

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ  
БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ

---

**С. Қ. САХИЕВ**

**ВЕКТОРЛЫҚ ЖӘНЕ  
ТЕНЗОРЛЫҚ ТАЛДАУ НЕГІЗДЕРІ**

**Оқулық**

Алматы, 2012

ӘОЖ 514.7(075.8)  
КБЖ 22.151.5я73  
С-26

*Қазақстан Республикасы Білім және ғылым министрлігінің  
«Оқулық» республикалық ғылыми-практикалық орталығы бекіткен*

***Пікір жазғандар:***

физика-математика ғылымдарының докторы, профессор **М. М. Әбділдин**;  
физика-математика ғылымдарының докторы, профессор **М. Өтелбаев**;  
физика-математика ғылымдарының докторы, профессор **Н. Ж. Тәкібаев**.

**Сахиев С. Қ.**

**С 26 Векторлық және тензорлық талдау негіздері:** теориялық және қолданбалы физика мамандықтарының студенттеріне арналған оқулық / С. Қ. Сахиев – Алматы: 2012 – 208 б.

ISBN 978-601-217-360-4

Оқулықта векторлық және тензорлық талдаудың негіздері мейлінше жан-жақты қарастырылған. Табиғаттың тылсым құбылыстарын физикалық әдістермен зерттеудегі математикалық аппаратты пайдаланудың тиімді тәсілдері ұтымды көрсетілген.

Оқулық теориялық және қолданбалы физика мамандықтары бойынша даярланатын жоғары оқу орындарының студенттеріне, сонымен қатар өзінің үйлесімділігімен, көрнектілігімен ерекшеленетін математика ғылымының осы саласын өз бетінше игеруге ұмтылған оқырман қауымға арналады.

**ӘОЖ 514.7 (075.8)  
КБЖ 22.151.5я73**

© Сахиев С. Қ., 2012

© ҚР Жоғары оқу орындарының  
қауымдастығы, 2012

ISBN 978-601-217-360-4

---

## КІРІСПЕ СӨЗ

Оқулықтың негізін әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық Университетінің физика факультетінде бірнеше жылдар бойы оқыған дәрістерімнің топтамалары құрайды. Оқулық болашақта теориялық және қолданбалы физика мамандықтары бойынша еңбек жолдарын жалғастыратын студенттерге арналған және қажетті математикалық аппараттың осы саласын жетілдіре түсуді көздейді. Оқулықта келтірілген материалдардың көмегімен оқырмандар векторлық және тензорлық талдаудың әдіс-тәсілдерін игереді деген үмітім зор.

Кітап басты екі қағидаға негізделе отырып жазылды. Біріншіден, оқулық мазмұнының желісі өз бетімен есептеулерді жүргізуге көмекші құрал ретінде өрбісе, екіншіден, оқулықтағы алғашқы үш тараудың мәтінінде сілтемелер жасалғанымен әрқайсысын жеке, яғни өзгелерінен бөліп оқуға болады.

Математика тілі мен осы ғылымның әдістері өзінің үйлесімділігімен, көрнектілігімен ерекшеленетініне оқырман күмән келтірмейтініне кәміл сенемін. Бірақ осы сұлулықты бәрі бірдей көре алмайды: оны білгір ғана толыққанды бағалай алса, ал осы салаға алғаш қадам басқандар үшін – ол бірден көзге түсе бермейді. Сондықтан оқулық студенттерге мүмкіндігінше айқын әрі анағұрлым түсінікті болу үшін кей тұстарда математикалық түрлендірулердің егжей-тегжейіне тоқталмауды ұйғардым.

Осы айтылғандар математикалық қатаңдыққа да қатысты. Бір жағынан, математикалық аппаратты іс жүзінде пайдалануды тым қиындатып алмау мақсатында, екінші жағынан, мазмұндау логикасы мен қатаңдық деңгейін таразының басындай тең ұстауға тырыстым. Оқулықта математикалық формулаларды жөн-жосықсыз қолдануға қарсылық ретінде түсініктемелер берілген.

Кітаптың екінші басты қағидасы – білім алушыларға түрлі есептерді шешу әдістерінің ұтымдысын таңдауына мүмкіндік

жасау және математика мен теориялық, сондай-ақ қолданбалы ғылымдар арасындағы өзара байланысты көрсету.

Осы қағидалар оқулықтағы материалдарды таңдау мен реттестіру кезінде негізгі рөл атқарды. Мысалы, қисық сызықты координаталар жүйелерін анықтау барысында олардың тек декарттық координаталарымен байланысын, Ламе коэффициенттерінің формулаларын келтірумен шектелгеніміз жоқ. Сонымен қатар қандай да физикалық құбылысты зерттеудің қай координаталар жүйесінде тиімді болатынын, оның себептерін түсіндіруге тырыстық және мысалдар келтіре отырып, оларды шешудің көңілге қонымды, талдауға әсерлі жолдарымен таныстырдық.

Осы оқулықты жазу барысында көптеген жоғары білікті мамандардың ақыл-кеңестері пайдаланылды. Мені физика мен математика ғылымдарына баулыған ұстаздарым – қадірлі академиктер мен профессорларға шексіз алғысымды білдіремін. Өзімнің көптеген әріптестеріме олардың көмектері мен құнды сындары үшін ризашылығымды жеткіземін. Әрине, оқулықтың негізін құрайтын дәрістерімді тыңдаушы студенттік аудиторияның сынды ескертулері мен үшін ерекше маңызды болғанын айта кеткім келеді.

*С. Қ. Сахиев*

## ВЕКТОРЛЫҚ АЛГЕБРА

### 1.1 Негізгі түсініктер

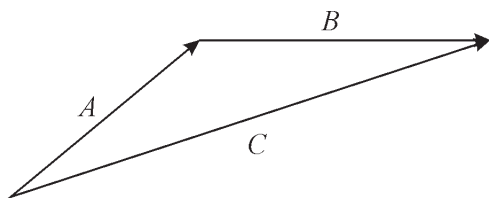
Ғылым мен техникада сандық мәнімен, яғни абсолют шамасымен ғана анықталатын шамалар жиі кездеседі. Мысалы, масса, уақыт, температура және т.б. Мұндай шамалар скалярлық деп аталады. Алайда кейбір шамалар сандық мәнімен ғана емес, сонымен қатар бағытымен де сипатталады. Мысалы: жылдамдық, үдеу, күш, импульс және т.б. Бұл шамалар – векторлық шамалар.

Жоғарыда аталған барлық векторлық шамалар механикада кездеседі. Алайда механиканың дамуы кезеңінде векторлық талдау мүлде пайдаланылмаған. Векторлық талдаудың қажеттілігі тек Максвелдің электромагниттік теориясы пайда болғаннан кейін ғана туындады. Себебі электр және магнит өрістерінің табиғаты векторлық болып табылады.

Кез келген векторлық шаманы графикалық түрде тілшікпен (стрелкамен) көрсету ыңғайлы болады. Себебі вектордың ұзындығы оның шамасына тепе-тең, ал оның бағыты – вектордың бағытын анықтайды. Әдетте осы тілшіктің бағыты оң ретінде қабылданады. Сонымен, аталған анықтамаға сәйкес векторлардың қосындысы:

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} \quad (1.1)$$

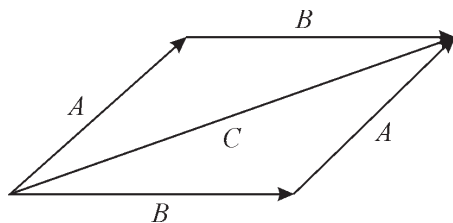
$\vec{A}$  векторының соңын  $\vec{B}$  векторының басымен қосуды білдіреді. Яғни,  $\vec{A}$  векторының соңы мен  $\vec{B}$  векторының басын қосатын тілшік  $\vec{C}$  векторын анықтайды. Векторларды қосудың осы (1.1) тәсілі үшбұрыш ережесі деп аталады (1.1-сурет).



1.1-сурет. Векторларды қосудың үшбұрыш ережесі

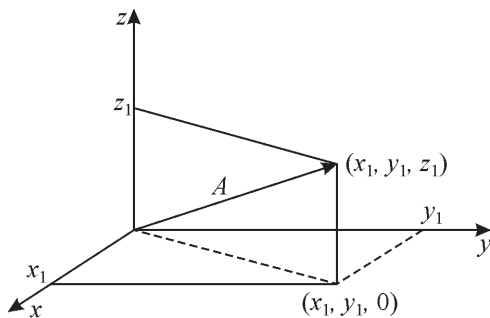
Үшбұрыш ережесін параллелограммға дейін толықтырып, параллелограмм ережесін таба аламыз (1.2-сурет).

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A} \quad (1.2)$$



1.2-сурет. Векторларды қосудың параллелограмм ережесі.

Жалпы, векторлар координат жүйелеріне тәуелсіз геометриялық нысандар. Мысалы,  $\vec{A}$  векторы (1.3-сурет) координаттар жүйесінің басынан басталып,  $(x_1, y_1, z_1)$  нүктесінде аяқталады.



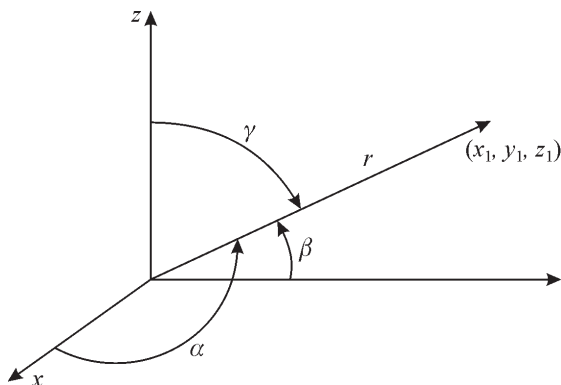
1.3-сурет. Декарттық координаталар жүйесіндегі вектордың құрамдас бөліктері

$\vec{A}$  таңбасымен кез келген векторлық шаманы (жылдамдық, үдеу, күш, импульс т.с.с.) белгілей аламыз. Бірақ кейбір шамаларды, мысалы, координаталар жүйесінің басынан  $(x_1, y_1, z_1)$  нүктесіне дейінгі арақашықтықты арнайы  $\vec{r}$  (радиус-вектор) таңбасымен белгілейді:

$$\vec{r} = (x_1, y_1, z_1), \quad (1.3)$$

$r$  – радиус-вектордың абсолют шамасы болсын. Демек,

$$x_1 = r \cdot \cos\alpha, \quad y_1 = r \cdot \cos\beta, \quad z_1 = r \cdot \cos\gamma. \quad (1.4)$$



**1.4-сурет.** Бағыттаушы косинустар

Мұндағы:  $\cos\alpha$ ,  $\cos\beta$  және  $\cos\gamma$  бағыттаушы косинустар деп аталады, ал  $\alpha, \beta$  және  $\gamma$  сәйкесінше –  $x, y$  және  $z$  осьтерінің оң бағыттары мен  $\vec{r}$ -векторының араларындағы бұрыштар (1.4-сурет).  $x_1, y_1$  және  $z_1$  шамаларын  $\vec{r}$  радиус-векторының (декарттық) құрамдас бөліктері немесе кескіндері деп атайды.

Кез келген  $\vec{A}$  векторын құрамдас бөліктерге жіктеуге болады:

$$A_x = A \cdot \cos\alpha, \quad A_y = A \cdot \cos\beta, \quad A_z = A \cdot \cos\gamma. \quad (1.5)$$

Енді  $\vec{i}, \vec{j}$  және  $\vec{k}$  бірлік векторларын енгізейік. Олардың ұзындықтары бірге тең және бағыттары  $x, y, z$  осьтерімен бағыт-тас болсын. Ендеше, векторларды қосу жолына сәйкес:

$$\vec{A} = \vec{i}A_x + \vec{j}A_y + \vec{k}A_z. \quad (1.6)$$

Егер  $\vec{A} = 0$  болса, онда  $A_x = A_y = A_z = 0$ . Пифагор теоремасына сәйкес  $\vec{A}$  векторының абсолют шамасы:

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

Векторлардың кескіндік бейнеленуін пайдаланып, олардың қосындысы мен айырымдарын табуға болады. Мысалы,  $\vec{A}$  векторы

$$\vec{A} = \vec{i}A_x + \vec{j}A_y + \vec{k}A_z$$

және  $\vec{B}$  векторы

$$\vec{B} = \vec{i}B_x + \vec{j}B_y + \vec{k}B_z$$

үшін келесі теңдік орынды:

$$\vec{A} \pm \vec{B} = \vec{i}(A_x \pm B_x) + \vec{j}(A_y \pm B_y) + \vec{k}(A_z \pm B_z). \quad (1.7)$$

### Жаттығулар

1.  $\vec{C}_1 = (\vec{A} + \vec{B})$  және  $\vec{C}_2 = (\vec{A} - \vec{B})$  векторлары берілген.  $\vec{A}$  және  $\vec{B}$  векторларын табу керек.

2. Екі нүкте:  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  және  $M_2(x_2, y_2, z_2)$  берілген.  $\overline{M_1M_2}$  векторын координаттық пішінде анықтаңыздар.

3. ABC үшбұрышының шыңдары берілген: A (1;1;1), B (3;0;1), C (0;3;1). BAC бұрышының биссектрисасының бойымен бағытталған векторға коллинеар (параллель) болатын бірлік векторын табыңыздар.

4.  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  және  $\vec{c}$  векторларынан үшбұрыш құрау үшін, векторлар қандай шарттарды қанағаттандыруы қажет?

5.  $\vec{A} = 5\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$  және  $\vec{B} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$  векторлары берілген.  $\vec{A} + \vec{B}$  және  $\vec{A} - \vec{B}$  табыңыздар.

6. Ұшақ ABC үшбұрышының AB, BC және CA жақтарын сәйкесінше  $t_1$ ,  $t_2$  және  $t_3$  уақыт аралықтарында ұшып өтеді. Ұшу

сапарында ұшақтың бағытына жел тұрақты  $\vec{w}$  жылдамдықпен кедергі келтіреді. Ұшақтың  $\vec{v}$  өзіндік жылдамдығы мен ұшақты ығыстыратын  $\vec{w}$  жылдамдығын анықтаңыздар.

7.  $\vec{A}$  векторының ұзындығы 10-ға тең және координаталар осьтерімен тең бұрыштарды құрайды. Табыңыздар:  $A_x$ ,  $A_y$  және  $A_z$ .

8.  $xu$  жазықтығында жататын,  $x$  және  $y$  осьтерімен бірдей бұрыш жасайтын бірлік вектордың құрамдас бөліктерін табыңыздар.

9. Үш вектордың қосындысын табыңыздар. Олардың ұзындықтары  $a$ -ға тең және олардың бағыттары:

- а) кубтың шыңынан басталатын үш қабырғалары;
- б) дұрыс үшбұрышты пирамиданың шыңынан қабырғалары бойымен бағытталған болса.

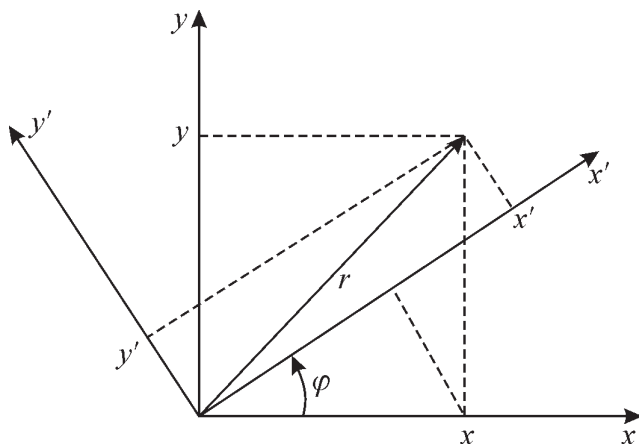
## 1.2 Координаталар жүйесінің бұрылуы

Математикалық тұрғыдан векторды оның абсолют шамасы және бағытымен анықтау тым қатал емес. Мысалы, кейбір шамалар (серпімділік коэффициенті, анизотроптық кристалдардағы сыну коэффициенті) абсолюттік шамаларымен және бағыттарымен сипатталғанмен, векторлық шама бола алмайды. Бұған қоса, вектордың аталған анықтамасы ыңғайсыздықтар туғызып қана қоймай, одан күрделірек шамалар үшін жалпыландыруға да келмейді.

Енді  $\vec{r}$  радиус-векторды пайдаланып, вектордың жаңа анықтамасын берелік. Жаңа анықтаманы енгізудің физикалық маңызды себептері бар. Біз қоршаған өмірді математиканың көмегімен сипаттаймыз. Алайда физикалық сипаттау математикалық аппаратқа тәуелсіз болуы керек. Бұдан әрі кеңістікті изотропты деп қарастырамыз. Демек, зерттелетін физикалық жүйе немесе физикалық заң координаталар жүйесін таңдауға және оның бағыт-бағдарына тәуелсіз болуы қажет.

Бастапқы  $\vec{r}$  радиус-векторына қайта оралайық. Енді  $\vec{r}$  радиус-векторын екі әртүрлі жүйелерде қарастырамыз, яғни біріншісі

екіншісімен салыстырғанда қандай да бұрышқа бұрылған болсын. Жеңілдік үшін екі өлшемді жағдаймен шектелейік (1.5-сурет).



1.5-сурет. Декарттық координаталар жүйесінің бұрылысы

Егер  $x$  және  $y$  осьтері сағат тілінің бағытына қарама-қарсы  $\varphi$  бұрышына бұрылған және оған қоса  $\vec{r}$  радиус-векторы бекітілген болса, келесі қатынастарды жазуға болады:

$$x' = x \cos \varphi + y \sin \varphi, \quad y' = -x \sin \varphi + y \cos \varphi \quad (1.8)$$

Мұндағы:  $(x, y)$  қозғалмаған және  $(x', y')$  бұрылған жүйелердегі координаталар.

Векторды оның соңғы нүктесінің координаттары көмегімен бейнелеуге болатынын көрсеттік (1.1-бөлім). Басқаша айтқанда, осы нүктенің координаттары вектордың құрамдас бөліктеріне тепе-тең болады. Демек, координаталар осьтерінің бұрылысында вектордың құрамдас бөліктері нүктенің координаталары (немесе  $\vec{r}$  радиус-векторы) тәрізді түрлендірілуі қажет. Егер  $x, y$  декарттық координаталар жүйесіндегі кез келген  $(A_x, A_y)$  шамалар жұбы осы координаталар жүйесінің бұрылысында  $(A'_x, A'_y)$  жұбы төмендегідей түрлендірілсе:

$$A'_x = A_x \cos \varphi + A_y \sin \varphi, \quad A'_y = -A_x \sin \varphi + A_y \cos \varphi, \quad (1.9)$$

онда  $A_x, A_y$  жұбы  $\vec{A}$  векторының құрамдас бөліктері болып саналады. Сонымен,  $\vec{A}$  векторы координаталар жүйесінің бұрылуы кезінде *вектор құрамдас бөліктерінің түрлендіру заңымен* анықталды. Егер координаталар жүйесінің бұрылысында  $A_x$  және  $A_y$  өзгеше түрлендірілсе, онда олардан вектор құруға болмайды.

Вектордың анықтамасы толығырақ болуы үшін (1.9) теңдеуіндегі  $A'_x$  және  $A'_y$  шамаларын айқындайық. Ол үшін  $\vec{A}$  векторын координаттар және кез келген  $\vec{C}$  тұрақты векторы құрамдас бөліктерінің қызметі ретінде қарастырамыз:

$$A_x = A_x(x, y, C_x, C_y), \quad A_y = A_y(x, y, C_x, C_y). \quad (1.10)$$

Бұрылған координаталар жүйесінде  $\vec{A}$  векторының құрамдас бөліктері:

$$\begin{aligned} A'_x &= A'_x(x', y', C'_x, C'_y), \\ A'_y &= A'_y(x', y', C'_x, C'_y). \end{aligned} \quad (1.11)$$

(1.8) теңдеуін пайдаланып,  $x', y', C'_x, C'_y$  координаттарын бұрылмаған координаталар жүйесімен  $\varphi$  бұрылу бұрышы арқылы сипаттауға болады. Шындығында қандай да бір бұрылу бұрышына тәуелділік болуы қажет. Бірақ мұндай тәуелділіктің бағдарға байланыстылығы болмағаны жөн. Сол себепті бағдарға тәуелсіз функцияларды қарастырумен шектелеміз. Сондықтан дербес жағдайда  $\varphi = 0$  болғанда, онда

$$A_x = A'_x, \quad A_y = A'_y.$$

### Мысалдар:

1.  $(-y, x)$  шамаларының жұбы берілсін. Осы шамалар екі өлшемді вектор құратынын көрсетіңіздер.

Жүйені  $\varphi$  бұрышына бұрғанда, осы шамалардың түрленуін қарастырайық.

$$V'_x = -y \cos \varphi + x \sin \varphi, \quad V'_y = y \sin \varphi + x \cos \varphi,$$

мұндағы  $V_x = -y$ ,  $V_y = x$  (1.8) теңдеуін пайдаланып,  $V'_x = -y'$  және  $V'_y = x'$  екенін көреміз. Яғни, (1.9) теңдеуін қанағаттандырады. Демек,  $(-y, x)$  жұбы – вектордың құрамдас бөліктері болып табылады.

2. Енді  $\vec{V} = \vec{i}x - \vec{j}y = (x, -y)$  қарастыралық. (1.8) теңдеуіне сәйкес:

$$V'_x = x' = x \cos \varphi + y \sin \varphi, \quad V'_y = -y' = x \sin \varphi - y \cos \varphi.$$

$V_x = x$  және  $V_y = -y$  болғандықтан,

$$V'_x = V_x \cos \varphi - V_y \sin \varphi, \quad V'_y = V_x \sin \varphi + V_y \cos \varphi.$$

Бұл қатынастар вектордың анықтамасын қанағаттандырмайды. Сондықтан,  $(x, -y)$  вектордың құрамдас бөліктері бола алмайды.

Үш және  $n$ -өлшемді кеңістіктерге өту үшін оңтайлы жазу тәсілдерін пайдаланалық:

$$x = x_1, \quad a_{11} = \cos \varphi, \quad a_{12} = \sin \varphi, \tag{1.12}$$

$$y = x_2, \quad a_{21} = -\sin \varphi, \quad a_{22} = \cos \varphi$$

Онда (1.9) теңдеуін төмендегідей жазуға болады:

$$x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \quad x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \tag{1.13}$$

$a_{ij}$  коэффициенттерін бағыттаушы косинустармен теңестіруге болады ( $x'_i$  және  $x_j$  араларындағы бұрыштың косинусы ретінде):

$$a_{12} = \cos(x'_1, x_2) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin \varphi,$$

$$a_{21} = \cos(x'_2, x_1) = \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \varphi.$$

Сонымен, (1.13) теңдеуін қысқаша былайша жазуға келеді:

$$x'_i = \sum_{j=1}^2 a_{ij} x_j, \quad i=1,2. \quad (1.14)$$

Енді осы теңдеуді 3, 4 және одан да көп өлшемді жағдайлар үшін оңай жазуға болады. Егер  $N$  – өлшемді  $\vec{V}$  векторының құрамдас бөліктері  $V_j$  ( $j=1, \dots, N$ ) басқа (бұрылған) жүйеде мына теңдеумен :

$$V'_i = \sum_{j=1}^N a_{ij} V_j, \quad i=1,2, \dots, N, \quad (1.15)$$

берілетін болса ғана, осы құрамдас бөліктер  $N$  – өлшемді  $\vec{V}$  векторын құрайды деп атауға болады. Мұндағы  $a_{ij}$  -  $x'_i$  және  $x_j$  осьтері арасындағы бұрыштың косинусы.

Демек,  $a_{ij}$  коэффициентінің анықтамасын декарттық координаттарда былайша жазуға болады (бұған 3-тарауда арнайы тоқталамыз):

$$a_{ij} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} = \frac{\partial x_j}{\partial x'_i}. \quad (1.16)$$

Бұл *дербес туындылар*. Осы (1.16) теңдеуін (1.15) теңдеуіне қойып, бұрылған жүйедегі мынадай теңдеуді аламыз:

$$V'_i = \sum_{j=1}^N \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} V_j = \sum_{j=1}^N \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} V_j. \quad (1.17)$$

Бағыттаушы косинустар  $a_{ij}$  ортогоналдық шарттарын қанағаттандырады,

$$\sum_i a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk}, \quad (1.18)$$

немесе

$$\sum_i a_{ji} a_{ki} = \delta_{jk}. \quad (1.19)$$

Мұндағы  $\delta_{jk}$  – Кронекер таңбасы деп аталады және төмендегідей анықталады:

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{егер } j = k, \\ 0, & \text{егер } j \neq k. \end{cases} \quad (1.20)$$

(1.12) теңдеуіндегі  $a_{ij}$  мәндерін (1.18) және (1.19) өрнектеріне қоятын болсақ, онда белгілі теңдікті аламыз:

$$\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$$

(1.18) теңдеуінің дұрыстығына көз жеткізу үшін (1.16) өрнегін пайдаланайық:

$$\sum_i \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial x'_i} = \sum_i \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} \cdot \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} = \frac{\partial x_j}{\partial x_k} \quad (1.21)$$

*Қорытынды.* Вектордың құрамдас бөліктерін түрлендіру заңын енгізу нәтижесінде вектордың жаңа анықтамасынан екі маңызды қорытынды жасаймыз:

1. әртүрлі физикалық құбылыстарды сипаттауға қолайлы;
2. математиканың жаңа бөлімі – тензорлық талдауға көшуге негіз береді.

### Жаттығулар

1. Тұрақты  $\vec{V}$  ( $V_x = 1, V_y = 0$ ) векторы берілген. Бұрылған координаталар жүйесінде осы вектордың құрамдас бөліктері  $V'_x = \cos \varphi, V'_y = -\sin \varphi$  болатынын көрсетіңіздер. (Тұрақты векторды енгізу арқылы, кеңістіктегі анықталған бағытты ерекшеледік).

2. Келесі шамаларды:

- а)  $(x-y, x+y, 0)$  векторын  $z$  осінің бойымен;
- б)  $(0, 2z+y, z-2y)$  векторын  $x$  осінің бойымен;
- в)  $(y^2 + z^2, -xy, -xz)$  векторын әрбір осьтердің бойымен бұрғанда, вектордың түрлендіру заңын, яғни (1.15) теңдеуін қанағаттандыратынын тексеріңіздер.

3.  $(xyC_x + y^2C_y, -x^2C_x - xyC_y)$  және  $(xyC_x - x^2C_y, y^2C_x - xyC_y)$  шамаларының әр қайсысы вектор құратынын дәлелдеңіздер. Мұндағы  $C_x$  және  $C_y$  шамалары тұрақты  $\vec{C}$  векторының құрамдас бөліктері.

4. Кез келген координаталардың осьтері бойынша бұрылыстарды зерттеп, келесі сұраққа жауап беріңіздер:

$$V_x = a_1(x^2 + y^2 + z^2),$$

$$V_y = a_2(x^2 + y^2 + z^2),$$

$V_z = a_3(x^2 + y^2 + z^2)$ , шамалары вектордың құрамдас бөліктері бола ма (мұндағы  $a_i$  – тұрақтылар)?

5. Екі өлшемді  $\vec{V}$  векторы  $(ax+by, cx+dy)$  түрінде берілген, мұндағы  $a, b, c, d$  – тұрақты сандар.  $\vec{V}$  векторы радиал  $\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y$  және тангенциал  $\vec{t} = \vec{i}y - \vec{j}x$  векторлардың сызықтық комбинациясы, яғни  $\vec{V} = a\vec{r} + b\vec{t}$  болатынын дәлелдеңіздер.

*Ескерту.* Векторлық түрлендіру заңы кез келген бұрыш және кез келген нүкте  $(x, y)$  үшін орындалады.

### 1.3 Скалярлық көбейтінді

Векторларды көбейту заңдары бір-біріне математикалық қайшы келмеуі керек. Әзірге барлық мүмкін болатын анықтамалар арасынан физикалық және математикалық тұрғыдан қызығырақ болатын екі жағдайды қарастырайық.

$A \cdot B \cdot \cos\theta$  түрінде берілген көбейтінді физикада жиі кездеседі. Мұндағы  $A, B$  екі вектордың абсолют шамалары және  $\theta$  – олардың арасындағы бұрыш.

Мысалы: жұмыс = күш × жол ×  $\cos\theta$ .

Енді скалярлық көбейтіндіні төмендегідей анықтайық:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = \sum_i A_i B_i \quad (1.22)$$

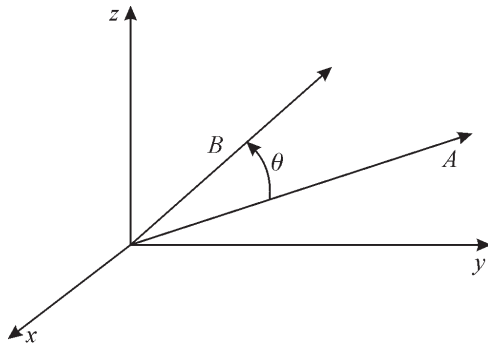
(1.22) өрнегінен  $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$  теңдігі орындалатынын көреміз. Бірлік векторлар келесі қатынастарды қанағаттандырады:

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1, \quad (1.22a)$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = \vec{k} \cdot \vec{j} = 0. \quad (1.22b)$$

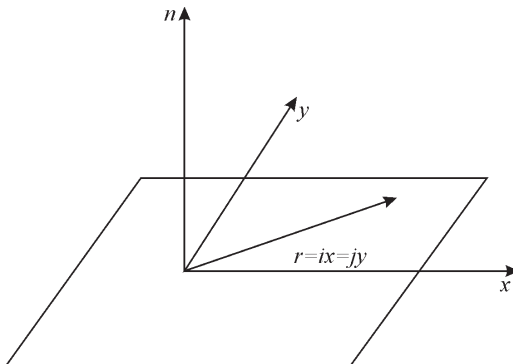
Егер осьтерді қайта бағдарлап,  $x$  осін  $\vec{A}$  векторы бойынша бағыттасақ (1.6-сурет), онда  $A_x = A$ ,  $A_y = A_z = 0$  және  $B_x = B \cdot \cos\theta$  болады. Олай болса, (1.22) теңдеуінен келесі өрнекті аламыз:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot B \cdot \cos\theta. \quad (1.23)$$



1.6-сурет. Скалярлық көбейтінді

Егер  $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$  және  $\vec{A} \neq 0$ ,  $\vec{B} \neq 0$  болса, онда (1.23) теңдеуінен келесі қорытынды шығады:  $\theta = 90^\circ, 270^\circ$  және т.с.с. Басқаша айтқанда,  $\vec{A}$  және  $\vec{B}$  – өзара перпендикуляр немесе олар ортогоналды векторлар.  $\vec{i}, \vec{j}$  және  $\vec{k}$  векторлары да өзара ортогоналды.



1.7-сурет.

Ортогоналдылық түсінігін одан әрі дамыту үшін  $\vec{n}$  – бірлік векторы, ал  $\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y - x, y$  жазықтығында жататын нөлдік емес вектор ретінде қабылдайық. Егер  $\vec{n} \cdot \vec{r} = 0$  болса, мұндағы  $\vec{r}$  – кез келген вектор, онда  $\vec{n}$  векторы  $xu$  жазықтығына перпендикуляр орналасады (1.7-сурет).

Енді скалярлық аталуын ақтайтынына көзімізді жеткізелік. Ол үшін  $\vec{A} \cdot \vec{B}$  көбейтіндісін координаталар жүйесінің бұрылуы кезінде зерттейік. (1.15) теңдеуінің көмегімен скалярлық көбейтіндіні келесі түрде жазамыз:

$$A'_x \cdot B'_x + A'_y \cdot B'_y + A'_z \cdot B'_z = \quad (1.24)$$

$$= \sum_i a_{xi} A_i \sum_j a_{xj} B_j + \sum_i a_{yi} A_i \sum_j a_{yj} B_j + \sum_i a_{zi} A_i \sum_j a_{zj} B_j$$

$k$  және  $l$  көрсеткіштерін пайдаланып, келесі өрнекті аламыз:

$$\sum_k A'_k B'_k = \sum_l \sum_i \sum_j a_{li} A_i a_{lj} B_j = \quad (1.25)$$

$$= \sum_i \sum_j \sum_l (a_{li} a_{lj}) A_i B_j = \sum_i \sum_j \delta_{ij} A_i B_j = \sum_i A_i B_i \quad (1.26)$$

ал (1.26) өрнегі келесі теңдікке жеткізеді:

$$\sum_k A'_k B'_k = \sum_i A_i B_i \quad (1.27)$$

Сонымен, скалярлық шаманың анықтамасына сәйкес, ол (скалярлық шама) координаталар жүйесінің бұрылысына **инвариантты**.

