, \tag{13}$$

$$\dot{\sigma}(t) = \beta_0 y_2(t) + \beta_1 y_3(t) + \ldots + \beta_n y_{n+2}(t) + \beta_{n+1} \omega(t),\ t \in I, \tag{14}$$

где $\omega = \omega(t) = \dot{y}_{n+2}(t),\ t \in I.$

Несобственные интегралы. На основе тождеств (12)-(14) и включения (4) могут быть получены оценки несобственных интегралов вдоль решения системы (6), (8), (4). Заметим, что при выполнении условия лемм 1, 2 система (1), (2) равносильна (6), (8), (4).

Теорема 3 . *Пусть выполнены условия лемм 1, 2, матрицы* $A, A_1(\varepsilon)$ *– гурвицевы, функция* $\overline{\varphi}(\sigma) \in \Phi_1$. *Тогда для любой величины* $\tau_1 > 0$ *вдоль решения системы (6), (8), (4) несобственный интеграл*

$$\begin{aligned} I_1 = \lim_{T\to\infty}\int_0^T [\overline{\varphi}(\sigma(t))\tau_1\sigma(t) - \overline{\varphi}(\sigma(t))\tau_1\mu_0^{-1}\overline{\varphi}(\sigma(t))]dt = \\ = \lim_{T\to\infty}\int_0^T [N_0\omega^2(t) + N_1y_1^2(t) + \ldots + N_{n+2}y_{n+2}^2(t)]dt + \lim_{T\to\infty}\int_0^T \left[\frac{d}{dt}F_1(t)\right]dt \geq 0, \end{aligned} \tag{15}$$

$$|\lim_{T\to\infty}\int_0^T \left[\frac{d}{dt}F_1(t)\right]dt| < \infty, \tag{16}$$

где $F_1(t) = y^*(t)P_0y(t), \omega(t) = \dot{y}_{n+2}, y(t) = (y_1(t), \ldots, y_{n+2}(t)), P_0$ *– постоянная матрица порядка* $(n+2)\times(n+2)$.

Теорема 4 . *Пусть выполнены условия лемм 1, 2, матрицы* $A, A_1(\varepsilon)$ *– гурвицевы, функция* $\overline{\varphi}(\sigma) \in \Phi_1$. *Тогда для любых величин* $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{n+2}$ *вдоль решения системы (6), (8), (4) несобственный интеграл*

$$\begin{aligned} I_2 = \lim_{T\to\infty}\int_0^T [\gamma_0\omega(t) + \gamma_1y_1(t) + \ldots + \gamma_{n+2}y_{n+2}(t)]^2dt = \lim_{T\to\infty}\int_0^T [\Gamma_0\omega^2(t) + \\ +\Gamma_1y_1^2(t) + \ldots + \Gamma_{n+2}y_{n+2}^2(t)]dt + \lim_{T\to\infty}\int_0^T \left[\frac{d}{dt}F_2(t)\right]dt = 0 \end{aligned} \tag{17}$$

$$|\lim_{T\to\infty}\int_0^T \left[\frac{d}{dt}F_2(t)\right]dt| < \infty. \tag{18}$$

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 3.

Теорема 5 . *Пусть выполнены условия лемм 1, 2, матрицы* $A, A_1(\varepsilon)$ *– гурвицевы, функция* $\overline{\varphi}(\sigma) \in \Phi_1$. *Тогда для любой величины* τ_2 *вдоль решения системы (6), (8), (4) несобственный интеграл*

$$\begin{aligned} I_3 = \lim_{T\to\infty}\int_0^T \overline{\varphi}(\sigma(t))\tau_2\dot{\sigma}(t)dt = \lim_{T\to\infty}\int_0^T [M_0\omega^2(t) + M_1y_1^2(t) + \ldots + M_{n+2}y_{n+2}^2(t)]dt + \\ + \lim_{T\to\infty}\int_0^T \left[\frac{d}{dt}F_3(t)\right]dt = -\int_0^{\sigma(0)} \overline{\varphi}(\sigma)\tau_2d\sigma + \lim_{T\to\infty}\int_0^{\sigma(T)} \overline{\varphi}(\sigma)\tau_2d\sigma < \infty. \end{aligned} \tag{19}$$

$$|\lim_{T\to\infty}\int_0^T \left[\frac{d}{dt}F_3(t)\right]dt| < \infty. \tag{20}$$

Теорема 6 . *Пусть выполнены условия лемм 1, 2, матрицы $A, A_1(\varepsilon)$ – гурвицевы, функция $\overline{\varphi}(\sigma) \in \Phi_1$. Тогда для любого числа τ_3 вдоль решения системы (6), (8), (4) несобственный интеграл*

$$I_4 = \lim_{T\to\infty}\int_0^T \dot\sigma(t)\tau_3\dot\sigma(t)dt = \lim_{T\to\infty}\int_0^T [P_0\omega^2(t) + P_1y_1^2(t) + \ldots + P_{n+2}y_{n+2}^2(t)]dt+$$
$$+\lim_{T\to\infty}\int_0^T \left[\frac{d}{dt}F_4(t)\right]dt = \lim_{T\to\infty}\int_{\sigma(0)}^{\sigma(T)} \tau_3\dot\sigma d\sigma \le \lim_{T\to\infty}\int_{\sigma(0)}^{\sigma(T)} |\tau_3\dot\sigma| d\sigma < \infty, \tag{21}$$

$$|\lim_{T\to\infty}\int_0^T \left[\frac{d}{dt}F_4(t)\right]dt| < \infty. \tag{22}$$

Уравнения движения (6), (8) могут быть представлены в векторной форме

$$\dot y = Cy + K\overline{\varphi}(\sigma), \sigma = Qy, y(0) = y_0, t \in I = [0,\infty), \tag{23}$$

где

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{n+1} \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \theta A_1^{n+1}B_1 \end{pmatrix}, Q^* = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Представляет интерес частный случай, когда вектор $Q^* \in R^{n+2}$ является собственным вектором матрицы C^* соответствующий собственному значению λ_*. В этом случае $C^*Q^* = \lambda_* Q^*$, производная $\dot\sigma = Q\dot y = Q[Cy + K\overline{\varphi}(\sigma)] = QCy + QK\overline{\varphi}(\sigma) = \lambda Qy + QK\overline{\varphi}(\sigma) = \lambda\sigma + +QK\overline{\varphi}(\sigma)$. Следовательно, верно тождество $\dot\sigma(t) - \lambda\sigma(t) - QK\overline{\varphi}(\sigma(t)) \equiv 0$, $t \in I$. Обозначим $W = -\lambda_*, \Sigma = -QK$. Тогда $\dot\sigma(t) + W\sigma(t) + \Sigma\overline{\varphi}(\sigma(t)) \equiv 0, \forall t, t \in I$. Отсюда следует, что для любого числа τ_3 произведение $[\dot\sigma(t) + W\sigma(t) + \Sigma\overline{\varphi}(\sigma(t))]\tau_3\dot\sigma(t) \equiv 0$, $\forall t, t \in I$. Тогда несобственный интеграл

$$I_4 = \lim_{T\to\infty}\int_0^T \dot\sigma(t)\tau_3\dot\sigma(t)dt = \lim_{T\to\infty}\int_0^T [P_0\omega^2(t) + P_1y_1^2(t) + \ldots + P_{n+2}y_{n+2}^2(t)]dt+$$
$$+\lim_{T\to\infty}\int_0^T \left[\frac{d}{dt}F_4(t)\right]dt = \lim_{T\to\infty}\int_{\sigma(0)}^{\sigma(T)} [-W\sigma(t) - \Sigma\overline{\varphi}(\sigma(t))]d\sigma < \infty,\ |\lim_{T\to\infty}\int_0^T \left[\frac{d}{dt}F_4(t)\right]dt| < \infty.$$

Абсолютная устойчивость. На основе оценок (15), (16), (17) - (21), (22) могут быть сформулированы критерий абсолютной устойчивости положения равновесия системы (1), (2).

Теорема 7 . *Пусть выполнены следующие условия:*
1) матрицы A, $A_1(\mu)$, $0 < \varepsilon \le \mu \le \overline{\mu}_0$, $\mu_0 \le \overline{\mu}_0$ — гурвицевы, функция $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$, $\varphi(\sigma) = \varepsilon\sigma + \overline{\varphi}(\sigma)$, $\overline{\varphi}(\sigma) \in \Phi_1, \varepsilon > 0$ – сколь угодно малое число;
2) существует вектор $\theta^* \in R^{n+2}$ такой,что $\theta B_1 = 0$, $\theta A_1 B_1 = 0$, $\ldots$, $\theta A_1^n B_1 = 0$, $\kappa = \theta A_1^{n+1} B_1 \ne 0$;
3)ранг матрицы $R = \|\theta^*, A_1^*\theta^*, \ldots, A_1^{*n+1}\theta^*\|$ равен $n+2$;
4) выполнены равенства $N_i + \Gamma_i = M_i$, $i = \overline{0, n+2}, F \ne 0$.

Тогда положение равновесия системы (1), (2) абсолютно устойчиво.

Теорема 8 *. Пусть выполнены условия 1) - 3) теоремы 7, и выполнено условие теоремы 6, и пусть, кроме того, верны равенства*

$$N_i + \Gamma_i = P_i, \quad i = \overline{0, n+2}. \tag{24}$$

Тогда положение равновесия системы (1), (2) абсолютно устойчиво.

Теорема 9 *. Пусть выполнены условия 1) - 3) теоремы 7, и выполнено условие теоремы 6, и пусть, кроме того, верны равенства*

$$N_i + \Gamma_i = M_i + P_i, \quad i = \overline{0, n+2}, \tag{25}$$

Тогда положение равновесия системы (1), (2) абсолютно устойчиво.

Пример. В качестве примера рассмотрим задачу А.И. Лурье и В.Н. Постникова. Уравнения движения регулируемой системы имеет вид [2]

$$\begin{gathered} \dot{x}_1 = x_1 + \varphi(\sigma), \frac{d\xi}{dt} = \eta, \frac{d\eta}{dt} = \varphi(\sigma), \sigma = (1-\alpha)x_1 + (\alpha - r - 1)\eta - \alpha\xi, \\ x_1(0) = x_{10}, \xi(0) = \xi_0, \eta(0) = \eta_0, t \in I = [0, \infty), \end{gathered} \tag{26}$$

где α, r – постоянные параметр, $\varphi(\sigma) = \varepsilon\sigma + \overline{\varphi}(\sigma)$, $\varepsilon > 0$ – сколь угодно малое число. Для данного примера: $A = -1$, $B = 1$, $D = (1-\alpha)$, $E = \alpha - r - 1$, $F = -\alpha$, $n = 1$. Вектор-функция $z = (x_1, \xi, \eta)$ и после замены $\varphi(\sigma) = \varepsilon\sigma + \overline{\varphi}(\sigma)$, получим

$$\dot{z} = A_1 z + B_1 \overline{\varphi}(\sigma), \sigma = Sz, z(0) = z_0, t \in [0, \infty),$$

где

$$A_1 = A_1(\varepsilon) = \begin{pmatrix} -1 + \varepsilon(1-\alpha) & -\alpha\varepsilon & \varepsilon(\alpha - r - 1) \\ 0 & 0 & 1 \\ \varepsilon(1-\alpha) & -\alpha\varepsilon & \varepsilon(\alpha - r - 1) \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$S = \begin{pmatrix} 1-\alpha, -\alpha, \alpha - r - 1 \end{pmatrix}$.

а) Неособое преобразование. Вектор $\theta{=}(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$. Произведение $\theta B_1{=}\theta_1{+}\theta_3{=}0$. Следовательно, $\theta_3{=}-\theta_1$, $\theta{=}(\theta_1, \theta_2, -\theta_1)$. Произведение $\theta A_1 B_1{=}-\theta_1{+}\theta_2{=}0$. Тогда $\theta_1{=}\theta_2$ и вектор $\theta{=}(1, 1, -1)\theta_1$. Пусть $\theta_1{=}1$. Тогда $\theta{=}(1, 1, -1)$, $\theta B_1{=}0$, $\theta A_1 B_1{=}0$, $\theta A_1^2 B_1{=}1$.

Характеристический полином матрицы A_1 имеет вид

$$\Delta(\lambda) = det(\lambda I_3 - A_1) = \lambda^3 + \lambda^2(1 + \varepsilon r) + \lambda[\varepsilon(1 + r)] + \varepsilon\alpha.$$

Тогда $A_1^3 = -A_1^2(1+\varepsilon r) - A_1[\varepsilon(1+r)] - \varepsilon\alpha I_3$, величины $a_0 = \varepsilon\alpha$, $a_1 = [\varepsilon(1+r)]$, $a_2 = (1+\varepsilon r)$. Дифференциальное уравнение (6) запишется в виде

$$\dot{y}_1 = y_2, \quad \dot{y}_2 = y_3, \quad \dot{y}_3 = -\varepsilon\alpha y_1 - \varepsilon(1+r)y_2 - (1+\varepsilon r)y_3 + \overline{\varphi}(\sigma). \tag{27}$$

Матрица

$$R = \|\theta^*, A_1^*\theta^*, A_1^{*2}\theta^*\| = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \Delta = 1 \neq 0,$$

ранг $R = 3$, матрица R – неособая.

б) Тождества. Вектор $S^* = (1-\alpha, -\alpha, \alpha - r - 1)$. Тождества (12) - (14) запишутся в виде

$$\overline{\varphi}(\sigma(t)) = \omega + \varepsilon\alpha y_1 + \varepsilon(1+r)y_2 + (1+\varepsilon r)y_3,$$

$$\sigma(t) = -\alpha y_1 + (-r-1)y_2 - ry_3, \;\; \dot{\sigma}(t) = -\alpha y_2 + (-r-1)y_3 - r\omega,$$

где $y_1{=}y_1(t)$, $y_2{=}y_2(t)$, $y_3{=}y_3(t)$, $\omega(t){=}\dot{y}_3(t)$, $S^*{=}-\alpha\theta^*{+}(-r-1)A_1^*\theta^*{-}rA_1^{*2}\theta^*$, $y_1{=}x_1{+}\xi{-}\eta$, $y_2 = -x_1 + \eta$, $y_3{=}x_1$.

в) Несобственные интегралы. Несобственный интеграл

$$I_1 = \lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T [N_0\omega^2(t) + N_1y_1^2(t) + N_2y_2^2(t) + N_3y_3^2(t)]dt + \lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T \left[\frac{d}{dt}F_1(t)\right]dt \geq 0,$$

где $N_0 = -\tau_1\mu_0^{-1}$, $N_1 = -\varepsilon\alpha^2\tau_1{-}\tau_1\mu_0^{-1}\alpha^2\varepsilon^2$, $N_2 = \tau_1[\alpha + 2\alpha\varepsilon r - \varepsilon(1{+}r)^2] - \tau_1\mu_0^{-1}[\varepsilon^2(1{+}r)^2 - 2\alpha\varepsilon(1+\varepsilon r)]$, $N_3{=}\tau_1(1-\varepsilon r^2) - \tau_1\mu_0^{-1}[(1-\varepsilon r)^2 - 2\varepsilon(1+r)]$.

Несобственный интеграл

$$I_2 = \lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T [\gamma_0\omega(t) + \gamma_1y_1(t) + \gamma_2y_2(t) + \gamma_3y_3(t)]^2dt = \lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T [\Gamma_0\omega^2(t) +$$

$$+\Gamma_1y_1^2(t) + \Gamma_2y_2^2(t) + \Gamma_3y_3^2]dt + \lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T \left[\frac{d}{dt}F_2(t)\right]dt \geq 0,$$

где $\Gamma_0 = \gamma_0^2$, $\Gamma_1 = \gamma_1^2$, $\Gamma_2 = \gamma_2^2 - 2\gamma_1\gamma_3$, $\Gamma_3 = \gamma_3^2 - 2\gamma_0\gamma_2$.

Несобственный интеграл

$$I_3{=}\lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T \overline{\varphi}(\sigma(t))\tau_2\dot{\sigma}(t)dt = \lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T [M_0\omega^2(t){+}M_1y_1^2(t){+}$$

$$+M_2y_2^2(t) + M_3y_3^2(t)]dt + \lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T \left[\frac{d}{dt}F_3(t)\right]dt,$$

где $M_0 = -\tau_2 r$, $M_1 = 0$, $M_2 = 0$, $M_3 = (\alpha - r - 1)\tau_2$.

Несобственный интеграл

$$I_4 = \lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T \tau_3\dot{\sigma}^2(t)dt = \lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T [P_0\omega^2(t) + P_1y_1^2(t) + P_2y_2^2(t) + P_3y_3^2(t)]dt +$$

$$+\lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T \left[\frac{d}{dt}F_4(t)\right]dt,$$

где $P_0 = \tau_3 r^2$, $P_1 = 0$, $P_2 = \tau_3\alpha^2$, $P_3 = \tau_3[(r+1)^2 - 2\alpha r]$.

г) Абсолютная устойчивость. Проверка условия теоремы 7. Поскольку $A = -1$, то A – гурвицева. Характеристический полином матрицы

$$A_1 = A_1(\mu) = \begin{pmatrix} -1+\mu(1-\alpha) & -\alpha\mu & \mu(\alpha-r-1) \\ 0 & 0 & 1 \\ \mu(1-\alpha) & -\alpha\mu & \mu(\alpha-r-1) \end{pmatrix}$$

равен

$$\Delta_1(\lambda) = det(\lambda I_3 - A_1) = \lambda^3 + (1+\mu r)\lambda^2 + [\mu(1+r)]\lambda + \mu\alpha, \quad 0 < \varepsilon \leq \mu \leq \overline{\mu}_0.$$

Для гурвицевости матрицы $A_1(\mu)$ необходимо и достаточно, чтобы $1+\mu r>0$, $\mu(1+r)>0$, $\mu\alpha>0$, $(1+\mu r)\mu(1+r)>\mu\alpha$.

Для выполнения указанных неравенств достаточно, чтобы $\alpha>0$, $r>0$, $r+1-\alpha>0$. Для данных значений параметров системы величина μ удовлетворяет условию $0<\varepsilon\le\le\mu\le\overline{\mu}_0$, $\mu_0\le\overline{\mu}_0=\infty$. Проверка условий 2), 3) теоремы 7 приведена выше. Из условия 4) теоремы 7 имеем

$$N_0+\Gamma_0=M_0:\ \ -\tau_1\mu_0^{-1}+\gamma_0^2=-\tau_2 r, \tag{28}$$

$$N_1+\Gamma_1=M_1:\ \ -\varepsilon\alpha^2\tau_1-\tau_1\mu_0^{-1}\alpha^2\varepsilon^2+\gamma_1^2=0, \tag{29}$$

$$\begin{aligned} N_2+\Gamma_2=M_2:\ \ &\tau_1[\alpha+2\alpha\varepsilon r-\varepsilon(1+r)^2]-\tau_1\mu_0^{-1}[\varepsilon^2(1+r)^2-\\ &-2\alpha\varepsilon(1+\varepsilon r)]+\gamma_2^2-2\gamma_1\gamma_3=0 \end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned} N_3+\Gamma_3=M_3:\ \ &\tau_1(1-\varepsilon r^2)-\tau_1\mu_0^{-1}[(1+\varepsilon r)^2-2\varepsilon(1+r)]+\\ &+\gamma_3^2-2\gamma_0\gamma_2=\tau_2(\alpha-r-1). \end{aligned} \tag{31}$$

Рассмотрим предельный случай, когда $\overline{\mu}_0=\mu_0=\infty$. Поскольку $\mu_0^{-1}=0$, то равенства (28) – (31) запишутся так:

$$\begin{aligned} &\gamma_0^2=-\tau_2 r,\quad \gamma_1^2=\varepsilon\alpha^2\tau_1,\quad \tau_1[\alpha+2\alpha\varepsilon r-\varepsilon(1+r)^2]+\gamma_2^2-2\gamma_1\gamma_3=0,\\ &\tau_1(1-\varepsilon r^2)+\gamma_3^2-2\gamma_0\gamma_2=\tau_2(\alpha-r-1). \end{aligned} \tag{32}$$

Из первого равенства из (32) следует, что $r>0$, $\tau_2<0$. В частности, $\gamma_0^2=\frac{k_3^2}{\varepsilon\tau_1}\tau_1^2+k_4\tau_1+k_5\varepsilon\tau_1$, где k_4, k_5 – любые числа, знак γ_0^2 определяется знаком первой слагаемой, $k_3\ne0$, $\varepsilon>0$, $\tau_1>0$. Из второго равенства из (32) имеем $\gamma_1=\alpha\sqrt{\varepsilon\tau_1}$, где $\alpha>0$, $\varepsilon>0$, $\tau_1>0$. Из третьего равенства следует, что $\gamma_2^2=2\gamma_1\gamma_3-\alpha\tau_1-\varepsilon\tau_1[2\alpha r-(1+r)^2]$. Выберем $\gamma_3=\frac{k_1}{\sqrt{\varepsilon\tau_1}}\tau_1+k_2\sqrt{\varepsilon\tau_1}$, где k_1, k_2 – любые числа. Тогда $2\gamma_1\gamma_3=2\alpha k_1\tau_1+2\alpha k_2\varepsilon\tau_1$, $\gamma_2^2=[2\alpha k_1-\alpha]\tau_1+[2\alpha k_2-2\alpha r+(1+r)^2]\varepsilon\tau_1$. Если $k_1=\frac{1}{2}$, $k_2=r-\frac{(1+r)^2}{2\alpha}$, $\alpha>0$, $r>0$, то $\gamma_2=0$. Из четвертого равенства из (32) при $\gamma_2=0$, $\gamma_3^2=\frac{k_1^2}{\varepsilon\tau_1}\tau_1^2+2k_1k_2\tau_1+k_2^2\varepsilon\tau_1$, имеем

$$\tau_1-\varepsilon\tau_1 r^2+\frac{k_1^2}{\varepsilon\tau_1}\tau_1^2+2k_1k_2\tau_1+k_2^2\varepsilon\tau_1=\tau_2(\alpha-r-1). \tag{33}$$

Заметим, что $\tau_2(\alpha-r-1)=\tau\alpha-\tau r-\tau_2=\tau_2(\alpha-1)+\gamma_0^2=-\frac{\gamma_0^2}{r}(\alpha-1)+\gamma_0^2=\gamma_0^2\frac{r+1-\alpha}{r}$. Теперь равенства (33) с учетом того, что $\gamma_0^2=\frac{k_3^2}{\varepsilon\tau_1}\tau_1^2+k_4\tau_1+k_5\varepsilon\tau_1$, запишутся в виде

$$(1+2k_1k_2-\frac{r+1-\alpha}{r}k_4)\tau_1+(-r^2+k_2^2-k_5\frac{r+1-\alpha}{r})\varepsilon\tau_1+(k_1^2-k_3^2\frac{r+1-\alpha}{r})\frac{\tau_1^2}{\varepsilon\tau_1}=0.$$

Пусть $r+1-\alpha>0$, $r>0$. Тогда при $k_4=\frac{r}{r+1-\alpha}(1+2k_1k_2)$, $k_5=\frac{r}{r+1-\alpha}(-r^2+k_2^2)$, $k_3^2=\frac{r}{r+1-\alpha}k_1^2$ выполнено четвертое равенство из (32).

Итак, при $\alpha>0$, $r>0$, $r+1-\alpha>0$ выполнены все условия теоремы 7. Такой же результат получен в работе [4] по частотному критерию.

д) Абсолютная устойчивость. Проверка условия теоремы 8. В случае $\mu_0=\infty$, $\mu_0^{-1}=0$ равенства (24) запишутся в виде

$$\begin{aligned} &\gamma_0^2=-\tau_3 r^2,\quad \gamma_1^2=\varepsilon\alpha^2\tau_1,\quad \tau_1[\alpha+2\alpha\varepsilon r-\varepsilon(1+r)^2]+\gamma_2^2-2\gamma_1\gamma_3=\alpha^2\tau_3,\\ &\tau_1(1-\varepsilon r^2)+\gamma_3^2-2\gamma_0\gamma_2=\tau_3[(r+1)^2-2\alpha r]. \end{aligned} \tag{34}$$

Из (34) имеем: $\gamma_0 = r\sqrt{\tau_3}$, $r > 0$, $\tau_3 > 0$, $\gamma_1 = \alpha\sqrt{\varepsilon\tau_1}$. третьего равенства при $\gamma_3 = \frac{k_1}{\sqrt{\varepsilon\tau_1}}\tau_1 + k_2\sqrt{\varepsilon\tau_1}$, $k_1 = \frac{1}{2}$, $k_2 = r - \frac{(1+r)^2}{2\alpha}$ получим $\gamma_2^2 = \alpha^2\tau_3$. Следовательно, $\gamma_2 = \alpha\sqrt{\tau_3}$. Из четвертого равенства (34) имеем

$$\gamma_3^2 = \tau_3[(r+1)^2 - 2\alpha r] - \tau_1(1 - \varepsilon r^2) + 2\gamma_0\gamma_2, \tag{35}$$

где $2\gamma_0\gamma_2 = 2r\sqrt{\tau_3}\cdot\alpha\sqrt{\tau_3} = 2\alpha r\tau_3$. Теперь (35) запишется в виде $\gamma_3^2 = \tau_3(r+1)^2 - \tau_1(1-\varepsilon r^2)$, где $\tau_3{>}0$. Всегда можно выбрать величину $\tau_3{>}0$. так, чтобы $\gamma_3^2{=}\tau_3(r{+}1)^2{-}\tau_1(1{-}\varepsilon r^2){>}0$. Проверка условия 1) – 3) теоремы 8 приведены выше. Таким образом, положение равновесия системы (1), (2) абсолютно устойчиво, если матрица $A_1(\mu)$, $0{<}\varepsilon{\le}\mu{\le}\infty$ – гурвицева.

Заключение. На практике встречающиеся системы автоматического управления относятся к системам с ограниченными ресурсами. В работе рассмотрена нелинейная система вида (1), (2) с устойчивой линейной частью. В отличие от известных методов исследования абсолютной устойчивости положения равновесия предлагается новый подход основанный на априорной оценке несобственных интегралов вдоль решения системы.

Примечательно то, что неособым преобразованием уравнения движения системы приводится к специальному виду, которая позволяет представить подынтегральную функцию в виде суммы двух слагаемых. Первое слагаемое является квадратичной формой приведенной к диагональному виду, а второе слагаемое полный дифференциал функции по времени. Такое представление подынтегральной функции, в конечном счете, проводит к легко проверяемым критериям абсолютной устойчивости.

Отличительной особенностью предлагаемого подхода является получение тождеств вдоль решения системы относительно входного и выходного переменных нелинейного элемента. Эти тождества позволяют использовать сведения о свойствах нелинейной части системы для оценки несобственных интегралов. При таком подходе к исследованию абсолютной устойчивости регулируемых систем удается получить дополнительное соотношения связывающие фазовые переменные, что позволяет получить более эффективные критерии абсолютной устойчивости.

Для систем с ограниченными ресурсами, фазовые переменные ограничены и являются равномерно непрерывными функциями. Эти свойства были использованы при получении критерия, а также при оценке несобственного интеграла от квадрата производной входной переменной нелинейного элемента. Данная оценка позволяет существенно расширить область абсолютной устойчивости в пространстве конструктивных параметров системы нежели известные критерии и в ряде случаев можно получить необходимое и достаточное условие абсолютной устойчивости.

Список литературы

[1] *Воронов А.А.* Основы теории автоматического управления. Часть II.// -М.: "Энергия 1966, 350 с.

[2] *Лурье А.Н.* Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования.// -М.:-Л.: Гостехиздат, 1951, 216 с.

[3] *Попов В.М.* Гиперустойчивость автоматических систем.// -М.: Наука, 1970, 453 с.

[4] *Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия.
- М.: Наука, 1978, 400 с.

[5] *Айсагалиев С.А.* Об определении области абсолютной устойчивости вынужденных движений в нелинейных системах. – Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, 1969, №5, с.38-48.

[6] *Айсагалиев С.А.* Об определении области абсолютной устойчивости системы управления снесколькими нелинейными элементами. – АН СССР, Автоматика и телемеханика, 1970, №12, с.83-94.

[7] *Айсагалиев С.А.* К теории абсолютной устойчивость релгулируемых систем. // – Дифференциальные уравнения, Минск-Москва, 1994, т.30, №5, с.748-757.

[8] *Айсагалиев С.А., Злобина Е.Б.* Общая теория об абсолютной устойчивости регулируемых систем. – Вестник НАН РК, 1999, №3, с.5-10.

[9] *Айсагалиев С.А.* Обобщенные теоремы об абсолютной устойчивости регулируемых систем. – Доклады НАН РК, 1992, №2, с.4-9.

[10] *Айсагалиев С.А.* Теория регулируемых систем. - Алматы: Қазақ университеті, 2000. -234 с.

Решение задачи пограничного слоя неньютоновских жидкостей вариационным методом

Ж.Ж. Жанабеков
Казахский национальный университет имени аль-Фараби
e-mail: 2261032@mail.ru

Аннотация

Приводимый в статье вариационный метод дает профиль скоростей, зависящих от реологического индекса n, что подобно зависимости от n в случае численного решения. Данный метод приводит к аналитическому выражению для профиля скорости, по которому оперировать легче, чем решением в рядах Блазиуса или численным.