Аналогиялы түрде, скалярлық көбейтіндінің инварианттылығын пайдаланып,  $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$  векторының өз-өзіне көбейтіндісін қарастырайық:

$$\vec{C} \cdot \vec{C} = (\vec{A} + \vec{B}) \cdot (\vec{A} + \vec{B}) = \vec{A} \cdot \vec{A} + \vec{B} \cdot \vec{B} + 2\vec{A} \cdot \vec{B}, \quad (1.28)$$

$$\vec{C} \cdot \vec{C} = C^2, \quad (1.29)$$

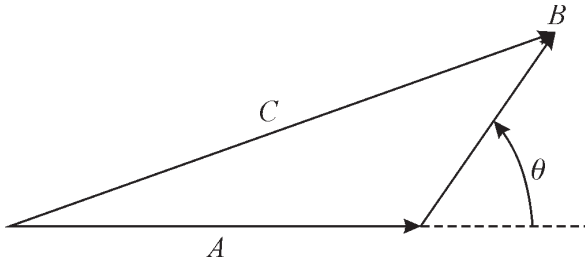
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \frac{1}{2}(C^2 - A^2 - B^2). \quad (1.30)$$

$\vec{A} \cdot \vec{B}$  векторының көбейтіндісі координаталар жүйесінің бұрылысына инвариантты, себебі (1.30) теңдеуінің оң жағы скалярлық шама.

(1.28) теңдеуіне (1.23) өрнегін қойып, қайта жазалық:

$$C^2 = A^2 + B^2 + 2A \cdot B \cdot \cos\theta. \quad (1.31)$$

Бұл – *косинустар заңы* деп аталады, осы косинустар заңы 1.8-суретте кескінделген.



1.8-сурет. Косинустар заңы

(1.28) және (1.31) теңдеулерін салыстырып, косинустар заңының векторлық табиғатына тағы да көзімізді жеткіземіз.

### Жаттығулар

1. Екі вектордың бағыттаушы косинустары  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  және  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$  берілген. Скалярлық көбейтіндіні пайдаланып,  $\cos\theta = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2$  екенін көрсетіңіздер. Мұндағы  $\theta$  – векторлар арасындағы бұрыш.

2.  $\vec{A} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$  және  $\vec{B} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$  векторларының арасындағы бұрышты табыңыздар. (Жауабы:  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ).

3. Екі бірлік векторлар  $\vec{a}_i$  және  $\vec{a}_j$  не параллель, немесе перпендикуляр. Бағыттаушы косинустардың ортогоналдылығы (1.18) теңдеуіне сәйкес осы векторлардың скалярлық көбейтіндісінен шығатынын көрсетіңіздер.

4.  $\vec{a} = \vec{i}m \cos \varphi + \vec{j}m \sin \varphi$  және  $\vec{b} = \vec{i}n \cos \varphi + \vec{j}n \sin \varphi$  векторларының арасындағы бұрышты табыңыздар.

5. Екі вектор берілген:  $\vec{l}_1 = 3\vec{a} - 2\vec{b} - \vec{c}$  және  $\vec{l}_2 = 3\vec{b} - 2\vec{c} - \vec{a}$ . Осы екі вектормен үшбұрыш құрайтын векторды табыңыздар.

6.  $\vec{a} = \vec{i}\alpha \cos \varphi + \vec{j}\alpha \sin \varphi$  векторы берілген.  $|\vec{a}|$  – векторының модулін және  $\vec{a}_0$  – бірлік векторын табыңыздар.

7. ABC үшбұрышында  $\vec{a} = \overline{AB}$  және  $\vec{b} = \overline{BC}$  векторлары берілген.  $m_1, m_2, m_3$  – үшбұрыш қабырғаларының орталары.  $\overline{Am_1}$ ,  $\overline{Bm_2}$  және  $\overline{Cm_3}$  векторларын табыңыздар.

8.  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  және  $\vec{c}$  векторлары үшбұрышты құрайды. Табу керек:  $(\vec{a} \cdot \vec{F}) + (\vec{b} \cdot \vec{F}) + (\vec{c} \cdot \vec{F})$ .

9. Үшбұрыштың шыңдары берілген:  $A(-1; 1)$ ,  $B(-5; 4)$ ,  $C(7; 7)$ .  $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$  және үшбұрыштың ауданын табыңыздар.

10.  $\vec{a}(6; -8; 5\sqrt{2})$  және  $\vec{b}(2; -4; \sqrt{2})$  векторлары берілген.  $\vec{a} - \vec{b}$  векторы мен  $Oz$  осінің арасындағы бұрышты табыңыздар.

11.  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  бірлік векторлары келесі шартты қанағаттандыратынын  $\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 = 0$  пайдаланып,  $(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 + \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 + \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1)$  шамасын табыңыздар.

## 1.4 Векторлық көбейтінді

Векторлық көбейтіндіде екі вектордың арасындағы бұрыштың синусын пайдаланады.

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}, \quad (1.32)$$

мұндағы:  $C = A \cdot B \cdot \sin \theta$ . Бірақ скалярлық көбейтіндімен салыстырғанда мұндағы  $\vec{C}$  – вектор, ал оның бағыты  $\vec{A}$  және  $\vec{B}$  векторлары жатқан жазықтыққа перпендикуляр болады. Бұған қоса,  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  және  $\vec{C}$  векторларының жинағы оң координаталар жүйесін құрайды. Бағыттарды осылайша таңдағандықтан, антикоммутация шартын қанағаттандырады

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}. \quad (1.32a)$$

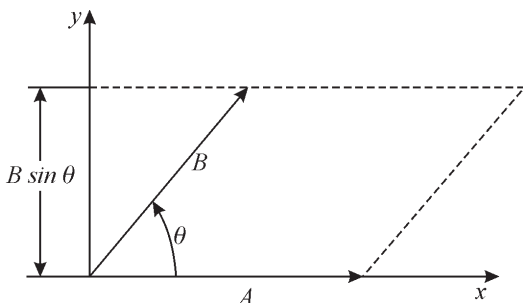
$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0, \quad (1.326)$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \quad (1.32в)$$

$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, \quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}.$$

Векторлық көбейтіндінің маңызды геометриялық түсініктемесі бар (1.9-сурет).

$|\vec{A} \times \vec{B}| = A \cdot B \cdot \sin \theta$  – параллелограмм ауданы. Сонымен,  $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$  векторы параллелограмм жазықтығына перпендикуляр, ал абсолют шамасы бойынша параллелограмның ауданына тең болады.



**1.9-сурет.** Векторлық көбейтіндіні параллелограмм түрінде бейнелеу

Векторлық көбейтіндінің  $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$  басқа анықтамасы  $\vec{C}$  векторының құрамдас бөліктерінің жазылу түрімен байланысты:

$$C_x = A_y B_z - A_z B_y, \quad C_y = -A_x B_z + A_z B_x, \quad (1.33)$$

$$C_z = A_x B_y - A_y B_x,$$

немесе

$$C_i = A_j B_k - A_k B_j, \quad i, j, k - \text{эртүрлі.} \quad (1.34)$$

$i, j, k$  – көрсеткіштерінің кезеңдік өзгерісі.

Векторлық көбейтіндіні анықтауыш ретінде жазған ыңғайлы:

$$\vec{C} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (1.35)$$

(1.32) және (1.33) көбейтінділерінің эквивалентті болатынын көрсетейік. Ол үшін  $\vec{A} \cdot \vec{C}$  және  $\vec{B} \cdot \vec{C}$  скалярлық көбейтінділерін қарастырайық.

$$\vec{A} \cdot \vec{C} = \vec{A} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = A_x(A_y B_z - A_z B_y) + \quad (1.36)$$

$$+ A_y(A_z B_x - A_x B_z) + A_z(A_x B_y - A_y B_x) = 0,$$

$$\vec{B} \cdot \vec{C} = \vec{B} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = 0, \quad (1.37)$$

Демек, (1.36) және (1.37) теңдеулері  $\vec{C}$  векторы  $\vec{A}$  векторына да,  $\vec{B}$  векторына да перпендикуляр, бұған қоса  $\vec{A}$  және  $\vec{B}$  векторлары жатқан жазықтыққа да перпендикуляр екендігін көрсетеді.

Келесі көбейтіндіні қарастырайық:

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = A^2 B^2 - (\vec{A} \cdot \vec{B})^2 = \quad (1.38)$$

$$= A^2 B^2 - A^2 B^2 \cos^2 \theta = A^2 B^2 \sin^2 \theta,$$

яғни,

$$C = A \cdot B \cdot \sin \theta \quad (1.39)$$

(1.38) теңдеуінде  $\vec{A} \times \vec{B}$  көбейтіндісін (1.33) теңдеуі бойынша құрамдас бөліктерге жіктедік, содан кейін (1.22) скалярлық көбейтіндінің теңдеуін пайдаландық. (1.32) және (1.33) анықтамаларының эквивалентті екендігін (1.36), (1.37) және (1.39) теңдеулерінен көреміз.

Енді  $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$  векторлық шама болатынын, яғни вектордың түрлендіру заңына бағынатынын көрсетейік. Бұрылған координаталар жүйесінде:

$$\begin{aligned} C'_i &= A'_j B'_k - A'_k B'_j = \\ &= \sum_l a_{jl} A_l \cdot \sum_m a_{km} B_m - \sum_l a_{kl} A_l \sum_m a_{jm} B_m = \\ &= \sum_{l,m} (a_{jl} a_{km} - a_{kl} a_{jm}) A_l B_m, \end{aligned} \quad (1.40)$$

мұндағы  $i, j, k$  кезеңдік (циклдік) ретте өзгереді. Ал  $m=l$  болғанда (1.40) жақшаның ішіндегі өрнек нөлге тең. Сондықтан  $j, k$  индекстері анықталған мәндерді ғана қабылдай алады, ол -  $i$  индексінің таңдалуына және  $m, l$  индекстерінің алты комбинациясына тәуелді.

Мысалы,  $i=3$  болсын. Онда  $j=1, k=2$  (кезеңдік рет) болғандықтан, бағыттаушы косинустар жинағы үшін:

$$a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12} = a_{33}, \quad a_{13} a_{21} - a_{23} a_{11} = a_{32}, \quad (1.41)$$

$$a_{12} a_{23} - a_{22} a_{13} = a_{31}.$$

(1.41) теңдіктерін (1.40) теңдеуіне қоямыз, нәтижесінде:

$$\begin{aligned} C'_3 &= a_{33} A_1 B_2 + a_{32} A_3 B_1 + a_{31} A_2 B_3 - \\ &- a_{33} A_2 B_1 - a_{32} A_1 B_3 - a_{31} A_3 B_2 = \\ &= a_{31} C_1 + a_{32} C_2 + a_{33} C_3 = \sum_n a_{3n} C_n. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Индекстерді алмастыра отырып,  $C'_1$  және  $C'_2$  үшін ұқсас өрнектерін табамыз. Олар (1.15) шартын қанағаттандырады. Яғни,  $\vec{C}$  векторлық шама болып табылады.

## Жаттығулар

1.  $\vec{A} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{k}$  және  $\vec{B} = 3\vec{i} - 3\vec{j} - 5\vec{k}$  векторлары берілген. Осы векторлардың скалярлық және векторлық көбейтінділерін табыңыздар:  $\vec{A} \cdot \vec{B}$  және  $\vec{A} \times \vec{B}$ .

2. Мына теңдіктерді дәлелдеңіздер.

$$\begin{aligned}(\vec{A} - \vec{B}) \cdot (\vec{A} + \vec{B}) &= A^2 - B^2, & (\vec{A} - \vec{B}) \times (\vec{A} + \vec{B}) &= 2\vec{A} \times \vec{B}, \\ \vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) &= \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}, & \vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) &= \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}.\end{aligned}$$

3.  $\vec{a}$  және  $\vec{b}$  векторларының арасындағы бұрыш  $\varphi = 150^\circ$ . Ал олардың ұзындықтары сәйкесінше  $m$  және  $2m$  болсын. Векторлардың скалярлық және векторлық көбейтінділерін табыңыздар.

4. Екі вектор берілген:  $\vec{a} \perp \vec{b}$  және  $|\vec{b}| = 2|\vec{a}| = \gamma$ .  $\vec{a} + \gamma\vec{b}$  және  $\vec{a} - \gamma\vec{b}$  векторларының скалярлық және векторлық көбейтінділерін табыңыздар.

5. Егер  $\vec{a} \perp (\vec{b} \times \vec{c})$  болса, онда  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  және  $\vec{c}$  векторларының компланарлы болатынын көрсетіңіздер.

6.  $\vec{l}_1 = \vec{i}\alpha + \vec{k}\beta$  және  $\vec{l}_2 = \vec{i}\gamma + \vec{k}\delta$  векторларының векторлық көбейтіндісін табыңыздар.

7. Үшбұрыштың шыңдары берілген: (2, 1, 5), (5, 2, 8) және (4, 8, 2). Векторлық талдаудың көмегімен үшбұрыштың ауданын табыңыздар.

8.  $\vec{P} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ ,  $\vec{Q} = -6\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$  және  $\vec{R} = \vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$  векторлары берілген. Қайсысы өзара перпендикуляр және өзара параллель немесе антипараллель болатынын анықтаңыздар.

9.  $\vec{P} = \vec{i}\cos\theta + \vec{j}\sin\theta$ ,  $\vec{Q} = \vec{i}\cos\varphi - \vec{j}\sin\varphi$ ,  $\vec{R} = \vec{i}\cos\varphi + \vec{j}\sin\varphi$  векторларын пайдаланып, белгілі тригонометриялық өрнектерді дәлелдеңіздер:

$$\sin(\theta + \varphi) = \sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi,$$

$$\cos(\theta + \varphi) = \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi.$$

10.  $\vec{U} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$  және  $\vec{V} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$  векторларына перпендикуляр  $\vec{A}$  векторын анықтаңыздар. Сонымен қатар оның абсолют шамасы бірге тең болуы үшін,  $\vec{A}$  векторына қандай қосымша шарттар қажет?

11.  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  және  $\vec{d}$  векторлары бір жазықтықта жатыр. Онда  $(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = 0$  болатынын көрсетіңіздер.

12. Сфералық ABC үшбұрышының  $\vec{A} = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{B} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ ,  $\vec{C} = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$  шыңдары берілген (1.10-сурет).

Векторлар координаталар басынан басталады. Осы үшбұрыштың қабырғалары мен бұрыштарын табыңыздар.

13.  $\vec{B}$  магниттік индукция векторы  $\vec{F} = q(\vec{V} \times \vec{B})$  Лоренц теңдеуімен анықталады, мұндағы  $\vec{V}$  – заряды  $q$  болатын бөлшектің жылдамдығы, ал  $\vec{F}$  – зарядқа әсер ететін күш.

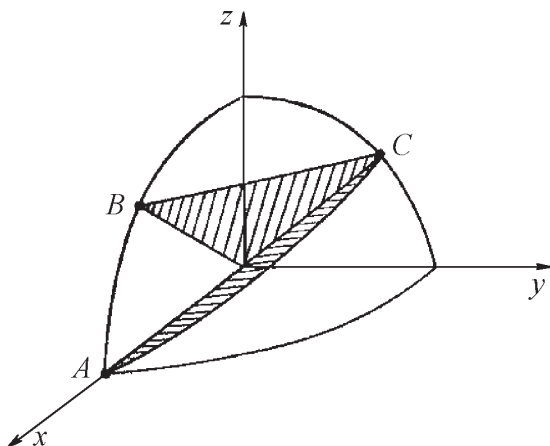
Тәжірибелер жүргізу барысында анықталғаны:

$$1) \vec{V} = \vec{i}, \quad \frac{\vec{F}}{q} = 2\vec{k} - 4\vec{j};$$

$$2) \vec{V} = \vec{j}, \quad \frac{\vec{F}}{q} = 4\vec{i} - \vec{k};$$

$$3) \vec{V} = \vec{k}, \quad \frac{\vec{F}}{q} = \vec{j} - 2\vec{i}.$$

Осы тәжірибелердің нәтижелерінен магниттік индукцияны табыңыздар. Жауабы:  $\vec{B} = \vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$ .



1.10-сурет. Сфералық үшбұрыш

14. Тепе-теңдікті дәлелдеңіздер:  $[\vec{a} \times \vec{b}] + [\vec{b} \times \vec{c}] + [\vec{c} \times \vec{a}] = [(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{b} - \vec{c})]$ .

15. Теңдеуді дәлелдеңіздер:  $[\vec{a} \times \vec{c}] \square [\vec{d} \times \vec{b}]$  және  $[\vec{b} \times \vec{c}] \square [\vec{d} \times \vec{a}]$ , мұндағы  $(\vec{a} + \vec{b}) \square (\vec{c} + \vec{d})$  және  $(\vec{a} - \vec{b}) \square (\vec{c} - \vec{d})$

16. Теңдеуді дәлелдеңіздер:  $(\vec{i} \times \vec{a}) \times \vec{i} + (\vec{j} \times \vec{a}) \times \vec{j} + (\vec{k} \times \vec{a}) \times \vec{k} = \vec{a}$

17. Теңдеуді шешіңіздер:  $\vec{a} = [\vec{i} \times (-\vec{j})] \times [(-\vec{i}) \times \vec{k}]$ ;  
 $\vec{s} = [(-\vec{j}) \times (-\vec{i})] \times [\vec{k} \times (-\vec{i})]$ .

## 1.5 Үш вектордың аралас және екі ретті векторлық көбейтінділері

$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$  және  $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$  – мұндай көбейтінділердің комбинациясы жиі кездеседі. Әдетте біріншісін *аралас көбейтінді* деп атайды.  $\vec{B} \times \vec{C}$  – векторлық көбейтіндісінен шығатын вектор  $\vec{A}$  векторына скалярлық түрде көбейтіледі. Демек скалярлық шама шығады.

Ал,  $(\vec{A} \cdot \vec{B}) \times \vec{C}$  көбейтіндісі белгісіз. Себебі скалярлық және векторлық шамалардың векторлық көбейтіндісі – анықталмаған операция. Сондықтан оны әзірге қарастырмаймыз.

(1.33), (1.22) теңдеулерін пайдаланып, келесі теңдіктерді табамыз:

$$\begin{aligned}
 \vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C} &= A_x(B_y C_z - B_z C_y) + A_y(B_z C_x - B_x C_z) + \\
 &+ A_z(B_x C_y - B_y C_x) = B_x(A_z C_y - A_y C_z) + \\
 &+ B_y(A_x C_z - A_z C_x) + B_z(A_y C_x - A_x C_y) = \quad (1.43) \\
 &= \vec{B} \cdot \vec{C} \times \vec{A} = \vec{C} \cdot \vec{A} \times \vec{B} = -\vec{A} \cdot \vec{C} \times \vec{B} = \\
 &= -\vec{C} \cdot \vec{B} \times \vec{A} = -\vec{B} \cdot \vec{A} \times \vec{C},
 \end{aligned}$$

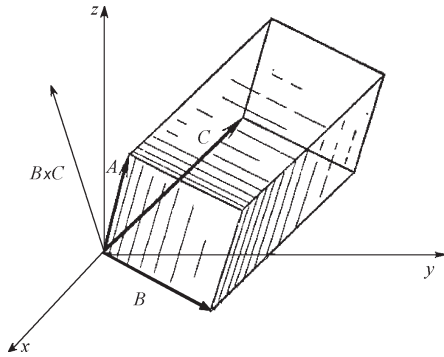
және т.с.с.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} \cdot \vec{C}. \quad (1.44)$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \quad (1.45)$$

Анықтауыштың қатарларын бағаналарға алмастыру ережесінен (1.43) теңдеуінің орындарын алмастыру қатынастары шығады. Бұған қоса  $\vec{A}, \vec{B}$  және  $\vec{C}$  векторлары симметриясының осылайша жазылуы (1.44) шартының орындалуын қамтамасыз етеді.

Үш вектордың аралас көбейтіндісінің геометриялық түсініктемесі бар: егер  $\vec{A}, \vec{B}$  және  $\vec{C}$  векторлары параллелепипедтің “қабырғалары” болса (1.11-сурет), онда  $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$  көбейтіндісінің шамасы осы параллелепипедтің көлеміне тең болады (әрине, аралас көбейтінді теріс санға да тең болуы мүмкін).



**1.11-сурет.** Үш вектордың аралас көбейтіндісінің геометриялық түсініктемесі

Себебі,

$$|\vec{B} \times \vec{C}| = B \cdot C \cdot \sin \theta \quad (1.46)$$

параллелограмның ауданы. Ал  $(\vec{B} \times \vec{C})$  векторының бағыты, әрине, осы параллелограмм жазықтығына перпендикуляр болады. Соңғы вектордың  $\vec{A}$  векторына скалярлық көбейтіндісі – параллелограмм нормалі мен  $\vec{A}$  векторының арасындағы косинусына (яғни параллелограмның «биіктігіне») пропорционал. Демек,  $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$  аралас көбейтіндісі осы үш вектордан «құралған» параллелепипедтің көлеміне тең болады.

Мысалы:  $\vec{A} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ ,  $\vec{B} = \vec{j} + \vec{k}$ ,  $\vec{C} = \vec{i} - \vec{j}$  векторлары берілген. Ендеше.

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 4 \quad (1.47)$$

Бұл  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{C}$  векторларымен анықталған параллелепипедтің көлеміне тең. Жоғарыда атап өткеніміздей, кейбір жағдайларда көбейтіндінің шамасы теріс болуы да мүмкін.

Енді  $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$  – екі ретті векторлық көбейтіндіні қарастырайық. Бұл жолы жақшаны сақтау керек. Оған көз жеткізу үшін мына дербес жағдайды қарастырайық:

$$\vec{i} \times (\vec{i} \times \vec{j}) = \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}, \text{ ал } (\vec{i} \times \vec{i}) \times \vec{j} = 0. \quad (1.48)$$

Демек, екі ретті векторлық көбейтіндіден вектор шығады. Оның бағыты  $\vec{A}$  және  $(\vec{B} \times \vec{C})$  векторлары жататын жазықтыққа перпендикуляр. Қорытқы  $\vec{D} = \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$  – векторы  $\vec{B}$  және  $\vec{C}$  векторлары табылатын жазықтықта жатады. Себебі  $BC$  жазықтығы  $(\vec{B} \times \vec{C})$  векторына перпендикуляр. Сондықтан,  $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$  векторының құрамдас бөліктері  $\vec{B}$  және  $\vec{C}$  векторларының сызықты комбинациясына байланысты:

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}) \quad (1.49)$$

Аралас және екі ретті векторлық көбейтінділер арқылы векторлардың өзге күрделі көбейтінділерін жеңілдетуге болады.

**Мысал.** Векторлардың аралас көбейтіндісін кристалл торларының кері шамаларын құрауда қолайлы болады.  $\vec{a}, \vec{b}$  және  $\vec{c}$  (өзара перпендикуляр болуы міндетті емес) – кристалл торларын анықтайтын векторлар болсын. Онда кез келген торлардағы екі нүктенің арақашықтығы

$$\vec{r} = n_a \vec{a} + n_b \vec{b} + n_c \vec{c}$$

теңдеуімен беріледі. Мұндағы,  $n_a, n_b$  және  $n_c$  - бүтін сандар. Берілген векторлардың көмегімен келесі қатынастарды жаза аламыз:

$$\vec{a}' = \frac{\vec{b} \times \vec{c}}{\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}}; \quad \vec{b}' = \frac{\vec{c} \times \vec{a}}{\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}}; \quad \vec{c}' = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}} \quad (1.50)$$

(1.50) теңдеуінен,  $\vec{a}'$  векторы ( $\vec{b}$  және  $\vec{c}$ ) жазықтығына перпендикуляр, ал абсолют шамасы  $a^{-1}$  - ге пропорционал. Шынында,

$$\vec{a}' \vec{a} = \vec{b}' \vec{b} = \vec{c}' \vec{c} = 1,$$

$$\vec{a}' \vec{b} = \vec{a}' \vec{c} = \vec{b}' \vec{a} = \vec{b}' \vec{c} = \vec{c}' \vec{a} = \vec{c}' \vec{b} = 0.$$

Соңғы теңдеулер торлардың кері шамаларын анықтайды. Торлардың кері шамалары толқындардың кристалдағы әртүрлі жазықтықтарындағы шашырау есептерінің шешімдерін табу үшін қажет.

## Жаттығулар

1.  $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$  формуласын дәлелдеңіздер.

2.  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$  болатынын көрсетіңіздер.

3.  $\vec{A}$  векторы  $\vec{A}_r$  радиалдық және  $\vec{A}_t$  тангенциалдық векторларға жіктелген,  $\vec{r}_0$  - радиалдық бағыттағы бірлік вектор.  $\vec{A}_r = \vec{r}_0(\vec{A} \cdot \vec{r}_0)$  және  $\vec{A}_t = -\vec{r}_0 \times (\vec{r}_0 \times \vec{A})$  екенін көрсетіңіздер.

4. Үш (нөлдік емес)  $\vec{A}, \vec{B}$  және  $\vec{C}$  векторларының компланарлығының қажетті және жеткілікті шарты олардың аралас көбейтінділерінің нөлге тең болатынын дәлелдеңіздер.

5. Мынадай векторлар берілген:

$$\vec{A} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k},$$

$$\vec{B} = 4\vec{i} + 5\vec{j} + 6\vec{k},$$

$$\vec{C} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k},$$

$$\vec{D} = 6\vec{i} + 5\vec{j} + 4\vec{k}.$$

Келесі амалдарды орындаңыздар:

а) векторлардың қосындылары мен айырымдарын:

$$\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D};$$

$$\vec{A} + \vec{B} - \vec{C} - \vec{D};$$

$$\vec{A} - \vec{B} + \vec{C} - \vec{D};$$

$$-\vec{A} + \vec{B} - \vec{C} + \vec{D};$$

б)  $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D}$  векторларының координата осьтерімен құрайтын бұрыштарын;

в)  $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D}$  векторларының модульдерін;

г) алғашқы және соңғы екі векторлар қосындыларының скалярлық және векторлық көбейтінділерін;

д)  $\vec{A}$  векторының өзге  $\vec{B}$ ,  $\vec{C}$ ,  $\vec{D}$  векторларымен құрайтын бұрыштарын;

е)  $\vec{A}$  векторының  $\vec{B}, \vec{C}, \vec{D}$  векторларының бағыттарына проекцияларын;

ж)  $\vec{A} \times \vec{B}$ ,  $\vec{A} \times \vec{C}$ ,  $\vec{B} \times \vec{C}$  векторлық көбейтінділерін және олардың  $\vec{D}$  векторымен құрайтын бұрыштарын;

з)  $\vec{A}$  және  $\vec{B}$ ;  $\vec{C}$ , және  $\vec{D}$  векторлары құрайтын параллелограмдардынаудандарынжәнеосыпараллелограмдардың диагональдарын;

и) барлық  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{C}$  және  $\vec{D}$  векторлары бір жазықтықта жататынын көрсетіңіздер;

к) келесі амалдарды орындаңыздар:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C} \text{ және } \vec{D} \cdot \vec{B} \times \vec{C}; \vec{A} \cdot \vec{D} \times \vec{C} \text{ және } \vec{D} \cdot \vec{B} \times \vec{A};$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}), \vec{C} \times (\vec{A} \times \vec{B}) \text{ және } \vec{B} \times (\vec{C} \times \vec{A});$$

$$\vec{D} \times (\vec{B} \times \vec{C}), \vec{C} \times (\vec{D} \times \vec{B}) \text{ және } \vec{B} \times (\vec{C} \times \vec{D});$$

$$\vec{A} \times (\vec{D} \times \vec{C}), \vec{C} \times (\vec{A} \times \vec{D}) \text{ және } \vec{D} \times (\vec{C} \times \vec{A});$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{D}), \vec{D} \times (\vec{A} \times \vec{B}) \text{ және } \vec{B} \times (\vec{D} \times \vec{A}).$$

6. Үш вектор берілген:  $\vec{A} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$ ,  $\vec{B} = 6\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$ ,  $\vec{C} = -3\vec{i} - 2\vec{j} - 4\vec{k}$ . Мынадай көбейтінділерді табыңыздар:  $\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C}$  және  $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$ ,  $\vec{C} \times (\vec{A} \times \vec{B})$  және  $\vec{B} \times (\vec{C} \times \vec{A})$ .

7. Векторлар келесі түрде берілген

$$\vec{A} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k},$$

$$\vec{B} = 4\vec{i} + 5\vec{j},$$

$$\vec{C} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}.$$

Осы векторлар қандай (оң немесе сол) жүйені құрайды?

Келесілерді анықтаңыздар:

а) осы векторлар құрайтын параллелепипедтің көлемін;

б) параллелепипедтің ( $A$  векторының соңынан басталатын) екі диагональдарын, олар құрайтын векторларды және ұзындықтарын;

в)  $\vec{A}$  және  $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$ ,  $\vec{C} \times (\vec{A} \times \vec{B})$  және  $\vec{B} \times (\vec{C} \times \vec{A})$  векторлары арқылы жүргізілген параллелепипедтің диагональдік қимасының ауданын;

8.  $\vec{F}$  күші  $\vec{r}$  нүктесінде орналасқан денеге әсер етеді. Координаталар басынан жүргізілген кез келген оське қатысты қорытынды момент  $L = \vec{r} \times \vec{F} \cdot \vec{a}$ -ға тең екенін көрсету керек. Мұндағы  $\vec{a}$  - осы осьтің бағытындағы бірлік вектор.

9. Келесі  $\vec{a}' = \frac{\vec{b} \times \vec{c}}{\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}}$ ,  $\vec{b}' = \frac{\vec{c} \times \vec{a}}{\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}}$ ,  $\vec{c}' = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}}$  векторлары

берілген және  $\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} \neq 0$ .

Келесі шарттың орындалатынын көрсетіңіздер:

$$\vec{x} \cdot \vec{y}' = \delta_{xy}, \quad (\vec{x}, \vec{y} = \vec{a}, \vec{b}, \vec{c});$$

$$\vec{a}' \cdot \vec{b}' \times \vec{c}' = (\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c})^{-1};$$

$$\vec{a} = \frac{\vec{b}' \times \vec{c}'}{\vec{a}' \cdot \vec{b}' \times \vec{c}'}$$

10. Тік төртбұрыштың қабырғалары  $a = 2$  см және  $b = 4$  см. Эйлер теңдеуін  $\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ , пайдаланып, лездік бұрыштық

жылдамдықтың шамасы  $5 \left[ \frac{\text{рад.}}{\text{с.}} \right]$  және оның бағыты тік

төртбұрыштың: а) кіші жақтарымен және б) үлкен жақтарымен бағытталған жағдайлардағы тік төртбұрыш орталығының сызықтық жылдамдығын есептеңіздер.

11. Куб қырларының ұзындығы  $a$  см болсын. Егер кубтың бір қырының бойымен  $5$  Н күші бағытталса, онда басқа барлық шыңдары және осьтерімен салыстырғандағы осы күштің моментін анықтаңыздар.

12.  $O$  центрімен салыстырғандағы  $n$  материалдық нүктелер жүйесінің импульс моменті (қозғалыс мөлшерінің моменті) деп келесі векторлардың қосындысын атайды:

$$\vec{L}_0 = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i,$$

мұндағы  $\vec{r}_i$  – массасы  $m_i$  және жылдамдығы  $\vec{v}_i$  болатын  $i$ -ші нүктенің радиус-векторы. Мына шаманы анықтаңыздар:

а) массалары  $m_1 = 1$  г,  $m_2 = 2$  г, ( $z$ ) осінің айналасында  $\omega = 5 \frac{1}{\text{сек}}$  бұрыштық жылдамдығымен және радиустары 3 см және 6 см болатын шеңбер бойымен айналатын екі нүктенің кинетикалық энергиясын;

б) массалары  $m_1 = 1$  г,  $m_2 = 2$  г, кубтың барлық шыңдарымен салыстырғанда қарама-қарсы екі қабырғалары бойымен қарама-қарсы бағытта 3 см/сек жылдамдығымен қозғалатын нүктелердің кинетикалық энергиясын (куб қабырғаларының ұзындығы  $a$  см).

13. Екі  $\vec{a}$  және  $\vec{b}$  векторлары - диагональдары  $\vec{a} + \vec{b}$  және  $\vec{a} - \vec{b}$  болатын параллелограмның қабырғалары болсын. Осы векторларды мына жағдайларда қарастырыңыздар:

а) диагональдары квадраттарының қосындысы оның қабырғалары квадраттарының қосындысына тең екендігін;

б) осы параллелограмның тек қана ромб болған жағдайда ғана параллелограмм диагональдары өзара перпендикуляр болатынын;

в) қабырғалары  $\vec{a} + \vec{b}$  және  $\vec{a} - \vec{b}$  векторлары болатын ( $A$ ) параллелограммының ауданы бастапқы, яғни қабырғалары  $\vec{a}$  және  $\vec{b}$  векторлары болатын ( $B$ ) параллелограммының ауданынан екі есе артық болатынын.