Рассмотрим стационарное двумерное течение неньютоновских (степенных) жидкостей в пограничном слое плоской пластины. Набегающий поток будем считать однородным и движущимся со скоростью U_∞. Ось x направим вдоль пластины, y – перпендикулярно к ней. Начало координат поместим на передней кромке пластины [1]. При этом течение описывается системой уравнений:

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{k}{\rho}\cdot n\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^{n-1}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} &u(x,0)=0, \qquad v(x,0)=v_0 \quad \text{при} \quad 0\le x\le L,\\ &u=U_\infty \quad \text{при} \quad y=\infty,\\ &u(0,y)=U_\infty \quad \text{при} \quad -\infty\le y\le+\infty. \end{aligned} \tag{2}$$

Общий подход к решению подобной задачи методом локального потенциала или возрастания общей энтропии [2] приводит к рассмотрению следующей системы, близкой к стационарному состоянию.

$$\begin{aligned} &\rho\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=kn\cdot\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^{n-1}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\\ &\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0. \end{aligned} \tag{3}$$

Умножим первое уравнение системы (3) на $\left(-\frac{\partial u}{\partial t}\right)$, а второе на $\left(-\frac{\rho}{2}\right)\cdot\left(\frac{\partial v^2}{\partial t}\right)$, полученные результаты сложим.

$$\begin{aligned} &\psi=-\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2=\rho u\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}+\rho v\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}-kn\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^{n-1}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}-\\ &-\frac{\rho}{2}\cdot\frac{\partial v^2}{\partial t}\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\le 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Пусть $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ определена в прямоугольной области $A(0 \le x \le L,\ 0 \le y \le \infty)$. Тогда

$$\varphi = -\rho \cdot \int\limits_A \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dA = -\rho \int\limits_0^L \int\limits_0^\infty \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dydx \le 0. \tag{5}$$

Подынтегральную функцию ψ преобразуем к виду:

$$\psi = \rho\frac{\partial}{\partial x}\left(u \cdot u\frac{\partial u}{\partial t}\right) + \rho\frac{\partial}{\partial y}\left(u \cdot v\frac{\partial u}{\partial t}\right) - kn\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^{n-1} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial t}\right) - \rho u \cdot u\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) -$$
$$-\rho u \cdot v\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{\rho}{2} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left(u^2 + v^2\right) + \frac{kn}{2} \cdot \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^{n-1} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2.$$

Интегрируя по частям и применяя теорему Остроградского о дивергенции, уравнение (5) преобразуем к виду:

$$\begin{aligned}\varphi = \int\limits_0^L \int\limits_0^\infty \Bigg[&-\rho u u \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \rho u \cdot v\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{k}{2}n \cdot \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^{n-1} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - \\ &-\frac{\rho}{2} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left(u^2 + v^2\right)\Bigg] dydx + J,\end{aligned} \tag{6}$$

где

$$J = \int\limits_C \left(\rho u \cdot u\frac{\partial u}{\partial t}dy + \rho u \cdot v\frac{\partial u}{\partial t}dx - kn \cdot \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^{n-1} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial t}dx,\right) \tag{7}$$

C – граница области $A(0 \le x \le L,\ 0 \le y \le \infty)$.

Легко заменить, что уравнение (6) приобретает определенный физический смысл, если воспользоваться принципом локального потенциала. При этом все составляющие скорости в (6), как коэффициенты при производных по времени, вычисляются при стационарном состоянии. Такая операция позволяет вынести $\dfrac{\partial}{\partial t}$ за знак интеграла, так как граница области не зависит от времени. Величина интеграла может уменьшаться со временем, в стационарном состоянии течение в пограничном слое соответствует минимуму функционала

$$\begin{aligned}E^* = \int\limits_0^L \int\limits_0^\infty \Bigg[&-\rho u^0 \cdot u^0 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - \rho u^0 \cdot v^0\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{k}{2}n \cdot \left|\frac{\partial u^0}{\partial y}\right|^{n-1} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - \\ &-\frac{\rho}{2} \cdot \left(\frac{\partial u^0}{\partial x} + \frac{\partial v^0}{\partial y}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left(u^2 + v^2\right)\Bigg] dydx + \\ &+\int\limits_C \left(\rho u^0 \cdot u^0 \cdot udy + \rho u^0 \cdot v^0 \cdot udx - kn \cdot \left|\frac{\partial u^0}{\partial y}\right|^{n-1} \cdot \left(\frac{\partial u^0}{\partial y}\right) \cdot udx\right),\end{aligned} \tag{8}$$

где E^* – возрастание общей энтропии, $\dfrac{\partial E^*}{\partial t}$ – скорость возрастания общей энтропии.

Профили скоростей зададим в виде:

$$u = U_\infty \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{y}{f}\right)\right], \tag{9}$$

$$v = v_0 + U_\infty \cdot f' \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{y}{f}\right) - \frac{y}{f}\exp\left(-\frac{y}{f}\right)\right], \tag{10}$$

где f – неизвестная пока функция x, f' – производная по x.

Нетрудно показать, что функции (9) и (10) удовлетворяют как уравнению неразрывности, так и граничным условиям (2), если $f(x) \to 0$ при $x \to 0$.

Следуя [2], для функционала E^* в (8) имеем следующее выражение:

$$E^* = \int\limits_0^L \int\limits_0^\infty \left\{\rho U_\infty^3 \cdot \left(1 - e^{-\frac{y}{f^0}}\right)^2 \cdot \frac{yf'}{f^2} \cdot e^{-\frac{y}{f}} - \rho \cdot \left[U_\infty^2 \cdot v_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{y}{f^0}}\right) + \right.\right.$$

$$\left. + U_\infty^3 \cdot f^{0\prime} \cdot \left(1 - e^{-\frac{y}{f^0}}\right) \cdot \left(1 - e^{-\frac{y}{f^0}} - \frac{y}{f^0} \cdot e^{-\frac{y}{f^0}}\right)\right] \cdot \frac{1}{f} e^{-\frac{y}{f}} +$$

$$\left. + \frac{k}{2} \cdot nU_\infty^{n+1} \cdot \left|\frac{1}{f^0} \cdot e^{-\frac{y}{f^0}}\right|^{n-1} \cdot \frac{1}{f^2} \cdot e^{-\frac{2y}{f}}\right\} dydx + \int\limits_0^\infty \rho U_\infty^3 \cdot \left[\left(1 - e^{-\frac{y}{f^0}}\right)^2 \cdot \left(1 - e^{-\frac{y}{f}}\right) - 1\right]\Bigg|_{x=L} dy.$$

Вычислим вариацию E^* по f, сохраняя неизменной f^0.

$$\delta^* = \int\limits_0^L \int\limits_0^\infty \left\{\rho U_\infty^3 \cdot \left(1 - e^{-\frac{y}{f^0}}\right)^2 \cdot \left(\frac{y\delta f'}{f^2} - \frac{2yf'}{f^3} \cdot \delta f + \frac{y^2 f'}{f^4} \cdot \delta f\right) \cdot e^{-\frac{y}{f}} - \right.$$

$$-\rho \cdot \left[U_\infty^2 \cdot v_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{y}{f^0}}\right) + U_\infty^3 \cdot f^{0\prime} \cdot \left(1 - e^{-\frac{y}{f^0}}\right) \cdot \left(1 - e^{-\frac{y}{f^0}} - \frac{y}{f^0} \cdot e^{-\frac{y}{f^0}}\right)\right] \cdot$$

$$\left. \cdot \left(-\frac{1}{f^2} + \frac{y}{f^3}\right) e^{-\frac{y}{f}} \delta f + kn \cdot U_\infty^{n+1} \cdot \left|\frac{1}{f^0} \cdot e^{-\frac{y}{f^0}}\right|^{n-1} \cdot \left(-\frac{1}{f^3} + \frac{y}{f^4}\right) \cdot e^{-\frac{2y}{f}} \delta f\right\} dydx -$$

$$-\int\limits_0^\infty \rho U_\infty^3 \cdot \left(1 - e^{-\frac{y}{f^0}}\right)^2 \cdot \frac{y}{f^2} e^{-\frac{y}{f}} \delta f \Bigg|_{x=L} dy.$$

Полагая $f^0 = f$ и многократно интегрируя, получим

$$\delta E^* = \int\limits_0^L \left(\frac{\rho U_\infty^3}{9} \cdot \frac{f'}{f} - \frac{\rho U_\infty^2 \cdot v_0}{4} \cdot \frac{1}{f} - \frac{kU_\infty^{n+1} \cdot n^2}{(n+1)^2} \cdot \frac{1}{f^{n+1}}\right) \delta f \cdot dx.$$

Приравнивая вариацию δE^* нулю для всех допустимых вариаций δf, имеем уравнение Эйлера-Лагранжа

$$f^n \cdot f' - \frac{9v_0}{4U_\infty} \cdot f^n - \frac{9k \cdot U_\infty^{n-2} \cdot n^2}{\rho(n+1)^2} = 0. \tag{11}$$

При этом функция f^0 должна быть положительной. Действительно, если $f^0 < 0$, то можно записать $f^0 = -|f^0|$. Следовательно,

$$u^0 = U_\infty \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{y}{f^0}\right)\right] = U_\infty \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{y}{|f^0|}\right)\right],$$

что противоречит выполнению условия, $u^0 > 0$ так как $e^{\frac{y}{|f^0|}}$ всегда положительна.

Так как $u = U_\infty$ при $x = 0$, то задача сводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения (11) при условии $f(0) = 0$.

Для сравнения приближенного решения (9)-(10) с точным [1], полученным интегрированием уравнения (11), рассмотрен частный случай, когда $v_0 = 0$ (непроницаемая пластинка) и $n = 1$ (ньютоновская жидкость), $n = 0,5$ (псевдопластичная жидкость).

Решением уравнения (11) в этом случае является выражение:

$$f = \left(\frac{9n^2}{n+1}\right)^{\frac{1}{n+1}} \cdot \left(\frac{1}{Re_x}\right)^{\frac{1}{n+1}} x,$$

где $Re_x = \dfrac{\rho U_\infty^{2-n}}{k} \cdot x^n$.

При этом решение (9) имеет вид:

$$\begin{aligned} u &= U_\infty \cdot \left(1 - e^{-c\eta}\right), \\ v &= v_0 + U_\infty \cdot \frac{y}{x} \cdot \frac{1}{(n+1)\cdot c\eta} \cdot [1 - (1 + c\eta)\cdot e^{-c\eta}], \end{aligned} \tag{12}$$

$$\eta = \frac{y}{x} \cdot \left[\frac{Re_x}{n(n+1)}\right]^{\frac{1}{n+1}}, \qquad c = \left[\frac{(n+1)^2}{9n}\right]^{\frac{1}{n+1}}.$$

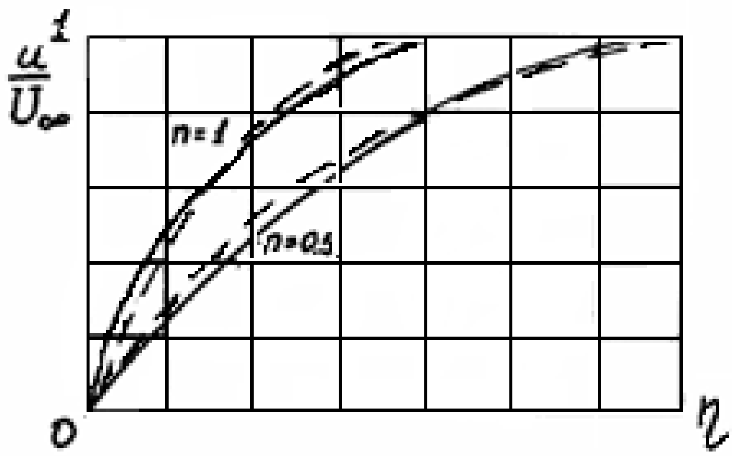

Рис. 1. Сравнение приближенного решение (12) с точным [1], где пунктирная линия приближенное решения (12), сплошная – точное [1].

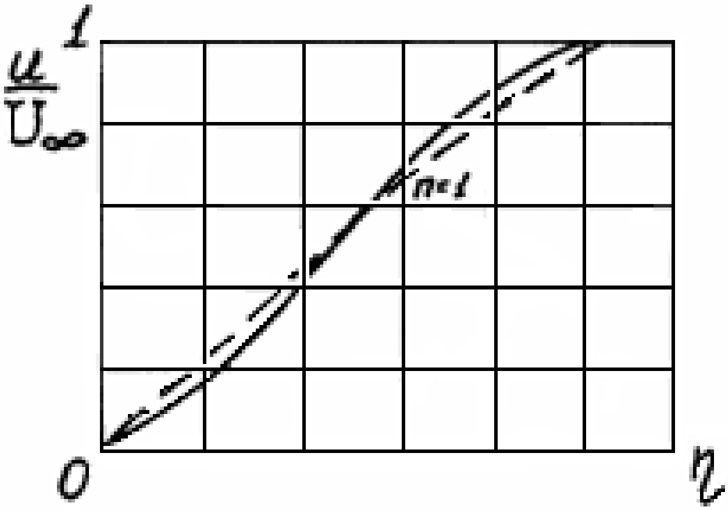

Рис. 2. Сравнение приближенного решения (12) с точным [1] для случая проницаемой пластины $(v_0 \neq 0)$, когда $v_0(x) \approx x^{-\frac{1}{2}}$.

В заключение отметим, что указанный вариационный метод дает профиль скоростей, который зависит от реологического индекса n, что подобно зависимости от n в случае точного численного решения. Таким образом, данный метод имеет определенное преимущество по сравнению с методом Кармана-Польгаузена, поскольку дает форму решения, в точности удовлетворяющую тем же граничным условиям, что и численное. Точность повышается по мере уменьшения $n(n < 0,5)$. Значительное преимущество данного метода состоит в том, что он дает аналитическое выражение для профиля скорости, т.е. приводит к решению в такой форме, которой оперировать легче, чем например, решением в рядах Блазиуса или численным.

Список литературы

[1] *Берковский Б.М., Шульман Э.П.* Пограничный слой неньютоновских жидкостей. – Минск, 1966. – 158 с.

[2] *Шехтер Р.* Вариационные методы в инженерных расчетах. – М.: Мир, 1971. – 112 с.

Численный анализ и прогноз аномалий атмосферных процессов с использованием сопряженных функций

Н.С. Заурбеков

КазЭУ им. Т.Рыскулова, e-mail: agu_nurgali@mail.ru

Аннотация

Рассмотренные в данной работе вопросы касаются, во-первых, теории сопряженных функции к решению прогностических задач, во-вторых, дальнейшему развитию идей Г.И. Марчука [1] по долгосрочному прогнозу атмосферных процессов.

В работе [1] рассматривалась трехмерная задача для уравнения притока тепла в атмосфере и океане. На границе этих двух сред выполнялось условие теплового баланса. Циркуляция в атмосфере предполагалось известной (были взяты климатические скорости ветра), а для океана использовались скорости потоков, полученные из океанической циркуляционной модели. Авторы решали сопряженную задачу с указанными выше скоростями в атмосфере и океане применительно к расчету декадных температур у поверхности земли для большой территории. В работе показано, насколько велика роль океана в формировании аномалий температуры.