## ВЕКТОРЛЫҚ ТАЛДАУ

### 1.6 Градиент

$\varphi(x, y, z)$  – кеңістіктің скалярлық функциясы, яғни функция тек кеңістік нүктелерінің ( $x, y, z$ ) мәндеріне ғана тәуелді болсын. Скаляр болғандықтан кеңістіктің бекітілген кез келген нүктесі координаталар жүйесінің бұрылысына тәуелсіз өзінің мәнін өзгертпеуі қажет, яғни:

$$\varphi'(x'_1, x'_2, x'_3) = \varphi(x_1, x_2, x_3). \quad (1.51)$$

(1.16) теңдеуін пайдалана отырып  $x'_i$  бойынша дифференциалдап, табатынымыз:

$$\frac{\partial \varphi'(x'_1, x'_2, x'_3)}{\partial x'_i} = \frac{\partial \varphi(x_1, x_2, x_3)}{\partial x'_i} = \quad (1.52)$$

$$= \sum_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} = \left| \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} \right| = a_{ij} = \sum_j a_{ij} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$$

(1.52) теңдеуін (1.17) векторды түрлендіру заңымен салыстырсақ, онда  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$  құрамдас бөліктері болатын векторды құрағанымызға көз жеткіземіз. Бұл векторды  $\varphi$ -дің градиенті деп атаймыз. Ыңғайлы болу үшін таңбалық түрде жазалық:

$$\vec{\nabla} \varphi = \vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (1.53)$$

немесе

$$\vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (1.54)$$

Мұндағы  $\vec{\nabla}$  (набла) – векторлық дифференциалдық оператор. Бұл оператор векторлық қасиеттерге ие, әрі дербес дифференциалдау заңдарына бағынады.

**Мысалы:**

$f(r) = f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$  функциясының градиентін есептейік.

$$\vec{\nabla} f(r) = \vec{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial f}{\partial z},$$

$$\frac{\partial f(r)}{\partial x} = \frac{\partial f(r)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{df}{dr} \cdot \frac{x}{r}.$$

Басқа құрамдас бөліктері де осыған ұқсас табылады. Сонда,

$$\vec{\nabla} f(r) = (\vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z) \cdot \frac{1}{r} \frac{df}{dr} = \frac{\vec{r}}{r} \cdot \frac{df}{dr} = \vec{r}_0 \frac{df}{dr},$$

$\vec{r}_0 = \frac{\vec{r}}{r}$  – радиус-вектордың оң бағытындағы бірлік вектор.

Әдетте  $\vec{\nabla} \varphi$  ұзындық өсімшесін есептеуде қолданылады:

$$d\vec{r} = \vec{i}dx + \vec{j}dy + \vec{k}dz \quad (1.55)$$

Осы жазуды пайдаланып, келесі теңдікті аламыз

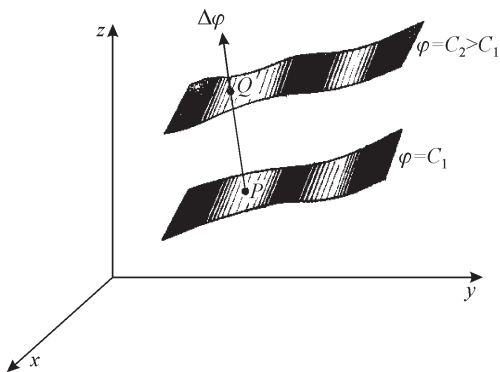
$$(\vec{\nabla} \varphi) d\vec{r} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = d\varphi, \quad (1.56)$$

яғни  $\varphi$  – скаляр функциясының өзгерісі  $d\vec{r}$  -дің өзгерісіне (орын ауыстыруына) сәйкес келеді.

$\varphi(x, y, z) = C$  бетінде  $P$  және  $Q$  нүктелерін қарастырайық. Екі нүкте арақашықтығы  $dr$  болсын. Онда  $P$  нүктесінен  $Q$  нүктесіне орнын ауыстырғанда  $\varphi(x, y, z) = C$  функциясының беттегі өзгерісі:

$$d\varphi = (\vec{\nabla} \varphi) d\vec{r} = 0 \quad (1.57)$$

нөлге тең болады, себебі орын ауыстыру  $\varphi(x, y, z) = C$  бетінде өтеді. Осыдан  $(\vec{\nabla} \varphi) \perp d\vec{r}$ .  $P$  –дан  $Q$ -ге бағыты тиесілі жазықтықтың бойынан  $d\vec{r}$  -дің кез келген бағытын таңдау мүмкіндігі болғандықтан,  $d\vec{r}$  әрқашан сол бетте жатады. Демек,  $\vec{\nabla} \varphi$  -дің бағыты  $\varphi = const$  бетінің кез келген нүктесінде  $d\vec{r}$  -ге перпендикуляр.



1.12-сурет. Градиент

Енді  $d\vec{r}$  -дің бағыты  $\varphi = c_1$  бетінен  $\varphi = c_2$  бетіне бағытталады деп жорамалдайық (1.12-сурет). Онда:

$$d\varphi = c_2 - c_1 = \Delta c = (\vec{\nabla} \varphi) \cdot d\vec{r}. \quad (1.58)$$

Егер  $d\vec{r} \parallel \vec{\nabla} \varphi$  ( $\cos \theta = 1$ ) болса, онда берілген  $d\varphi$  үшін  $|d\vec{r}|$ -дің абсолют шамасы минималды; керісінше, берілген  $|d\vec{r}|$  үшін  $\varphi$  скаляр функциясының өзгерісі максималды, егер  $d\vec{r} \perp \vec{\nabla} \varphi$  болса. Демек,  $\vec{\nabla} \varphi$  векторы – функцияның ең жылдам өзгеру бағытын көрсететін вектор.

Скалярлық шаманың градиенті физикада күш өрісі мен потенциалдық өріс арасындағы байланысты табуда үлкен рөл атқарады:

$$\text{Күш} = -\vec{\nabla} (\text{потенциал}). \quad (1.59)$$

Бұл гравитациялық және электрлік өрістер үшін орынды.

### Жаттығулар

1.  $u = u(x, y, z)$  және  $v = v(x, y, z)$  дифференциалданатын скалярлық функциялар үшін  $\vec{\nabla}(uv) = v\vec{\nabla}u + u\vec{\nabla}v$  орындалатынын дәлелденіздер.

2.  $u = x - 2y + 3z$  скалярлық өрісінің градиентін табыңыздар.

3. М (2, 2, 4) нүктесіндегі  $u = x^y$  беті көтерілуінің ең тіктігін (жылдамдығын) табыңыздар.

4.  $u = x^2 + y^2 + z^2$  скалярлық өрісі деңгейінің бетіне тұрғызылған нормальдің бірлік векторын табыңыздар.

5.  $u = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{r})$ , өрісінің градиентін табыңыздар, мұндағы  $\vec{a}$  және  $\vec{b}$  -тұрақты векторлар,  $\vec{r}$  – нүктенің радиус-векторы.

6.  $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$  арақашықтық градиентін табыңыздар, мұндағы  $P(x, y, z)$  – өрістің зерттелуші нүктесі, ал  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  – қандай да бекітілген нүкте.

7.  $M_0(1, 1)$  нүктесінде  $u = \sqrt{x^2 + y^2}$  және  $v = x + y + 2\sqrt{xy}$  функциялары градиенттерінің арасындағы  $\Theta$  бұрышты табыңыздар.

8.  $\vec{r}$  радиус-векторы бағытындағы  $u = \sin r$  функциясының туындысын табыңыздар, мұндағы  $r = |\vec{r}|$ .

9.  $u = xy + yz + xz$  скалярлық өрісінің  $M_0(1, 1, 1)$  нүктесіндегі ең көп өзгертін бағытын және осы нүктеде ең көп өзгерісінің шамасын табыңыздар.

10.  $S(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}$  функциясы берілген. (1, 2, 3) нүктесіндегі функцияның градиентін  $\vec{\nabla}S$ , оның абсолют шамасын және  $\vec{\nabla}S$ -тің бағыттаушы косинустарын табыңыздар.

11.  $\vec{r}_{12} = \vec{i}(x_1 - x_2) + \vec{j}(y_1 - y_2) + \vec{k}(z_1 - z_2)$  векторы берілген.  $\vec{\nabla}_1 r_{12}(x_1, y_1, z_1)$  айнымалылары бойынша  $\vec{r}_{12}$  векторының абсолют шамасының градиенті) –  $\vec{r}_{12}$  бойымен бағытталған бірлік векторы екендігін көрсетіңіздер.

12.  $grad r$  табыңыздар, мұндағы  $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

13.  $grad(\vec{r}\vec{c})$  табыңыздар, мұндағы  $\vec{c} = const$ .

14.  $u(x, y, z)$  және  $v(x, y, z)$  функцияларының  $f(u, v) = 0$  қатынасымен байланыста болуының қажетті және жеткілікті шарты  $(\vec{\nabla}u) \times (\vec{\nabla}v) = 0$  екендігін дәлелденіздер.  $u = (x, y)$  және  $v = v(x, y)$  жағдайында  $(\vec{\nabla}u) \times (\vec{\nabla}v) = 0$  шарты екі өлшемді якобианға әкелетінін дәлелденіздер:

$$I \begin{pmatrix} u, v \\ x, y \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = 0.$$

$u$  және  $v$  функциялары дифференциалданады деп жорамалданады.

15.  $u(x, y, z)$ ,  $v(x, y, z)$  және  $\omega(x, y, z)$  функцияларының қандай да  $F(u, v, \omega)$  функциясымен қатынасы болуының қажетті және жеткілікті шарты  $(\vec{\nabla}u) \cdot (\vec{\nabla}v) \times (\vec{\nabla}\omega) = 0$  екенін дәлелденіздер. Градиенттерінің аралас көбейтінділері үш өлшемді якобианға эквивалент екенін көрсетіңіздер:

$$I \begin{pmatrix} u, v, \omega \\ x, y, z \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial \omega}{\partial x} & \frac{\partial \omega}{\partial y} & \frac{\partial \omega}{\partial z} \end{vmatrix} = 0.$$

Функцияның қажетті ретті туындыларының бар болуы жорамалданады.

16. Егер векторлық функция  $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z, t)$  кеңістік координаталары мен уақытқа тәуелді болса, онда  $d\vec{F} = (d\vec{r} \cdot \vec{\nabla})\vec{F} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial t} dt$  екенін дәлелденіздер.

17.  $M_0(1, 1, -1)$  нүктесіндегі  $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$  скалярлық өрісінің градиентін табыңыздар.

18.  $v=v(x, y, z)$ ,  $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$  функциялары  $M_0(x, y, z)$  нүктесінде дифференциалданатын болсын. Онда

а)  $grad \lambda u = \lambda grad u$ ,  $\lambda = const$ ;

б)  $grad (u \pm v) = grad u \pm grad v$ ;

в)  $grad (uv) = v grad u + u grad v$ ;

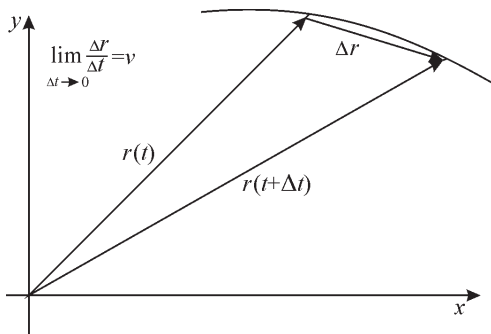
г)  $grad \frac{u}{v} = \frac{v grad u - u grad v}{v^2}$ ,  $v \neq 0$

екенін көрсетіңіздер.

19. Есептеп табыңыздар:  $grad (x^m y^n)$ .

## 1.7. Дивергенция

Векторлық функцияларды дифференциалдау скалярлық функцияларды дифференциалдаудың жалпы түрі болып табылады. Мысалы:  $\vec{r}(t)$  дененің кеңістіктегі  $t$  уақытындағы орнын анықтасын.



1.13-сурет. Сызықтық жылдамдық

Онда уақыт бойынша дифференциалдап, табатынымыз (1.13-сурет):

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \vec{v},$$

мұндағы  $\vec{v}$  - сызықтық жылдамдық, ал  $\vec{\nabla}$  операторын 1.6 - бөлімінде векторлық оператор ретінде қарастырдық.

Енді оның векторлық және дифференциалдық қасиеттерін пайдаланып,  $\vec{\nabla}$  операторының векторлық шамаларға әсерін қарастырайық.

$\vec{\nabla}$  операторының өзге вектормен скалярлық көбейтіндісі:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}, \quad (1.60)$$

$\vec{\nabla}$  векторының дивергенциясы деп аталады. 1.3 - бөліміндегі анықтамаға сәйкес, бұл скалярлық шама. Мысалы:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = \left( \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) (\vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z) = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3;$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{r}f(r) = \frac{\partial}{\partial x}(xf(r)) + \frac{\partial}{\partial y}(yf(r)) + \frac{\partial}{\partial z}(zf(r)) = 3f(r) + r \frac{\partial f}{\partial r}.$$

Дербес жағдайда, яғни  $f(r) = r^{n-1}$  болса, онда

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{r}r^{n-1} = \vec{\nabla} \cdot \vec{r}_0 r^n = 3r^{n-1} + (n-1)r^{n-1}$$

Демек,  $n=-2$  жағдайы үшін осы шаманың дивергенциясы нөлге тең болады.

Дивергенцияның физикалық мағынасы түсінікті болу үшін  $\vec{\nabla} \cdot (\rho \cdot \vec{v})$  қарастырайық, мұндағы  $\vec{v}(x, y, z)$  сығылатын сұйықтық ағысының жылдамдығы,  $\rho(x, y, z)$  –  $(x, y, z)$  нүктесіндегі тығыздығы. Енді  $dx dy dz$  – көлем элементін қарастырамыз (1.14-сурет). Онда  $EFGH$  бетінен бірлік уақытта ағатын сұйықтықтың мөлшері: (кіріс)  $EFGH = \rho \cdot v_x dy dz$ , ал  $ABCD$  бетінен шығатын сұйықтықтың

мөлшері: (шығыс)  $ABCD = \left[ \rho \cdot v_x + \frac{\partial}{\partial x} (\rho \cdot v_x) dx \right] dy dz$ . Туынды

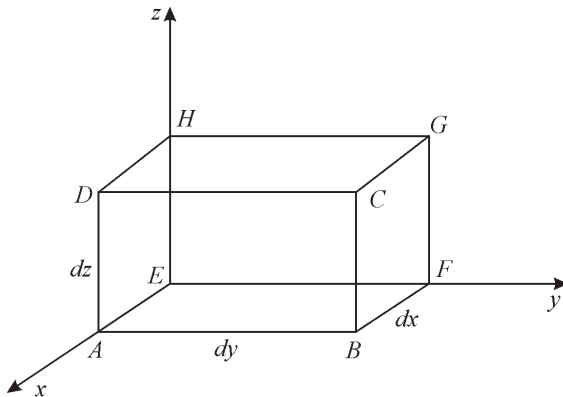
біртекті емес тығыздық пен жылдамдықтың, немесе екі шаманың да бір мезгілде  $x$  координатасына тәуелді болуы мүмкіндігін ескереді. Осы екі беттер арқылы ағып өткен сұйықтықтың толық шығыны – екі ағындардың айырымына тең немесе  $x$  осі бойынша шығыны:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho \cdot v_x) dx dy dz.$$

Сұйықтықтың қосымша шығындары осы көлем элементінің қалған төрт бетінен де ағатынын ескерсек, онда уақыт бірлігінде толық ағып өткен сұйықтықтың мөлшері:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x} (\rho \cdot v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho \cdot v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho \cdot v_z) \right] dx dy dz = \quad (1.61)$$

$$= \vec{\nabla} \cdot (\rho \cdot \vec{v}) dx dy dz.$$



1.14-сурет. Дифференциалдық тікбұрышты параллелепипед

Яғни, бірлік көлемнен бірлік уақытта ағып өтетін сығылатын сұйықтықтың толық мөлшері  $\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v})$  -ға тең. Дивергенция немесе пашыраңқылық (расходимость) деген атауы да осыдан шыққан.

Дивергенцияны пайдаланудың көптеген мысалдарының бірі үздіксіздік теңдеуін пайдалану болып табылады:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \cdot \vec{v}) = 0. \quad (1.62)$$

Сонымен қатар:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (f\vec{v}) &= \frac{\partial}{\partial x}(fv_x) + \frac{\partial}{\partial y}(fv_y) + \frac{\partial}{\partial z}(fv_z) = \\ \frac{\partial f}{\partial x} \cdot v_x + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot v_y + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot v_z + f \frac{\partial v_x}{\partial x} + f \frac{\partial v_y}{\partial y} + f \frac{\partial v_z}{\partial z} &= \\ &= (\vec{\nabla} f) \cdot \vec{v} + f \vec{\nabla} \cdot \vec{v}, \end{aligned} \quad (1.63)$$

мұндағы  $f$  – скалярлық шама, ал  $\vec{v}$  – векторлық функция.

Дербес жағдай. Егер  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ , онда  $\vec{B}$  векторы соленоидты деп аталады.

### Жаттығулар

1.  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{b}$  теңдеуін дәлелденіздер. *Ескерту.* Теңдеудің сол жағын аралас көбейтінді ретінде қарастырыңыздар.

2. Координаталар жүйесінің бұрылысында,  $\vec{\nabla}' \cdot \vec{v}' = \vec{\nabla} \cdot \vec{v}$  теңдігі орындалатынын және анықтамаға сәйкес вектордың дивергенциясы скалярлық шама екендігін көрсетіңіздер (екі өлшемді қарастыру жеткілікті).

3.  $\text{div } \vec{r}$  есептеңіздер.

4.  $\text{div}(\varphi \vec{a})$  есептеңіздер, мұндағы  $\varphi$  – скалярлық функция,  $\vec{a}$  – өрістің векторлық функциясы.

5.  $\text{div}(r\vec{c})$ ,  $\text{div}(r^2\vec{c})$  есептеңіздер, мұндағы  $\vec{c}$  – тұрақты вектор.

6.  $\text{div}(\alpha \vec{r})$  есептеңіздер, мұндағы  $\alpha$  – тұрақты скаляр.

7.  $\text{div} \frac{\vec{r}}{r}$  есептеңіздер.

8.  $\text{div } \vec{b}(\vec{r} \cdot \vec{a})$ ,  $\text{div } \vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{a})$  есептеңіздер, мұндағы  $\vec{a}$  және  $\vec{b}$  – тұрақты векторлар.

9.  $\operatorname{div} (r^4 \vec{r})$  табыңыздар, мұндағы  $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

10.  $\operatorname{div} (\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}))$  табыңыздар, мұндағы  $\vec{\omega}$  – тұрақты вектор.

11.  $\operatorname{div} (\vec{a} \times (\vec{r} \times \vec{b}))$  табыңыздар, мұндағы  $\vec{a}$  және  $\vec{b}$  – тұрақты векторлар.

12. Қатты дене  $\vec{\omega}$  тұрақты бұрыштық жылдамдықпен айналады. Сызықтық  $\vec{v}$  жылдамдықтың соленоидты екендігін көрсетіңіздер.

13. Нүктелік  $q$  зарядтың электростатикалық өрісі  $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}_0}{r^2}$ . Келесі шаманы  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$  есептеңіздер.

14. Мына теңдеулерді шешіңіздер:

а)  $\operatorname{div} (r^n \vec{c}) = nr^{n-2}(\vec{r}\vec{c})$ , ( $n \neq 2$ );

б)  $\operatorname{div} (\vec{c} \times \vec{r}) = 0$ ;

в)  $\operatorname{div} r^n \vec{r} = (n+3)r^n$ .

15. Сфераның беті арқылы өтетін  $\vec{r}$  радиус-вектордың ағынын табыңыздар.

16.  $\vec{a} = \frac{\varphi(r)}{r} \vec{r}$  векторының дивергенциясын табыңыздар, мұндағы  $r = |\vec{r}|$  координаттар басынан  $M(x, y, z)$  айнымалы нүктесіне дейінгі қашықтық.

17.  $\operatorname{div} (\operatorname{grad} \varphi(r))$  табыңыздар.

18.  $\operatorname{div} \frac{x+y+z}{xyz} \cdot \vec{r}$  табыңыздар

## 1.8. Ротор

Кез келген векторға векторлық көбейтіндісінің операциясын келесі теңдеумен анықтауға болады

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{v} &= \vec{i} \left( \frac{\partial}{\partial y} v_z - \frac{\partial}{\partial z} v_y \right) + \vec{j} \left( \frac{\partial}{\partial z} v_x - \frac{\partial}{\partial x} v_z \right) + \\ &+ \vec{k} \left( \frac{\partial}{\partial x} v_y - \frac{\partial}{\partial y} v_x \right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (1.64)$$

Пайда болған өрнекті  $\vec{v}$  векторының *роторы* деп атайды.

Анықтауышты есептегенде немесе кез келген басқа  $\vec{\nabla}$  операторымен жұмыс істегенде оның дифференциалдық табиғатын ескеру қажет. Арнайы ескерту:  $\vec{v} \times \vec{\nabla}$  көбейтіндісі жаңа векторлық дифференциалдық оператор ретінде анықталады. Жалпы жағдайда, әрине  $\vec{v} \times \vec{\nabla} \neq \vec{\nabla} \times \vec{v}$ . Егер  $\vec{\nabla}$  векторын скаляр мен векторға векторлық түрде көбейтсек, онда

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (f\vec{v})|_x &= \vec{i} \left[ \frac{\partial}{\partial y} (fv_z) - \frac{\partial}{\partial z} (fv_y) \right] = \\ &= \vec{i} \left[ f \frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y} v_z - f \frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z} v_y \right] = \\ &= f \cdot \vec{\nabla} \times \vec{v}|_x + (\vec{\nabla} f) \times \vec{v}|_x; \end{aligned} \quad (1.65)$$

Циклдік алмастырулар арқылы  $y$  және  $z$  құрамдас бөліктері үшін табу жеңіл болады. Сонда:

$$\vec{\nabla} \times (f\vec{v}) = f \cdot \vec{\nabla} \times \vec{v} + (\vec{\nabla} f) \times \vec{v}. \quad (1.66)$$

(1.66) теңдеуі (1.63) теңдеуінің аналогы.

**Мысалы:**  $\vec{\nabla} \times \vec{r}f(r) = f(r)\vec{\nabla} \times \vec{r} + (\vec{\nabla}f(r)) \times \vec{r}$

А)

$$\vec{\nabla} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0.$$

Б)

$$\vec{\nabla}f(r) = \vec{r}_0 \cdot \frac{df}{dr} \quad \text{екендігін пайдаланып,}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{r}f(r) = \frac{df}{dr} \cdot \vec{r}_0 \times \vec{r} = 0,$$

себебі  $\vec{r} = \vec{r}_0 \cdot r$ ,  $\vec{r}_0 \times \vec{r}_0 = 0$ . Жалпы,  $\vec{\nabla} \times \vec{v}$  шамасы  $\vec{v}$  векторлық өрістің роторы есептелетін нүктедегі айналуын сипаттағандықтан, оны *ротор* деп атауы да сондықтан.

Қатты дене ху жазықтығында  $z$  осі бойынша  $\vec{\omega}$  бұрыштық жылдамдықпен айналады делік. Онда қатты дене нүктесінің  $\vec{V}$  сызықтық жылдамдығы ( $\vec{r}$  – радиус-вектор) болады:

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (1.67)$$

Мұны  $\vec{\nabla} \times \vec{r}$  көбейтіндісін табу үшін қарастырайық:

$$\vec{\nabla} \times \vec{r} = \vec{\nabla} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}), \quad (1.68)$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega}(\vec{\nabla} \cdot \vec{r}) - \vec{r} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{\omega}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{r} \cdot \vec{\omega} - \vec{\nabla} \cdot \vec{\omega} \cdot \vec{r} \quad (1.69)$$

Мұнда  $\vec{\nabla}$  бірінші векторға скалярлық көбейтілгенін көреміз, алайда ол дифференциалдық оператор болғандықтан *екі векторға да* әсер ететінін ұмытпағанымыз жөн:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega}(\vec{\nabla} \cdot \vec{r}) + (\vec{r} \cdot \vec{\nabla})\vec{\omega} - \vec{r}(\vec{\nabla} \cdot \vec{\omega}) - (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla})\vec{r}. \quad (1.70)$$

болған жағдайда, (1.70) теңдеуінің 2-ші және 3-ші мүшелері нөлге тең.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = 3 \quad (1.71)$$

болғандықтан және

$$(\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla})\vec{r} = \omega_x \frac{\partial}{\partial x}(\vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z) + \omega_y \frac{\partial}{\partial y}(\vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z) + \quad (1.72)$$

$$+ \omega_z \frac{\partial}{\partial z}(\vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z) = \vec{i}\omega_x + \vec{j}\omega_y + \vec{k}\omega_z = \vec{\omega}.$$

(1.71), (1.72) теңдеулерін (1.70) апарып қойсақ, онда

$$\vec{\nabla} \times \vec{r} = \vec{\nabla} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = 2\vec{\omega} \quad (1.73)$$

болады. Яғни, қатты дененің сызықтық жылдамдығының роторы екі еселенген бұрыштық жылдамдыққа тең.

Егер

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0 \quad (1.74)$$

болса, онда  $\vec{v}$  векторын *құйынсыз* деп атайды.

Құйынсыз векторларға, мысал ретінде, гравитациялық және электростатикалық күштерді жатқызуға болады.

$$\vec{V} = C \cdot \frac{\vec{r}_0}{r^2} = C \frac{\vec{r}}{r^3}, \quad (1.75)$$

мұндағы,  $C$  – тұрақты,  $\vec{r}_0$  – радиус-вектор бағытындағы бірлік векторы.

### Жаттығулар

1. Егер  $\vec{U}$  және  $\vec{V}$  құйынсыз векторлар болса, онда  $\vec{U} \times \vec{V}$  векторлары соленоидты екенін көрсетіңіздер.

2. Егер  $\vec{A}$  құйынсыз вектор болса, онда  $\vec{A} \times \vec{r}$  соленоидты екенін көрсетіңіздер.

3.  $\vec{a} = (x+z)\vec{i} + (y+z)\vec{j} + (x^2+z)\vec{k}$  векторының роторын табыңыздар.

4.  $\vec{F} = y^2z\vec{i} + z^2x\vec{j} + x^2y\vec{k}$  өрісінің құйынын табыңыздар.

5. Бұрылысты пайдаланып, ротордың құрамдас бөліктері векторлық түрлендіру заңына бағынатынын көрсетіңіздер. *Ескерту.* (1.41) теңдеуіндегі бағыттаушы косинустарды пайдалану керек.

6.  $\vec{\nabla} \times \vec{V}$  векторы  $\vec{V}$  векторына перпендикуляр болатынын дәлелдеңіз, егер  $\vec{V} = \vec{i}V_x(x,y) + \vec{j}V_y(x,y)$  және  $\vec{\nabla} \times \vec{V} \neq 0$  болса.

7. Кванттық механикада қозғалыс мөлшерінің моменттері келесі қатынастармен анықталады:

$$L_x = -i\hbar(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y}),$$

$$L_y = -i\hbar(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z}), \quad L_z = -i\hbar(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}).$$

$$L_y = -i\hbar(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z}), \quad L_z = -i\hbar(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}).$$

екендігін, оған қоса болатынын көрсетіңіздер.

8. Векторлық теңдіктерді тексеріңіздер:

$$\vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} + (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} + \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}),$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} - \vec{B}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + \vec{A}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}).$$

9. Көрсетіңіздер:

а)  $\text{rot } \vec{r} = 0$ ;

б)  $\text{rot}(\vec{c} \times \vec{r}) = 2\vec{c}$ ;

в)  $\text{rot}[\vec{c}(\vec{a}\vec{r})] = \vec{a} \times \vec{c}$ .

10. Табыңыздар:

а)  $\text{rot}[(\vec{c} \times \vec{r}) \times \vec{a}]$ ,

б)  $\text{rot}[(\vec{c} \times \vec{r}) \times \vec{r}]$ ,

мұндағы  $\vec{a}$ ,  $\vec{c}$  – тұрақты векторлар.

11. Қатты дене қозғалмайтын нүкте маңында айналсын. Онда  $\vec{V}$  жылдамдық өрісінің және  $\vec{W}$  үдеу өрісінің дивергенциясы мен құйынын табыңыздар. Мұндағы  $\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ ;  $W = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ , оған қоса  $\vec{\omega}$ ,  $\vec{\varepsilon}$  – үдеулер өрісінің тұрақты векторлары екендігін ескеріңіздер.

12. Келесі векторлардың роторларын табыңыздар:

а)  $\vec{a} = (x^2 + y^2)\vec{i} + (y^2 + z^2)\vec{j} + (z^2 + x^2)\vec{k}$ ;

б)  $\vec{a} = z^3\vec{i} + y^3\vec{j} + x^3\vec{k}$ ;

в)  $\vec{a} = \frac{1}{2}(-y^2\vec{i} + x^2\vec{j})$ .

13.  $\vec{a} \times \text{grad } \varphi$  векторы қандай да вектордың құйыны болсын, мұндағы  $\vec{a}$  – тұрақты вектор. Ізделінді векторды анықтаңыздар.

14.  $r(\vec{\omega} \times \vec{r})$  векторы соленоидты, мұндағы  $\vec{\omega}$  – тұрақты вектор. Көрсетілген векторды қандай да вектордың құйыны болатынын көрсетіңіздер.

## 1.9. $\vec{\nabla}$ операторын біртіндеп қолдану

Градиент, дивергенция және ротор түсініктерін енгізу арқылы вектор, скалярлық шамалар және олардың комбинациясын алуға болады. Жаңадан пайда болған шамаларға  $\vec{\nabla}$  операторымен әсер ете отырып,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \varphi$ ,  $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \varphi$ ,  $\vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{V}$ ,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{V}$ ,  $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V})$  өрнектерін таба аламыз.

Бұл өрнектер математикалық физиканың екінші реттік дифференциалдық теңдеулерінде жиі пайдаланады.

Өрнектердің біріншісін, яғни градиенттің дивергенциясын *лапласиан* деп атайды:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \varphi &= (\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z})(\vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z}) = \\ &= (\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2})\varphi = \Delta \varphi = \vec{\nabla}^2 \varphi.\end{aligned}$$

Екіншісін төмендегідей жазуға болады:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \varphi = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{vmatrix}, \quad (1.76)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \varphi = \vec{i} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y} \right) + \quad (1.77)$$

$$+ \vec{j} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} \right) + \vec{k} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} \right) = 0.$$

Мұнда біз дифференциалдау ретін өзгертуге болады деп жорамалдадық. Ал ол, өз кезегінде тек  $\varphi$ -дің бірінші ретті дербес туындылары үздіксіз болғанда ғана орынды болады.

(1.77) теңдеуінен  $rot \ grad \equiv 0$  екендігін көрдік. Яғни, градиент - құйынсыз вектор.

Төртінші өрнекті аралас көбейтінді ретінде қарастырамыз:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = \quad (1.78)$$

$$= \frac{\partial^2 V_z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 V_x}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 V_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 V_z}{\partial y \partial x} = 0,$$

яғни,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{V} = 0 \quad (1.79)$$

Сонымен, ротордың дивергенциясы  $\text{div}(\text{rot}) = 0$  болғандықтан, ротор әрқашан соленоидты вектор.

Соңғы өрнекті қарастырайық:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{V} - \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \vec{V} \quad (1.80)$$

Егер  $\vec{V}$  векторын декарттық координаталар жүйесінде компоненттерге жіктесек, онда  $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \vec{V}$  – векторлық лапласиан – қарапайым скалярлық лапласиандардың векторлық қосындысына тең болады:

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} = \vec{i} \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} V_x + \vec{j} \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} V_y + \vec{k} \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} V_z.$$

(1.80) өрнегінің маңызды қосымшасы электромагниттік теорияның толқындық тендеуімен байланысты. Вакуум үшін Максвелл тендеулерін жазайық:

$$a) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \text{в)} \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (1.81)$$

$$б) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad \text{з)} \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

мұндағы,  $\vec{E}$  – электр өрісі,  $\vec{B}$  – магнит индукциясы,  $\varepsilon_0, \mu_0$  – электрлік және магниттік тұрақтылар.  $\vec{B}$  векторын (1.81в) және (1.81 г) тендеулерінен анықтауға болады делік. Ол үшін (1.81 г) тендеуінің екі бөлігінің роторын есептелік:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{B} \quad (1.82)$$

(1.81в) тендеуінің екі бөліктерінен де уақыт бойынша туынды алайық:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}),$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad (1.83)$$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) &= -(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})\vec{E} = -\varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \\ (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})\vec{E} &= \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.\end{aligned}\quad (1.84)$$

Егер  $\vec{E}$  векторын декарттық координаталарда жазатын болсақ, онда (1.84) теңдеуі скалярлық лапласиандардан құралған үш скалярлық толқындық теңдеуге жіктеледі.

### Жаттығулар

1.  $\vec{\nabla} \times (\varphi \vec{\nabla}) = 0$  екендігін дәлелденіздер.
2. Егер  $U$  және  $V$  – дифференциалданатын скалярлық функциялар болса, онда  $(\vec{\nabla}U) \times (\vec{\nabla}V)$  соленоидты вектор екенін дәлелденіздер.
3.  $\varphi$  скаляры Лаплас теңдеуін қанағаттандырады  $\vec{\nabla}^2 \varphi = 0$ .  $\vec{\nabla} \varphi$  векторы соленоидты және құйынсыз екенін көрсетіңіздер.

4.  $\vec{C}_1 = \vec{\nabla} \psi$ ,  $\vec{C}_2 = \vec{\nabla} \times \vec{a} \psi$  және  $\vec{C}_3 = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a} \psi)$  векторлары төмендегі векторлық теңдеудің шешімі болатынына көз жеткізіңіздер

$$\vec{\nabla}^2 \vec{C} + k^2 \vec{C} = \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{C} - \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{C} + k^2 \vec{C} = 0.$$

Мұндағы:  $\psi$  – скаляр толқындық теңдеудің шешімі  $\vec{\nabla}^2 \psi + k^2 \psi = 0$ ,  $\vec{a}$  – тұрақты вектор. Оған қоса,  $\vec{C}_1$  және  $\vec{C}_2$  ортогоналды,  $\vec{C}_1$  – құйынсыз, ал  $\vec{C}_2$  және  $\vec{C}_3$  – соленоидты векторлар екенін дәлелденіздер.

5.  $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{V} - \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \vec{V}$  өрнегі  $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$  екі ретті векторлық көбейтінді ережесінен туындайтынын дәлелденіздер.  $\vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C})$ ,  $\vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$  мүшелеріндегі көбейтінділердің еркін орналасуын түсіндіріңіздер.

6.  $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} - k^2 \vec{A} = 0$  теңдеуінің кез келген шешімі Гельмгольцтің векторлық теңдеуін  $\vec{\nabla}^2 \vec{A} + k^2 \vec{A} = 0$  автоматты түрде қанағаттандыратынын және  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$  соленоидтылық шартын қанағаттандыратынын көрсетіңіздер.

7. Келесі скалярлық өрістер гармоникалық болатынын тексеріңіздер:

а)  $u = x^2 + 2xy - y^2$ ;

$$\text{б) } u = x^2 y + y^2 z + z^2 x;$$

$$\text{в) } u = x^2 - y^2.$$

8.  $u = \ln \frac{1}{r}$  скалярлық өрісі гармоникалық болатынын көрсетіңіздер, мұндағы  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , ( $r \neq 0$ ).

9.  $U_{LM} = j_L(ka)Y_{LM}(\theta, \phi)$  скалярлық потенциалы Гельмгольцтің скалярлық теңдеуін  $\vec{\nabla}^2 U_{LM} + k^2 U_{LM} = 0$  қанағаттандырады. Қозғалыс мөлшері моментінің операторын  $\vec{L} = -i(\vec{r} \times \vec{\nabla})$  пайдаланып, келесі векторлық потенциалдарды құрастыруға болады:

$$\vec{A}_{LM}^E = -\frac{1}{k} \vec{\nabla} \times \vec{L} U_{LM}, \quad \vec{A}_{LM}^M = l \vec{L} U_{LM}$$

Осыекі потенциалдардыңмына теңдеуді қанағаттандыратынын көрсетіңіздер:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} - k^2 \vec{A} = 0.$$

10. Уақытқа тәуелді Шредингер теңдеуінің түрін жазалық:

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} + V(r) \right] \Psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

Теңдеудің шешімін  $\Psi(\vec{r}, t) = A(\vec{r}, t) \cdot e^{iS(\vec{r}, t)/\hbar}$  түрінде іздейтін болсақ, онда Шредингер теңдеуі екі теңдеуге бөлінеді (нақты және жорамал бөліктерге):

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\vec{\nabla} S)^2}{2m} + V = \frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\vec{\nabla}^2 A}{A},$$

$$m \frac{\partial A}{\partial t} + (\vec{\nabla} A)(\vec{\nabla} S) + \frac{A}{2} \vec{\nabla}^2 S = 0.$$

Кванттық механикада бөлшектің кеңістікте табылу ықтималдығының тығыздығы  $\rho = A^2$  шамасымен, ал тоқтың тығыздығы  $\vec{J} = \left( \frac{A^2}{m} \vec{\nabla} S \right)$  шамасымен анықталады. Жоғарыда

жазылған екінші теңдеу үздіксіздік теңдеуіне эквивалент екенін көрсетіңіздер:  $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ .

11.  $\Psi$  – скалярлық функция болсын. Онда осы функция мына теңдеуді қанағаттандыратынын көрсетіңіздер:

$$(\vec{r} \times \vec{\nabla}) \cdot (\vec{r} \times \vec{\nabla}) \Psi = r^2 \vec{\nabla}^2 \Psi - 2r \frac{\partial \Psi}{\partial r} - r^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2}.$$

### 1.10 Векторларды интегралдау

Векторларды дифференциалдаудан соң оларды интегралдауды қарастырайық. Сызықтық интегралдаудан бастап, одан соң беттік және көлемдік интегралдауға көшеміз. Бірақ әрдайым векторларды интегралдау скалярлық функцияларды интегралдауға әкеліп тірейтін болады. Ұзындық өсімшесі  $d\vec{r}$  – ді пайдаланып, келесі сызықты интегралдарды анықтауға болады:

$$\text{a) } \int_C \varphi d\vec{r}, \quad \text{б) } \int_C \vec{V} \cdot d\vec{r}, \quad \text{в) } \int_C \vec{V} \times d\vec{r}. \quad (1.85)$$

Интегралдау тұйық не тұйық емес  $C$  контуры бойынша жүргізіледі. Бірінші интегралды декарт координаталар жүйесінде есептейік:

$$\begin{aligned} \text{a) } \int_C \varphi d\vec{r} &= \vec{i} \int_C \varphi(x, y, z) dx + \\ &+ \vec{j} \int_C \varphi(x, y, z) dy + \vec{k} \int_C \varphi(x, y, z) dz. \end{aligned} \quad (1.86)$$

Мұнда  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ , және  $\vec{k}$  бірлік векторларының бағыты мен шамалары тұрақты және

$$\int \vec{i} \varphi dx = \vec{i} \int \varphi dx \quad (1.87)$$

теңдігі орынды болатынын пайдаландық.

(1.86) теңдеуінің оң жағындағы үш интеграл қарапайым скалярлық интегралдар болғандықтан, дәлелдеусіз *Риман инте-*

*гралдары* деп қабылдайық. Алайда  $y$  және  $z$  айнымалылардың  $x$ -ке тәуелділігін білмей тұрып  $x$  бойынша интегралдауға болмайды (осы айтылғандар басқа айнымалыларға да қатысты). Демек,  $C$  контурын анық білу қажеттігі туындайды. Егер интеграл астындағы функция арнайы қасиеттерге ие (нәтижесінде интеграл тек контурдың соңғы нүктелерінің орналасуына ғана байланысты) болмаса, онда интеграл шамасы  $C$  контурын таңдаудың ерекшеліктеріне байланысты болады.

**Мысалы:**  $\varphi=1$  болсын. Онда (1.85 а) интегралы  $C$  контурының бастапқы нүктесінен соңғы нүктесіне дейінгі вектор қашықтығына тең болады. Бұл жағдайда интегралдың мәні оның бекітілген бастапқы және соңғы нүктелерінің арасындағы интегралдау жолына тәуелсіз болады.  $d\vec{r} = \vec{i}dx + \vec{j}dy + \vec{k}dz$  жағдайында жоғарыда қарастырылғандай, яғни екінші және үшінші интегралдар да (1.85 а) интегралы сияқты скалярлық шамаларды интегралдаумен алмасады.

(1.85 б) интегралы белгілі жол қашықтығында жұмсалған күштің мөлшерін, яғни жұмысты анықтайды:

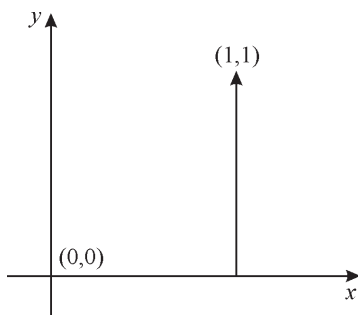
$$W = -\int \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (1.88)$$

**Мысалы:** Ұзындықтың өсімшесі  $d\vec{r}$ -ді пайдаланып,  $r^2 = x^2 + y^2$  скалярлық функцияны координаттар басынан (1,1) нүктесіне дейін интегралдайық (1.15-сурет).

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} (x^2 + y^2)(\vec{i}dx + \vec{j}dy) = \vec{i} \int_{(0,0)}^{(1,1)} (x^2 + y^2)dx + \vec{j} \int_{(0,0)}^{(1,1)} (x^2 + y^2)dy =$$

(1.15-суретте көрсетілген контур бойынша интегралдайық)

$$= \vec{i} \int_{(0,y=0)}^{x=1} (x^2 + y^2)dx + \vec{j} \int_{(x=1,0)}^{y=1} (x^2 + y^2)dy = \frac{1}{3}\vec{i} + \vec{j}\frac{4}{3};$$



1.15-сурет. Интегралдау контуры

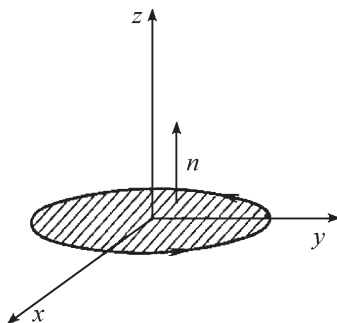
екінші контур бойынша интегралдасақ  $((0,0) \rightarrow (0,1) \rightarrow (1,1))$ ,

$$\vec{i} \int_{(x=0,0)}^1 (x^2 + y^2) dx + \vec{j} \int_{(0,y=1)}^1 (x^2 + y^2) dy = \frac{4}{3} \vec{i} + \frac{1}{3} \vec{j};$$

үшінші контур  $x=y$  түзуі бойынша

$$\vec{i} \int_{(0,0)}^{(1,1)} (x^2 + y^2) dx + \vec{j} \int_{(0,0)}^{(1,1)} (x^2 + y^2) dy = \frac{4}{3} \vec{i} + \frac{4}{3} \vec{j}.$$

Демек, интегралдың мәні интегралдау  $C$  контурын таңдауына тәуелді.



1.16-сурет. Оң бағытты таңдаудағы оң қол ережесі

Беттік интегралдар да сызықты интегралдар сияқты жазылады, бірақ  $d\vec{r}$  орнына  $d\vec{\sigma}$  алмастыру керек. Беттік элементтің орнына  $\vec{n}dA$  жиі пайдаланылады (мұндағы,  $\vec{n}$  – бірлік нормаль вектор, 1.16-сурет).

Оң бағытты анықтаудың екі жолы бар. Егер бет тұйық болса, онда оң бағыт ретінде көлемнің ішінен сыртына қарай бағытты қабылдадық. Ал ашық беттер үшін оң бағыт периметрі бойынша жүріп өту бағытына байланысты деп есептейік. Сонда, оң қолымыздың саусақтарын контурды жүріп өту бағытында ұстасақ, онда бас бармақ оң бағытпен сәйкес болады.

$\int \vec{V} \cdot d\vec{\sigma}$  беттік интегралын осы бет бойынша ағыны ретінде интерпретациялауға болады.

Көлемдік интегралдарды есептеу жеңілдеу, себебі көлем элементі  $d\tau$  – скалярлық шама.

$$\int_V \vec{V} d\tau = \vec{i} \int_V V_x d\tau + \vec{j} \int_V V_y d\tau + \vec{k} \int_V V_z d\tau. \quad (1.89)$$

Беттік және көлемдік интегралдарды пайдаланып, дифференциалдық қатынастарды қайта анықтауға болады:

$$\vec{\nabla} \varphi = \lim_{d\tau \rightarrow 0} \frac{\int \varphi d\vec{\sigma}}{\int d\tau}, \quad (1.90)$$

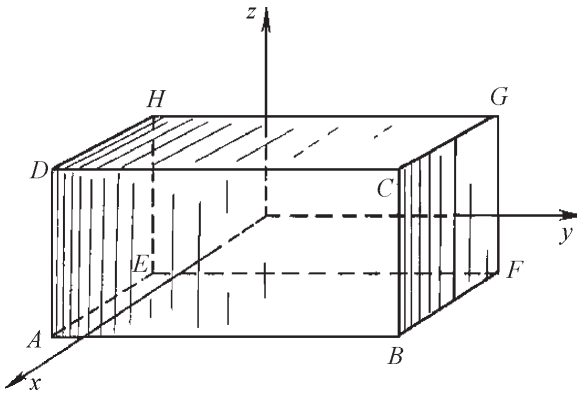
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \lim_{d\tau \rightarrow 0} \frac{\int \vec{V} \cdot d\vec{\sigma}}{\int d\tau}, \quad (1.91)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \lim_{d\tau \rightarrow 0} \frac{\int d\vec{\sigma} \times \vec{V}}{\int d\tau}. \quad (1.92)$$

Мұндағы  $\int d\tau$  – кеңістіктің кіші көлемі,  $d\vec{\sigma}$  – осы көлемнің беттік векторлық элементі. Енді (1.90) өрнегі (1.53) теңдеуімен анықталған  $\vec{\nabla} \varphi$  шамасына сәйкес келетінін көрсетелік. Жеңіл болу үшін  $\int d\tau$ -ды  $dx dy dz$  дифференциалдық көлемге алмастырайық және координаттар басы параллелепипедтің геометриялық ортасынан басталсын (1.17-сурет).

Беттік интеграл параллелепипедтің алты беті бойынша интегралға әкеледі.  $d\vec{\sigma}$  векторы сыртқа бағытталғандықтан,  $d\vec{\sigma} \cdot \vec{i} = -|d\vec{\sigma}|$  EFGH беті үшін, ал ABCD үшін ол  $|d\vec{\sigma}|$  тең екенін ескеріп, табамыз:

$$\begin{aligned}
\int \varphi d\vec{\sigma} &= -\vec{i} \int_{EFGH} \left( \varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{dx}{2} \right) dydz + \vec{i} \int_{ABCD} \left( \varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{dx}{2} \right) dydz - \\
&- \vec{j} \int_{AEHD} \left( \varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{2} \right) dx dz + \vec{j} \int_{BFGC} \left( \varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{2} \right) dx dz - \\
&- \vec{k} \int_{AEFB} \left( \varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{dz}{2} \right) dx dy + \vec{k} \int_{DCGH} \left( \varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{dz}{2} \right) dx dy = \\
&= \left( \vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) dx dy dz \tag{1.93}
\end{aligned}$$



1.17-сурет. Дифференциалдық тікбұрышты параллелепипед

Осы өрнекті  $\int d\tau = dx dy dz$  шамасына бөлсек, (1.90)-ның дұрыстығына көз жеткіземіз.

Дәлелдеу кезінде одан жоғарғы реттік туындыларды құрайтын түзетулер енгізетін мүшелерін ескергеніміз жоқ. Тейлор қатарына жіктегенде қосымша мүшелер  $\int d\tau \rightarrow 0$  ( $dx \rightarrow 0$ ,  $dy \rightarrow 0$ ,  $dz \rightarrow 0$ ) шегінде жойылады.

Әрине, (1.90)–(1.92) өрнектерін қатаң түрде тексеру үшін көрсетілген шектік жағдайды орындау қажет.

### Жаттығулар

1.  $\vec{a}(t) = \vec{i} \cos t + \vec{j} e^{-t} + \vec{k}$ . вектор-функциясының анықталмаған интегралын табыңыздар.

2. Келесі вектор-функциялардың интегралдарын табыңыздар:

$$а) \vec{a}(t) = te^t \vec{i} + \sin^2 t \vec{j} - \frac{1}{1+t^2} \vec{k};$$

$$б) \vec{a}(t) = \frac{t}{1+t^2} \vec{i} + te^{t^2} \vec{j} + \cos t \vec{k};$$

$$в) \vec{a}(t) = \cos t e^{\sin t} \vec{i} - t \cos t^2 \vec{j} + \vec{k};$$

$$г) \vec{a}(t) = \frac{1}{2} t^2 \vec{i} - t \sin t \vec{j} + 2t' \vec{k}.$$

3. Келесі интегралдарды есептеңіздер:

$$а) \int_0^{\pi} \vec{a}(t) dt, \text{ мұндағы } \vec{a} = \sin^2 t \cos t \vec{i} + \cos^2 t \sin t \vec{j} + \vec{k};$$

$$б) \int_0^1 \vec{a}(t) dt, \text{ мұндағы } \vec{a} = \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{2} \vec{i} + \frac{e^{\frac{t}{2}}}{2} \vec{j} + e^t \vec{k};$$

$$в) \int_0^1 \vec{a}(t) dt, \text{ мұндағы } \vec{a} = 3\pi \cos \pi t \vec{i} - \frac{1}{1+t} \vec{j} + 2t \vec{k};$$

$$г) \int_0^1 \vec{a}(t) dt, \text{ мұндағы } \vec{a} = (2t + \pi) \vec{i} + t \sin t \vec{j} + \pi \vec{k}.$$

4. Екі өлшемді сызықтық осциляторға әсер ететін күш өрісін  $\vec{F} = -\vec{i}kx - \vec{j}ky$  түрінде жазуға болады. (1, 1) нүктесінен (4, 4) нүктесіне әртүрлі жолдармен қозғалғандағы жұмсалған жұмысты есептеп, салыстырыңыздар:

$$а) (1, 1) \rightarrow (4, 1) \rightarrow (4, 4);$$

$$б) (1, 1) \rightarrow (1, 4) \rightarrow (4, 4);$$

$$в) x=y \text{ түзуі бойымен.}$$

Ол үшін  $-\int_{(1,1)}^{(4,4)} \vec{F} \cdot d\vec{r}$  интегралын бағалау керек.

$$5. \vec{F} = -\frac{\vec{i}y}{x^2 + y^2} + \frac{\vec{j}x}{x^2 + y^2} \text{ күш өрісі берілген. Жасалатын}$$

жұмысты анықтау қажет, егер бірлік радиусы келесі бағыттарда қозғалатын болса:

- а) 0-ден  $\pi$ -ге дейін сағат тіліне қарама-қарсы бағытта,
- б) 0-ден  $-\pi$ -ге дейін сағат тілімен бағыттас.

6. (0, 0, 0) нүктесінен басталып,  $x$ ,  $y$  және  $z$  осьтерінің оң бағыттарындағы бірлік қашықтықтағы бірлік кубтың беті бойын

ша  $\frac{1}{3} \int_S \vec{r} \cdot d\vec{\sigma}$  интегралын есептеу керек. Кубтың үш беттері үшін  $\vec{r} \cdot d\vec{\sigma} = 0$ , ал қалғандары интегралға бірдей үлес қосады.

$$7. \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\int_S d\vec{\sigma} \times \vec{V}}{\int_S d\tau} = \vec{\nabla} \times \vec{V} \text{ екенін дәлелдеңіздер.}$$

*Ескерту:*  $dx dy dz$  – элементар көлемді пайдалану керек.

8. (1, 1) нүктесінен (3, 3) нүктесіне қозғалғандағы жасалған жұмысты табыңыздар. Мұндағы түсірілген күш  $\vec{F} = \vec{i}(x - y) + \vec{j}(x + y)$ . Қозғалыс жолын нақты анықтаңыздар. Күштің консервативті емес екендігін ескеріңіздер.

### 1.11 Гаусс теоремасы

$\vec{V}$  және  $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}$  шамалары берілсін және олар қарастырылатын аумақ бойынша үздіксіз болсын. Онда Гаусс теоремасына сәйкес:

$$\int_S \vec{V} \cdot d\vec{\sigma} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{V} d\tau \tag{1.94}$$

Яғни, бірлік көлемнен аққан сұйықтықтың көлемі  $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}$ -ге тең болады. Сондықтан (1.94) теңдеуінің оң бөлігі интегралдау жүргізілген  $V$  көлем бойынша аққан сұйықтықтың толық көлеміне тең. Ал теңдеудің сол жақ бөлігі (аталған  $V$  көлемді шектейтін)  $S$  беті бойынша сұйық ағынын сипаттағандықтан, Гаусс теоремасының дәлелдемесі ретінде қабылдаймыз. Гаусс теоремасының нақтыланған және математикалық қатаң дәлелдеуін оқулықтың соңында ұсынылған ғылыми әдебиеттерден табуға болады.

Гаусс теоремасының өте маңызды салдары – *Грин теоремасы* шығады. Егер  $u$  және  $v$  екі скалярлық функция болса, онда:

$$\vec{\nabla} \cdot (u\vec{\nabla}v) \equiv u\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}v + (\vec{\nabla}u) \cdot (\vec{\nabla}v), \quad (1.95)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (v\vec{\nabla}u) \equiv v\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}u + (\vec{\nabla}v) \cdot (\vec{\nabla}u). \quad (1.96)$$

(1.96) теңдеуден (1.95) теңдеуін алып, одан соң көлем бойынша интегралдасақ ( $u$ ,  $v$  және олардың туындылары үздіксіз деп жорамалдап) және (1.94) формуласын (Гаусс теоремасын) пайдаланған соң Грин теоремасын аламыз:

$$\int_V (u\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}v - v\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}u) d\tau = \int_S (u\vec{\nabla}v - v\vec{\nabla}u) \cdot d\vec{\sigma}. \quad (1.97)$$

(1.95) теңдеуінің өзгеше жазылуын келтірелік:

$$\int_S u\vec{\nabla}v \cdot d\vec{\sigma} = \int_V u\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}v d\tau + \int_V \vec{\nabla}u \cdot \vec{\nabla}v d\tau. \quad (1.98)$$

(1.94) теңдеуінде дивергенцияның табылуына және Гаусс теоремасының маңызды түрі болғанына қарамастан, көлемдік интегралдың құрамында градиент пен ротор болатын теореманың басқа да түрлері кездесуі мүмкін. Мысал қарастырайық:

$$\vec{V}(x, y, z) = V(x, y, z) \cdot \vec{a}, \quad (1.99)$$

мұндағы  $\vec{a}$  бағыты бойынша және абсолюттік шамасы тұрақты вектор (бағыт әртүрлі болуы мүмкін, бірақ бағыт таңдалған соң ол бекітіледі).

Осы жағдайда (1.63) қатынасының көмегімен (1.94) теңдеуі төмендегідей жазылады:

$$\vec{a} \int_S V d\vec{\sigma} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{a} V d\tau = \vec{a} \int_V \vec{\nabla} V d\tau, \quad (1.100)$$

$$\vec{a} \cdot \left[ \int_S V d\vec{\sigma} - \int_V \vec{\nabla} V d\tau \right] = 0. \quad (1.101)$$

$$|\vec{a}| \neq 0, \Rightarrow \int_S V d\vec{\sigma} = \int_V \vec{\nabla} V d\tau. \quad (1.102)$$

Аналогиялық түрде  $\vec{V} = \vec{a} \times \vec{P}$  ( $\vec{a}$  – тұрақты вектор) деп қабылдап, келесі теңдік жеңіл дәлелденеді:

$$\int_S d\vec{\sigma} \times \vec{P} = \int_V \vec{\nabla} \times \vec{P} d\tau \quad (1.103)$$

### Жаттығулар

1. Гаусс теоремасын (1.103) түрінде дәлелденіздер.
2. Егер  $S$  тұйық бет болса, онда төмендегі теңдікті дәлелденіздер:

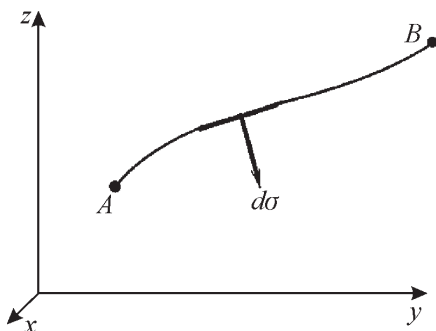
$$\int_S d\vec{\sigma} = 0.$$

3. Көрсетіңіздер  $\frac{1}{3} \int_S \vec{r} d\vec{\sigma} = V$ . Мұндағы  $S$  беті  $V$  көлемін шекаралайды.

4. Егер  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$  орындалса, онда кез келген  $S$  тұйық беті үшін  $\int_S \vec{B} \cdot d\vec{\sigma} = 0$  болатынын көрсетіңіздер.

## 1.12 Стокс теоремасы

Гаусс теоремасы функция дивергенциясының көлем бойынша интегралы мен осы функцияның көлемді қоршап тұрған бет бойынша интегралын байланыстырады.



**1.18-сурет.**  $S$  бетінің  $x = c$  жазықтығымен қиылысы.

Енді кез келген функция роторының бет бойынша интегралы мен осы функцияның берілген бетінің ауданы (яғни, сызықтық интеграл) бойынша интегралының байланысын қарастырайық. Ол үшін аралас көбейтіндінің формуласын интеграл астындағы

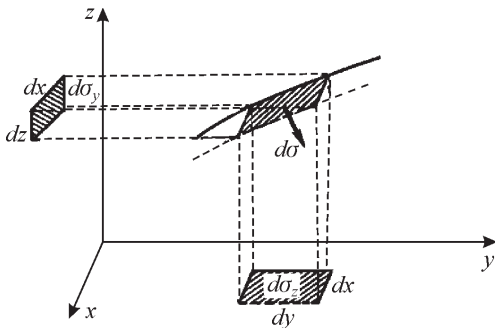
функция үшін пайдаланып, ротордың беттік интегралын түрлендірелік:

$$\int_S \vec{\nabla} \times \vec{V} d\vec{\sigma} = \int_S \begin{pmatrix} \frac{\partial V_x}{\partial z} d\sigma_y - \frac{\partial V_x}{\partial y} d\sigma_z + \frac{\partial V_y}{\partial x} d\sigma_z - \\ - \frac{\partial V_y}{\partial z} d\sigma_x + \frac{\partial V_z}{\partial y} d\sigma_x - \frac{\partial V_z}{\partial x} d\sigma_y \end{pmatrix}. \quad (1.104)$$

Бұл беттік интеграл қандай да бір берілген  $S$  беті бойынша интегралданады. Түсінікті болу үшін беттің  $x=c$  жазықтығымен қиғандағы  $S$  бетінің «қимасы» –  $AB$  қисығы болсын (1.18-сурет). Сонымен, енді  $A$  нүктесінен  $B$  нүктесіне қарай бағытты оң ретінде анықтасақ, онда 1.19-суретте көрсетілгендей  $d\vec{\sigma}$  бағытының құрамдас бөліктері төмендегідей жазылады:

$$\begin{aligned} d\sigma_y &= dx dz, \\ d\sigma_z &= -dx dy \end{aligned} \quad (1.105)$$

Дербес жағдайда (1.19-суреттегідей)  $dx$  өсімшесі  $x=c$  және  $x=c+dx$  жазықтарының арасына сәйкес келеді.  $V_x$  – тің туындыларын осы өсімше бойынша интегралдап табамыз:



1.19-сурет.  $d\vec{\sigma}$  – ның  $xy$  және  $xz$  жазықтықтарына кескіндері.

$$\int_S \left( \frac{dV_x}{\partial z} d\sigma_y - \frac{dV_x}{\partial y} d\sigma_z \right) = \int_S \left( \frac{\partial V_x}{\partial y} dy + \frac{\partial V_x}{\partial z} dz \right) dx. \quad (1.106)$$

$A$  нүктесінен  $B$  нүктесіне дейінгі интегралда  $x$  – тұрақты болғандықтан

$$\frac{\partial V_x}{\partial y} dy + \frac{\partial V_x}{\partial z} dz = dV_x \quad (1.107)$$

немесе,

$$\int dx \int_A^B dV_x = \int V_x(x, y_B, z_B) dx - \int V_x(x, y_A, z_A) dx. \quad (1.107a)$$

Аймақ шекарасын айналуының бағытын таңдауда ескеретін шарттарды жазайық: егер  $B$  нүктесі бағытында болса, онда  $dx = d\lambda_x$ ; егер  $A$  нүктесінің бағытында болса, онда  $dx = -d\lambda_x$ , мұндағы  $d\vec{\lambda}$  – аудан бойындағы вектордың өсімшесі. Онда:

$$\int_S \left( \frac{\partial V_x}{\partial z} d\sigma_y - \frac{\partial V_x}{\partial y} d\sigma_z \right) = \oint V_x \cdot d\vec{\lambda}_x, \quad (1.108)$$

мұндағы  $\oint$  – белгісі тұйық контур бойынша интегралдауды білдіреді. Біздің қарастырып жатқан жағдайымызда – интегралдау берілген беттің ауданы бойынша жүргізіледі. Басқа координаталар үшін де ұқсас болғандықтан, нәтижесін бірден жазайық.

$$\int \vec{\nabla} \times \vec{V} \cdot d\vec{\sigma} = \oint (V_x d\lambda_x + V_y d\lambda_y + V_z d\lambda_z) = \oint \vec{V} \cdot d\vec{\lambda}. \quad (1.109)$$

Бұл – *Стокс теоремасы*.

Стокс теоремасын пайдаланып, беттік және сызықтық интегралдар арасындағы қосымша қатынастарды табуға болады:

$$\int_S d\vec{\sigma} \times \vec{\nabla} \varphi = \oint \varphi d\vec{\lambda}, \quad (1.110)$$

$$\int_S (d\vec{\sigma} \times \vec{\nabla}) \times \vec{P} = \oint d\vec{\lambda} \times \vec{P}. \quad (1.111)$$

(1.110) теңдеуін дәлелдейік. Ол үшін  $\vec{V} = \vec{a} \cdot \varphi$  деп қабылдап ( $\vec{a}$  – бағыты және шамасы тұрақты вектор), (1.109) теңдеуіне апарып қоямыз.

Теңдіктің сол жағы:

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{a}\varphi) \cdot d\vec{\sigma} = - \int_S (\vec{a} \times \vec{\nabla} \varphi) d\vec{\sigma} = -\vec{a} \int_S \vec{\nabla} \varphi \times d\vec{\sigma}. \quad (1.112)$$

Теңдіктің оң жағы:

$$\oint \vec{a} \varphi \cdot d\vec{\lambda} = \vec{a} \cdot \oint \varphi d\vec{\lambda}. \quad (1.113)$$

Теңдіктің сол жағын оң жағына көшірсек, онда

$$\vec{a} \left( \int_S \vec{\nabla} \varphi \times d\vec{\sigma} + \oint \varphi d\vec{\lambda} \right) = 0. \quad (1.114)$$

$\vec{a}$  – тұрақты вектор болғандықтан, жақшаның ішіндегі шама нөлге тең. (1.111) теңдеуін де осылайша дәлелдеуге болады, мұндағы  $\vec{V} = \vec{a} \times \vec{P}$ .

(1.109) теңдеуіне қайта оралайық.  $\oint \vec{V} \cdot d\vec{\lambda}$  мүшесін тұйық контур ішіндегі циркуляциялайтын сұйық ретінде қарастырайық. Егер бет ретінде ауданы  $\vec{k} d\sigma$  болатын дөңгелекті қабылдасақ, онда  $|\vec{\nabla} \times \vec{V}| d\sigma$  –  $xy$  жазықтығындағы ауданы  $d\vec{\sigma}$  болатын тұйық контур бойындағы  $\vec{V}$  векторының циркуляциясына (ағын қозғалысына) тең болады. Бұл ескек винтінің айналуы арқасында  $\vec{V}$  векторының роторын өлшеуге мүмкіндік береді. Ал егер винт айналмаса, онда Стокс теоремасының негізінде  $\vec{V}$  векторы құйынсыз деген қорытынды жасаймыз.

### Жаттығулар

1.  $\vec{F}(M) = x^3 \vec{i} + y^3 \vec{j} + z^3 \vec{k}$  вектор өрісінің  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  сфера беті арқылы ағынын есептеңіздер.

2.  $q$  нүктелік зарядтың  $\vec{E} = \frac{q \cdot \vec{r}}{r^3}$  кернеулік өрісіндегі  $S$  тұйық беті арқылы ағынын есептеп табыңыздар.  $q$  заряды беттің сыртында орналасқан.

3.  $x = 0, y = 0, z = 0$  координаталық жазықтықтары мен  $4 - z = x^2 + y^2$  параболоидының бірінші октантта орналасқан бөлігі арасында жататын тұйық бет арқылы өтетін  $\vec{F}(M) = xy^2 \vec{i} + x^2 y \vec{j} + z \vec{k}$  вектор өрісінің ағынын есептеңіздер.