Мы ставим своей целью рассмотреть поведение сопряженных функции для месячных осреднений, используя фактические данные об атмосферной циркуляции [2]. При этом интегрирование ведется только для начала прогнозируемого месяца. Это соответствует к применению сопряженных функции для прогноза с нулевой заблаговременностью. Все эти обстоятельства рассматривались из желания максимально приблизиться к условиям оперативного использования этой теории.

Рассмотрим простую задачу, что поведение средней температуры тропосферы описывается следующей задачей на сфере

$$\frac{\partial T}{\partial t} + AT - \mu \Delta T = c_1 \widetilde{T} - cT + F, \quad T = T_0 \quad \text{при} \quad t = t_0, \tag{1}$$

где μ – коэффициент горизонтальной макротурбулентности; $\widetilde{T}$ – температура поверхности океана; F – внешние притоки тепла; c и c_1 – коэффициенты теплопередачи; Δ – оператор Лапласа на сфере; A – дифференциальный оператор, описывающий адвекцию температуры. Предполагаем, что $AT = \dfrac{1}{aSin\theta}\left(\dfrac{\partial V_\lambda T}{\partial \lambda} + \dfrac{\partial V_\theta Sin\theta T}{\partial \theta}\right)$, где V_λ и V_θ – компоненты горизонтальной составляющей скорости реального ветра. Их значения получены из предположении соленоидальности движения путем решения линейного уравнения баланса относительно функции тока по реальным данным геопотенциала H_{500} и H_{1000} .

Слагаемое $c_1\widetilde{T} - cT \approx c_1(\widetilde{T} - T)$ описывает теплопередачу турбулентной энергии на границе атмосфера – океан, поэтому над сушей c_1 принимается равной нулю. Коэффициент c введен из-за того, что T является средней температурой тропосферы, а не температурой воздуха вблизи земной поверхности, как это должно быть в соответствии с теорией пограничного слоя. Приближенно $c_1 \approx$1,05c, но более точно оно должно быть определено эмпирически.

Поставим, в соответствии с (1) следующую сопряженную задачу:

$$-\frac{\partial T^*}{\partial t} + A^* T^* - \mu \Delta T^* + cT^* = F^*, \quad T^* = T_1^* \quad \text{при} \quad t = t_1. \tag{2}$$

Из-за присутствия члена с горизонтально турбулентностью, эта задача корректна, если ее решать по времени в направлении его убывания. Оператор A^* – сопряженное оператору A. При условии $\dfrac{\partial V_\lambda}{\partial \lambda} + \dfrac{\partial V_\theta Sin\theta}{\partial \theta} = 0$, которое выполняется в силу соленоидальности движения, имеем $A^* = -A$.

Ищем в области G значение средней температуры $\overline{T}_{G,\delta}$, определяемой из следующего функционала:

$$\overline{T}_{G,\delta} = \int\limits_{t_0}^{t_1} dt \int\limits_G TF^* d\omega, \tag{3}$$

где $\delta = t_1 - t_0$, $d\omega$ – элемент сферической поверхности.

Функция F^* выбрано таким образом, чтобы удовлетворялись условия

1) $F^*(t,\theta,\lambda) = 0$ при $(t,\theta,\lambda) \notin [t_1 - \delta, t_1] \times G$,

2) $\int\limits_{t_0}^{t_1} dt \int\limits_G F^*(t,\theta,\lambda) d\omega = 1$,

F^* выбирается в виде гладкой функции по каждой из переменных. Ее явный вид таков:

$$F^*(t,\theta,\lambda) = B\omega_{\varepsilon_0}(\theta - \theta_0^*)\,\omega_{\varepsilon_\lambda}(\lambda - \lambda_0^*)\omega_{\varepsilon_t}(t - t_0^*), \tag{4}$$

где $\omega_\varepsilon(x) = \begin{cases} e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - x^2}} & |x| \le \varepsilon \\ 0 & |x| \ge \varepsilon, \end{cases}$ $\lambda_0^* = \dfrac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$, $\theta_0^* = \dfrac{\theta_1 + \theta_2}{2}$, $t_0^* = \dfrac{t_0 + t_1}{2}$, $\varepsilon_\lambda = \dfrac{\lambda_2 - \lambda_1}{2}$, $\varepsilon_\theta = \dfrac{\theta_2 - \theta_1}{2}$, $\varepsilon_t = \dfrac{\delta}{2}$, постоянная B определяется из условия 2.

Уравнение (2) решается при $T_1^* = 0$ в интервале $[t_1, t_0]$ при δ, равной месяцу. Численный метод, применяемый для решения (2), аналогичен описанному в работе [3]. Остальные параметры взяты следующие: $C = 5 \times 10^{-6} c^{-1}$, $\mu = 5 \times 10^6 м^2 c^{-1}$.

Напомним, что задачи (1) и (2) гильбертовом пространстве функции на сфере S связаны с тождеством Лагранжа

$$(T^*, AT) = (T, A^*T^*), \tag{5}$$

где $(a,b) = \int\limits_S abd\omega$ – скалярное произведение.

Если умножить скалярное произведение (1) на T^*, а (2) - на T и из первого произведения вычесть второе и затем результат проинтегрировать по времени от t_0 до t_1, то имея в виду (3), (5) и начальные условия, получим функционал:

$$\overline{T}_{G,\delta} = \int\limits_S T_0 T_0 * d\omega + \int\limits_{t_0}^{t_1} dt \int\limits_S (F + c_1 \widetilde{T}) T^* d\omega. \tag{6}$$

Выражения (6) определяет среднюю температуру по району G и интервал времени δ как сумму двух интегралов. Первый описывает вклад начального поля, а второй – притоков тепла, действующих непрерывно по времени на всем интервале $[t_1, t_0]$. При этом результат существенно зависит от пространственно-временного распределения T^* – своеобразной функции влияния рассматриваемой задачи.

Функция T^* рассчитывалась для трех областей: G_1 – Европа, G_2 – Сибирь, G_3 – Канада. Все области имели одинаковую форму и размер - сферический прямоугольник $G = \{(\theta,\lambda) \in S; \theta_1 \le \theta \le \theta_2; \lambda_1 \le \lambda \le \lambda_2\}$.

Например, G ограничена широтами 47,5^0 - 67,5^0 с.ш. и долготами 11,25^0- 78,75^0 в.д. Для сравнения были вычислены также T^* при $c_1 = c = 0$. Общей закономерностью всех трех вариантов является уменьшения значения T^* над океанами, что соответствует качественным оценкам поведения решениям из-за присутствия члена T^* в уравнении (2). Остановимся на этом более подробнее.

Для области G_1 полученное поле T^*, помимо полученного эффекта над океанами, существенно перераспределилось по сравнению с вариантами без океана. По-прежнему, активными являются полярные области и, кроме того, проявилось значительное влияние районов юго-запада Европы и северо-запада Африки, включая Средиземноморье.

Заметим, что над акваторией Тихого океана не наблюдается существенных изменений, и вообще значения T^* здесь сравнительно малы, что указывает на то, что влияния Тихого океана не существенно проявляется в температурном режиме области G_1. Это обстоятельство можно рассматривать как обоснования многих попыток искать объяснения изменениям термического режима Европы и Европейской территории СНГ в значительной степени благодаря воздействию Атлантического океана.

Для области G_2 воздействия Тихого и Атлантического океанов оказывается не столь значительным. Это видно, по крайней мере, из сравнения L_2 – нормы сопряженной функции для областей G_1 и G_2. Максимальное значение нормы для района G_2 значительно выше. Это обуславливается, во-первых, сравнительно отдаленностью Атлантического океана, и во-вторых тем, что Тихий океан расположен на "подветренной"стороне относительно преобладающего западно-восточного переноса. Кроме этого, мы видим, что максимум T^* находится в полярном районе. Это говорит о большом весе процессов Арктики для районов Сибири. Динамически такое явление связано с частыми переносами воздуха из арктических районов.

Несколько по иному ведет себя T^* для района G_3. Тихий океан для этой области оказывает более сильное влияние чем Атлантический океан на область G_1. Это связано с тем, что область G_3 находится в непосредственной близости от океана. И в этом варианте большую роль играют полярные районы, где наблюдается максимум T^*. Максимум воздействия Тихого океана приходится на середину прогнозируемого месяца. Следует отметить, что Атлантический океан на район G_3 влияет существенным образом, несмотря на преобладание западновосточного переноса, вероятно, из-за горизонтальной макротурбулентности.

Сопряженные функции, соответствующие 30 суткам интегрирования, оказались сравнительно устойчивы по отношению к различным ситуациям. Поэтому вклад начальных полей температуры (первый интеграл в функционале (6)) меняется в пределах одного градуса при использовании T^*, вычисленных за различные периоды времени.

В уравнении (1) мы рассмотрели в правой части лишь один вид притока тепла – теплоотдача от океана. Если ввести в параметризованной форме другие виды притока тепла, то такой детерминированный приток тепла, будучи учтенным в функционале (6), позволить решать диагностическую задачу, из которой удастся сделать заключения о факторах, определивших наблюдаемые аномалии температуры. Это можно делать каждый раз по происшествии календарного месяца, что даст возможность глубже понять происходившие атмосферные процессы. В этом мы видим перспективу применения этой теории для анализа причин формирования крупных аномалии температуры.

Рассмотрим теперь вопрос о возможности расчета средних аномалии температуры по заданному району. Для аномалии температуры можно пользоваться уравнением (1) с реальным ветром в операторе $\nabla * \left(\vec{V}\right)$, при этом правая часть уравнения будет содержать, помимо аномалии притоков тепла, дополнительные члены. Обозначив всю правую часть через δF, мы будем использовать для средней аномалии $\overline{\delta T_{\Sigma,G}}$ следующий функционал:

$$\overline{\delta F_{\Sigma,G}} = \int\limits_S \delta T_0 T_0^* d\omega + \int\limits_{t_0}^{t_1} dt \int\limits_S \delta F T^* d\omega. \tag{7}$$

В таблице 1 приведена оценка составляющих функционала (7), вычисленная по реальным данным. В первой строке указаны номера скользящих трехдекадных периодов, начиная с 1 сентября. Расчеты приводилось для среднемесячных величин, со сдвигом на одну декаду. При расчете сопряженной функции предполагалось, что $C = 0$. Функция δF вычислялось с использованием архива по левой части уравнения (1). Производная по времени находилась как разность с суточным интервалом. Определенная таким образом правая часть уравнения с точностью до ошибок аппроксимации при ее решении балансирует уравнение (1). Приведенные в таблице ошибки характеризуют точность метода расчета сопряженной функции и вычисления функционала (7). Средняя ошибка составляет 0,5 градуса.

Таблица 1

	случай №1	случай №2	случай №3	случай №4	случай №5	случай №6	случай №7
$\int\limits_S \delta T_0 T_0^* d\omega$	2,4	0,4	-1,2	1,1	-0,3	-0,1	2,3
$\int\limits_{t_0}^{t_1} dt \int\limits_S \delta F T^* d\omega$	-1,1	1,6	4,0	0,3	0,9	0,3	-2,2
Фактическая $\overline{\delta T_{\Sigma,G}}$	1,4	2,9	3,4	0,6	0,3	0,8	-0,1
Ошибка диагноза	-0,1	-0,9	-0,6	0,8	0,3	-0,6	0,2
Модуль ошибки адиабатического прогноза	1,0	2,5	4,6	0,5	0,6	0,9	2,4
	случай №8	случай №9	случай №10	случай №11	случай №12	случай №13	случай №14
$\int\limits_S \delta T_0 T_0^* d\omega$	1,3	0,2	-0,6	2,1	0,1	0,1	0,6
$\int\limits_{t_0}^{t_1} dt \int\limits_S \delta F T^* d\omega$	-2,3	1,4	1,6	-3,1	0,2	0,7	2,4
Фактическая $\overline{\delta T_{\Sigma,G}}$	0,6	0,3	0,8	-0,1	0,1	1,2	2,9
Ошибка диагноза	-1,6	1,3	0,2	-0,9	0,2	-0,4	0,1
Модуль ошибки адиабатического прогноза	0,7	0,1	1,4	2,2	0,0	1,1	2,3

Анализ этой таблицы позволяет сделать вывод о величине вклада притока тепла и начального состояния в фактическую аномалию температуры. Мы видим, что неучет притока тепла в прогнозируемом интервале резко снижает качество расчетов в отдельных случаях (2, 3, 7). Кроме того, начальное состояние в отдельных случаях также окажется весомыми (1, 7). Как мы уже замечали, сопряженные функции T^* обладают некоторой устойчивостью. Сравнивая периоды (4-7), мы видим, что ошибка в среднем выросла в два раза и соответствует примерно 1 градусу. Анализируя отдельные случаи, можно сделать вывод, что прием основанный на использовании сопряженной температуры T^*, вычисленной по реальным данным предшествующегося месяца, вполне может быть использован на практике. Это обстоятельство очень важно для использования (7) в целях прогноза, когда мы не знаем в прогнозируемом месяце скоростей ветра, необходимых для расчета $\overline{T_{\Sigma,G}}$.

Чтобы говорить о применении (7) в режиме прогноза, этого недостаточно, как видно из таблиц. Необходимо еще научиться оценивать состояния δF в прогнозируемом интервале времени. Это мы предполагаем сделать путем детерминированного описания δF, выделяя различные процессы, описываемые этим членом. Кроме того, предполагается использования статистических связей для временной экстраполяции различных компонентов [4].

Для оценки прогностических "способностей"метода с использованием только начальных данных (адиабатический прогноз) следует иметь в виду среднюю точность метода в варианте "диагноз". В данной серии такая ошибка составила 0,4 градуса. Ошибка адиабатического прогноза определяется с сравнением первой и третьей строчек. Для случаев, когда аномалия была больше 0,4 градуса, мы имеем $\rho = 0,43$ и относительную ошибку (отношения средней ошибки к средней аномалии) равную 0,9. Таким образом, предварительные оценки на небольшом числе случаев, говорят о положительных возможностях метода. Помимо апробации вышеизложенного метода, которую следует провести с привлечением более широкого архивного материала, предполагается вести работу по его усовершенствованию.

В целях дальнейшего усовершенствования методики применения теории сопряженных уравнений к задачам анализа и прогноза, начата работа по модификации этого метода. Получены прогностические формулы, использующие специальным образом "предысторию"формирования температурного поля в целях фильтрации шумов в исходной информации для повышения точности прогноза. Предполагается в рамках теории сопряженных уравнений произвести учет важных для долгосрочного прогноза неадиабатических факторов (облачность, как регулятор притока солнечной энергии, температура океана), а также реализовать модифицированный подход.

Список литературы

[1] *Булеев Н.И., Марчук Г.И.* Некоторые вопросы теории краткосрочного прогноза полей метеорологических элементов. // Труды ВНМС. Т. 2. – 1963.

[2] *Айдосов А., Заурбеков Н.С.* Теоретические основы прогнозирования природных процессов и экологической обстановки окружающей среды. Книга 3. Теоретические основы прогнозирования атмосферных процессов, экологической обстановки окружающей среды и построение геоэкологической карты на примере КНГКМ. - А., Қазақ университетi, 2000. – 219 с.

[3] *Марчук Г.И., Скиба Ю.Н.* Численный расчет сопряженной задачи для моделирования термического взаимодействия атмосферы с океанами и континентами. // Известия АН СССР, серия Физика атмосферы и океана, 1970, Т.12., №5. – С. 459 – 469.

[4] *Марчук Г.И.* Численные методы в прогнозе погоды. – Л: Гидрометеоиздат, 1967. – 456 с.

Решение задачи Дирихле для двумерного волнового уравнения методом итераций Ландвебера

С.И. Кабанихин[†], М.А. Бектемесов[‡], Д.Б. Нурсеитов[‡], А.Н. Алимова[‡]
[†]*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия*
[‡]*Казахский национальный педагогический университет им. Абая, Алматы, Казахстан*
e-mail: ksi52@mail.ru, maktagali@mail.ru, ndb80@mail.ru, anic2002@mail.ru

Аннотация

В данной работе рассматривается некорректная задача Дирихле для двумерного волнового уравнения. Для решения обратной задачи последовательно решаются прямая и сопряженная задачи методом итераций Ландвебера. В конце работы приводятся численные результаты решения обратной задачи.

1 Постановка задачи

Известно, что для эллиптических уравнений краевые задачи с данными на всей границе области исследованы достаточно полно. В то же время для гиперболических уравнений и уравнений составного типа этим задачам посвящено гораздо меньше работ, а изучение их началось сравнительно недавно. Это, обусловлено тем, что краевые задачи для неэллиптических уравнений являются вообще говоря, некорректными. Типовым примером некорректной краевой задачи есть задачи типа Дирихле для волнового уравнения. Задача Дирихле для гиперболического уравнения в круге исследована в работах В.П. Бурского [1]. Обзор некоторых результатов в исследовании краевых задач для гиперболических уравнений приведен в работах Б.И. Пташникова [2]. В данной работе рассматривается классически некорректная задача Дирихле для волнового уравнения в двухмерном пространстве [3, 4, 5, 6]. Работа посвящена численному исследованию задачи Дирихле для волнового уравнения. Задача рассматривается в прямоугольной области.

Рассмотрим постановку задачи

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}, \qquad x \in (0,\pi), \quad y \in (0,\pi), \quad t \in (0,T), \tag{1}$$

$$u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi} = 0, \qquad y \in (0,\pi), \quad t \in (0,T), \tag{2}$$

$$u\Big|_{y=0} = u\Big|_{y=\pi} = 0, \qquad x \in (0,\pi), \quad t \in (0,T), \tag{3}$$

$$u\Big|_{t=0} = 0, \qquad x \in (0,\pi), \quad y \in (0,\pi), \tag{4}$$

$$u\Big|_{t=T} = f(x,y), \qquad x \in (0,\pi), \quad y \in (0,\pi). \tag{5}$$

Эту задачу мы сформулируем как обратную задачу по отношению к следующей прямой задаче:

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}, \qquad x \in (0,\pi), \quad y \in (0,\pi), \quad t \in (0,T), \tag{6}$$

$$u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi} = 0, \qquad y \in (0,\pi), \quad t \in (0,T), \tag{7}$$

$$u\Big|_{y=0} = u\Big|_{y=\pi} = 0, \qquad x \in (0,\pi), \quad t \in (0,T), \tag{8}$$

$$u\Big|_{t=0} = q(x,y), \qquad x \in (0,\pi), \quad y \in (0,\pi), \tag{9}$$

$$u_t\Big|_{t=0} = 0, \qquad x \in (0,\pi), \quad y \in (0,\pi). \tag{10}$$

В обратной задаче (1)–(5) требуется найти $q(x,y)$, по дополнительной информации относительно решения прямой задачи

$$u(x,y,T) = f(x,y), \qquad x \in (0,\pi), \quad y \in (0,\pi). \tag{11}$$

Решаем задачу минимизацией целевого функционала

$$J(q) = \langle Aq - f, Aq - f \rangle, \tag{12}$$

минимизировать который будем методом итераций Ландвебера

$$q_{n+1}(x) = q_n(x) - \alpha J' q_n \tag{13}$$

при $\alpha \in (0, \|A\|^{-2})$.

2 Вычисление градиента функционала $J(q)$

Рассмотрим функционал (12) в следующем виде

$$J(q) = \int\limits_0^\pi \int\limits_0^\pi [u(x,y,T;q) - f(x)]^2 dx. \tag{14}$$

Найдем приращение функционала

$$J(q+\delta q) - J(q) =$$

$$= \int\limits_0^\pi \int\limits_0^\pi \Big\{ [u(x,y,T;q+\delta q) - f(x,y)]^2 - [u(x,y,T;q) - f(x,y)]^2 \Big\} dxdy \tag{15}$$

Введем замену

$$u(x,y,T;q+\delta q) = \widetilde{u} \tag{16}$$

$$u(x,y,T;q) = u \tag{17}$$

$$\delta u(x,y,T;\delta q) = \widetilde{u} - u \tag{18}$$

$$\widetilde{u} = \delta u + u \tag{19}$$

Раскроем скобки в (15) и, используя (16) – (17), получим

$$= \int\limits_0^\pi \int\limits_0^\pi (\widetilde{u}^2 - 2\widetilde{u} f(x,y) + f(x,y)^2) dxdy - \int\limits_0^\pi \int\limits_0^\pi (u^2 - 2uf(x,y) + f(x,y)^2) dxdy$$

$$= \int\limits_0^\pi \int\limits_0^\pi \widetilde{u}^2 dxdy - 2\int\limits_0^\pi \int\limits_0^\pi \widetilde{u} f(x,y)dxdy - \int\limits_0^\pi \int\limits_0^\pi u^2 dxdy + 2\int\limits_0^\pi \int\limits_0^\pi uf(x,y)dxdy$$

$$= \int\limits_0^\pi \int\limits_0^\pi (\widetilde{u}^2 - u^2)dxdy - 2\int\limits_0^\pi \int\limits_0^\pi (\widetilde{u} - u)f(x,y)dxdy,$$

используя (18),(19), получим

$$= \int\limits_0^\pi \int\limits_0^\pi ((\widetilde{u} - u)(\widetilde{u} + u))dxdy - 2\int\limits_0^\pi \int\limits_0^\pi \delta u f(x,y)dxdy$$

$$= \int\limits_0^\pi \int\limits_0^\pi (\delta u(\delta u + u + u))dxdy - 2\int\limits_0^\pi \int\limits_0^\pi \delta u f(x,y)dxdy$$

$$= \int\limits_0^\pi \int\limits_0^\pi \delta u^2 dxdy + 2\int\limits_0^\pi \int\limits_0^\pi u\delta u dxdy - 2\int\limits_0^\pi \int\limits_0^\pi \delta u f(x,y)dxdy$$

$$= \int\limits_0^\pi \int\limits_0^\pi \delta u^2 dxdy + 2\int\limits_0^\pi \int\limits_0^\pi (u - f(x,y))\delta u dxdy.$$

Сформулируем возмущенную задачу

$$\widetilde{u}_{tt} = \widetilde{u}_{xx} + \widetilde{u}_{yy}, \qquad x \in (0,\pi), \quad y \in (0,\pi), \quad t \in (0,T), \tag{20}$$
$$\widetilde{u}(0,y,t) = \widetilde{u}(\pi,y,t) = 0, \qquad y \in (0,\pi), \quad t \in (0,T), \tag{21}$$
$$\widetilde{u}(x,0,t) = \widetilde{u}(x,\pi,t) = 0, \qquad x \in (0,\pi), \quad t \in (0,T), \tag{22}$$
$$\widetilde{u}(x,y,0) = q(x,y) + \delta q(x,y), \qquad x \in (0,\pi), \quad y \in (0,\pi), \tag{23}$$
$$\widetilde{u}_t(x,y,0) = 0, \qquad x \in (0,\pi), \quad y \in (0,\pi). \tag{24}$$

Из задачи (20) – (24) вычтем задачу (6) – (10) и получим задачу на $\delta u(x,y)$

$$\delta u_{tt} = \delta u_{xx} + \delta u_{yy}, \qquad x \in (0,\pi), \quad y \in (0,\pi), \quad t \in (0,T), \tag{25}$$
$$\delta u(0,y,t) = \delta u(\pi,y,t) = 0, \qquad y \in (0,\pi), \quad t \in (0,T), \tag{26}$$
$$\delta u(x,0,t) = \delta u(x,\pi,t) = 0, \qquad x \in (0,\pi), \quad t \in (0,T), \tag{27}$$
$$\delta u(x,y,0) = \delta q(x,y), \qquad x \in (0,\pi), \quad y \in (0,\pi), \tag{28}$$
$$\delta u_t(x,y,0) = 0, \qquad x \in (0,\pi), \quad y \in (0,\pi). \tag{29}$$

Рассмотрим тождественно равное нулю выражение, вытекающее из (25)

$$0 \equiv \int\limits_0^T \int\limits_0^\pi \int\limits_0^\pi (\delta u_{tt} - \delta u_{xx} - \delta u_{yy})\psi dxdydt$$

$$=\int_0^T\int_0^\pi\int_0^\pi \delta u_{tt}\psi dxdydt-\int_0^T\int_0^\pi\int_0^\pi \delta u_{xx}\psi dxdydt-\int_0^T\int_0^\pi\int_0^\pi \delta u_{yy}\psi dxdydt,$$

проинтегрируем по частям выражение

$$=\Big|_0^T\int_0^\pi\int_0^\pi \delta u_t\psi dxdy-\int_0^T\int_0^\pi\int_0^\pi \delta u_t\psi_t dxdydt-\Big|_0^\pi\int_0^T\int_0^\pi \delta u_x\psi dydt+$$

$$+\int_0^\pi\int_0^T\int_0^\pi \delta u_x\psi_x dxdydt-\Big|_0^\pi\int_0^T\int_0^\pi \delta u_y\psi dxdt+\int_0^\pi\int_0^T\int_0^\pi \delta u_y\psi_y dxdydt,$$

используем повторное интегрирование по частям

$$=\Big|_0^T\int_0^\pi\int_0^\pi \delta u_t\psi dxdy-\Big|_0^T\int_0^\pi\int_0^\pi \delta u\psi_t dxdy+\int_0^T\int_0^\pi\int_0^\pi \delta u\psi_{tt} dxdydt-$$

$$-\Big|_0^\pi\int_0^T\int_0^\pi \delta u_x\psi dydt+\Big|_0^\pi\int_0^T\int_0^\pi \delta u\psi_x dydt-\int_0^\pi\int_0^T\int_0^\pi \delta u\psi_{xx} dxdydt-$$

$$-\Big|_0^\pi\int_0^T\int_0^\pi \delta u_y\psi dxdt+\Big|_0^\pi\int_0^T\int_0^\pi \delta u\psi_y dxdt-\int_0^\pi\int_0^T\int_0^\pi \delta u\psi_{yy} dxdydt=$$

$$=\int_0^T\int_0^\pi\int_0^\pi (\psi_{tt}-\psi_{xx}-\psi_{yy})\delta u dxdydt+\int_0^\pi\int_0^\pi \delta u_t(x,y,T)\psi(x,y,T)dxdy-$$

$$-\int_0^\pi\int_0^\pi \delta u_t(x,y,0)\psi(x,y,0)dxdy-\int_0^\pi\int_0^\pi \delta u(x,y,T)\psi_t(x,y,T)dxdy+$$

$$+\int_0^\pi\int_0^\pi \delta u(x,y,0)\psi_t(x,y,0)dxdy-\int_0^T\int_0^\pi \delta u_x(\pi,y,t)\psi(\pi,y,t)dydt+$$

$$+\int_0^T\int_0^\pi \delta u_x(0,y,t)\psi(0,y,t)dydt+\int_0^T\int_0^\pi \delta u(\pi,y,t)\psi_x(\pi,y,t)dydt-$$

$$-\int_0^T\int_0^\pi \delta u(0,y,t)\psi_x(0,y,t)dydt-\int_0^T\int_0^\pi \delta u_y(x,\pi,t)\psi(x,\pi,t)dxdt+$$

$$+\int\limits_0^T\int\limits_0^\pi \delta u_y(x,0,t)\psi(x,0,t)dxdt+\int\limits_0^T\int\limits_0^\pi \delta u(x,\pi,t)\psi_y(x,\pi,t)dxdt-$$

$$-\int\limits_0^T\int\limits_0^\pi \delta u(x,0,t)\psi_y(x,0,t)dxdt.$$

Используя (26), (27), (29) получаем

$$=\int\limits_0^T\int\limits_0^\pi\int\limits_0^\pi(\psi_{tt}-\psi_{xx}-\psi_{yy})\delta u dxdydt+\int\limits_0^\pi\int\limits_0^\pi \delta u_t(x,y,T)\psi(x,y,T)dxdy-$$

$$-\int\limits_0^\pi\int\limits_0^\pi \delta u(x,y,T)\psi_t(x,y,T)dxdy+\int\limits_0^\pi\int\limits_0^\pi \delta u(x,y,0)\psi_t(x,y,0)dxdy-$$

$$-\int\limits_0^T\int\limits_0^\pi \delta u_x(\pi,y,t)\psi(\pi,y,t)dydt+\int\limits_0^T\int\limits_0^\pi \delta u_x(0,y,t)\psi(0,y,t)dydt-$$

$$-\int\limits_0^T\int\limits_0^\pi \delta u_y(x,\pi,t)\psi(x,\pi,t)dxdt+\int\limits_0^T\int\limits_0^\pi \delta u_y(x,0,t)\psi(x,0,t)dxdt.$$

Откуда вытекает постановка сопряженной задачи

$$\psi_{tt}=\psi_{xx}+\psi_{yy},\qquad x\in(0,\pi),\quad y\in(0,\pi),\quad t\in(0,T),\tag{30}$$

$$\psi\Big|_{x=0}=\psi\Big|_{x=\pi}=0,\qquad y\in(0,\pi),\quad t\in(0,T),\tag{31}$$

$$\psi\Big|_{y=0}=\psi\Big|_{y=\pi}=0,\qquad x\in(0,\pi),\quad t\in(0,T),\tag{32}$$

$$\psi\Big|_{t=T}=0,\qquad x\in(0,\pi),\quad y\in(0,\pi),\tag{33}$$

$$\psi_t\Big|_{t=T}=2[u(x,y,T)-f(x,y)],\qquad x\in(0,\pi),\quad y\in(0,\pi).\tag{34}$$

получаем выражение

$$0\equiv\int\limits_0^\pi\int\limits_0^\pi \delta u(x,y,T)\psi_t(x,y,T)dxdy-\int\limits_0^\pi\int\limits_0^\pi \delta u(x,y,0)\psi_t(x,y,0)dxdy.\tag{35}$$

Откуда, учитывая (28), из (35) получаем выражение для градиента функционала

$$J'q=\psi_t(x,y,0).\tag{36}$$

3 Численные результаты

3.1 Схема метода итераций Ландвебера

1. Задаем параметр спуска α.
2. Для известного точного решения q_T находим дополнительную информацию f, решая прямую задачу берем след решения.
3. Задаем начальное приближение q_0.
4. Предположим, что q_n уже известно, тогда решаем прямую задачу (6) – (10).
5. Считаем $J(q) = \|Aq - f\|^2$.
6. Если текущее значение функционала $J(q)$ – мало, то решаем сопряженную задачу (30) – (34).
7. Вычисляем градиент функционала $J'q = \psi_t(x, y, 0)$.
8. Вычисляем следующее приближение $q_{n+1}(x) = q_n(x) - \alpha J'q_n$, где $\alpha \in (0, \|A\|^{-2})$.