4.  $A(1; 0; 0), B(0; 2; 0), C(0; 0; 3)$  нүктелері мен  $\vec{F} = (x + y^2) \vec{i} + (y + z^2) \vec{j} + (z + x^2) \vec{k}$  өрісі берілген.  $OBC, OAC$  және  $OAB$  үшбұрыштары арқылы өтетін  $\vec{F}$  өрісінің ағынын

есептеңіздер.  $OABC$  пирамидасының толық бетінен өтетін  $\vec{F}$  өрісінің ағынын табыңыздар.

5. Стокс теоремасын (1.111) түрінде дәлелденіздер.

6.  $\vec{i} = -\vec{i}y + \vec{j}x$  векторы берілсін. Стокс теоремасын пайдаланып,  $xu$  жазықтығындағы үздіксіз тұйық қисық бойымен

интегралдың  $\frac{1}{2} \oint \vec{i} \cdot d\vec{\lambda} = \frac{1}{2} \oint (xdy - ydx) = A$ -ға тең болатынын көрсетіңіздер. Мұндағы  $A$  – қисықпен шектелген беттің ауданы.

7.  $\oint \vec{r} \times d\vec{r}$  интегралының абсолюттік шамасы  $xu$  жазықтығында орналасқан беттің ауданы бойынша интегралдың шамасынан екі есе артық болатынын көрсетіңіздер.

8. Егер  $S$ –тұйық бет болса, онда  $\int_S \vec{\nabla} \times \vec{V} \cdot d\vec{\sigma} = 0$  екендігін көрсетіңіздер.

9. Келесі қатынастарды дәлелденіздер:

$$\oint U \vec{\nabla} V \cdot d\vec{\lambda} = -\oint V \vec{\nabla} U \cdot d\vec{\lambda},$$

$$\oint U \cdot \vec{\nabla} V \cdot d\vec{\lambda} = \int_S (\vec{\nabla} U) \times (\vec{\nabla} V) \cdot d\vec{\sigma}.$$

### 1.13 Потенциал теориясы

**Скалярлық потенциал.** Егер берілген  $S$  кеңістігінің аймағындағы қандай да күшті әлдеқандай  $\varphi$  скалярлық функцияның градиенті түрінде, дәлірек айтқанда теріс таңбасымен өрнектей алсақ:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} \varphi, \quad (1.115)$$

онда  $\varphi$ -ді *скалярлық функция* деп атайтын боламыз. Ал, бір мәнді анықталатын скалярлық функция градиентінің теріс мәніне тең  $\vec{F}$  күші *консервативті* деп аталады.

Скалярлық потенциалдың табылуының шарттарын анықтайық. Ол үшін төмендегі екі қатынастың (1.115) теңдеуіне эквивалент болатынын көрсету қажет:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \quad (1.116)$$

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \quad (1.117)$$

Ал, (1.117) өрнегі  $S$  аймғындағы кез келген тұйық контур үшін орындалады. Енді жоғарыда жазылған үш теңдеудің (1.115 - 1.117) әрбіреуі қалған екеуімен эквивалент екенін дәлелделік.

Алдымен

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} \varphi, \quad (1.118)$$

теңдігінен бастайық. Ол үшін (1.56) теңдеуін пайдаланып (1.117) интегралдық шартын қайта жазалық:

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\oint \vec{\nabla} \varphi \cdot d\vec{r} = -\oint d\varphi \quad (1.119)$$

$d\varphi$  бойынша интеграл  $\varphi$ -ге тең болады. Бірақ қарастырып отырған контурымыз тұйық болғандықтан, (1.116) теңдеуі орындалатын  $S$  аймағындағы кез келген тұйық контур үшін осы интегралдың мәні нөлге тең болады. Енді қойылған шектеулерімізге мұқият көңіл аударайық:

- 1) потенциалдың бір мәнді анықталу қажеттілігі;
- 2)  $S$  аймағында барлық нүктелердегі (1.115) шартының орындалуы.

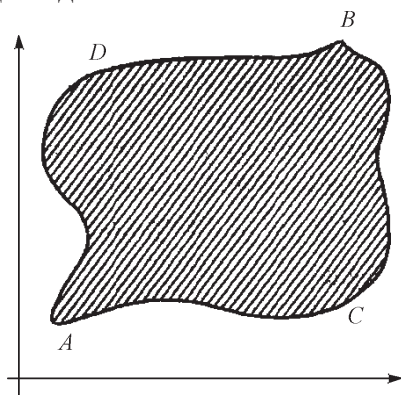
Айналмалы токтың магниттік скалярлық потенциалының теориясы үшін бұл елеулі ескерту. Егер ток сызықтарын қоршайтын кеңістіктегі контурды таңдайтын болсақ, онда скалярлық магниттік потенциал бір мәнді болудан қалады да, аталған талдауды қолдануға келмейді.

Дәлелдеменің эквиваленттілігін жалғастыра отырып, (1.117) шарты орындалады деп жорамалдаймыз. Егер  $S$  облысындағы кез келген тұйық контур үшін  $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$  болса, онда  $A$  және  $B$  нүктелері арасындағы интегралдың мәні интегралдау жолына тәуелсіз болады (1.20 сурет). Шындығында

$$\int_{ACB} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{BDA} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{ADB} \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad (1.120)$$

мұнда  $BDA$  бойынша алынған интеграл таңбасының алмасуы – бағыттың өзгеруін білдіреді. Ал оның физикалық мағынасы:  $A$

нүктесінен  $B$  нүктесіне ығысқандағы жасалатын жұмыс жолға тәуелсіз. Сондықтан, тұйық контур бойынша жасалған жұмыс нөлге тең. Соның салдарынан күш консервативті деп аталады және энергия сақталады.



**1.20-сурет.** Жұмыстың жасалуы кезінде айналып өтудің мүмкін болатын жолдары

(1.120) теңдеуінен жұмыстың тек бастапқы және соңғы нүктелеріне тәуелді болатыны көрінеді, яғни

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \varphi(B) - \varphi(A). \quad (1.121)$$

Контурды оң бағытта айналу кезінде таңбаны еркін таңдауға болады. Біздің жағдайымызда (1.115) теңдеуіне сәйкес тандалды.  $d\vec{r}$  қашықтықтағы  $A$  және  $B$  нүктелері үшін (1.121) теңдеуі төмендегідей өзгереді:

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = -d\varphi = -\vec{\nabla} \varphi \cdot d\vec{r}, \quad (1.122)$$

бұдан

$$(\vec{F} + \vec{\nabla} \varphi) \cdot d\vec{r} = 0 \quad (1.123)$$

$d\vec{r}$ -ді еркін таңдағандықтан, (1.123) теңдігінен (1.115) теңдеуін аламыз. Егер

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

болса, онда Стокс теоремасын қолданып, келесі теңдеуді табамыз:

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} \quad (1.124)$$

Егер контур ретінде  $d\sigma$  беттік элементінің ауданын алар болсақ, онда интеграл асты функциямыз беттік интегралда нөлге айналады. Демек, (1.117) теңдеуінен (1.116) қатынасын аламыз.

$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$  жағдайында (1.117) теңдеуін алу үшін Стокс теоремасы [(1.124) түрінде] дәлелдемесінің кері ретін пайдалану қажет. Онда (1.121) және (1.123) өрнектерін пайдаланып, (1.115) теңдеуін аламыз. Сонымен, үш қатынастың: (1.115), (1.116) және (1.117) эквивалентті болатынын көрсеттік.

Осы бөлімді қорытындылайық: егер  $\vec{F}$  векторы құйынсыз болса (тек осы шарт орындалғанда) ғана  $\varphi$  скалярлық потенциалы табылады немесе кез келген тұйық контурдың бойымен ығысқандағы жұмыс нөлге тең болады. Құйынсыз векторлардың мысалы ретінде гравитациялық және электростатикалық күштерін атауға болады. Демек, осы күштер консервативті, сондықтан гравитациялық және электростатикалық потенциалдары бар.

**1-мысал.** Массасы  $m_1$  денеге әсер ететін гравитациялық күштің скалярлық потенциалын табайық:

$$\vec{F}_G = -\frac{Gm_1m_2\vec{r}_0}{r^2} = -\frac{k\vec{r}_0}{r^2}.$$

(1.115) қатынасты шексіздіктен  $\vec{r}$ -ге дейін интегралдап, аламыз:

$$\varphi_G(r) - \varphi_G(\infty) = -\int_{\infty}^r \vec{F}_G \cdot d\vec{r} = +\int_r^{\infty} \vec{F}_G \cdot d\vec{r}. \quad (1.125)$$

Мұнда  $\vec{F}_G = -\vec{F}$  (яғни массаға түсірілген  $\vec{F}$  күші) ретінде қабылдап, (1.88) теңдігін ескере отырып табатынымыз: бірлік массалы денені шексіздіктен  $\vec{r}$  нүктесіне дейін тасымалдауға жұмсалған күшке тең. (Тек потенциалдар айырымын анықтауға болады. Осы жағдай үшін шексіздіктегі потенциал нөлге тең деп қабылдайық.) (1.125) теңдеуінің оң бөлігі нөлден кіші шама болғандықтан,  $\varphi_G(r)$ -де теріс мәнге ие болады. Ал  $\vec{F}_G$  радиалды болғандықтан

$$\varphi_G(r) = \int_r^{\infty} -\frac{k\vec{r}_0}{r^2} d\vec{r} = -\frac{k}{r} = -\frac{Gm_1m_2}{r}.$$

Минус таңбасы гравитациялық күштің табиғаты тартылыс болатынын білдіреді.

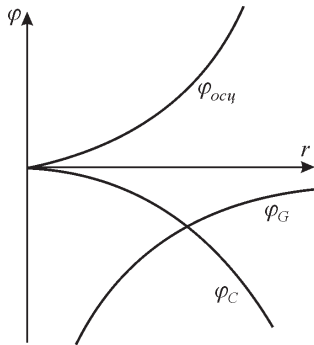
**2-мысал.** Бірлік массалы денеге әсер ететін орталық тебілу күшінің скалярлық потенциалын есептеңіздер. Күш орталықтан радиалды бағытталған және оның шамасы  $\vec{F}_C = \omega^2 r \vec{r}_0$ . Алдыңғы мысалдан айырмашылығы интегралдау координаталар басынан басталады, мұндағы  $\varphi_C(0) = 0$ .

Орталық тебілу күшінің түрі

$$\varphi_C(r) = -\int_0^r \vec{F}_C \cdot d\vec{r} = -\frac{\omega^2 r^2}{2}.$$

Егер таңбасын алмастырып, күшті  $\vec{F}_{осц} = -k\vec{r}$  етіп өзгертсек, онда сызықтық гармоникалық осцилляторды  $\varphi_{осц}(r) = kr^2/2$  аламыз.

1.21-суретте гравитациялық және орталықтан тебілу күштерінің, оған қоса сызықтық гармоникалық осциллятордың потенциалдары көрсетілген. Соңғысы орнықты күйді сипаттайды және кері қайтару күшін өрнектейді.



**1.21-сурет.** Потенциалдық энергияның қашықтыққа тәуелділігі:  $\varphi_C(r)$  - гравитациялық,  $\varphi_C$  - орталықтан тебілу,  $\varphi_{осц}$  - сызықтық гармоникалық осциллятордың энергиялары.

Заманында толық дифференциалдар жөніндегі ғылым атанған термодинамикада теңдеулердің келесі түрлері кездеседі:

$$df = P(x, y)dx + Q(x, y)dy \quad (1.126)$$

Әдетте  $\oint [P(x, y)dx + Q(x, y)dy]$  интегралының интегралдау контурының тек соңғы нүктелеріне тәуелділігін, яғни  $df$  -тің

толық дифференциал болатынын анықтау қажет болатын. Оның қажетті және жеткілікті шарттары келесі теңдеумен өрнектеледі

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad (1.126a)$$

немесе

$$P(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad Q(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}. \quad (1.126б)$$

Ал (1.126б) өрнегін қанағаттандыратын  $P$  және  $Q$  функциялары келесі қатынаспен байланысқан:

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}. \quad (1.126в)$$

Осы шарт  $\vec{F}$ -тің құйынсыз болуын талап ететін (1.116) өрнегінің ұқсастығы. Шындығында да (1.116) өрнегінің  $z$  - компоненті

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \quad (1.126г)$$

**Векторлық потенциал.** Физиканың кейбір аймақтарында, әсіресе, электромагниттік теорияда  $\vec{B}$  өрісі мен  $\vec{A}$  векторлық потенциалы арасындағы келесі байланыс жиі енгізіледі

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (1.127)$$

Әрине, егер (1.127) орындалса, онда (1.79) теңдеуінің нәтижесінде  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$  болады, демек  $\vec{B}$  – соленоидтық вектор. Сондықтан керісін дәлелделік: яғни, егер  $\vec{B}$  – соленоидтық вектор болса, онда  $\vec{A}$  – векторлық потенциал табылады. Ол үшін  $\vec{A}$ –ны тікелей есептеумен дәлелдейміз. Енді  $\vec{B} = \vec{i}b_1 + \vec{j}b_2 + \vec{k}b_3$ , ал векторлық потенциал  $\vec{A} = \vec{i}a_1 + \vec{j}a_2 + \vec{k}a_3$  болсын. Онда (1.127) теңдеуінен

$$\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z} = b_1, \quad (1.128a)$$

$$\frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x} = b_2, \quad (1.128б)$$

$$\frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y} = b_3. \quad (1.128в)$$

Координаталар жүйесі  $\vec{A}$ -ны  $yz$  жазықтығына параллель, яғни  $a_1=0$  етіп таңдалған деп жорамалдайық. Онда

$$b_2 = -\frac{\partial a_3}{\partial x}, \quad b_3 = \frac{\partial a_2}{\partial x}. \quad (1.129)$$

Енді интегралдаймыз:

$$a_2 = \int_{x_0}^x b_3 dx + f_2(y, z), \quad a_3 = -\int_{x_0}^x b_2 dx + f_3(y, z), \quad (1.130)$$

мұндағы кез келген  $f_2$  және  $f_3$  функциялары  $x$ -ке тәуелсіз. Енді (1.128а, б, в) өрнектеріне апарып қоямыз, мұнда  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$  болатынын ескеру қажет, сонда

$$\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z} = -\int_{x_0}^x \left( \frac{\partial b_2}{\partial y} + \frac{\partial b_3}{\partial z} \right) dx + \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} = -\int_{x_0}^x \frac{\partial b_1}{\partial x} dx + \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \quad (1.131)$$

$x$  – айнымалысы бойынша интегралдап, табатынымыз

$$\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z} = b_1(x, y, z) - b_1(x_0, y, z) + \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \quad (1.132)$$

Мұндағы  $f_2$  және  $f_3$  кез келген функциялары  $y$  және  $z$  айнымалыларына тәуелді болғандықтан, келесі түрде қабылдайық

$$f_2 = 0, \quad f_3 = \int_{y_0}^y b_1(x_0, y, z) dy \quad (1.133)$$

Осы жағдайда (1.128а) теңдігіне сәйкес (1.132) өрнегінің оң бөлігінде бір ғана  $b_1(x, y, z)$  функциясына тәуелділігі сақталады. Ендеше (1.133) теңдіктерін пайдаланып  $\vec{A}$ -ны құрастыруға болады:

$$\vec{A} = \vec{j} \int_{x_0}^x b_3(x, y, z) dx + \vec{k} \left[ \int_{y_0}^y b_1(x_0, y, z) dy - \int_{x_0}^x b_2(x, y, z) dx \right] \quad (1.134)$$

Бұл анықтама мүлде толық деуге келмейді. Себебі  $\vec{B}$  векторы  $\vec{A}$ -ның туындысы арқылы жазылғандықтан, кез келген тұрақтыны қосуға болады.

Енді одан да маңызды жайтты ескереміз: Кез келген  $\vec{\nabla}\varphi$ -ді, яғни скалярлық функцияның градиентін қосқанда да  $\vec{B}$  векторы өзгермейді. Сонымен қатар,  $f_2$  және  $f_3$  функцияларының еркіндігін ескере отырып, оларды өзгеше етіп таңдауға да болады. Келесі бөлімде  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$  шамасын қосымша анықтайтын боламыз.

**3-мысал.** Магниттік векторлық потенциалды құрастырайық. Ол үшін магниттік индукцияның дербес, бірақ аса маңызды жағдайын қарастыралық:

$$\vec{B} = \vec{k}B_z, \quad (1.135)$$

мұндағы  $B_z$  - тұрақты. Осы жағдай үшін (1.128) теңдеуінің түрлері төмендегідей болады:

$$\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y} = B_z \quad (1.136)$$

Жоғарыдағыдай  $a_1=0$  етіп қабылдап, (1.134)–тен табатынымыз

$$\vec{A} = \vec{j} \int_{x_0}^x B_z dx = \vec{j}x B_z. \quad (1.137)$$

Мұнда интегралдау тұрақтысын нөлге теңестірдік. Табылған өрнек  $\vec{A}$  векторлық потенциалды қанағаттандыратынын байқау қиын емес.

Енді  $a_1=0$  шарты тым қатаң еместігін көрсетейік. Ол үшін қосымша келесі:  $a_3=0$  шартын орнаталық. Онда (1.136) теңдіктерінен табамыз

$$-\frac{\partial a_2}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial a_1}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y} = B_z \quad (1.138)$$

Бұдан  $a_1$  және  $a_2$  құрамдас бөліктері  $z$ -ке тәуелсіз, яғни

$$a_1 = a_1(x, y), \quad a_2 = a_2(x, y) \quad (1.139)$$

болатынын көреміз. (1.138) шарттарының соңғысы орындалуы үшін  $a_1$  және  $a_2$

$$a_2 = p \int_0^x B_z dx = px B_z \quad (1.140)$$

$$a_1 = (p-1) \int_0^y B_z dy = (p-1)y B_z \quad (1.141)$$

осылайша таңдалуы қажет, мұндағы  $p$ - кез келген тұрақты. Онда

$$\vec{A} = \vec{i}(p-1)y B_z + \vec{j} p x B_z \quad (1.142)$$

Бұған қоса (1.127), (1.135) және (1.142) теңдеулері біріне-бірі қарама-қайшы болмайтынын көрсетуіміз қажет. Ал (1.137) және (1.142) салыстырсақ, онда  $\vec{A}$  -ны таңдау бір мәнді болмайтынына көз жеткіземіз. (1.142) теңдеуіндегі  $p$  параметрінің болуы, оған қоса (1.137) және (1.142) теңдеулерінің айырмашылығын ескеру үшін  $\vec{A}$  -ны төмендегідей қайта жазу қажет:

$$\begin{aligned} \vec{A} &= -\frac{1}{2}(\vec{i}y - \vec{j}x) B_z + (p - \frac{1}{2})(\vec{i}y + \vec{j}x) B_z = \\ &= -\frac{1}{2}(\vec{i}y - \vec{j}x) B_z + (p - \frac{1}{2}) B_z \vec{\nabla} \varphi, \end{aligned} \quad (1.143)$$

мұндағы<sup>1</sup>

$$\varphi = xy. \quad (1.144)$$

$\vec{A}$ -дағы бірінші мүше  $\vec{B}$  тұрақты үшін қарапайым пішінде жазылады:

$$\vec{A} = \frac{1}{2}(\vec{B} \times \vec{r}) \quad (1.145)$$

<sup>1</sup> Әрине, 1.3 - бөліміндегі анықтамаға сәйкес  $\varphi = xy$  функциясы скалярлық емес, яғни  $xy$  көбейтіндісі  $z$  осімен бұрылысына инвариантты емес. Инварианттылықты талап ету үшін  $p=1/2$  -ге тең етіп қабылдау қажет.

Көптеген жағдайларда магниттік векторлық потенциалды магнит өрісі  $\vec{B}$  туғызатын тоқтың таралуынан табады. Ол үшін Пуассонның векторлық теңдеуінің шешіміне қол жеткізу қажет. (1.14-бөлімінің 1-жаттығуын қараңыз).

### Жаттығулар

1. Төменде келтірілген күштердің қайсылары потенциалдық сипатқа ие болатынын анықтаңыздар:

$$\vec{F} = \vec{i} \frac{-y}{x^2 + y^2} + \vec{j} \frac{x}{x^2 + y^2},$$

$$\vec{F} = \vec{i} \frac{y}{r} - \vec{j} \frac{x}{r},$$

$$\vec{F} = \vec{i}xf(r) + \vec{j}yf(r) + \vec{k}zf(r),$$

$$\vec{F} = \vec{i}f_1(x) + \vec{j}f_2(y) + \vec{k}f_3(z),$$

Мұндағы  $f(r)$ ,  $f_1(x)$ ,  $f_2(y)$ ,  $f_3(z)$  – кез келген функциялар. Күштердің физикалық табиғатын көрсетіңіздер. Мүмкін болатын жағдайлар үшін потенциалдарды табыңыздар.

*Сілтеме.* Әсіресе,  $\vec{F}$ -тің координаттар басындағы сипаттама-сына көңіл аударыңыздар.

2.  $\vec{B} = \frac{\vec{r}_0}{r^2} = \left( \frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3} \right)$  болсын. Онда  $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$  болатын-

дай етіп,  $\vec{A}$  -ны таңдаңыздар. Мүмкін болатын шешімдердің бірі төменде көрсетілген:

$$\vec{A} = \frac{\vec{i}yz}{r(x^2 + y^2)} - \frac{\vec{j}xz}{r(x^2 + y^2)}$$

3. Радиусы  $a$  болатын бір қалыпты (көлемі бойынша) зарядталған сфера берілген. Оның  $0 \leq r < \infty$  аралығындағы  $\varphi(r)$  электростатикалық потенциалын анықтаңыздар.

*Ескерту.* 1.14-бөлімінде көрсеткеніміздей,  $r=r_0$  нүктесінде орналасқан зарядқа әсер ететін кулондық күш  $r_0$ -ден кіші

қашықтықтағы зарядқа ғана тәуелді; ал  $r_0$ -ден үлкен қашықтықтағы зарядқа тәуелсіз. Бұл зарядтың тек сфералық симметриялы таралуы үшін ғана орынды екендігін баса айтамыз.

4.  $\vec{A} = \frac{1}{2}(\vec{B} \times \vec{r})$ ,  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$  теңдеулері кез келген  $\vec{B}$  тұрақты векторын өрнектейтінін көрсетіңіздер.

### 1.14 Гаусс заңы. Пуассон теңдеуі

**Гаусс заңы.** Нүктелік электр заряды координаталар басында орналассын. Ол  $\vec{E}$  электр өрісін тудырады

$$\vec{E} = -\frac{q\vec{r}_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (1.146)$$

Енді (1.146) теңдеуінің көмегімен *Гаусс заңын* жазамыз; осы заңға сәйкес беттік интеграл

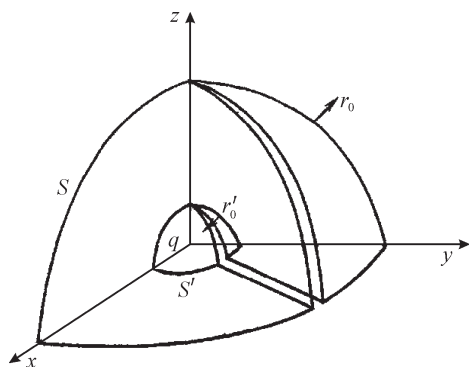
$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{\sigma} = \begin{cases} \frac{q}{\epsilon_0}, & \text{егер заряд } V\text{-да болса,} \\ 0, & \text{егер заряд } V\text{-дан тыс болса.} \end{cases} \quad (1.147)$$

Мұндағы  $S$  – тұйық бет; ол  $V$  көлемін шектейді.

Гаусс теоремасының (1.94) түрін пайдаланып ( $q/4\pi\epsilon_0$  көбейткішін әзірше қалдырамыз), оған қоса  $\vec{\nabla} \cdot \vec{r}_0 r^{-2} = 0$  болатынын ескеріп, табамыз:

$$\int_S \frac{\vec{r}_0 \cdot d\vec{\sigma}}{r^2} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\vec{r}_0}{r^2} \right) d\tau = 0. \quad (1.148)$$

Мұнда интеграл асты функциясы координаттар басында анықталмағандықтан,  $S$  беті оны қамтымайды. Гаусс заңының осы дәлелдемесі зарядтың  $V$  көлемінен тыс жағдай үшін сәйкес келеді.



1.22-сурет. Координаттар басын «алып тастау»

Ал егер  $S$  беті координаттар басын қамтитын болса, онда ортасы координаттар басында орналасқан, радиусы  $\delta$  болатын  $S'$  кіші сфера құруға болады (1.22-сурет).  $S$  және  $S'$  сфераларымен шектелетін беттердің қайсысы сыртқы және қайсысы ішкі болатынын ажырату мақсатында «ойық» жасаймыз. Ол  $S$  және  $S'$  сфераларын байланыстыратын болғандықтан, бір мәнді анықталған тұйық бет пайда болады. Ойықты қажетті шамада кішірек етіп жасауға болатындықтан, ойықтың беттік интегралға беретін үлесі нөлге ұмтылады. Енді Гаусс теоремасын  $S$  және  $S'$  беттердің арасындағы көлемге де пайдалануға болады:

$$\int_S \frac{\vec{r}_0 \cdot d\vec{\sigma}}{r^2} + \int_{S'} \frac{\vec{r}_0 \cdot d\vec{\sigma}'}{\delta^2} = 0 \quad (1.149)$$

Екінші интегралды бағалау мақсатында  $d\vec{\sigma}' = -\vec{r}_0 \delta^2 d\Omega$  етіп жорамалдадық, мұндағы  $d\Omega$  – денелік бұрыш элементі. Минус таңбасы (1.10-бөліміне сәйкес)  $\vec{r}'_0$  нормальдің оң бағытын білдіреді. Біздің жағдайымызда ол радиус-вектордың бағытына қарама-қарсы  $\vec{r}'_0 = -\vec{r}_0$ . Бұрыштар бойынша интегралдаймыз, сонда:

$$\int_{S'} \frac{\vec{r}_0 \cdot d\vec{\sigma}'}{\delta^2} = -\int_{S'} \frac{\vec{r}_0 \cdot \vec{r}_0 \delta^2 d\Omega}{\delta^2} = -4\pi. \quad (1.150)$$

(1.149) теңдеуіндегі көбейткішті ескеруіміз қажет, сондықтан

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{\sigma} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (1.151)$$

Сонымен Гаусс теоремасы толығымен дәлелденді. Мұндағы  $S$  беті міндетті түрде сфералық болуы шарт емес екендігін атап өтеміз.

Зарядтың таралуын қарастыралық:

$$q = \int_V \rho d\tau \quad (1.152)$$

(1.151) теңдеуі орынды, алайда толық  $q$  зарядты  $S$  бетінің ішіндегі орналасқан барлық зарядтардың қосындысы ретінде қабылдау қажет:

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{\sigma} = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} d\tau \quad (1.153)$$

Оны Гаусс теоремасының негізінде табамыз

$$\int_S \vec{\nabla} \cdot \vec{E} d\tau = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} d\tau \quad (1.154)$$

Көлемді таңдау еркін болғандықтан, интеграл асты өрнектер өзара тең болуы қажет

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0 \quad (1.155)$$

Осы қатынас – Максвелл теңдеулерінің бірі.

Керісінше, яғни Максвелл теңдеуін пайдаланып Гаусс заңын дәлелдеуге де болады.

**Пуассон теңдеуі.** Егер (1.155) теңдеуіндегі  $\vec{E}$ -нің орнына  $-\vec{\nabla}\varphi$ -ді қоятын болсақ, онда Пуассон теңдеуін аламыз

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\varphi = -\rho / \epsilon_0 \quad (1.156)$$

Егер  $c = 0$  шарты орындалса, онда әйгілі Лаплас теңдеуін аламыз:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\varphi = 0 \quad (1.157)$$

## Жаттығулар

1. Максвелл теңдеулерін пайдаланып, статикалық жүйе (тұрақты ток) үшін  $\vec{A}$  магниттік векторлық потенциалы

Пуассонның векторлық теңдеуін  $\vec{\nabla}^2 \cdot \vec{A} = -\mu \vec{j}$  тек  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$  болғанда ғана қанағаттандыратынын көрсетіңіздер.

2. Екі өлшемді жағдай үшін  $\varphi = -q \frac{\ln r}{2\pi\epsilon_0}$ ,  $\vec{E} = \vec{\nabla} \varphi = q \frac{\vec{r}_0}{2\pi\epsilon_0 r}$

болатынын ескеріп, Гаусс заңын жазыңыздар. Мұндағы  $q$  – бірлік ұзындықтағы заряд; ал бірлік жұқалықты цилиндрлік қабат екі өлшемді жүйені құрайды,  $r$  – радиус бойынша өлшенетін нүктеден осьтік сызыққа дейінгі қашықтық.

3. Максвелл теңдеуін (1.155) пайдаланып, Гаусс заңын алыңыздар.

4. Нүктелік  $q$  – зарядтың электр өрісі сфералық симметриялық деп жорамалдап, Кулон заңы Гаусс заңынан шығатынын көрсетіңіздер:

$$\vec{E} = \frac{q\vec{r}_0}{2\pi\epsilon_0 r^2}.$$

### 1.15 Гельмгольц теоремасы

Жоғарыда 1.13-бөлімде айтылғандай,  $\vec{A}$  магниттік векторлық потенциалын таңдау бір мәнді емес.  $\vec{A}$ -ның дивергенциясы анықталмаған күйінде қалды. Осы бөлімде вектордың дивергенциясы және роторы жөніндегі екі теореманы дәлелдейміз.

Кез келген облыс ішіндегі вектор дивергенциясының, роторының және нормалінің берілуі арқылы оны осы аймақтың шектерінде бір мәнді анықтауға болады. Айтылғанды дәлелдеу мақсатында келесі белгілеулер енгізейік:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V}_1 = s, \quad \vec{\nabla} \times \vec{V}_1 = \vec{c}, \quad (1.158)$$

мұндағы,  $s$  – (заряд) көзінің тығыздығы;  $\vec{c}$  – (ток) циркуляциясының тығыздығы. Қосымша аймақ шегінде вектордың нормальдік құрамдас бөліктері  $V_n$  берілсін. Жасалған жорамалдарымызға сәйкес  $\vec{V}_1$  векторының бірімәнді анықталатынын дәлелдейміз.

(1.158) теңдеуін қанағаттандыратын және аймақ шегіндегі нормальдік құрамдас бөліктері де тура сондай болатын  $\vec{V}_2$  век-

торы табылсын. Онда  $\vec{V}_1 - \vec{V}_2 = 0$  болатынын көрсетуіміз қажет. Ол үшін  $\vec{W} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2$  белгілеуін енгіземіз. Онда:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{W} = 0, \quad (1.159)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{W} = 0. \quad (1.160)$$

Ендеше (1.13-бөлімінде көрсетілгендей)

$$\vec{W} = -\vec{\nabla} \cdot \varphi \quad (1.161)$$

етіп таңдауымызға болады. Оны (1.159) теңдеуіне қойып, Лаплас теңдеуін аламыз:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \varphi = 0. \quad (1.162)$$

Алдын ала  $u$  және  $v$  функцияларын  $\varphi$ -ге теңестіріп, Грин теоремасын (1.98) пайдаланамыз. Шекарада

$$W_n = V_{1n} - V_{2n} = 0 \quad (1.163)$$

болатынын ескерсек, онда Грин теоремасын келесі түрде жазуға тура келеді:

$$\int_V (\vec{\nabla} \varphi)(\vec{\nabla} \varphi) d\tau = \int_V \vec{W} \cdot \vec{W} d\tau = 0 \quad (1.164)$$

$\vec{W} \cdot \vec{W} = W^2$  шамасы оң болғандықтан,

$$\vec{W} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2 = 0 \quad (1.165)$$

берілген аймақтың аумағында орынды болады. Демек,  $\vec{V}_1$  жалғыз. Теорема дәлелденді.

Ендігі кезекте екінші теорема – Гельмгольц теоремасын дәлелдейік.

(1.158) шарттарын қанағаттандыратын  $\vec{V}$  векторын екі (бірі құйынсыз, екіншісі – соленоидты) вектордың қосындысы түрінде жазуға болады; мұнда  $s$  және  $c$  – шексіздікте нөлге тең болады. Сонымен  $\vec{V}$  векторын келесі түрде жазуға болатынын дәлелдейік

$$\vec{V} = -\vec{\nabla}\varphi + \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (1.166)$$

мұндағы,  $\vec{\nabla}\varphi$  – құйынсыз,  $\vec{\nabla} \times \vec{A}$  – соленоидты бөліктері.

Дербес жағдайда  $\varphi(\vec{r})$  функциясы скалярлық потенциалына сәйкес болатын жағдайда келесі түрде жазылады:

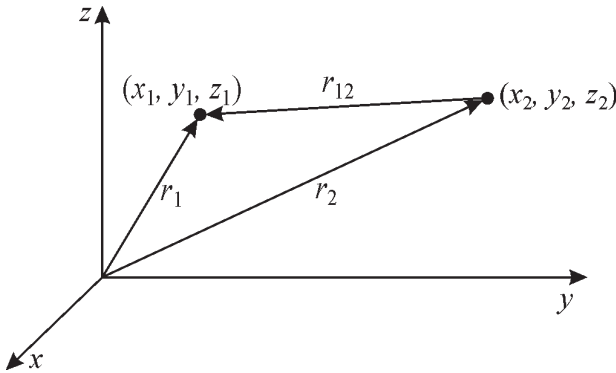
$$\varphi(\vec{r}_1) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{s(\vec{r}_2)}{r_{12}} d\tau_2, \quad (1.167)$$

ал  $\vec{A}$  – векторлық потенциалға сәйкес болғанда, төмендегідей жазылады:

$$\vec{A}(\vec{r}_1) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{c}(\vec{r}_2)}{r_{12}} d\tau_2 \quad (1.168)$$

Мұндағы  $\vec{r}_1$  – өріс нүктесінің  $(x_1, y_1, z_1)$  координаталарын,  $\vec{r}_2$  – өріс көзінің  $(x_2, y_2, z_2)$  координаталарын көрсетеді, ал

$$r_{12} = \left[ (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 \right]^{1/2} \quad (1.169)$$



**1.23-сурет.** Өріс көзінің координаттары  $(x_2, y_2, z_2)$  және бақылаушы нүктесі  $(x_1, y_1, z_1)$

$\vec{r}_1$ ,  $\vec{r}_2$  және  $\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$  векторларының бағыттары 1.23-суретте көрсетілген. Ал  $\vec{r}_{12}$  векторының оң бағыты ретінде – өріс көзінен бақылаушы нүктесіне дейінгі бағыты қабылданды. Интегралдарды табу үшін  $s$  және  $\vec{c}$  үлкен қашықтықтарда жылдам нөлге ұмтылуы қажет.

(1.166) теңдеуіне сәйкес  $\vec{V}$  векторы құйынсыз және соленоидты бөліктерінің қосындысына тең. Мұндағы скалярлық және векторлық потенциалдар сәйкесінше (1.167) және (1.168) теңдеулері түрінде анықталған. Енді  $\vec{V}$  векторы (1.158) шартын қанағаттандыратынын көрсетейік. Сонда алдыңғы теореманың негізінде  $\vec{V}$  бір мәнді анықталғандықтан, Гельмгольц теоремасы дәлелденеді.

Біріншіден, ротордың дивергенциясы нөлге тең болғандықтан,  $\vec{V}$ -ның дивергенциясы (1.166) теңдеуінің оң бөлігіндегі бірінші мүшесімен анықталады:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \varphi = -\frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \int \frac{s(\vec{r}_2)}{r_{12}} d\tau_2 \quad (1.170)$$

Интегралдау  $(x_2, y_2, z_2)$  айнымалылары бойынша жүргізіледі, ал Лаплас операторы  $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$  (немесе  $\vec{\nabla}^2$ )  $(x_1, y_1, z_1)$  координаталарына әсер етеді; сондықтан оны интеграл астына енгізуге болады

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = -\frac{1}{4\pi} \int s(\vec{r}_2) \vec{\nabla}_1^2 \left( \frac{1}{r_{12}} \right) d\tau_2 \quad (1.171)$$

Гаусс заңының негізінде (1.14-бөлімін қараңыз) келесі өрнек орынды:

$$\int \vec{\nabla} \left( \frac{r_0}{r^2} \right) d\tau = \int \vec{\nabla}^2 \left( \frac{1}{r} \right) d\tau = \begin{cases} -4\pi, \\ 0. \end{cases} \quad (1.172)$$

Нәтиже интегралдау тұйық бетінің координаталар басын  $r=0$  қамтитынына немесе қамтымайтынына байланысты. Сондықтан нәтижені Дирактың  $\delta$  – функциясымен өрнектеген ыңғайлы:

$$\vec{\nabla}^2 \left( \frac{1}{r} \right) = -4\pi \delta(\vec{r}) \quad (1.173)$$

Дирактың дельта-функциясы келесі түрде анықталады:

$$\delta(\vec{r}) = 0, \text{ егер } \vec{r} \neq 0, \quad (1.174a)$$

$$\int f(r) \delta(r) d\tau = f(0). \quad (1.174b)$$

Мұндағы  $f(r)$  – кеңістікте анықталған кез келген функция, ал координаталар басы интегралдау шегіне енеді.

Дербес жағдайда (1.174 б) теңдеуі

$$\int \delta(\vec{r}) d\tau = 1. \quad (1.175)$$

Талдауды одан әрі жалғастырмастан бұрын (1.173) теңдеуінің екі түрін қарастырайық. Біріншіден, берілген өріс көзі координаталар басымен сәйкес келмейтін  $\vec{r}_2$  нүктесінде орналассын. Бұдан келесі салдар шығады: егер тұйық бет  $\vec{r} = \vec{r}_2$  нүктесін қамтыған жағдайда ғана Гаусс заңындағы  $4\pi$  көбейткіші пайда болады. Көз жеткізу үшін (1.173) теңдеуін қайта жазамыз:

$$\bar{\nabla}^2 \left( \frac{1}{r_{12}} \right) = -4\pi \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad (1.176)$$

Көзді  $\vec{r}_2$  нүктесіне тасымалдау (1.174 а және 1.174 б) шарттарын өзгертеді

$$\delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = 0, \vec{r}_1 \neq \vec{r}_2 \quad (1.177a)$$

$$\int f(\vec{r}_1) \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) d\vec{r}_1 = f(\vec{r}_2) \quad (1.177b)$$

Екіншіден,  $r_{12}^{-1}$ -ді  $x_2, y_2, z_2$  айнымалылары бойынша екі ретті дифференциалдау  $x_1, y_1, z_1$  бойынша екі ретті дифференциалдағанмен пара-пар:

$$\bar{\nabla}_1^2 \left( \frac{1}{r_{12}} \right) = \bar{\nabla}_2^2 \left( \frac{1}{r_{12}} \right) = -4\pi \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = -4\pi \delta(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \quad (1.178)$$

$\delta$  – функциясының анықтамасынан келесі қорытынды жасауға болатынын байқаймыз:

$$\delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \delta(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \quad (1.179)$$

(1.176) теңдігін (1.171) теңдеуіне апарып қойып,  $\delta$  – функциясының көмегімен интегралдап, табатынымыз:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{V} &= -\frac{1}{4\pi} \int s(\vec{r}_2) \vec{\nabla}_{21}^2 \left( \frac{1}{r_{12}} \right) d\vec{r}_2 = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int s(\vec{r}_2) (-4\pi) \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = s(\vec{r}_1)\end{aligned}\quad (1.180)$$

Соңғы теңдік (1.177 б) теңдеуінің салдары, онда 1 және 2 индекстерінің орны алмастырылған. (1.180) теңдеуінен көргеніміздей,  $\vec{V}$  векторының қабылданған пішіні мен  $\psi$  скалярлық потенциалы (1.158) шарттарының біріншісімен келісімде болады.

Гельмгольц теоремасының толық дәлелдемесі үшін айтылған жорамалдарымыз (1.158) шарттарының екіншісімен де келісімде болатынын көрсетуіміз қажет. (1.166) теңдеуінің негізінде келесі өрнекті жазайық:

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} - \vec{\nabla}^2 \vec{A}\quad (1.181)$$

(1.168) ескере отырып бірінші мүшені төмендегідей жазамыз:

$$\vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \int \vec{c}(\vec{r}_2) \cdot \vec{\nabla}_1 \vec{\nabla}_2 \left( \frac{1}{r_{12}} \right) d\tau_2\quad (1.182)$$

$(x_1, y_1, z_1)$  бойынша алынған екінші ретті туындыларын  $(x_2, y_2, z_2)$  айнымалылары бойынша екінші ретті туындыларымен алмастырып, (1.182) теңдеуінің әрбір құрамдас бөліктерін бөлшектеп интегралдаймыз:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \Big|_x &= \int \vec{c}(\vec{r}_2) \cdot \vec{\nabla}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{1}{r_{12}} \right) d\tau_2 = \\ &= \int \vec{\nabla}_2 \cdot \left[ \vec{c}(\vec{r}_2) \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{1}{r_{12}} \right) \right] d\tau_2 - \int \left[ \vec{\nabla}_2 \cdot \vec{c}(\vec{r}_2) \right] \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{1}{r_{12}} \right) d\tau_2.\end{aligned}\quad (1.183)$$

Алайда, екінші интегралдың мәні нөлге тең, себебі  $\vec{c}$  - соленоидты, ал бірінші интегралды Гаусс теоремасының негізінде беттік интегралға алмастыруға болады. Егер  $\vec{c}$  кеңістікте шектеулі немесе  $r$ -дің үлкен мәндерінде  $1/r$ -ден жылдам нөлге ұмтылатын болса, онда (1.168) интегралы табылады. Онда қажетті мөлшердегі

алыс қашықтықтағы бет бойынша алынған (1.183) теңдеуінің оң бөлігіндегі бірінші интеграл да нөлге тең болады.

$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$  шарты орындалған жағдайда, (1.181) теңдеуі (1.171) теңдеуіне әкеледі, мұндағы  $s(\vec{r}_2)$  скаляры  $\vec{c}(\vec{r}_2)$  векторымен алмастырылған:

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \vec{\nabla}^2 \vec{A} = -\frac{1}{4\pi} \int \vec{c}(\vec{r}_2) \cdot \vec{\nabla}_2^2 \left( \frac{1}{r_{12}} \right) d\vec{r} \quad (1.184)$$

$\delta$  – функциясының қасиеттерін пайдаланып, (1.184) теңдеуі (1.158) шарттарының екіншісімен келісімде болатынын көреміз. Сонымен,  $\vec{V}$  векторының (1.166) түрінде, ал  $\vec{A}$  векторлық потенциалының (1.168) түрінде жазылуы  $\vec{V}$ -ның роторын анықтайтын (1.158) шарттарының екіншісін қанағаттандырады.

Осымен Гельмгольц теоремасының дәлелдемесін аяқтаймыз. Электромагниттік өріске қатысты жазатын болсақ, онда өрістің  $\vec{V}$  векторын екі құрамдас бөлігі бойынша:  $\varphi$  скалярлық потенциалымен анықталатын электр өрісінің құйынсыз векторы мен  $\vec{A}$  векторлық потенциалымен берілетін магнит өрісінің соленоидты  $\vec{B}$  векторын құрайды. Өріс көзінің тығыздығы  $s(\vec{r}_2)$ -ды электр зарядының тығыздығы ( $\epsilon$  диэлектрлік өтімділік тұрақтысына бөлінген) ретінде, ал циркуляцияның тығыздығы  $\vec{c}(\vec{r}_2)$ -ды – электр тоғының тығыздығы ( $\mu$  магнит тұрақтысына көбейтілген) ретінде қарастыруға болады.

### Жаттығулар

1. Пуассонның  $\vec{\nabla}_1^2 \vec{P}(\vec{r}_1) = -\vec{V}(\vec{r}_1)$  векторлық теңдеуінің шешімі

$$\vec{P}(\vec{r}_1) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{V}(\vec{r}_2)}{r_{12}} d\tau_2 \quad \text{деп жорамалдап, Гельмгольц теоремасын}$$

(1.166) дәлелдеңіздер. Мұндағы  $\vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{P}$ ,  $\varphi = \vec{\nabla} \cdot \vec{P}$ .

2.  $\varphi$ -дің және  $\vec{A}$ -ның орындарына  $\vec{P}(\vec{r}_1)$  шешімін қойғанда, 1.15-бөлімдегі осы шамалардың өрнектеріне сәйкес болатынына көз жеткізіңіздер.

## *I тараудың бақылау сұрақтары*

1. Вектордың түрлендіру заңын және оның салдарларын жазыңыздар.
2. Скалярлық көбейтінді және оның қасиеттерін жазыңыздар.
3. Векторлық көбейтінің геометриялық түсініктемесін беріңіздер.
4. Үш вектордың аралас көбейтіндісінің геометриялық түсініктемесін көрсетіңіздер.
5. Екі ретті векторлық көбейтіндінің қасиеттерін пайдаланып, физикалық есептерді шешудің мысалдарын келтіріңіздер.
6. Скалярлық функцияның градиенті және оның қасиеттерін көрсетіңіздер.
7. Дивергенция амалы және оның физикалық мағынасын түсіндіріңіздер.
8. Ротордың физикалық мағынасын түсіндіріңіздер. Құйынсыз векторларға мысалдар келтіріңіздер.
9. Гаусс теоремасының физикалық мағынасын жазып көрсетіңіздер.
10. Грин теоремасын дәлелдеңіздер, оның физикалық есептерінің шешімдеріне мысал келтіріңіздер.
11. Стокс теоремасының физикалық мағынасын жазып көрсетіңіздер.
12. Гаусс заңын пайдаланып, Пуассон тендеуін қорытып шығарыңыздар.

## 2 - т а р а у

### КООРДИНАТАЛАР ЖҮЙЕЛЕРІ

Бірінші тарауда тек декарттық координаталар жүйесімен ғана жұмыс жасадық. Онда  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  бірлік векторларының тұрақтылығын пайдаландық. Оған қоса  $r$  радиус-вектор ұғымын енгіздік. Алайда, барлық физикалық есептердің шешімдері декарттық координаталар жүйесінде оңай табыла бермейді. Мысалы, орталық күш (гравитациялық немесе электростатикалық) өрісінде декарттық координаталар жүйелері есепті тіпті қиындатып жібереді. Сондықтан мұндай жағдайларда бір координаты радиалдық бағытта болатын координаталар жүйесін пайдаланған оңтайлы болады.

Координаталар жүйелерін есептің шарттарына және симметриясына байланысты таңдай білу қажет. Координаталар жүйесін дұрыс таңдау есептің шешімін жылдам табуға септігін тигізеді. Себебі, дербес дифференциалдық туындылар теңдеулерін жаңа координаталар жүйесінде айнымалыларды ажырату әдістері арқылы бірінші-ретті дифференциалдық теңдеулерге келтіруге болады.

Алдымен мына теңдеуде айнымалыларды ажырату әдісін қолдануға болатын координаталар жүйелерін қарастырайық:

$$\nabla^2 \Psi + k^2 \Psi = 0 \quad (2.1)$$

Бір қарағанда бұл теңдеудің үлкен мағынасының бар екенін байқау қиын, себебі:

- 1)  $k^2 = 0$  болғанда, онда Лаплас теңдеуі;
- 2)  $k^2 = (+) \cdot const$  болғанда, онда Гельмгольц теңдеуі;
- 3)  $k^2 = (-) \cdot const$  болғанда, онда диффузия теңдеуінің кеңістіктік бөлігі;
- 4)  $k^2 = const \times$  потенциалдық энергия болғанда, онда Шредингер теңдеуі шығады.

Жалпы (2.1) теңдеуіндегі айнымалыларды ажырату он бір координаталар жүйелерінде мүмкін болатыны мәлім. Олардың әрқайсысын софокусты эллипсоидтар жүйелерінің дербес

жағдайы ретінде қарастыруға болады. Оған қоса Лаплас теңдеуін шешу үшін пайдаланылатын үш жүйені қарастырамыз.

## 2.1. Қисық сызықты координаталар

Декарт координаталары үш өзара перпендикуляр жазықтықтардан құралады:  $x=const$ ,  $y=const$  және  $z=const$ . Енді осы координаталар жүйесіне басқа үш беттерден құралатын координаталар жүйесін әкеліп қоялық. Жаңа координаталар жүйесінің беттері бір-біріне параллель емес және олар жазықтықтар да емес болсын. Жалпы жағдайда жаңа беттер жиынтығы өзара перпендикуляр болмауы да мүмкін. Алайда есепті тым қиындатып жібермес үшін соңғы шарттар орындалмайды деп есептейік. Демек, кеңістіктің кез келген нүктесі декарт координат жүйесінде үш жазықтықтың, ал жаңа координаталар жүйесінде – үш беттің қиылысымен анықталады.

Қисық сызықты координаталарды

$$q_1 = const, q_2 = const, q_3 = const$$

ретінде қабылдап, берілген нүктенің координаталарын  $(q_1, q_2, q_3)$  бекітеміз, ал «ескі» координаталары  $(x, y, z)$  болады.

Демек,

$$x = x(q_1, q_2, q_3), \quad y = y(q_1, q_2, q_3), \quad z = z(q_1, q_2, q_3) \quad (2.2)$$

яғни жаңа координаталар жүйесі арқылы өрнектеуге болады және керісінше:

$$q_1 = q_1(x, y, z), \quad q_2 = q_2(x, y, z), \quad q_3 = q_3(x, y, z). \quad (2.3)$$

Әрбір  $q_i = const$  беттер жиынтығына осы бетке нормаль болатын  $\vec{a}_i$  бірлік векторын және оның бағыты  $q_i$ -дің өсу бағытымен бағыттас болатындай етіп сәйкестендіруге болады.

Екі нүкте арақашықтығының квадраты келесі теңдеумен анықталады:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \sum_{ij} h_{ij}^2 dq_i dq_j \quad (2.4)$$

Мұндағы  $h_{ij}$  – Ламе коэффициенттері деп аталады, оларды жаңа  $q_1, q_2, q_3$  координаталар жүйесін сипаттайтын параметрлер ретінде қарастыруға болады. Ламе коэффициенттерінің жиынтығы координаталар жүйесінің *метрикасын* анықтайды.

$h_{ij}$  -ды табу мақсатында (2.2) теңдеулерін дифференциалдайық:

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial x}{\partial q_3} dq_3, \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial y}{\partial q_3} dq_3, \\ dz &= \frac{\partial z}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial z}{\partial q_3} dq_3; \end{aligned} \quad (2.5)$$

демек,

$$\begin{aligned} dx^2 &= \sum_{ij} \frac{\partial x}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial x}{\partial q_j} dq_i dq_j, \\ dy^2 &= \sum_{ij} \frac{\partial y}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial y}{\partial q_j} dq_i dq_j, \\ dz^2 &= \sum_{ij} \frac{\partial z}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial z}{\partial q_j} dq_i dq_j. \end{aligned}$$

Енді осы өрнектерді (2.4) теңдеуіне қояйық:

$$ds^2 = \sum_{ij} \left( \frac{\partial x}{\partial q_i} \frac{\partial x}{\partial q_j} + \frac{\partial y}{\partial q_i} \frac{\partial y}{\partial q_j} + \frac{\partial z}{\partial q_i} \frac{\partial z}{\partial q_j} \right) dq_i dq_j, \quad (2.6)$$

$$h_{ij}^2 = \frac{\partial x}{\partial q_i} \frac{\partial x}{\partial q_j} + \frac{\partial y}{\partial q_i} \frac{\partial y}{\partial q_j} + \frac{\partial z}{\partial q_i} \frac{\partial z}{\partial q_j}.$$

Жоғарыда атап өткендей, ортогоналды (беттер өзара перпендикуляр) жүйелермен шектелеміз. Математика тілінде мұны келесі түрде жазады:

$$h_{ij} = 0, \quad i \neq j. \quad (2.7)$$

Белгілеулерді жеңілдету мақсатында  $h_{ii} = h_i$  етіп жазалық, онда

$$ds^2 = (h_1 dq_1)^2 + (h_2 dq_2)^2 + (h_3 dq_3)^2 \quad (2.8)$$

Келесі бөлімдерде әрбір жаңа координаталар жүйесінде Ламе коэффициенттерін анықтап отырамыз. Және керісінше, кез келген  $dq_i$  үшін өзге  $q$ -лар тұрақты, ал осы шамаларды

$$ds_i = h_i dq_i \quad (2.9)$$

түрінде анықтаған ыңғайлы.  $q_1, q_2, q_3$  қисық сызықты координаталары өлшемсіз болады. Ал Ламе коэффициенттері  $q$  -ға тәуелді болып, олар өлшемді болуы мүмкін. Сондықтан  $h_i dq_i$  көбейтіндісінің өлшем бірлігі ұзындық болады.

(2.9) өрнегінен бет және көлем элементтерін табамыз:

$$d\sigma_{ij} = ds_i ds_j = h_i h_j dq_i dq_j \quad (2.10)$$

$$d\tau = ds_1 ds_2 ds_3 = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3 \quad (2.11)$$

(2.10) және (2.11) теңдеулері (2.2) түрлендіру заңымен толық үйлесімді.

### Жаттығулар

1. Координаталар жүйелерінің ортогоналдылық шарты (2.7) екенін көрсетіңіздер.

2. Якобиан  $J\left(\frac{x, y, z}{q_1, q_2, q_3}\right) = h_1 h_2 h_3$  мен көлем элементінің  $J\left(\frac{x, y, z}{q_1, q_2, q_3}\right) dq_1 dq_2 dq_3$  (2.11) теңдігімен үйлесіп,  $h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3$

-ке тең болатынын көрсетіңіздер.

## 2.2. Дифференциалдық векторлық операторлар

Қисық сызықты координаталарында градиент, дивергенция және ротор операторларын қарастыру келесі анықтамаға негізделеді: қандай да *функцияның градиенті* – функцияның

кеңістіктегі ең жылдам өзгеретін бағытын көрсететін және оның абсолют шамасы болатын вектор (1.6-бөлім).

Онда беттер жиынтығының нормаль бағытындағы  $\vec{\nabla}\Psi(q_1, q_2, q_3)$  векторының құрамдас бөлігі келесі түрде (2.1-сурет) беріледі:

$$\vec{\nabla}\Psi|_1 = \frac{\partial\Psi}{\partial s_1} = \frac{\partial\Psi}{h_1 dq_1}, \quad (2.12)$$

мұндағы  $q_2$  және  $q_3$  – бекітілген, яғни тұрақты ретінде қарастырамыз.  $ds_1$  шамасы –  $q_1$ -дің өсу бағытындағы ұзындық өсімшесі, (2.9) формуласымен анықталады. Алдындағы, 2.1-бөлімде осы бағытты анықтау мақсатында  $\vec{a}_1$  бірлік векторын енгізген болатынбыз.

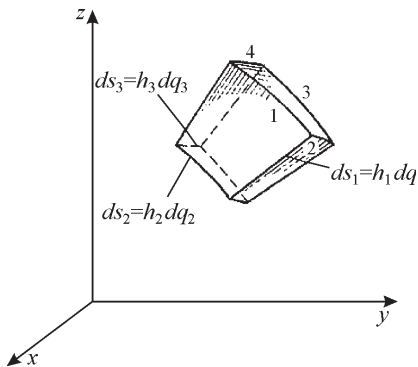
Басқа құрамдас бөліктері де (2.12) теңдеуіне ұқсас болғандықтан, оларды векторлық түрде қосып, градиенттің жазамыз:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}\Psi(q_1, q_2, q_3) &= \vec{a}_1 \frac{\partial\Psi}{\partial s_1} + \vec{a}_2 \frac{\partial\Psi}{\partial s_2} + \vec{a}_3 \frac{\partial\Psi}{\partial s_3} = \\ &= \vec{a}_1 \frac{\partial\Psi}{h_1 \partial q_1} + \vec{a}_2 \frac{\partial\Psi}{h_2 \partial q_2} + \vec{a}_3 \frac{\partial\Psi}{h_3 \partial q_3}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Дивергенция операторы үшін (1.91) теңдеуін (Гаусс теоремасын) пайдаланып, мына теңдеуді жазамыз:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V}(q_1, q_2, q_3) = \lim_{d\tau \rightarrow 0} \frac{\int \vec{V} d\vec{\sigma}}{\int d\tau}, \quad (2.14)$$

мұндағы көлем элементі ретінде  $h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3$  -ті қабылдаймыз. Ал  $q_1, q_2, q_3$  немесе  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$  оң бағыттары оң жүйені құрайды деп таңдаймыз.



2.1-сурет. Қисық сызықты көлемнің элементі

1.7- және 1.10- бөлімдеріне ұқсас  $q_1 = const_1$  екі беті бойынша интеграл:

$$\begin{aligned} \left[ V_1 h_2 h_3 + \frac{\partial}{\partial q_1} (V_1 h_2 h_3) dq_1 \right] dq_2 dq_3 - V_1 h_2 h_3 dq_2 dq_3 = \\ = \frac{\partial}{\partial q_1} (V_1 h_2 h_3) dq_1 dq_2 dq_3 \end{aligned} \quad (2.15)$$

Мұнда бірінші реттік дифференциалмен шектелдік. Себебі,  $dq_1 dq_2 dq_3 \rightarrow 0$  шегін қарастырғанда:

$$\begin{aligned} \left[ V_1 h_2 h_3 + \frac{\partial}{\partial q_1} (V_1 h_2 h_3) dq_1 + \frac{\partial^2}{\partial q_1^2} (V_1 h_2 h_3) dq_1^2 + \dots \right] dq_2 dq_3 - \\ - V_1 h_2 h_3 dq_2 dq_3 = \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} (V_1 h_2 h_3) + \frac{\partial^2}{\partial q_1^2} (V_1 h_2 h_3) dq_1^2 + \dots \right] dq_1 dq_2 dq_3 \end{aligned}$$

болады. Осы теңдеуді көлем элементіне бөліп, шектік жағдайға көшкенде екінші және одан үлкен реттік дифференциалдардың  $(dq_1)^{n-1}$  көбейткіштері нөлге айналатынын көреміз.

Басқа екі жұптың нәтижелері ұқсас болғандықтан, табатынымыз

$$\begin{aligned} \int \vec{V}(q_1, q_2, q_3) d\vec{\sigma} = \\ = \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} (V_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (V_2 h_1 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_3} (V_3 h_1 h_2) \right] dq_1 dq_2 dq_3. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Оны көлем элементіне бөлгеннен соң, алатынымыз:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{V}(q_1, q_2, q_3) = \\ = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} (V_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (V_2 h_1 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_3} (V_3 h_1 h_2) \right]. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Мұндағы  $V_i - \vec{V}$  векторының  $\vec{a}_i$  бағытына кескіні, яғни  $V_i = \vec{a}_i \cdot \vec{V}$  Лапласианды (2.13) және (2.17) теңдеулерінің комбинациясынан табамыз:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \Psi(q_1, q_2, q_3) = & \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial q_1} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{h_3 h_1}{h_2} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial q_3} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.18a)$$

Стокс теоремасының көмегімен  $\vec{\nabla} \times \vec{V}$  векторын айқын түрде жазып, шектік жағдайды, яғни беттің ауданының нөлге ұмтылуын талдалық. Ол үшін  $q_1 = const$  қисық сызықты бетіндегі дифференциалдық беттің элементін қарастырамыз.

$$\int_S \vec{\nabla} \times \vec{V} d\vec{\sigma} = \vec{\nabla} \times \vec{V} \Big|_1 h_2 h_3 dq_2 dq_3 \quad (2.18б)$$

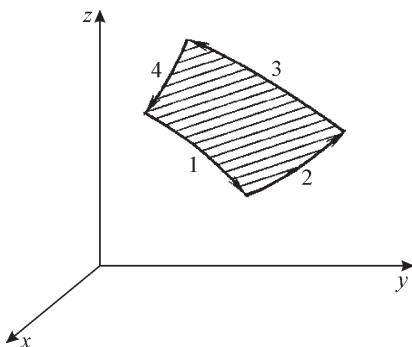
теңдеуінен Стокс теоремасына сәйкес табатынымыз:

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} \Big|_1 h_2 h_3 dq_2 dq_3 = \oint \vec{V} \cdot d\vec{\lambda}. \quad (2.19)$$

Мұндағы сызықтық интеграл  $q_1 = const$  бетінде жатқан контур бойынша есептелді.

$$\begin{aligned} \oint \vec{V}(q_1, q_2, q_3) \cdot d\vec{\lambda} = & V_2 h_2 dq_2 + \\ & + \left[ V_3 h_3 + \frac{\partial}{\partial q_2} (V_3 h_3) dq_2 \right] dq_3 - \\ & - \left[ V_2 h_2 + \frac{\partial}{\partial q_3} (V_2 h_2) dq_3 \right] dq_2 - V_3 h_3 dq_3 = \quad (2.20) \\ = & \left[ \frac{\partial}{\partial q_2} (h_3 V_3) - \frac{\partial}{\partial q_3} (h_2 V_2) \right] dq_2 dq_3. \end{aligned}$$

Интегралдың таңбасы жолдың 1- және 2-бөліктері бойынша оң таңбалы, ал 3-және 4-бөліктерінде теріс таңбалы деп қабылданды (2.2-сурет). Себебі жолдың 3- және 4-бөліктерінде қозғалыс теріс бағытта жүргізіледі.



2.2-сурет. Беттің қисық сызықты элементі.

(2.1-суретте осы элемент 1, 2, 3 және 4 сандарымен көрсетілген)

(2.19) теңдеуінен алатынымыз:

$$\vec{\nabla} \times \vec{V}|_1 = \frac{1}{h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_2} (h_3 V_3) - \frac{\partial}{\partial q_3} (h_2 V_2) \right]$$

$$(2.21)$$

Басқа екі құрамдас бөлігі үшін индекстерді циклді түрде алмастырып отырып, жазамыз:

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} \vec{a}_1 h_1 & \vec{a}_2 h_2 & \vec{a}_3 h_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 V_1 & h_2 V_2 & h_3 V_3 \end{vmatrix} \quad (2.22)$$

## Жаттығулар

1.  $\vec{a}_1$ -бірлік векторы  $q_1$  -дің өсу бағытымен бағыттас болсын. Онда

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{a}_1 = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \cdot \frac{\partial (h_2 h_3)}{\partial q_1},$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{a}_1 = \frac{1}{h_1} \left[ \vec{a}_2 \frac{\partial h_1}{\partial q_3} - \vec{a}_3 \frac{\partial h_1}{\partial q_2} \right]$$

екенін көрсетіңіздер.

2.  $\vec{a}_i$  ортогоналды бірлік векторларын  $\vec{a}_i = \frac{1}{h_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$  ретінде

анықтауға болатынын көрсетіңіздер. Ал  $h_i$  үшін  $\vec{a}_i \cdot \vec{a}_i = 1$  шарты (2.6) теңдеуімен үйлесімде болатынын дәлелденіңіздер.

3. Ортогоналды қисық сызықты координаталары үшін ( $\vec{\nabla}$  операторы енбейтін) скалярлық және векторлық көбейтінділері Декарт координаталар жүйесіне ұқсас болатынын негіздеңіздер, яғни Ламе коэффициенттері *кірмейтінін* көрсетіңіздер.

4.  $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \vec{V} = \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{V} - \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V})$  векторлық теңдеуін пайдаланып, қисық сызықты координаталарда  $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \vec{V}$  векторлық лапласианды жазыңыздар.

### 2.3. Декарт (тікбұрышты) координаталары

Декарт координаталар жүйесінде:

$$h_1 = h_x = 1, \quad h_2 = h_y = 1, \quad h_3 = h_z = 1.$$

Декарт координаталары Ламе коэффициенттері тұрақты болатын жалғыз жүйе болып табылады.

Бұл анықтама 3-тарауда, әсіресе, тензорларды қарастырғанда маңызды болады.

(2.13), (2.17), (2.18) және (2.22) теңдеулерінен 1-тараудағы қарастырылған нәтижелерді алуға болады:

$$\vec{\nabla} \psi = \vec{i} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad (2.24)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}, \quad (2.25)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}, \quad (2.26)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}. \quad (2.27)$$

## 2.4. Сфералық координаталар

Сфералық координаталар жүйесіндегі беттердің негізгі жиынтығы:

1. Координаталар басында орналасқан ортақ центрі болатын концентрлі сфералар:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \text{const.}$$

2. Шыңы координаталар басында орналасқан, полярлық  $z$  осі болатын тік айналу конустарын құрайтын концентрлік беттер:

$$\theta = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \text{const.}$$

3.  $z$  осінен өтетін жартылай жазықтықтар:

$$\varphi = \arctg \frac{y}{x} = \text{const.}$$

Жалпы,  $q$  полярлық және  $j$  азимуттық бұрыштарын еркін таңдауға болатындықтан,  $z$  осі “темірқазық” рөлін атқарады.