3.2 Схема решения прямой задачи

Аппроксимируем прямую задачу (6) – (10). Пусть N – количество узлов равномерной сетки на интервале $(0, \pi)$, а N_t – количество узлов равномерной сетки на интервале $(0, T)$. Определим шаг сетки: $h = \frac{\pi}{N}$.

$$\frac{u_{i,j}^{k+1} - 2u_{i,j}^{k} + u_{i,j}^{k-1}}{\tau^2} = \frac{u_{i+1,j}^{k} - 2u_{i,j}^{k} + u_{i-1,j}^{k}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1}^{k} - 2u_{i,j}^{k} + u_{i,j-1}^{k}}{h^2}, \tag{37}$$

$$u_{0,j}^{k} = u_{N,j}^{k} = 0, \tag{38}$$

$$u_{i,0}^{k} = u_{i,N}^{k} = 0, \tag{39}$$

$$u_{i,j}^{0} = q_{i,j}, \tag{40}$$

$$\frac{u_{i,j}^{1} - u_{i,j}^{0}}{\tau} = 0. \tag{41}$$

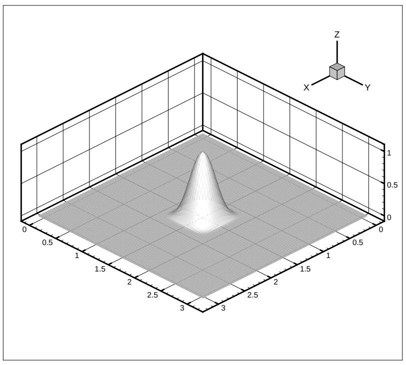

Рис. 1: График функции при $N_t = 0$

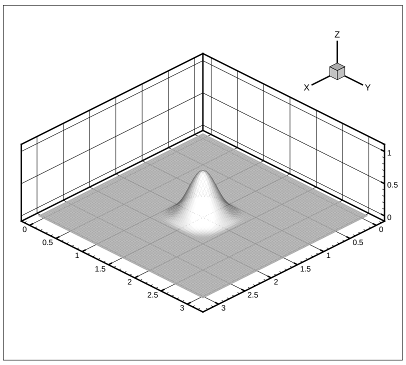

Рис. 2: График функции при $N_t = 100$

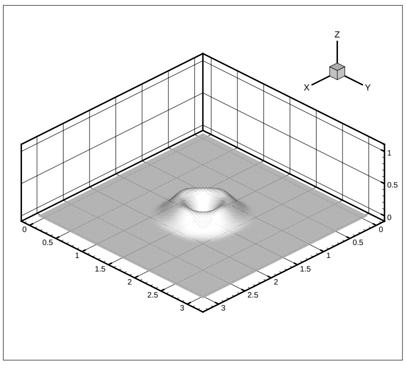

Рис. 3: График функции при $N_t = 250$

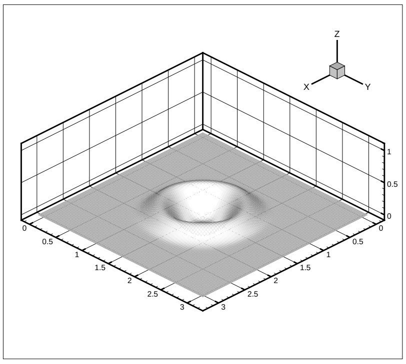

Рис. 4: График функции при $N_t = 500$

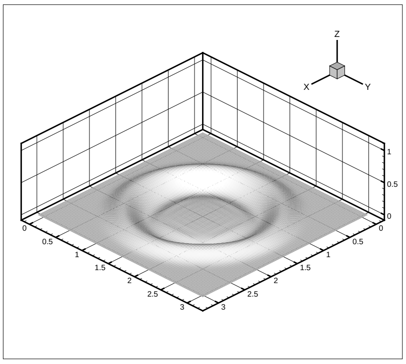

Рис. 5: График функции при $N_t = 1000$

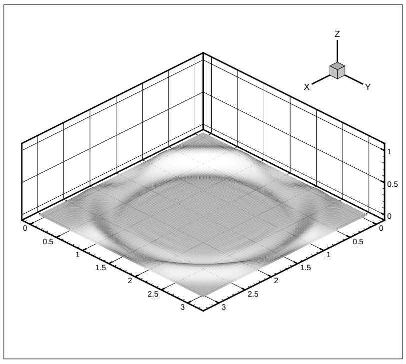

Рис. 6: График функции при $N_t = 1500$

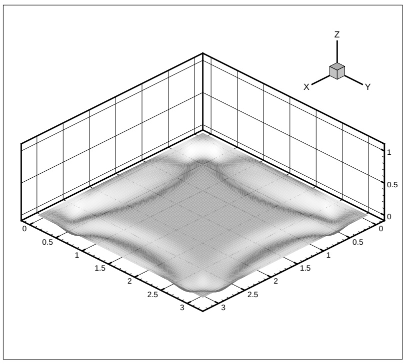

Рис. 7: График функции при $N_t = 2000$

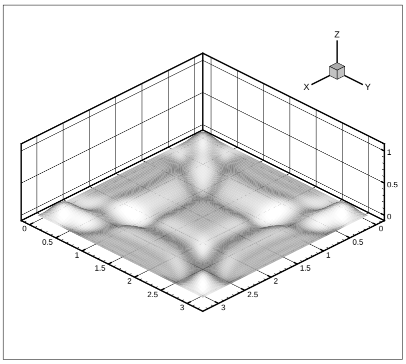

Рис. 8: График функции при $N_t = 2500$

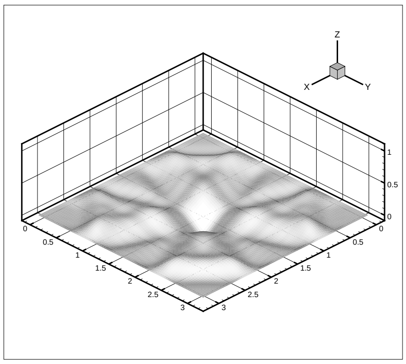

Рис. 9: График функции при $N_t = 3000$

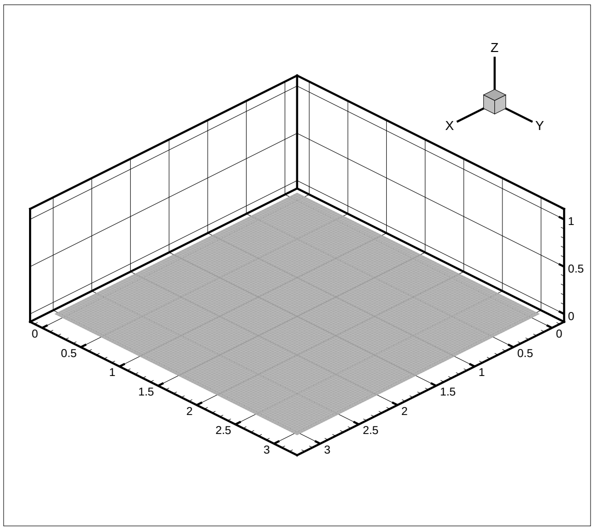

Рис. 10: График функции q_0

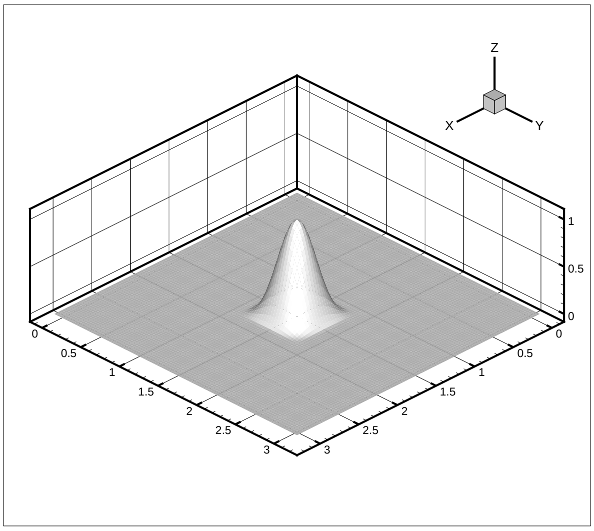

Рис. 11: График функции q_T

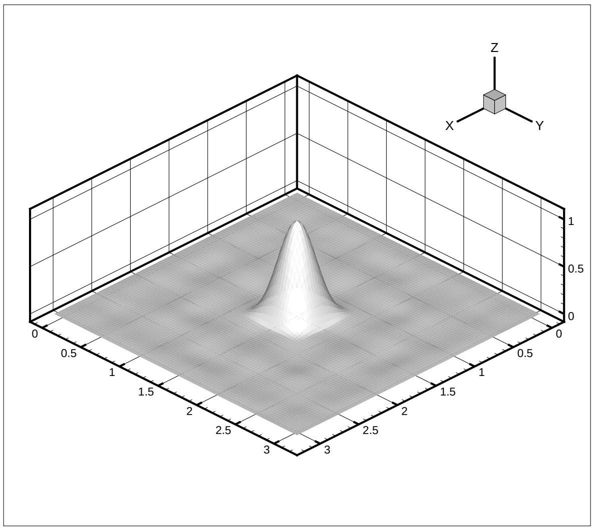

Рис. 12: График функции q_n

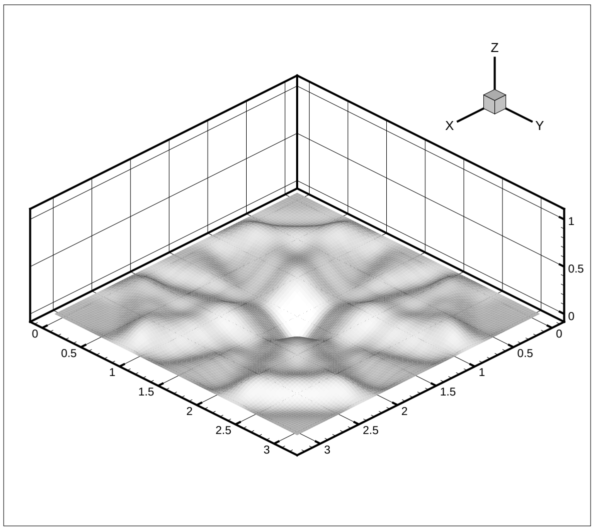

Рис. 13: График функции f

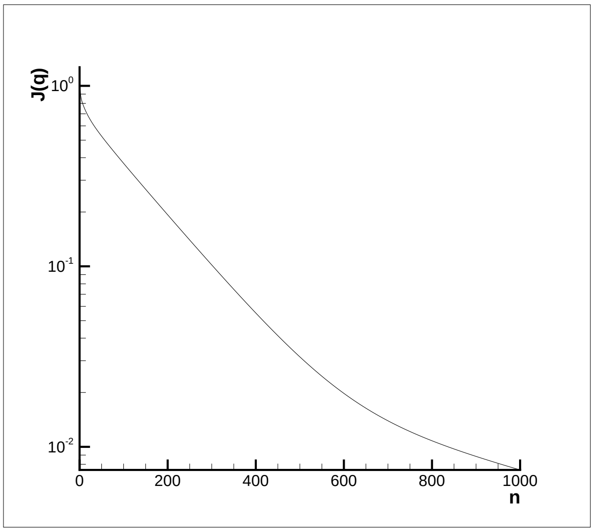

Рис. 14: График функционала $J(q)$

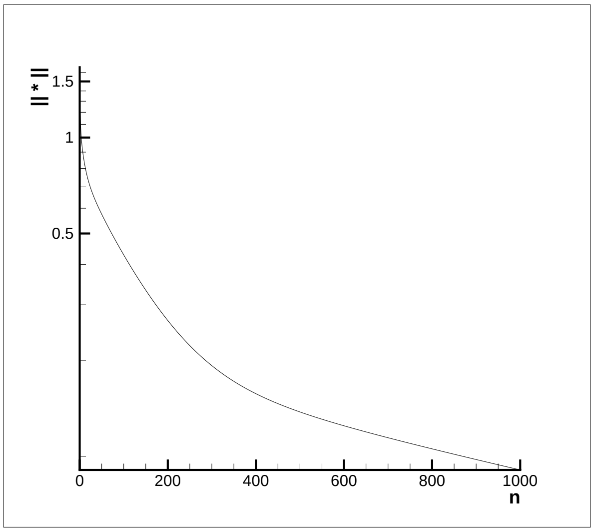

Рис. 15: График $\|q - q_T\|_{L_2}$

Перепишем формулы (37) – (41) в удобном для вычислений виде:

$$u_{i,j}^{k+1} = \frac{\tau^2}{h^2}(u_{i+1,j}^k + u_{i-1,j}^k + u_{i,j+1}^k + u_{i,j-1}^k - 4u_{i,j}^k) + 2u_{i,j}^k - u_{i,j}^{k-1} \tag{42}$$

$$u_{0,j}^k = u_{N,j}^k = 0, \tag{43}$$

$$u_{i,0}^k = u_{i,N}^k = 0, \tag{44}$$

$$u_{i,j}^0 = q_{i,j}, \tag{45}$$

$$u_{i,j}^1 = u_{i,j}^0. \tag{46}$$

Решив задачу получаем след решения f

$$u_{i,j}^{N_t} = f_{i,j}. \tag{47}$$

3.3 Описание численного эксперимента

Расчеты тестовой задачи проводились для $N = 100$, $N_t = 3000$, $h = \frac{\pi}{N}$, $\tau = 0,001$, параметр спуска – $\alpha = 1$, точное решение которой известно:

$$q_T(x,y) = \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos(8x)}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2} + \frac{\cos(8y)}{2}\right), \tag{48}$$

начальное приближение:

$$q_0(x,y) = 0 \tag{49}$$

На графиках отображены результаты численного решения прямой задачи (6) – (10) при разных значениях N_t

Список литературы

[1] *Бурский В.П.* Методы исследования граничных задач для общих дифференциальных уравнений. - Киев: Наукова думка, 2002.