Декарт координаталар жүйесімен байланысы төмендегідей болады:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta, \quad (2.28)$$

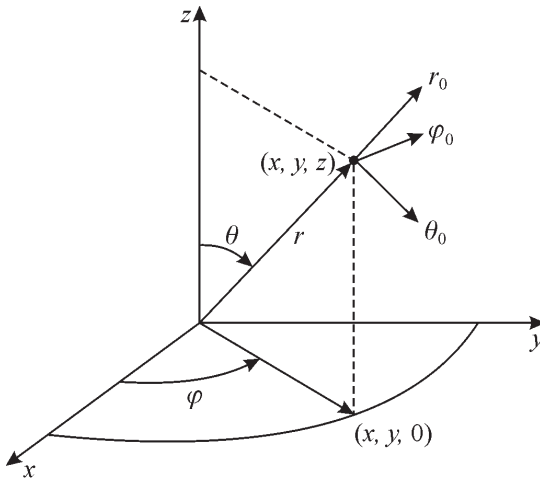
мұндағы жаңа координаталар келесі шекараларда өзгереді:

$$0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Енді (2.6) теңдеуінен Ламе коэффициенттерін табамыз:

$$\begin{aligned} h_1^2 &= h_{11}^2 = \left( \frac{\partial x}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial r} \right)^2 = \\ &= \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \cos^2 \theta = 1 \\ h_2^2 &= h_{22}^2 = \left( \frac{\partial x}{\partial \theta} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \theta} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \theta} \right)^2 = \\ &= r^2 \cos^2 \theta \cos^2 \varphi + r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \varphi + r^2 \sin^2 \theta = r^2 \\ h_3^2 &= h_{33}^2 = r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi = r^2 \sin^2 \theta \\ &\Rightarrow h_1 = h_r = 1, \quad h_2 = h_\theta = r, \quad h_3 = h_\varphi = r \sin \theta. \end{aligned} \quad (2.29)$$

$\vec{r}_0, \vec{\theta}_0, \vec{\varphi}_0$  бірлік векторлары  $q$  және  $j$  бұрыштарымен анықталғандықтан, бағыттарын өзгертіп отырады (2.3-сурет).



2.3-сурет. Сфералық полярлық координаталары

Осы бірлік векторлар декарттық координаталар жүйесінің  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  бірлік векторлары арқылы өрнектеледі:

$$\vec{r}_0 = \vec{i} \sin \theta \cos \varphi + \vec{j} \sin \theta \sin \varphi + \vec{k} \cos \theta$$

$$\vec{\theta}_0 = \vec{i} \cos \theta \cos \varphi + \vec{j} \cos \theta \sin \varphi - \vec{k} \sin \theta$$

$$\vec{\varphi}_0 = -\vec{i} \sin \varphi + \vec{j} \cos \varphi$$

2.2-бөлімінде  $\vec{a}_1 = \vec{r}_0$ ,  $\vec{a}_2 = \vec{\theta}_0$ ,  $\vec{a}_3 = \vec{\varphi}_0$  деп қабылдап, негізгі қатынастарды аламыз:

$$(2.13) \Rightarrow \vec{\nabla} \Psi = \vec{r}_0 \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \vec{\theta}_0 \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} + \vec{\varphi}_0 \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \quad (2.30)$$

$$(2.17) \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \cdot \left[ \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} (r^2 V_r) + \right. \\ \left. + r \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta V_\theta) + r \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} \right] \quad (2.31)$$

$$(2.18a) \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \Psi = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \cdot \left[ \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} \right] \quad (2.32)$$

$$(2.22) \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{V} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \cdot \begin{bmatrix} \vec{r}_0 & r\vec{\theta}_0 & r \sin \theta \cdot \vec{\varphi}_0 \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ V_r & rV_\theta & r \sin \theta V_\varphi \end{bmatrix}. \quad (2.33)$$

Векторлық лапласианның  $\vec{\nabla}^2 \vec{V}$  сфералық координаталардағы түрін жазайық. Ол үшін (1.80) векторлық теңдеуді пайдаланамыз:

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) - \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}):$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}^2 \vec{V} \Big|_r &= \left( -\frac{2}{r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\cos \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \cdot V_r + \\ &+ \left( -\frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin \theta} \right) \cdot V_\theta + \left( -\frac{2}{r^2 \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \cdot V_\varphi = \\ &= \vec{\nabla}^2 V_r - \frac{2}{r^2} V_r - \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin \theta} V_\theta - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \cdot \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{V} \Big|_\theta = \vec{\nabla}^2 V_\theta - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} V_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi}, \quad (2.35)$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{V} \Big|_\varphi = \vec{\nabla}^2 V_\varphi - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} V_\varphi + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \cdot \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial V_\theta}{\partial \varphi}. \quad (2.36)$$

## Жаттығулар

1. Сфералық координаталар жүйесінің бірлік векторларын декарт координаталар жүйесінің бірлік векторлары арқылы өрнектеңіздер.

2. Кері түрлендіру теңдеулерін табыңыздар:

$$\vec{i} = \vec{r}_0 \sin \theta \cos \varphi + \vec{\theta}_0 \cos \theta \cos \varphi - \vec{\varphi}_0 \sin \varphi,$$

$$\vec{j} = \vec{r}_0 \sin \theta \sin \varphi + \vec{\theta}_0 \cos \theta \sin \varphi + \vec{\varphi}_0 \cos \varphi,$$

$$\vec{k} = \vec{r}_0 \cos \theta - \vec{\theta}_0 \sin \varphi.$$

3. Бөлшек кеңістікте қозғалсын. Сфералық координаталар жүйесіндегі бөлшек жылдамдығының, үдеуінің құрамдас бөліктерін табыңыздар:

$$\vec{r} = r \cdot \vec{r}_0 + \vec{\theta}_0 \cdot r + \vec{\varphi}_0 r \sin \theta,$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}_0 \cdot \dot{r} + \vec{\theta}_0 r \dot{\theta} + \vec{\varphi}_0 r \sin \theta \cdot \dot{\varphi},$$

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\theta = r \dot{\theta}, \quad v_\varphi = r \sin \theta \cdot \dot{\varphi},$$

$$a_r = \ddot{r} - r \dot{\theta}^2 - r \sin \theta \cdot \dot{\varphi}^2,$$

$$a_\theta = r \ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r \sin \theta \cos \theta \cdot \dot{\varphi}^2,$$

$$a_\varphi = r \sin \theta \cdot \ddot{\varphi} + 2\dot{r} \sin \theta \cdot \dot{\varphi} + 2r \cos \theta \cdot \dot{\theta} \cdot \dot{\varphi}.$$

4. Ньютонның екінші заңына сәйкес орталық күш өрісінде массасы  $m$  болатын денеге  $m\ddot{\vec{r}} = \vec{r}_0 f(\vec{r})$  күші әсер етеді.  $\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = \vec{c} = const$  екеніндігін және оның геометриялық түсініктемесі Кеплердің екінші заңымен үйлесімді болатынын көрсетіңіздер.

5.  $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$  дербес туындыларын сфералық координаталар

жүйесінде жазыңыздар:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \\ = \sin \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \cos \theta \cos \varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\sin \varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial}{\partial y} = \sin \theta \sin \varphi \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \cos \theta \sin \varphi \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos \varphi}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial}{\partial z} = \cos \theta \cdot \frac{\partial}{\partial r} - \sin \theta \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}. \end{array} \right.$$

6. Алдыңғы жаттығудың шешімін пайдаланып, келесі формуланы табыңыздар:

$$-i \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) = -i \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

Бұл кванттық механикада қозғалыс мөлшерінің моменті операторының  $z$  құрамдас бөлігі болып табылады.

7. Төмендегі  $\vec{\nabla}^2 \psi(r)$  операторының үш түрі бір-біріне эквивалентті екендігін көрсетіңіздер:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[ r^2 \frac{d\psi(r)}{dr} \right]; \quad \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} [r\psi(r)], \quad \frac{d^2\psi(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\psi(r)}{dr}.$$

Физикалық есептердің сфералық және декарттық координаталар жүйелеріндегі сәйкестігін тексеруге, әсіресе, екінші түрі ерекше ыңғайлы.

8. Егер  $\vec{\nabla}^2 \psi = 0$  болса, онда  $\vec{\nabla}^2 \vec{\nabla}^2 (r^2 \psi) = 0$  орынды болатынын көрсетіңіздер.

## 2.5 Айнымалыларды ажырату

Декарт координаталар жүйесінде (2.1) Гельмгольц теңдеуінің түрі төмендегідей болады:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k^2 \psi = 0, \quad (2.42)$$

$k^2 = const$  жағдайымен шектелік. Дербес туындылардың дифференциалдық теңдеуінің ең жеңіл шешімі – оларды қарапайым дифференциалды теңдеулер жүйесіне келтіру. Ол үшін толық толқындық функцияны келесі түрде

$$\psi(x, y, z) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z), \quad (2.43)$$

жорамалдап, (2.42) теңдеуіне қоямыз. Жалпы жағдайда шешімді (2.43) түрінде іздеудің дұрыс немесе бұрыс екендігінің қаншалықты әділетті болатынын білмейміз. Егер осы жолмен (2.42) теңдеуін шеше алсақ, онда осы жолдың дұрыстығына көз

жеткіземіз. Керісінше, егер шешімін таба алмасақ, онда Грин функциясымен немесе интегралдық түрлендірулермен немесе сандық әдістердің көмегімен шешуге тура келеді.

Әзірге (2.43) түрлендіруі орынды деп, (2.42) теңдеуін қарастырамыз:

$$YZ \frac{d^2 X}{dx^2} + XZ \frac{d^2 Y}{dy^2} + XY \frac{d^2 Z}{dz^2} + k^2 XYZ = 0, \quad (2.44)$$

$\psi = XYZ$  функциясына бөліп, мүшелерін қайта топтап, табамыз:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -k^2 - \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} - \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2}, \quad (2.45)$$

Сонымен, айнымалылар бөлінді, яғни теңдеудің сол жағы тек  $x$ -ке ғана, ал оң жағы – тек  $y$  және  $z$  айнымалыларына тәуелді. Ал  $x$ ,  $y$ ,  $z$  тәуелсіз айнымалылар болғандықтан,  $x$ -тің “тәртібін”  $y$  және  $z$  айнымалыларымен анықтай алмаймыз. Сондықтан теңдеудің екі жағы да бір тұрақтыға теңестіріледі. Оны *ажырату тұрақтысы* деп атайды.

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -l^2, \quad (2.46)$$

$$-k^2 - \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} - \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -l^2, \quad (2.47)$$

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -k^2 + l^2 - \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2}. \quad (2.48)$$

(2.48) теңдеуінің екі жағын да тұрақтыға теңестіреміз:

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -m^2, \quad (2.49)$$

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -k^2 + l^2 + m^2 = -n^2. \quad (2.50)$$

Енгізілген  $n^2$  тұрақтысы (2.46), (2.49) және (2.50) үш қарапайым теңдеудің симметриялы жиынын алуға мүмкіндік береді. Демек, (2.43) жорамалымыз ақталды.

Сонымен, шешімді келесі түрде жазамыз:

$$\psi_{lmn}(x, y, z) = X_l(x) \cdot Y_m(y) \cdot Z_n(z), \quad (2.50a)$$

мұндағы:  $l, m, n$  келесі  $k^2 = l^2 + m^2 + n^2$  шартын қанағаттандыратын кез келген сандар.

Егер  $X_l(x)$  – (2.46),  $Y_m(y)$  – (2.49),  $Z_n(z)$  – (2.50) теңдеулерінің шешімдері болса, онда (2.50a) функциясы (2.1) теңдеуінің шешімі болады. Ал (2.1) теңдеуінің жалпы шешімін  $\psi_{lmn}$  функциясының сызықтық комбинациясы түрінде жазуға болады:

$$\psi = \sum_{lmn} a_{lmn} \psi_{lmn}, \quad (2.50б)$$

$a_{lmn}$  коэффициенттері шектік шарттарды қанағаттандыратын-дай етіп таңдалады.

Жалпы шешімін (2.50б) түрінде жазуға болатын себебі,  $(\nabla^2 + k^2)$  – сызықтық дифференциалдық операторы. Анықтамаға сәйкес  $L$  сызықтық операторының келесі екі қасиеті бар:

$$L(a\psi) = aL\psi, \quad L(\psi_1 + \psi_2) = L\psi_1 + L\psi_2$$

мұндағы,  $a$  – тұрақты.

Осы қарастырылып отырған айнымалыларды ажырату әдісі келесі жағдайда да орынды:

$$k^2 = f(x) + g(y) + h(z) + k'^2, \quad (2.50в)$$

мұндағы  $k'^2$  – жаңа тұрақты.

Енді (2.46) теңдеуінің түрі төмендегідей болады:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + f(x) = -l^2 \quad (2.50г)$$

Онда  $X, Y, Z$  шешімдері өзгеше болғанымен, алайда дифференциалдық теңдеуді түрлендіру және шешімдерінің сызықтық комбинациясын құру жолдары өзгермейді.

Дербес туындылардың дифференциалдық теңдеулерін шешуде айнымалыларды ажырату әдісі арқылы әртүрлі координаталар

жүйелерінде жұмыс жасай білудің қаншалықты тиімді болатынына көз жеткізейік.

Енді (2.1) теңдеуін сфералық координаталар жүйесінде қарастырып, айнымалыларды ажыратуға тырысайық. Ол үшін (2.32) теңдеуін пайдаланамыз:

$$\frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[ \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \right] = -k^2 \psi, \quad (2.51)$$

Енді

$$\psi(r, \theta, \varphi) = R(r) \cdot \Theta(\theta) \cdot \Phi(\varphi), \quad (2.52)$$

түрінде қарастырып, осы (2.52) өрнегін (2.51) теңдеуіне апарып қоямыз:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[ \sin \theta \cdot \Theta \cdot \Phi \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + R \Phi \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) + \frac{R \Theta}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right] = \\ = -k^2 R \Theta \Phi. \end{aligned} \quad (2.53)$$

(2.53) теңдеуін  $\left( \frac{1}{R \Theta \Phi} \right)$ -ге көбейтеміз:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R \cdot r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\Theta r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \\ + \frac{1}{\Phi r^2 \sin^2 \theta} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = -k^2. \end{aligned} \quad (2.53a)$$

Теңдеудегі дербес туындылар қарапайым дифференциалдармен алмастырылғанын байқаймыз. Енді (2.53) теңдеуін  $\times r^2 \sin^2 \theta$  көбейтеміз

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = r^2 \sin^2 \theta \left[ -k^2 - \frac{1}{R \cdot r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{\Theta r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.54)$$

(2.54) теңдеуі тек  $\varphi$  айнымалының  $\Phi$  функциясы мен  $r$  және

$\theta$  айнымалыларына тәуелді функциясын байланыстырып тұр. Мұндағы  $r$ ,  $\theta$  және  $\varphi$  айнымалылары өзара тәуелсіз болғандықтан, теңдеудің екі жағын қандай да тұрақтыға теңестіруге болады.

Физикалық есептердің барлығында дерлік  $\varphi$  – азимуттық бұрыштың міндетін атқарғандықтан,  $\Phi$  функциясының экспоненциалды емес, периодты болуының ықтималдылығы басым. Осыны ескере отырып, ажырату тұрақтысын  $-m^2$ -қа теңестіріп, табамыз:

$$\frac{1}{\Phi} \cdot \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = -m^2, \quad (2.55)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2 R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\Theta r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) - \\ - \frac{m^2}{r^2 \sin^2 \theta} = -k^2. \end{aligned} \quad (2.56)$$

(2.56) теңдеуін  $r^2$ -қа көбейтіп, мүшелерді қайта топтап, аламыз:

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + k^2 r^2 = -\frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{m^2}{\sin^2 \theta}. \quad (2.57)$$

Сонымен айнымалылар тағы да ажырады. Соңғы теңдеудің екі жағын да  $\lambda^2$  - тұрақтысына теңестіріп, қорытынды нәтижесін жазамыз:

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \Theta + \lambda^2 \Theta = 0, \quad (2.58)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + k^2 R - \frac{\lambda^2 R}{r^2} = 0. \quad (2.59)$$

Дербес туындылардың дифференциалдық теңдеуі қайтадан үш қарапайым дифференциалдық теңдеуге бөлінді. Енді толық шешімінің түрін келтірелік:

$$\psi_{lm}(r, \theta, \varphi) = \sum_{l,m} R_l(r) \cdot \Theta_{lm}(\theta) \cdot \Phi_m(\varphi). \quad (2.60a)$$

Мұндағы  $k^2$  – айнымалы шама бола алады. Егер  $k^2$  келесі формуламен өрнектелсе, айнымалыларды төмендегідей ажыратуға болады:

$$k^2 = f(r) + \frac{1}{r^2} g(\theta) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} h(\varphi) + k'^2 \quad (2.606)$$

### Жаттығулар

1.  $(\bar{\nabla}^2 + k^2)$  операторымен  $a_1\psi_1(x, y, z) + a_2\psi_2(x, y, z)$  қосындысына әсер етіп, осы оператордың сызықты екендігін дәлелдеңіздер:

$$\begin{aligned} & (\bar{\nabla}^2 + k^2)(a_1\psi_1(x, y, z) + a_2\psi_2(x, y, z)) = \\ & = a_1(\bar{\nabla}^2 + k^2)\psi_1 + a_2(\bar{\nabla}^2 + k^2)\psi_2(x, y, z) \end{aligned}$$

2. Келесі теңдеудің

$$\bar{\nabla}^2\psi(r, \theta, \varphi) + \left[ k^2 + f(r) + \frac{1}{r^2} g(\theta) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} h(\varphi) \right] \psi(r, \theta, \varphi) = 0$$

сфералық координаталар жүйесінде айнымалыларға ажыратылатынын дәлелдеңіздер; мұндағы  $k^2 = const$ .

## 2.6. Цилиндрлік координаталары

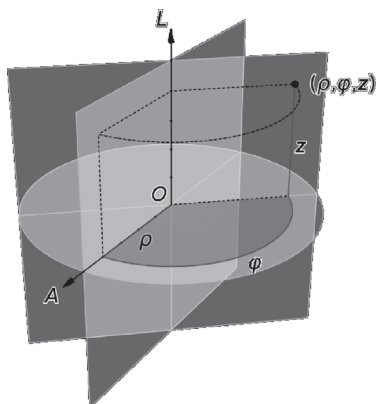
Декарт және цилиндрлік координаталар жүйелерінің арасындағы байланысын келесі түрде жазалық (2.4-сурет)

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z. \quad (2.61)$$

Мысал ретінде координаттар басы  $O$  нүктесінде басталатын, полярлық осі  $A$ , ал биіктік осі  $L$  болатын цилиндрлік координаталар жүйесі 2.4-суретте келтірілген. Осы суретте көрсетілген нүктенің координаталары  $(c, \varphi, z) = (4, 130^\circ, 4)$ .

Ламе коэффициенттері:

$$h_1 = h_\rho = 1, \quad h_2 = h_\varphi = \rho, \quad h_3 = h_z = 1, \quad (2.62)$$



2.4-сурет. Цилиндрлік координаталары

Осы координаталар жүйесі келесі координаталық беттердің жиынтығынан құралады:

1) жалпы ортақ осі  $z$  болатын дұрыс шеңберлі цилиндрлер:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \text{const.}$$

2)  $z$  осі арқылы өтетін жартылай жазықтықтар:

$$\varphi = \arctg \frac{y}{x} = \text{const.}$$

3)  $xy$  жазықтығына параллель жазықтықтар:  $z = \text{const.}$

$$0 \leq \rho < \infty, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad -\infty < z < \infty.$$

$$(2.13) \Rightarrow \vec{\nabla} \Psi(\rho, \varphi, z) = \vec{\rho}_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} + \vec{\varphi}_0 \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} + \vec{k} \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad (2.63)$$

$$(2.17) \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho V_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_z}{\partial z}, \quad (2.64)$$

$$(2.18) \Rightarrow \vec{\nabla}^2 \cdot \Psi = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}, \quad (2.65)$$

$$(2.22) \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \times \vec{V} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \vec{\rho}_0 & \rho \cdot \vec{\varphi}_0 & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_\rho & \rho V_\varphi & V_z \end{vmatrix}. \quad (2.66)$$

Векторлық лапласиан:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}^2 \vec{V} \Big|_\rho &= \vec{\nabla}^2 V_\rho - \frac{1}{\rho^2} V_\rho - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi}, \\ \vec{\nabla}^2 \vec{V} \Big|_\varphi &= \vec{\nabla}^2 V_\varphi - \frac{1}{\rho^2} V_\varphi + \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial V_\rho}{\partial \varphi}, \end{aligned} \quad (2.67)$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{V} \Big|_z = \vec{\nabla}^2 V_z.$$

Декарттық және цилиндрлік координаталар жүйелерінде лапласианның  $z$  құрамдас бөліктері бірдей болады, себебі  $z_\delta = z_{\Pi}$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}^2 (\vec{\rho}_0 V_\rho + \vec{\varphi}_0 V_\varphi + \vec{k} V_z) &= \vec{\nabla}^2 (\vec{\rho}_0 V_\rho + \vec{\varphi}_0 V_\varphi) + \vec{k} \vec{\nabla}^2 V_z = \\ &= \vec{\rho}_0 f(V_\rho, V_\varphi) + \vec{\varphi}_0 g(V_\rho, V_\varphi) + \vec{k} \vec{\nabla}^2 V_z. \end{aligned}$$

### Жаттығулар

1. Цилиндрлік координаталар жүйесінің бірлік векторларын декарттық координаталар жүйесінің бірлік векторлары бойынша жіктеңіздер:

$$\vec{\rho}_0 = \vec{i} \cos \varphi + \vec{j} \sin \varphi, \quad \vec{\varphi}_0 = -\vec{i} \sin \varphi + \vec{j} \cos \varphi, \quad \vec{k}_0 = \vec{k}.$$

2. Декарттық координаталар жүйесінің бірлік векторларын цилиндрлік координаталар жүйесінің бірлік векторлары бойынша жіктеңіздер:

$$\vec{i} = \vec{\rho}_0 \cos \varphi - \vec{\varphi}_0 \sin \varphi, \quad \vec{j} = \vec{\rho}_0 \sin \varphi + \vec{\varphi}_0 \cos \varphi, \quad \vec{k} = \vec{k}_0.$$

3. Бөлшек кеңістікте қозғалады. Оның жылдамдығының және үдеуінің құрамдас бөліктерін цилиндрлік координаталар жүйесінде жазыңыздар:

$$V_\rho = \dot{\rho}, \quad V_\varphi = \rho\dot{\varphi}, \quad V_z = \dot{z};$$

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2, \quad a_\varphi = \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}, \quad a_z = \ddot{z}.$$

4. Бойынан  $I$  тогы өтетін өткізгіш  $z$  осімен бағытталған.

Векторлық магниттік потенциал векторы  $\vec{A} = \vec{k} \frac{\mu I}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{\rho}\right)$ .

Магниттік индукция векторы  $\vec{B} = \vec{\phi}_0 \frac{\mu I}{2\pi\rho}$  болатынын көрсетіңіздер.

5. Лаплас теңдеуін  $\nabla^2\Psi = 0$  цилиндрлік координаталар жүйесінде шешіңіздер, мұндағы  $\Psi = \Psi(\rho)$ .

Жауабы:  $\left[ \Psi = k \ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) \right]$ .

6. Цилиндрлік координаталар жүйесінде  $\vec{V}(\rho, \varphi) = \vec{\rho}_0 V_\rho(\rho, \varphi) + \vec{\phi}_0 V_\varphi(\rho, \varphi)$  векторлық функциясы берілген.  $(\vec{\nabla} \times \vec{V})$  – векторының тек  $z$ - құрамдас бөлігі ғана бар екенін дәлелдеңіздер.

## 2.7. Эллипстік цилиндрлік координаталары $u, v, z$

Айнымалылары ажыратылатын координаталар жүйесінің жіктеуішін қос фокустық эллипстік жүйесінен бастау қисынды болғандықтан (2.15-бөлімін қараңыз), өзгелерін оның дербес жағдайлары ретінде қарастырамыз.



Ығысу осімен тығыз байланысқан координаталар жүйелерінің симметриялық қасиеттерін қарастырамыз.

Эллипстік цилиндрлік координаталары үшін:

$$x = a \operatorname{ch} u \cos v, \quad y = a \operatorname{sh} u \cos v, \quad z = z. \quad (2.73)$$

Қос фокусты эллипстік жүйесі келесі координаталық беттердің әулетін құрады (2.5 – сурет):

- 1) эллипстік цилиндрлер:  $u = \operatorname{const}, \quad 0 \leq u < \infty$ ;
- 2) гиперболалық цилиндрлер:  $v = \operatorname{const}, \quad 0 \leq v < 2\pi$ ;
- 3)  $xu$  жазықтығына параллель жазықтықтар:  $z = \operatorname{const}, \quad -\infty < z < \infty$ .

(2.73) теңдеуін квадраттап табамыз:

$$x^2 = a^2 \operatorname{ch}^2 u \cos^2 v \quad (2.74)$$

$$y^2 = a^2 \operatorname{sh}^2 u \sin^2 v \quad (2.75)$$

Бұдан

$$\frac{x^2}{a^2 \operatorname{ch}^2 u} + \frac{y^2}{a^2 \operatorname{sh}^2 u} = 1, \quad (2.76)$$

және

$$\frac{x^2}{a^2 \cos^2 v} - \frac{y^2}{a^2 \sin^2 v} = 1. \quad (2.77)$$

$u$  айнымалысы бекітілгенде (2.76) теңдеуі басты осі  $x$  болатын эллипстер әулетін өрнектейді. Ал  $v = \operatorname{const}$  болғанда, (2.77) теңдеуінен фокустары  $x$  осінде орналасқан гиперболаларды көреміз.

Ламе коэффициенттері тең болады

$$\left. \begin{aligned} h_1 = h_u &= a(\operatorname{sh}^2 u + \sin^2 v)^{1/2}, \\ h_2 = h_v &= a(\operatorname{sh}^2 u + \sin^2 v)^{1/2}, \\ h_3 = h_z &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (2.78)$$

### Жаттығу

$sh u = q_1$ ,  $\cos v = q_2$ ,  $z = z$  болсын. Онда жаңа  $h_{q_1}$  және  $h_{q_2}$  Ламе коэффициенттерін анықтаңыздар.

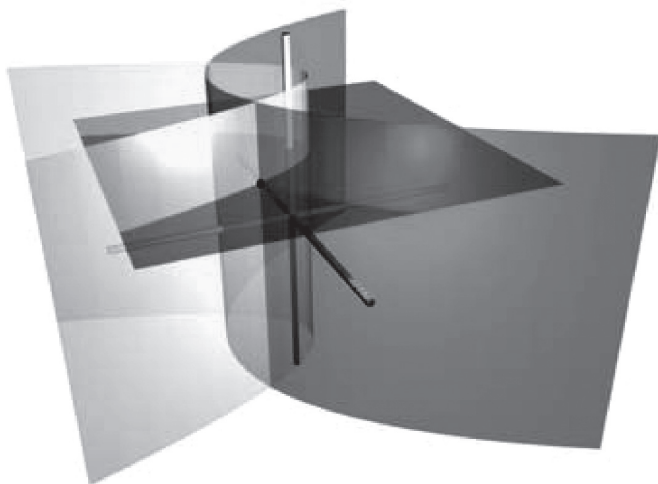
$$\text{Жауабы: } h_{q_1} = a \left( \frac{q_1^2 - q_2^2}{q_1^2 - 1} \right)^{1/2}, \quad h_{q_2} = a \left( \frac{q_1^2 - q_2^2}{1 - q_2^2} \right)^{1/2}$$

## 2.8 Параболалық цилиндрлер координаталары $\xi$ , $\eta$ , $z$

Түрлендіру формулалары

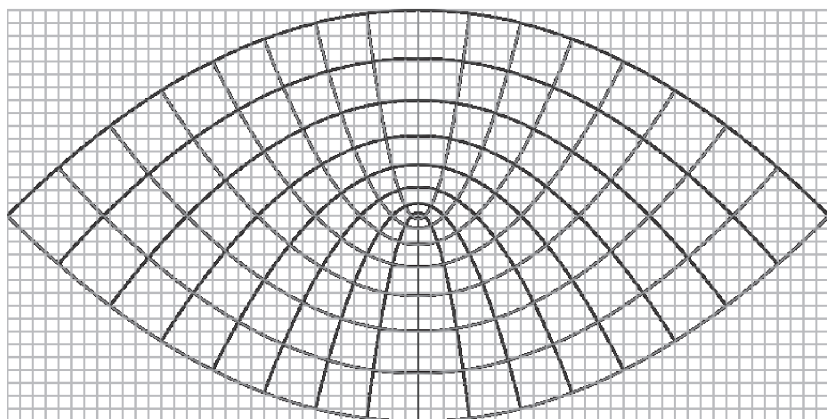
$$x = \xi\eta, \quad y = \frac{1}{2}(\eta^2 - \xi^2), \quad z = z \quad (2.79)$$

болатын ортогоналды параболалық цилиндрлердің екі жүйесін өрнектейді (2.6 - сурет).



2.6(a)-сурет. Параболалық цилиндрлер координаталары

Қызыл түсті бет –  $\xi = 2$ , сары түсті бет –  $\eta = 1$  параболалық цилиндрлеріне, ал көк түсті бет  $z = 2$  жазықтығына сәйкес келеді. Осы беттердің  $P$  нүктесіндегі қиылысы (қара түсті сферамен) көрсетілген. Нүктенің декарттық координаталары  $(2, -1.5, 2)$ .



**2.6(б)-сурет.** Параболалық цилиндрлер координаталарының аксонометриясы

$XOY$  жазықтығында параболалық координаталар – софокусты параболалар әулетін құрайтын ортогоналдық координаталар жүйесі болып табылады.

(2.79) теңдеулерін  $\xi$  және  $\eta$  айнымалылары арқылы өрнектеп, осы беттердің әулеттерін табамыз:

- 1) параболалық цилиндрлер:  $\xi = \text{const}$ ,  $-\infty < \xi < \infty$
  - 2) параболалық цилиндрлер:  $\eta = \text{const}$ ,  $0 \leq \eta < \infty$ ;
  - 3)  $xу$  жазықтығына параллель жазықтықтар:  $z = \text{const}$ .
- (2.6) теңдеуінен Ламе коэффициенттерін табамыз:

$$\left. \begin{aligned} h_1 = h_\xi &= (\xi^2 + \eta^2)^{1/2}, \\ h_2 = h_\eta &= (\xi^2 + \eta^2)^{1/2}, \\ h_3 = h_z &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (2.80)$$

## 2.9 Биполярлық координаталары $\xi, \eta, z$ .

Осы биполярлық координаталар жүйесін тақ сфералық деп атауға болады. Оны қос фокусты эллипсоидтық координаталар жүйесінің дербес жағдайы ретінде қарастыруға болмайды. Бұл жүйеде тіпті  $k^2 = 0$  (осы параграфтың 2-жаттығуын қараңыз) үшін айнымалылар толығымен ажыратылмайды. Сондықтан біз тек нақты есепті шешу әдістерінде координаталар жүйесін қалай таңдау қажеттігін көрсету мақсатында келтіріп отырмыз.

Түрлендіру формулалары келесі түрде жазылады:

$$x = \frac{a \operatorname{sh} \eta}{\operatorname{ch} \eta - \cos \xi}, \quad y = \frac{a \sin \xi}{\operatorname{ch} \eta - \cos \xi}, \quad z = z \quad (2.81)$$

Бірінші теңдікті екіншісіне бөліп, келесі өрнекті аламыз:

$$\frac{x}{y} = \frac{\operatorname{sh} \eta}{\sin \xi}. \quad (2.82)$$

Енді бірінші теңдіктегі  $\xi$  айнымалысынан «айырыламыз»:

$$(x - a \operatorname{cth} \eta)^2 + y^2 = a^2 \operatorname{csh}^2 \eta \xi \quad (2.83)$$

Осылайша екінші теңдеудегі де  $\eta$  айнымалысынан «айрыламыз»:

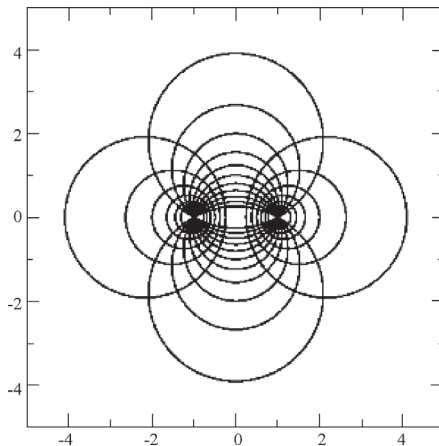
$$x^2 + (y - \operatorname{ctg} \xi)^2 = a^2 \operatorname{cosec}^2 \quad (2.84)$$

(2.83) және (2.84) қатынастарының көмегімен осы жүйенің координаталық беттерінің әулеттерін табамыз:

- 1) шеңберлік цилиндрлер:  $\xi = \text{const}$ ,  $0 \leq \xi < 2\pi$ ,  $y = a \operatorname{ctg} \xi$ ;
- 2) центрі  $x = a \operatorname{cth} \eta$  нүктесінде болатын шеңберлік цилиндрлер:  $\eta = \text{const}$ ,  $-\infty < \eta < \infty$ ;
- 3)  $x, y$  жазықтығына параллель жазықтықтар:  $z = \text{const}$ ,  $-\infty < z < \infty$ .