[2] *Пташник Б.И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. - Киев: Наукова думка, 1984.

[3] *Кабанихин С.И.* Обратные и некорректные задачи. - Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009.

[4] *Кабанихин С.И., Бектемесов М.А., Нурсеитова А.Т.* Итерационные методы решения обратных и некорректных задач с данными на части границы. - Алматы-Новосибирск: ОФ «Международный фонд обратных задач», 2006.

[5] *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. - Москва: Наука, 1988.

[6] *Тихонов А.Н., Самарский А.* Уравнения математической физики. - Москва: Наука, 1972.

REVIEWS

N.S. Imanbaev, *On a nonlocal perturbation of the periodic eigenvalue problem.*
The Bulletin of KazNU, ser. math., mech., inf. 2011, №2(69), 9 – 12

We consider the spectral problem for multiple differentiation operator with an integral perturbation in one of the periodic boundary conditions. Built characteristic determinant of the spectral problem. It is shown that the basis property of systems of root functions of problem can vary for any arbitrarily small variation of the kernel of the integral perturbation.

A.D. Mazhitova, *The equations of geodesic curves of Carnot-Caratheodory metrics on three dimensional $SOLV^+$ solvable Lie group*,
The Bulletin of KazNU, ser. math., mech., inf. 2011, №2(69), 13 – 17

In this article we consider sub-Riemannian problem on three dimensional $SOLV^+$ solvable Lie group. We finded the equations of geodesic curves of Carnot-Caratheodory metrics.

A. A. Chekeyev, M. A. Abdraimova, *On existence of u - ultrafilters and their properties*
The Bulletin of KazNU, ser. math., mech., inf. 2011, №2(69), 18 – 23

In this paper u – ultrafilters, consisting of uniformly open cozero sets are considered. Different properties of u – ultrafilters have been established.

A. A. Chekeyev, Ch. A. Ablabekova, *On strong normality of Tichonov and uniform spaces.*
The Bulletin of KazNU, ser. math., mech., inf. 2011, №2(69), 24 – 28

The strongly normal, uniformly strongly normal and functional uniformly R– paracompact spaces classes are introduced. It is proved at the functional uniformly R – paracompact spaces class the $\mathcal{M}$ – fine spaces is equivalent to the uniformly strongly normality.

МАЗМУНЫ

Н.С. Иманбаев, *Мешiктi мәндердiң периодты есебiнiң локальды емес ауытқуы.*
ҚазҰУ хабаршысы, мат., мех., инф. сериясы 2011, №2(69), 9 – 12

Жұмыста бiрiншi периодты шеткi шарттардағы интегралдық ауытқуы бар еселiк дифференциалдық оператор үшiн спектралда есеп қарастырылған. Спектралды есептiң характеристикалық анықтауышы құралған. Интегралдық ауытқудың ядросының кез-келген аз өзгеруiнде есептiң түбiрлi функцияларының базистi жүйелерiнiң қ асиетi өзгеретiндiгi көрсетiлген.

А.Д. Мажитова, *Есептелiмдi үш өлшемдi $SOLV^+$ Ли тобындағы Карно-Каратеодори метрикасының геодезиялық қисықтардың теңдеулерi*,
ҚазҰУ хабаршысы, мат., мех., инф. сериясы 2011, №2(69), 13 – 17

Бұл жұмыста есептелiмдi үш өлшемдi $SOLV^+$ Ли тобындағы суб-Риман есебi қарастырылды. Карно-Каратеодори метрикасының геодезиялық қисықтардың теңдеулерi табылған.

А. А. Чекеев, М. А. Абдраимова, *u – ультрафильтрлердiң табылуы және олардың қасиеттерi туралы*,
ҚазҰУ хабаршысы, мат., мех., инф. сериясы 2011, №2(69), 18 – 23

Бұл мақалада бiркелкi ашық конуль-жиындардан тұратын u – ультрафильтрлерi қарастырылады. u – ультрафильтрлердiң әртүрлi қасиеттерi дәлелдендi.

А. А. Чекеев, Ч. А. Аблабекова, *Тихоновтық және бiркелкi кеңiстiктердiң күштi нормалдығы туралы*,
ҚазҰУ хабаршысы, мат., мех., инф. сериясы 2011, №2(69), 24 – 28

Күштi нормалды, бiркелкi кушті нормалды және функционалды бiртектi R – паракомпакты кеңiстiктерiнiң кластары енгiзiлген. Функционалды бiркелкi R – паракомпакты кеңiстiктердiң класында $\mathcal{M}$ – универсалдылықтың бiркелкi күштi нормалдылыққа парапар екенi дәлелденген.

A. A. Chekeyev, G. O. Namazova, On maximal centered systems of uniformly zero sets.
The Bulletin of KazNU, ser. math., mech., inf. 2011, №2(69), 29 – 33

In this paper it is considered a special class of maximal centered system, consisting of uniformly closed zero sets. So called z_u – ultrafilters. Properties of z_u – ultrafilters and their relationship with the set of maximal ideals of the ring $C^*(uX)$ have been established.

А. А. Чекеев, Г. О. Намазова, Біркелкі-нөл жиындардың максималды центрленген жүйелері туралы,
ҚазҰУ хабаршысы, мат., мех., инф. сериясы 2011, №2(69), 29 – 33

Бұл мақалада z_u – ультрафильтрлері деп аталатын біркелкі тұйық нөл-жиындардан тұратын максималды центрленген жүйелердің арнайы кластары қарастырылады. z_u – ультрафильтрлердің қасиеттері және олардың $C^*(uX)$ сақинасының максимал идеалдарының жиынымен байланысы зерттеледі.

А.М. Кунгожин, Описание позитивно экзистенционально замкнутых моделей класса Σ-структур с унарными предикатами, аксиоматизируемого h-универсальным предложением
Вестник КазНУ, сер. мат., мех., инф. 2011, №2(69), 39 – 43

Доказано, что конечно аксиоматизируемый класс h-универсальными предложениями в сигнатуре с унарными предикатами имеет конечное число позитивно экзистенционально замкнутых моделей, причем все они конечны. Приведен пример класса, аксиоматизируемого бесконечным числом h-универсальных предложений, класс позитивно экзистенционально замкнутых моделей которого не элементарный.

А.М. Кунгожин, h-универсалды сөлеммен аксиомаланған предикаттары унар Σ-модельдер класының позитив экзистенционалды-түйық модельдерінің сүреттемесі,
ҚазҰУ хабаршысы, мат., мех., инф. сериясы 2011, №2(69), 39 – 43

Предикаттары унар сигнатурада саны шектеулі h-универсалды сөлемдермен аксиомаланған класының позитив экзистенционалды-түйық модельдері шектеулі екендігі дәлелденген, және олардын барлығы шектеулі екендігі көрсетілінген. Позитив экзистенционалды-түйық модельдер класы элементар емес саны шексіз h-универсалды сөлемдермен аксиомаланған модельдер класының мысалы келтірілген.

A.S. Aipenova, A.A. Zhamalbekova, Correct boundary value problems for 4-order in nonhomogeneous differential equation with variable coefficients.
The Bulletin of KazNU, ser. math., mech., inf. 2011, №2(69), 44 – 51

In this paper discussed correct boundary value problems for 4-order in nonhomogeneous differential equation with variable coefficients in a finite interval.

А.С. Аипенова, А.А. Жамалбекова, Айнымалы коэффициентті төртінші ретті біртекті емес дифференциалдық теңдеулер үшін корректілі шекаралық есептер,
ҚазҰУ хабаршысы, мат., мех., инф. сериясы 2011, №2(69), 44 – 51

Бұл жұмыста кесіндідегі айнымалы коэффициентті төртінші ретті біртекті емес дифференциалдық теңдеулер үшін корректі шекаралық есептердің толық баяндамасы берілген.

D.B. Nurakhmetov, K.C. Tulenov, D. Dauitbek, Correct boundary value problems for 1st order in nonhomogeneous systems of differential equations with constant coefficients,
The Bulletin of KazNU, ser. math., mech., inf. 2011, №2(69), 52 – 57

In this paper discussed correct boundary value problems for 1st order in nonhomogeneous systems of differential equations with constant coefficients in a finite interval.

Д.Б. Нурахметов, К.С. Туленов, Д. Дјуітбек, Тұрақты коэффициентті бірінші ретті біртекті емес дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін корректілі шекаралық есептер,
ҚазҰУ хабаршысы, мат., мех., инф. сериясы 2011, №2(69), 52 – 57

Бұл жұмыста кесiндiдегi тұрақты коэффициенттi бiрiншi реттi бiртектi емес дифференциалдық теңдеулер жүйесi үшiн корректi шекаралық есептердiң толық баяндамасы берiлген.

A.K. Shaimerdenova, A.M. Tleulessova, L.N. Temirbekova, Correct solvability of non-homogeneous systems of linear algebraic equations with right-hand sides of the subspaces
The Bulletin of KazNU, ser. math., mech., inf. 2011, №2(69), 58 – 62

In this paper have been discussed correct boundary value problems for linear systems of algebraic equations. Solutions were found for the general case.

А.К. Шаймерденова, А.М. Тлеулесова, Л.Н. Темирбекова, Оң жағы iшкеңiстiктерден алынған бiртектi емес сызықты алгебралық теңдеулер жүйесiнiң корректiлi шешiлуi,
ҚазҰУ хабаршысы, мат., мех., инф. сериясы 2011, №2(69), 58 – 62

Бұл жұмыста сызықты алгебралық теңдеулер жүйесi үшiн қойылған корректiлi шекаралық есептердiң толық баяндамасы берiлген. Бұл есептердiң шешiмi жалпы жағдай үшiн табылған.

S.A. Aisagaliev, Sh.A. Aipanov, Optimal control of phase systems.
The Bulletin of KazNU, ser. math., mech., inf. 2011, №2(69), 63 – 72

A constructive method for solving boundary problems of optimal control for dynamic systems with cylindrical phase space is suggested.

С.Ә. Айсағалиев, Ш.Ә. Айпанов, Фазалық жүйелердi тиiмдi басқару.
ҚазҰУ хабаршысы, мат., мех., инф. сериясы 2011, №2(69), 63 – 72

Цилиндрлiк фазалық кеңiстiгi бар динамикалық жүйелер үшiн тиiмдi басқарудың шеттiк есептерiн шешудiн конструктивтiк әдiсi ұсынылған.

S.A. Aisagaliev, E.B. Zlobina, M.O. Kenjebayeva, Absolute stability of regular systems with limited resources in the simple critical case.
The Bulletin of KazNU, ser. math., mech., inf. 2011, №2(69), 73 – 81

The new method of defining the domain of absolute stability of regular systems in the simple critical case has been developed on the base of evaluation improper integrals on the solution set.

С.Ә. Айсағалиев, Е.Б. Злобина, М.О. Кенжебаева, Бiрiншi реттi қиындатылған жағдайында ресурстары шектеулi реттелетiн жүйелердiң абсолюттiк орнықтылыгы.
ҚазҰУ хабаршысы, мат., мех., инф. сериясы 2011, №2(69), 73 – 81

Жүйенiң шешiмдерiнiң маңайында меншiксiз интегралдарды бағалау бойынша, бiрiншi реттi қиындатылған жағдайында сызықтық емес шектеулi реттелетiн жүйелердiң тепе-теңдiк жағдайының абсолюттiк орнықтылығының критерийi алынған.

S.A. Aisagaliev, D.G. Shanazarov, *Absolute stability of regular systems with constrained resources for the critical case.*
The Bulletin of KazNU, ser. math., mech., inf. 2011, №2(69), 82 – 91

The new efficient algebraic criterion for absolute stability of equilibrium of nonlinear automatic control systems with constrained resources for the critical case has been developed

С.Ә. Айсағалиев, Д.Г. Шаназаров, *Сындарлы жағдайында ресурстары шектеулі реттелетін жүйелердің абсолюттік орнықтылығы.*
ҚазҰУ хабаршысы, мат., мех., инф. сериясы 2011, №2(69), 82 – 91

Сындарлы жағдайда ресурстары шектеулі автоматты басқарудың сызықты емес жүйелерінің тепе-теңдік жағдайындағы абсолюттік орнықтылығының жаңа тиімді алгебралық критерийі алынған.

Zh.Zh. Zhanabekov, *Solution to the problem of the boundary layer of non-Newtonian fluids by the variational method.*
The Bulletin of KazNU, ser. math., mech., inf. 2011, №2(69), 92 – 96

Stationary two-dimensional flow of non-Newton liquids in the border layer of flat plate is considered.
The general approach to resolving this issue by the method of local potential or of increase of general entropy results in consideration of close to stationary state.
The indicated variation method gives a profile of speeds, which depends on rheological index of non-Newton liquid for and results in resolution in such form, which is easier to operate, than, for example, the resolution in Blasius rows or numeric one.

Ж. Жанабеков, *Ньютондық емес сұйықтың шекаралық қабаты есебін вариациялық әдіспен шешу.*
ҚазҰУ хабаршысы, мат., мех., инф. сериясы 2011, №2(69), 92 – 96

Мақалада шектелген жазық пластина қабатындағы стационарлық екі өлшемді ньютондық емес сұйықтықтар ағыны қарастырылады.
Есепті шешудің жалпы жолы локальдық потенциалдық әдіске немесе жалпы энтропияның өсуінің стационарлық жағдайына жақын түрде таңдалған.
Көрсетілген вариациалық әдіс реологиялық индексті, ньютондық емес сұйықк а тәуелді төсемнің жылдамдығын береді. Мұндай форма Блазус немесе сандық қатардың шешіміне қарағанда әлдеқайда жеңіл.

N.S. Zaurbekov, *The numerical analysis and the prognosis of anomalies of atmospheric processes with use integrated functions*
The Bulletin of KazNU, ser. math., mech., inf. 2011, №2(69), 97 – 101

The problems considered in given work concern, at first, to the theory integrated functions to a solution of prognostic problems, secondly, to the further development of ideas of G.I.Marchuk under the long-term prognosis of atmospheric processes.

Н.С. Зәуірбеков, *Қарсы функциялар теориясын атмосфералық үрдістерді сандық талдау мен болжау есептеріне қолдану*
ҚазҰУ хабаршысы, мат., мех., инф. сериясы 2011, №2(69), 97 – 101

Жұмыста қаралған мәселелер қарсы функциялар теориясын болжау есептерін шешуге қолдануға және атмосфералық үрдістерді ұзақ мерзімді болжауға бағытталған Г.И. Марчук жұмысын ары қарай жалғастыруға арналған.

S.I. Kabanikhin, M.A. Bektemesov, D.B. Nurseitov, A.N. Alimova, Dirichlet problem for a two-dimensional wave equation by Landweber iteration,
The Bulletin of KazNU, ser. math., mech., inf. 2011, №2(69), 102 – 110

In this paper we consider the ill-posed Dirichlet problem for a two-dimensional wave equation. To solve the inverse problem of consistently solve the forward and adjoint problem by the Landweber iteration. At the end of the numerical results of solving the inverse problem.

С.И. Кабанихин, М.А. Бектемесов, Д.Б. Нурсеитов, А.Н. Алимова, Екі өлшемді толқын теңдеуі үшін Дирихле есебін Ландвебер итерация әдісімен шешу,
ҚазҰУ хабаршысы, мат., мех., инф. сериясы 2011, №2(69), 102 – 110

Мақалада екі өлшемді толқын теңдеуі үшін қисынды емес Дирихле есебі қарастырылады. Кері есепті шешу үшін Ландвебер итерация әдісімен тура және түйіндес есептер тізбектей шешіледі. Мақала соңында кері есепті шешудің сандық нәтижелері келтіріледі.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

1. *Абдраимова Махабат Асанбековна* – аспирантка кафедры алгебры, геометрии и топологии Кыргызского национального университета им. Ж. Баласагына.

2. *Аблабекова Чынара Азисовна* – старший преподаватель кафедры прикладной математики и информатики института новых информационных технологий Кыргызского государственного университета строительства, транспорта, архитектуры им. Н. Исанова

3. *Азанов Николай Прокопьевич* – доцент кафедры геометрии, алгебры и математической логики Казахского национального университета имени Аль-Фараби, кандидат физико-математических наук.

4. *Айсагалиев Серикбай Абдыгалиевич* – профессор кафедры теории управления Казахского национального университета имени Аль-Фараби, доктор технических наук.

5. *Айпанов Шамши Абилович* – доцент Казахского технологического университета, кандидат физико-математических наук.

6. *Айпенова Азиза Сраиловна* – научный сотрудник Институт математики КН МОН РК.

7. *Алимова Анель Нурданбековна* – докторант Казахского национального педагогического университета им. Абая.

8. *Бектемесов Мактагали Абдимажитович* – заместитель председателя Комитета по контролю в сфере образования и науки МОН РК, доктор физико-математических наук, профессор.

9. *Дәуітбек Достілек* – магистрант 1-го курса Казахского национального университета имени Аль-Фараби.

10. *Жамалбекова Асия Аскеровна* – лаборант Казахского национального университета имени Аль-Фараби.

11. *Жанабеков Ж.Ж.* – доцент Казахского национального университета имени Аль-Фараби.

12. *Заурбеков Нургали Сабырович* – доцент, заведующий кафедрой прикладной математики Казахского экономического университета имени Т. Рыскулова, кандидат физико-математических наук.

13. *Злобина Елена Борисовна* – доцент Казахского национального университета имени Аль-Фараби.

14. *Иманбаев Нурлан Сайрамович* – доцент Шымкентского Международного казахско-турецкого университета им. Х.А. Ясави, кандидат физико-математических наук.

15. *Кабанихин Сергей Игоревич* – ГНС Института вычислительной математики и математической физики СО РАН, доктор физико-математических наук, профессор

16. *Кангужин Балтабек Есматович* – профессор, заведующий кафедрой математического анализа Казахского национального университета имени Аль-Фараби, доктор физико-математических наук.

17. *Кенжебаева М.О.* – докторант Казахского национального университета имени Аль-Фараби.

18. *Кунгожин Алмаз Мухамбетович* – докторант Казахского национального университета имени Аль-Фараби.

19. *Манат Мустафа* – докторант Казахского национального университета имени Аль-Фараби.

20. *Мажитова Акмарал Даулетбаевна* – докторант Казахского национального университета имени Аль-Фараби.

21. *Намазова Гулиза Омурбековна* – аспирантка кафедры алгебры, геометрии и топологии Кыргызского национального университета им. Ж. Баласагына.

22. *Нурахметов Даулет Багдатович* – докторант Казахского национального университета имени Аль-Фараби.

23. *Нурсеитов Данияр Борисович* – доцент Казахского национального педагогического университета им. Абая, кандидат физико-математических наук.

24. *Темирбекова Л.Н.* – докторант Казахского национального университета имени Аль-Фараби.

25. *Тлеулесова А.М.* – докторант Казахского национального университета имени Аль-Фараби.

26. *Туленов Канат Серикович* – магистрант 1-го курса Казахского национального университета имени Аль-Фараби.

27. *Чекеев Асылбек Асакеевич* – профессор, декан факультета математики, информатики и кибернетики Кыргызского национального университета им. Ж. Баласагына, доктор физико-математических наук.

28. *Шаймерденова А.К.* – докторант Казахского национального университета имени Аль-Фараби.

29. *Шаназаров Даурен Гамалулы* – доцент Казахского национального университета имени Аль-Фараби.

©Издательство "Қазақ университеті"

Редакторы *Абдибеков У.С. (научный редактор), Данаев Н.Т. (зам. научного редактора)*
Корректор *Даирбаева Л.М. (ответ. секретарь)*
Компьютерная верстка *Азанов Н.П.*

ИБ N 867 Подписано в печать 28.06.2011 г. Формат 70 × 108 1/16. Бумага офсетная N 1. Печать офсетная
Уч.-изд. п.л. 7,56. Тираж 500 экз. Заказ N . Цена договорная.
4 раза в год.
Собственник — РГП "Казахский национальный университет имени аль-Фараби",
Издательство "Қазақ университеті" Казахского национального университета им. аль-Фараби. 050078, г. Алматы, пр. Аль-Фараби 71.

Отпечатано в типографии

.

ОБРАЗЕЦ ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЬИ

```
%%%MS=1000  MP=1000 RUS PX=-15 PY=-15
\documentclass[twoside,12pt,fleqn]{article}

\textwidth=165mm  \textheight=238mm
\pagestyle{myheadings}
\parindent 8mm                          % Абзацный отступ.
\parskip 2pt
\evensidemargin=\oddsidemargin
\usepackage{amsmath,amssymb,newlfont,mydef}
\usepackage[dvips]{graphicx}
\begin{document}
\renewcommand{\No}{\it N \hskip -0.46ex
            \raisebox{0.56ex}{\underline{$\scriptscriptstyle\circ$}}}
\newcommand{\god}{2004~}
\newcommand{\vipusk}{\No~ 1 (40)}
\newcommand{\ejournal}{The Bulletin of KazNU, ser. math., mech., inf. \god ,
            \vipusk }
\newcommand{\kjournal}{\К азМУ хабаршысы, мат., мех., инф. сериясы
           \god , \vipusk }
\newcommand{\rjournal}{Вестник КазНУ, сер. мат., мех., инф.
           \god , \vipusk  }
\renewcommand{\refname}{\centerline{Список литературы}}
\setcounter{secnumdepth}{3}
\renewcommand{\thesubsection}{\arabic{subsection}}
\renewcommand{\thesubsubsection}{\thesubsection.\arabic{subsubsection}}
\newtheorem{theo}{Theorem}
\newtheorem{cor}{Corollary}
\newtheorem{clai}{Claim}        % От начала файла
\newtheorem{lem}{Lemma}         % до первой закладки находится
\newtheorem{axio}{Axiom}        % преамбула  документа
\newtheorem{defi}{Definition}
\newtheorem{exa}{Example}
\newtheorem{pro}{Problem}
\newtheorem{notat}{Notation}
\newtheorem{rema}{Remark}
\newtheorem{propos}{Proposition}
\newtheorem{fct}{Fact}
\newtheorem{assu}{Assumption}   % Эти команды устанавливают независимые
\newtheorem{conj}{ Conjecture}  % между собой счетчики теорем, лемм и т.п.,
%                               % тело утверждения отделяется от остального
\newtheorem{theor}{Теорема}     % текста стандартной отбивкой, заголовок
\newtheorem{corol}{Следствие}   % определяется кличкой и печатается
\newtheorem{claim}{Предложение} % выделенным шрифтом (по умолчанию жирным, но
\newtheorem{axiom}{Аксиома}     % его  можно глобально изменить)
\newtheorem{lemma}{Лемма}       % а номер для соответствующей клички
\newtheorem{mudef}{Определение} % определяется его счетчиком. Тело самого
\newtheorem{exam}{Пример}       % утверждения печатается другим выделенным
\newtheorem{exerc}{Задача}      % шрифтом (по умолчанию \it, но
\newtheorem{prob}{Проблема}     % его  можно глобально изменить см. выше).
\newtheorem{hypot}{Гипотеза}
\newtheorem{rem}{Замечание}
\newtheorem{utver}{Утверждение }
```

```
\begin{center}\Large \bf
Исследование абсолютной устойчивости нелинейных интегрально-заданных систем
\end{center}
\vskip 5mm
\begin{center}
        {\sc И.А. Петров$^1$, А.И. Иванов$^2$\\
        \it $^1$Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы,
        Казахстан \\
        e-mail: petrov@mail.ru \\
            $^2$Институт динамики систем и теории управления СО РАН,
            Иркутск, Россия \\
        e-mail: ivanov@mail.ru}
\end{center}
                                                  \label{PETROV}
\begin{abstract}
   Моделируется гидродинамика Малого моря, включающая в себя следующие
процессы: ветровое перемешивание водной массы в море,
распространение примесей, поступающих в море с водной массой реки
Сыр-Дарья, влияние проточности моря на качественный состав воды в
Малом море.
\end{abstract}
\vskip 5mm
.......................

\begin{figure}[htbp]
\centerline{\includegraphics[width=3.80in,height=1.80in]{popris1.bmp}}
\begin{center}
\footnotesize{ Рис. 1. Способ разбиения сечения турбинной лопатки}
\end{center}
\end{figure}

\begin{figure}[htbp]
\centerline{\includegraphics[width=0.5\textwidth]{popris2.eps}}
\begin{center}
\footnotesize{ Рис. 2. Варианты представления вариантов выбора периодов
опубликования}
\end{center}
\end{figure}

\begin{thebibliography}{99}
\bibitem{u1}{\em Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.}
Оптимальное управление. -- М.: Наука, -- 1979, -- 574 с.
\bibitem{u2}{\em Иванов А.И.} Конструирование гибридных систем
управления с волновыми звеньями и с закрепленными концами. // Математический
журнал. -- Алматы, - 2003, - N3, -- С. 55-61.
\bibitem{u3}{\em Петров И.А.} Об особенностях асимптотического поведения решений
интегро-дифференциальных уравнений // Международная научно - практическая
конференция ``Проблемы вычислительной математики и информационных
технологии''. -- Алматы. - 1999. -- С. 163.
\end{thebibliography}
\label{PETROVFIN}

\input{kaz.tex}
\input{popref.tex}%(это файл реферата)
\end{document}
```

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

1. Статьи в журнал "Вестник КазНУ, сер. математика , механика, информатика" принимаются набранными только в текстовом формате LaTeX 2_εна казахском, русском или английском языках.
2. Статья должна сопровождаться письмом от учреждения, в котором выполнена данная работа, где указываются сведения об авторах : Ф.И.О. полностью, место их работы, должность (название вуза, центра без сокращений, факультета, кафедры), рабочий телефон, факс, e-mail, домашний адрес, домашний телефон.
3. Вместе с оттиском работы в двух экземплярах в редакцию представляются tex-файлы работы, реферата, головного файла и файлы рисунков на одной дискете формата 3.5 на 1,44 Мб. Название файла на латинице может содержать не более 8 букв из фамилии первого автора, например, *popova.tex*. Для файлов рисунков рекомендуемые названия типа *popris1.eps*, где *pop* – первые три буквы фамилии первого автора работы.
4. Объем статьи не должен превышать 8-ми страниц. В начале работы после заголовка и фамилий авторов работы помещается её аннотация на том же языке, на котором набран основной текст. Кроме сведений, которые можно почерпнуть из заголовка, аннотация должна отражать методы исследования, основные результаты статьи, их новизну и указывать на смежные работы. Автору необходимо также представить файл с рефератом своей работы, который является точным переводом аннотации на два остальных рабочих языка журнала из числа перечисленных в п.1. Использованная литература должна быть оформлены по требованиям ВАК РК, предъявляемым к диссертациям.
5. Графические файлы с рисунками должны быть только качественными черно-белыми в формате .eps , либо выполненными в латеховском формате. Рисунки в этих форматах делаются например с помощью мощных математических пакетов MapleV, Mathematica или с помощью пакета Latexcad. Качественные графические файлы сделанные другими графическими программами должны быть сконвертированы в формат .eps с помощью Adobe Photoshop или конвертера Conversion Artist. Все рисунки должны быть уже импортированными в tex-файл и представляются в редакцию вместе с основным файлом статьи. Графические форматы отличные от .eps или ЛАТЕХовских форматов отвергаются. Редакция вправе отказаться от включения в работу рисунка, если автор не в состоянии обеспечить его надлежащее качество.
6. Журнал придерживается единого стиля и поэтому предъявляет ряд общих требований к оформлению представляемых работ. Исходный неоттранслированный tex-файл должен целиком помещаться в горизонтальных рамках экрана за возможным исключением матриц и таблиц и транслироваться без протестов ЛАТЕХа и сообщений о кратных и неопределенных метках, больших переполненных и незаполненных боксах. Не следует определять много новых команд изобретая собственный сленг. Авторы могут подгружать другие стандартные стилевые пакеты, но только те, которые не входят в противоречие с пакетами amsmath и amssymb. Естественно файл, кроме всего прочего, должен быть проверен на отсутствие грамматических и стилистических ошибок. После списка литературы следует адрес места работы автора и его e-mail. Статьи не удовлетворяющие этим требованиям и требующие большой доработки не принимаются. Эталонный образец работы с демонстрацией графики, с преамбулой устраивающей редакцию, списки типичных ошибок оформления и методы их устранения можно получить в редакции или на сайте механико-математического факультета КазНУ им. аль-Фараби *http://mmf.kaznu.kz*.
7. Материалы следует направлять по адресу: 050012 Алматы, ул. Масанчи 39/47, корпус 4, Научно-исследовательский институт математики и механики Казахского национального университета им. аль-Фараби, каб. 407, т. (8727) 292 – 54 – 18. Электронная почта: Lazzat.Dairbaeva@kaznu.kz(ответ. секретарю редколлегии, доц. Даирбаевой Л.М.)
8. Уважаемые читатели, вы можете подписаться на наш журнал "Вестник КазГУ. Серия математика, механика, информатика", который включен в каталог ОАО "Казпочта" "ГАЗЕТЫ И ЖУРНАЛЫ". Количество номеров в год – 4. Индекс для индивидуальных подписчиков, предприятии и организаций – 75872, подписная цена за год – 1000 тенге; индекс льготной подписки для студентов – 25872, подписная цена за год для студентов – 500 тенге.