Егер  $\eta \rightarrow 0$  болса, онда  $\operatorname{cth} \eta \rightarrow 1$  және  $\operatorname{csh} \eta \rightarrow 0$ . Сонда (2.83) теңдеуінің шешімі  $x = a, y = 0$  болады. Екінші жағынан,  $\eta \rightarrow -\infty$  жағдайы үшін шешімі:  $x = -a, y = 0$  болады, яғни шеңбер нүктеге, ал цилиндр – сызыққа үстеленеді (вырождение). (2.84) теңдеуімен

өрнектелетін барлық шеңберлер ( $x$ у жазықтығындағы) осы екі нүктеден өтеді, себебі кез келген  $\xi$  үшін (2.84) теңдеуінің шешімі  $x=\pm a$ ,  $y=0$  болып табылады.



**2.7-сурет.** Биполярлық координаталар:  $\xi$  және  $\eta$  изобеттерінің фокустары  $(-1, 0)$  және  $(+1, 0)$  нүктелерінде орналасқан

Биполярлық координаталар жүйесі үшін Ламе коэффициенттерін жазамыз:

$$\left. \begin{aligned} h_1 = h_\xi &= \frac{a}{ch\eta - \cos \xi}, \\ h_2 = h_\eta &= \frac{a}{ch\eta - \cos \xi}, \\ h_3 = h_z &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (2.85)$$

Үш нүкте:  $(a, 0)$ ,  $(-a, 0)$  және  $(x, y)$ , оған қоса екі  $\bar{\rho}_1$  және  $\bar{\rho}_2$  радиус-векторлары берілсін. Олар  $x$  осінің оң бағытымен сәйкесінше  $\theta_1$  және  $\theta_2$  бұрыштарын құрасын. Онда 2.8-суретінен көріп тұрғанымыздай:

$$\rho_1^2 = (x - a)^2 + y^2, \quad \rho_2^2 = (x + a)^2 + y^2 \quad (2.86)$$

және 
$$tg\theta_1 = \frac{y}{x - a}, \quad tg\theta_2 = \frac{y}{x + a} \quad (2.87)$$

Келесі белгілеулерді енгізелік:

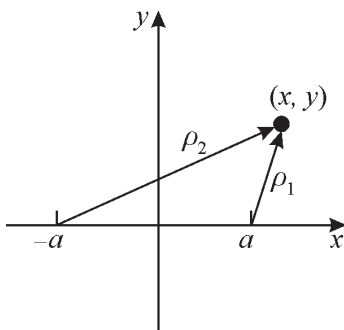
$$\eta_{12} = \ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right), \quad \xi_{12} = \theta_1 - \theta_2 \quad (2.88)$$

$\operatorname{tg} \xi_{12}$  табу үшін (2.87) теңдеулерін пайдаланамыз

$$\operatorname{tg} \xi_{12} = \frac{\operatorname{tg} \theta_1 - \operatorname{tg} \theta_2}{1 + \operatorname{tg} \theta_1 \operatorname{tg} \theta_2} = \frac{y/(x-a) - y/(x+a)}{1 + y^2/(x-a)(x+a)} \quad (2.89)$$

Бұдан (2.84) теңдеуі оңай табылады. Демек,  $\xi$  мына айырымға  $\xi_{12} = \theta_1 - \theta_2$  сәйкес келеді. (2.88) теңдеулерінің біріншісін  $\rho_2/\rho_1$  қатынасы арқылы шешеміз, бұған қоса (2.86) теңдеуін ескеріп, келесі өрнекті аламыз:

$$e^{2\eta_2} = \frac{\rho_2^2}{\rho_1^2} = \frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2} \quad (2.90)$$



2.8-сурет.  $\vec{\rho}_1$  және  $\vec{\rho}_2$  радиус-векторлары

$e^{-\eta_2}$ -ке көбейтіп, гиперболалық синус пен косинустың анықтамаларын пайдалана отырып, (2.83) теңдеуіне қайта оралайық. Өз кезегінде бұдан  $\eta$  және  $\eta_{12} = \ln(\rho_2/\rho_1)$  тектестігін көрсетеді. Осы тектестікті пайдаланудың мысалын келтірелік.

**Мысал.** Шексіз өткізгіштің бойымен  $z$  осінің теріс бағытында  $I$  тоғы ағады (2.9-сурет). Осы өткізгішке параллель екіншісінің бойымен  $z$  осінің оң бағытында  $I$  тоғы ағады. Енді

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{\lambda}}{r} \quad (2.91)$$

анықтамасын пайдаланып,  $\vec{A}$  магниттік векторлық потенциалы мен  $\vec{B}$  магнит индукциясын табайық.

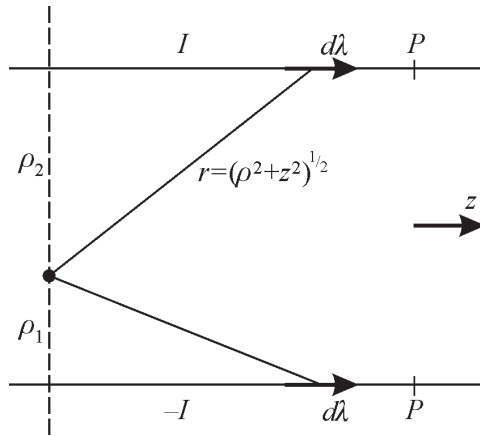
(2.91) теңдеуіне сәйкес  $\vec{A}$  векторының тек  $z$ -құрамдас бөлігі бар. Әр өткізгіштің бойымен 0-ден  $P$ -ге дейін интегралдап және интегралдау шегін  $P \rightarrow \infty$  өзгертіп, келесі өрнекті аламыз:

$$A_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \lim_{P \rightarrow \infty} \left( 2 \int_0^P \frac{dz}{\sqrt{\rho_2^2 + z^2}} - 2 \int_0^P \frac{dz}{\sqrt{\rho_1^2 + z^2}} \right), \quad (2.92)$$

$$\begin{aligned} A_z &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \lim_{P \rightarrow \infty} 2 \left[ \ln(z + \sqrt{\rho_2^2 + z^2}) - \ln(z - \sqrt{\rho_1^2 + z^2}) \right]_0^P = \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left( \lim_{P \rightarrow \infty} 2 \ln \frac{P + \sqrt{\rho_2^2 + P^2}}{P + \sqrt{\rho_1^2 + P^2}} - 2 \ln \frac{\rho_1}{\rho_2} \right). \end{aligned} \quad (2.93)$$

Соңғы қатынас төмендегідей түрленеді:

$$A_z = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \eta. \quad (2.94)$$



2.9-сурет. Қарама-қарсы электр токтары

Осыған дейін биполярлық координаталардың қажеттілігі болмады. Алайда енді  $\vec{B}$  магнит индукциясын  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$  формуласымен анықтау қажет болады. (2.22) және (2.85) теңдеулерінен мына өрнекті табамыз:

$$\vec{B} = \frac{(ch\eta - \cos\xi)^2}{a^2} \cdot \begin{vmatrix} h_\xi \vec{\xi}_0 & h_\eta \vec{\eta}_0 & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial \xi} & \frac{\partial}{\partial \eta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \eta \end{vmatrix} =$$

$$-\vec{\xi}_0 \frac{(ch\eta - \cos\xi) \mu_0 I}{a 2\pi} \quad (2.95)$$

Магниттік өрістің тек  $z$ - құрамдас бөлігі ғана бар.

### Жаттығулар

1.  $\xi = b_i$ ,  $\eta = c_j$  беттерінің ортогоналдылығын тексеріңіздер:  
 а) бір беттің көлбеулігі ( $z = \text{const}$  жазықтығымен қиылысу сызығы бойынша) өзге көлбеулікке қарама-қарсы болатынын көрсетіңіздер;

б)  $h_{\xi\eta}^2$  -ты есептеп табыңыздар.

2. Лаплас теңдеуіндегі  $\nabla^2 \Psi(\xi, \eta, z) = 0$  айнымалылар биполярлық координаталар жүйесінде толығымен ажырамайтынын көрсетіңіздер. Айнымалыларды толығымен ажырату екі өлшемді, яғни  $\psi = \psi(\xi, \eta)$  жағдайында мүмкін болатынын көрсетіңіздер.

3. Радиустары  $b$  және  $c$  болатын екі параллель шексіз өткізгіш цилиндрлердің бірлік ұзындықтағы сыйымдылығын табыңыздар. Осьтердің арақашықтығы  $d$ -ға тең.

Жауабы:  $C = 2\pi\epsilon_0/(\eta_1 - \eta_2)$ .

4. Шексіз өткізгіш цилиндр мен жазықтықтан (цилиндрдің осі жазықтыққа параллель) құралған жүйенің бірлік ұзындықтағы сыйымдылығын табыңыздар.

Жауабы:  $C = 2\pi\epsilon_0/\eta_1$ .

### 2.10. Созылған сфероидтың координаталары $u$ , $v$ , $\varphi$

Екі өлшемді эллипстік координаталар жүйесін қарастыралық (2.7-бөлімін қараңыз). Осы екі өлшемді эллипсті үлкен және

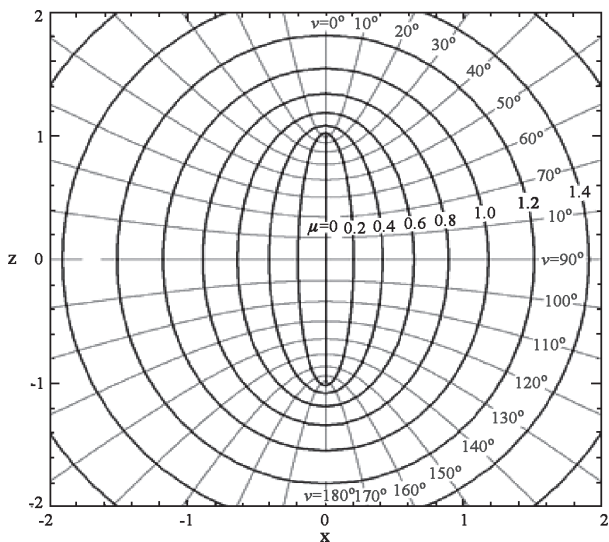
кіші осьтері бойымен айналдыру және  $\varphi$  азимутальдік бұрышын енгізу арқылы үш өлшемді жүйені алуға болады (2.10 – сурет).

Басты осьтің бойымен айналдыру арқылы созылған сфероидтар координаталарының жүйесіне әкеледі, ал олардың координаттық беттері төмендегідей болады:

- 1) созылған сфероидтар:  $u = \text{const}$ ,  $0 \leq u < \infty$ ;
- 2) екі жолақты гиперболоидтар  $v = \text{const}$ ,  $0 \leq v \leq \pi$ ;
- 3)  $z$  осі арқылы өтетін жартылай жазықтықтар:  $\varphi = \text{const}$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ .

Түрлендіру теңдеулері:

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cdot \text{sh } u \cdot \sin v \cdot \cos \varphi \\ y &= a \cdot \text{sh } u \cdot \sin v \cdot \sin \varphi \\ z &= a \cdot \text{sh } u \cdot \cos v \end{aligned} \right\} \quad (2.96)$$

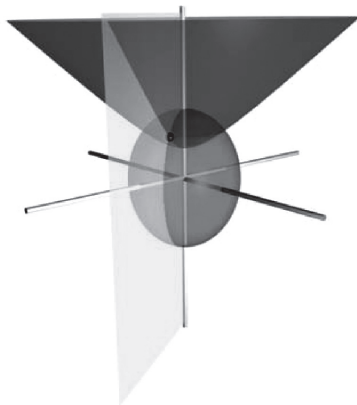


Декарттық координаталар жүйесіндегі осьтер – айналу симметриясының осі  $z$  болатындай етіп орналасқанын атап өтеміз. Осы жүйе үшін Ламе коэффициенттері:

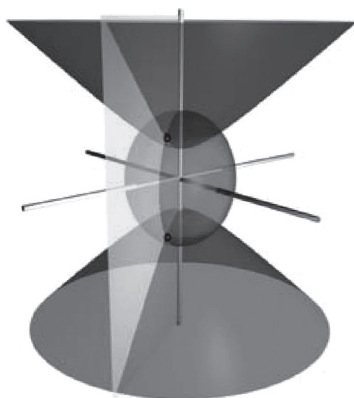
$$\left. \begin{aligned} h_1 &= h_u = a(\text{sh}^2 u + \sin^2 v)^{1/2} = a(\text{ch}^2 u - \cos^2 v)^{1/2} \\ h_2 &= h_v = a(\text{sh}^2 u + \sin^2 v)^{1/2} \\ h_3 &= h_\varphi = a \cdot \text{sh } u \cdot \sin v \end{aligned} \right\} \quad (2.97)$$

Созылған сфероидтың координаталары физикада маңызды міндет атқарады, әсіресе «екі орталықтар» есептерін зерттегенде. Екі орталық эллипсоид пен айналу гиперболоидының екі фокальді  $(0,0,a)$  мен  $(0,0,-a)$  нүктелеріне сәйкес келеді.

Мысал ретінде  $a=1$  үшін  $u$  және  $v$  созылған сфероидтық координаталарын қарастырайық. Суретте аталған координаталардың көрсетілген мәндері үшін  $XOZ$  жазықтығында, яғни  $\varphi=0$  жағдайы көрсетілген. Енді  $z$  осінің бойымен (яғни, кез келген  $\varphi$  үшін) айналдыру арқылы созылған сфероидтар координаталарының жүйесін аламыз.



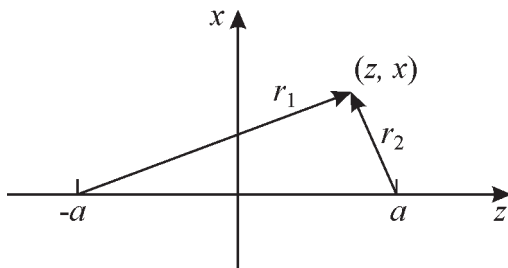
Қызыл түсті созылған тік төртбұрыш  $u=1$ -ге, ал екі жолақты көк түсті гиперболалар  $v=45^\circ$ -ке сәйкес келеді. Сары түсті жартылай жазықтық  $x$  осімен (жасыл түсті)  $\varphi=-60^\circ$  бұрыш құрайды. Декарттық координаталары  $(0.831, -1.439, 2.182)$  болатын қара түсті сфера – үш беттің қиылысынан табылады.



Шындығында созылған сфероидтың координаталары *сетінеуі* (*вырождение*) мүмкін. Басқаша айтқанда, координаталардың бір жиынтығына декарттық координаталардың екі жиынтығы сәйкес келеді. Жоғарыдағы суретте олар екі қара түсті сфералармен көрсетілген. Ал олардың әрқайсысы гиперболоидтың екі жолағында табылады және олардың координаталары  $(x, y, \pm z)$  болады. Осылайша олар бір мәнді анықталады.

**2.10-сурет.** Созылған сфероидтың координаталары

2.11-суретке сәйкес  $\vec{r}_1$  - векторы  $(z, x)$  нүктесінен сол фокусына, ал  $\vec{r}_2$  - оң фокусына дейінгі қашықтық болсын, мұндағы  $\vec{r}_1 + \vec{r}_2 = const$ .



**2.11-сурет.** «Екі орталық»

$(z, x)$  нүктесі  $u$  және  $v$  айнымалылары арқылы (2.96) теңдеулерімен өрнектеледі. Осы жағдай үшін азимуттық бұрыш ескерілмейді. Эллипс және гиперболаның қасиеттерінен белгілі:

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 + \vec{r}_2 &= const, \text{ егер } u \text{ бекітілген болса,} \\ \vec{r}_1 - \vec{r}_2 &= const, \text{ егер } v \text{ бекітілген болса.} \end{aligned} \quad (2.98)$$

(2.96) теңдеуін және келесі қатынастарды ескере отырып

$$r_1 = \left[ (a+z)^2 + x^2 \right]^{1/2}, \quad r_2 = \left[ (a-z)^2 + x^2 \right]^{1/2}, \quad (2.99)$$

табамыз

$$r_1 = a(ch u + \cos v), \quad r_2 = a(ch u - \cos v), \quad (2.100)$$

немесе

$$\frac{r_1 + r_2}{2a} = ch u, \quad \frac{r_1 - r_2}{2a} = \cos v \quad (2.101)$$

Мұның мағынасы:  $u$  – екі орталық қашықтықтарының қосындысына, ал  $v$  – орталықтардың айырымына тәуелді.

Осы координаталар жүйесін қолдану жеңіл болуы үшін айнымалыларды алмастыралық:

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= ch u & 1 \leq \xi_1 < \infty \\ \xi_2 &= \cos v & -1 \leq \xi_2 \leq 1 \\ \xi_3 &= \varphi & 0 \leq \xi_2 \leq 2\pi \end{aligned} \right\} \quad (2.102)$$

Онда Ламе коэффициенттері де өзгертінін арнайы көрсетелік, яғни

$$h_{\xi_1} = h_{ch u} \neq h_u \quad (2.103)$$

**Мысал.** Сутегінің молекулалық ионы фокальдік нүктелерде орналасқан екі протон мен бір электроннан құралады. Осы жүйе үшін Шредингер теңдеуін жазалық:

$$\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 \psi - \frac{e^2}{r_1} \psi - \frac{e^2}{r_2} \psi + \frac{e^2}{r_{12}} \psi = E\psi \quad (2.104)$$

Мұндағы  $r_1$  және  $r_2$  айнымалылары 2.13-суретіне сәйкес анықталған, ал  $r_{12}=2a$  – екі протонның арақашықтығы. Мақсатымыз: (2.104) теңдеуіндегі айнымалыларды ажырату болып табылады.

Бірінші кезеңде созылған сфероидтың координаталары жүйесіндегі Ламе коэффициенттерін анықтау қажет:

$$\left. \begin{aligned} h_{\xi_1} &= a \left( \frac{\xi_1^2 - \xi_2^2}{\xi_1^2 - 1} \right)^{1/2}, \\ h_{\xi_2} &= a \left( \frac{\xi_1^2 - \xi_2^2}{1 - \xi_2^2} \right)^{1/2}, \\ h_{\xi_3} &= a(\xi_1^2 - 1)^{1/2} (1 - \xi_2^2)^{1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.105)$$

Табылған коэффициенттерді және (2.18) теңдеуін пайдаланып, келесі өрнекті табамыз:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}^2 \psi = \frac{1}{a^2} \left\{ \frac{1}{(\xi_1^2 - \xi_2^2)} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left[ (\xi_1^2 - 1) \frac{\partial \psi}{\partial \xi_1} \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{(\xi_1^2 - \xi_2^2)} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left[ (1 - \xi_2^2) \frac{\partial \psi}{\partial \xi_2} \right] + \frac{1}{(\xi_1^2 - 1)(1 - \xi_2^2)} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_3^2} \right\} \end{aligned} \quad (2.106)$$

(2.100) теңдігінен келесі қатынас алынады:

$$\frac{e^2}{r_1} + \frac{e^2}{r_2} = 2 \frac{e^2 a \xi_1}{(\xi_1^2 - \xi_2^2)}. \quad (2.107)$$

(2.106) және (2.107) теңдеулерін (2.104)-ке апарып қойып, келесі теңдік орындалады деп жорамалдайық

$$\psi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = f_1(\xi_1) f_2(\xi_2) f_3(\xi_3) \quad (2.108)$$

Енді азимутальдік тәуелділікті бөліп жазамыз:

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2Ma} \left\{ \frac{1}{\xi_1^2 - \xi_2^2} \cdot \frac{1}{f_1} \frac{d}{d\xi_1} \left[ (\xi_1^2 - 1) \frac{df_1}{d\xi_1} \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{\xi_1^2 - \xi_2^2} \cdot \frac{1}{f_2} \frac{d}{d\xi_2} \left[ (1 - \xi_2^2) \frac{df_2}{d\xi_2} \right] \right\} - \frac{2e^2}{a} \cdot \frac{\xi_1}{\xi_1^2 - \xi_2^2} - E' = \\ = \frac{\hbar^2}{2Ma} \frac{1}{(\xi_1^2 - 1)(1 - \xi_2^2)} \cdot \frac{1}{f_3} \frac{d^2 f_3}{d\xi_3^2} \end{aligned} \quad (2.109)$$

Мұндағы:  $E' = E - e^2/r_2 = \text{const.}$  2.5-және 2.6-бөлімдеріне ұқсас келесі түрде қабылдаймыз:

$$\frac{1}{f_3} \cdot \frac{d^2 f_3}{d\xi_3^2} = -m^2 \quad (2.110)$$

Осыдан соң (2.109) теңдігі ықшамдалып, оны төмендегідей жазуға болады:

$$\frac{1}{f_1} \frac{d}{d\xi_1} \left[ (\xi_1^2 - 1) \frac{df_1}{d\xi_1} \right] + \frac{1}{f_2} \frac{d}{d\xi_2} \left[ (1 + \xi_2^2) \frac{df_2}{d\xi_2} \right] + \frac{4MaE^2}{\hbar^2} + \frac{2MaE'}{\hbar^2} (\xi_1^2 - \xi_2^2) = m^2 \left( \frac{1}{\xi_1^2 - 1} + \frac{1}{1 - \xi_2^2} \right) \quad (2.111)$$

Нәтижесінде  $\xi_1$  және  $\xi_2$  айнымалыларының шынында ажыратылатынына көзімізді жеткіземіз. Сонымен, екінші ретті бір дифференциалдық теңдеуден  $f_1(\xi_1)$  функциясы анықталса, екіншісінен –  $f_2(\xi_2)$  функциясы анықталады.

### Жаттығулар

1.  $\xi = ch u$  және  $\eta = \cos v$  үшін  $h_\xi^2$ ,  $h_\eta^2$  және  $h_\varphi^2(\xi, \eta, \varphi)$  есептеп табыңыздар.

2.  $h_{uv}^2 = 0$  (созылған сфероидтың координаталары) болатынын көрсетіңіздер.

3. Кванттық механикада сутегі молекуласын Гайтлер-Лондон әдісі бойынша қарастырғанда келесі интеграл кездеседі

$$I = \frac{1}{\pi a^3} \int e^{-(r_1+r_2)/a_0} d\tau.$$

Мұндағы интегралдау барлық кеңістік бойынша жүргізіледі. Енді созылған сфероидтың координаталарын енгізіп, осы интегралды есептеңіздер.

Жауабы:  $I = (1 + 2a/a_0 + 4a^2/3a_0^2)e^{-2a/a_0}$ .

4.  $\xi = ch u$ ,  $\eta = \cos v$  етіп қабылдап, созылған сфероид координаталарында көлемнің элементін келесі өрнектен тікелей алуға болады  $d\tau = a^3 (sh^2 u + \sin^2 v) sh u \sin v du dv d\varphi$ . Ал оның мәні  $d\tau = -a^3 (\xi^2 - \eta^2) d\xi d\eta d\varphi$  болатынын көрсетіңіздер. (Минус таңбасы  $\eta$  бойынша интегралдау шегінің орындарын алмастыру үшін осылайша таңдалған).

5. Созылған сфероид координаталарының жүйесінде көлемдік интегралдың көмегімен берілген эллипсоидтың көлемін есептеп табыңыздар. Ол үшін  $u$ ,  $v$ ,  $\varphi$  және  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\varphi$  айнымалыларын кезегімен пайдаланыңыздар. Есептеу нәтижелері эллипсоид

көлемінің қарапайым формуласымен  $V = \frac{4}{3} \pi a_0^2 b_0$  сәйкес келетінін көрсетіңіздер, мұндағы  $a_0$  және  $b_0$  – эллипсоидтың кіші және үлкен жартылай осьтері.

## 2.11. Сығылған сфероидтың координаталары $u, v, \varphi$

Эллипстік координаталар жүйесін эллипстің кіші осінің бойымен айналдыратын болсақ (2.7 – бөлімін қараңыз) өзге үш өлшемді жүйе – сығылған сфероид координаталарының жүйесін ( $\varphi$  бұрынғыдай азимуттық бұрыш) аламыз. Оның координаттық беттері:

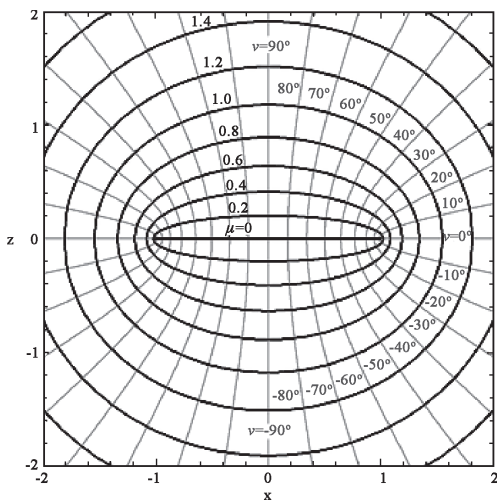
- 1) сығылған сфероидтар:  $u = \text{const}, \quad 0 \leq u < \infty$ ;
- 2) бір жолақты гиперблоидтар:  $v = \text{const}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}$ ;
- 3)  $z$  осі арқылы өтетін жартылай жазықтықтар:  $\varphi = \text{const}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$  болып табылады.

Декарт координаталарымен байланыс теңдеулерін жазалық:

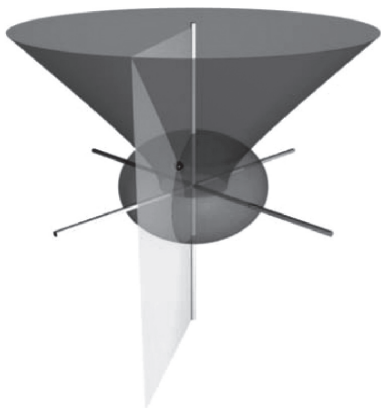
$$x = a \operatorname{ch} u \cos v \cos \varphi$$

$$y = a \operatorname{ch} u \cos v \sin \varphi$$

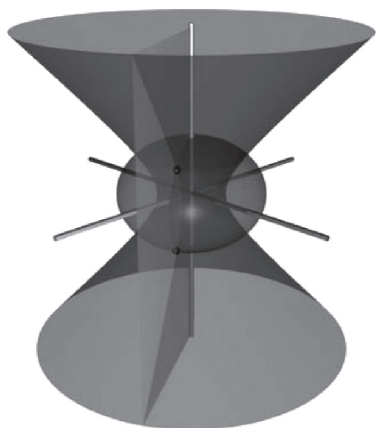
$$z = sh u \sin v$$



Суретте  $a=1$  үшін сығылған сфероидтың координаталары  $XOZ$  жазықтығында, яғни  $\varphi=0$  жағдайы үшін көрсетілген. Мұнда  $u$ -дің тұрақты мәндеріне қызыл түсті эллипстер, ал  $v$ -дің тұрақты мәндеріне көк түсті жартылай гипербодалар сәйкес келеді. Олардың фокустары  $z$  осінің бойында жатады, оған қоса  $z$  және  $v$  айнымалыларының таңбалары әрқашан да бірдей болады. Үш өлшемді беттерді алу үшін  $z$  осінің бойымен айналдыру қажет.



Изобеттердің қиылысынан координаттары  $(u, v, \varphi)$  болатын  $P$  нүктесі (қара түсті сфера) шығады. Мұнда  $z$  осі вертикаль бағыттталып, фокустары  $\pm 2$  нүктелерінде орналасқан. Қызыл түсті сығылған сфероид (тегістелген сфера)  $u=1$ -ге, көк түсті жартылай гипербола  $v=45^\circ$ -қа сәйкес келеді. Жасыл түспен белгіленген  $x$  осімен азимуттық бұрыш  $\varphi=-60^\circ$  -ты құрайды. Аталған жартылай жазықтықтың түсі – сары.  $P$  нүктесінің декарттық координаталары  $(1.09, -1.89, 1.66)$ . Алайда мұнда жартылай гипербоидтың тек жоғарғы бөлігі көрсетілген.



## 2.12-сурет. Сығылған сфероидтың координаталары

Шындығында толық гипербоидты көрсеткенімізде үш беттің қиылысынан екі нүкте шығады. Олардың декарттық координаталарындағы  $z$  құрамдас бөліктерінің таңбалары қарама-қарсы болады, яғни  $(x, y, \pm z)$ .

Ламе коэффициенттері тең болады:

$$\left. \begin{aligned} h_1 = h_u &= a (sh^2 u + \sin^2 v)^{1/2} = a (ch^2 u - \cos^2 v)^{1/2} \\ h_2 = h_v &= a (sh^2 u + \sin^2 v)^{1/2} \\ h_3 = h_\varphi &= a ch u + \cos v \end{aligned} \right\} (2.112)$$

$u = \text{const}$  беті сығылған сфероидты сипаттайды. Осы жүйе жоғары дәрежелі жуықтауда ғаламшарлық (планетарлық) бетке сәйкес келгендіктен, Жердің гравитациялық өрісін сипаттағанда қолданылады. Әдетте созылған және сығылған сфероидтардың координаталары мен екінші текті Лежандр функциялары қатар қарастырылады.

Маңызды жайтты ескертеміз: егер  $\varphi$  бұрышының өсімін әдеттегідей  $x$  осінен  $y$  осіне қарай жүргізіп және айнымалылардың ретін  $(u, v, \varphi)$  етіп таңдайтын болсақ, онда сол жүйені аламыз. Сондықтан ротор өрнегінде  $(-1)$  көбейтіндісі пайда болады. Оң жүйені сақтап қалу үшін айнымалылардың реті  $(u, v, \varphi)$  болуы қажет. Онда  $\vec{v}_0 \times \vec{u}_0 = +\vec{\varphi}_0$  болады немесе түрлендіру өрнектеріндегі  $v$ -дың орнына  $\left(\frac{\pi}{2} - v\right)$ -ге алмастыру қажет.

### Жаттығулар

1. Лаплас теңдеуін сығылған сфероид координаталарының жүйесінде жазып, айнымалыларды ажыратыңыздар. Дифференциал-дық теңдеуді  $\varphi$ -ге тәуелді етіп шешіңіздер.

2. Радиусы  $a$  болатын жұқа өткізгіш металл дисктің заряды  $Q$ -ге тең. Дискінің электростатикалық сыйымдылығын  $C$  және оның бетіндегі зарядтың таралуын  $\sigma$  табыңыздар.

Жауабы:  $C = 8a\epsilon_0$ ,  $C = 8a\epsilon_0$ ,  $\sigma = 1/4\pi a\sqrt{a^2 - r^2}$  (әрбір бетінде).

## 2.12 Параболоидтық координаталары $\xi, \eta, \varphi$ .

2.8- бөлімінде ортогоналды қос фокусты параболалардың екі әулетін сипаттадық. Енді  $xu$  жазықтығында орналасқан (2.6-сурет) параболалар әулетін қарастыралық. Симметрия осі ретінде  $y$ -ті анықтап, осы осьтің бойымен айналдырайық. Нәтижесінде ортогоналды қос фокусты параболоидтардың екі әулетін аламыз. Енді  $z$  осін айналудың осі етіп алу үшін координаттардың орнын циклдік түрде алмастыру қажет:

1)  $z$  осінің оң бағытының бойындағы параболоидтар  $\xi = \text{const}$ ,  $0 \leq \xi < \infty$ ;

2)  $z$  осінің теріс бағытының бойындағы параболоидтар  $\eta = \text{const}$ ,  $0 \leq \eta < \infty$ ;

3)  $z$  осі арқылы өтетін жартылай жазықтықтар  $\varphi = \text{const}$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ .

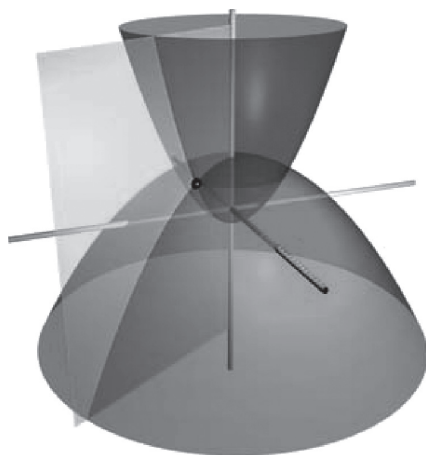
Әдеттегідей,  $\varphi$  бұрышы  $xu$  жазықтығындағы  $x$  осінен бастау алады, сонда

$$x = \xi\eta \cos \varphi, \quad y = \xi\eta \sin \varphi, \quad z = \frac{1}{2}(\eta^2 - \xi^2) \quad (2.113)$$

Олай болса (2.113) теңдеуінен Ламе коэффициенттерін табамыз

$$\left. \begin{aligned} h_1 = h_\xi &= (\xi^2 + \eta^2)^{1/2} \\ h_2 = h_\eta &= (\xi^2 + \eta^2)^{1/2} \\ h_3 = h_\varphi &= \xi\eta \end{aligned} \right\} \quad (2.114)$$

2.13-суреттен көріп тұрғанымыздай,  $\vec{\xi}_0 \times \vec{\eta}_0 = -\vec{\varphi}_0$ ; яғни параболалық жүйе айнымалыларының осі ( $\xi, \eta, \varphi$ ) реті теріс (сол) жүйені құрайды. (2.113) теңдеулеріне сәйкес  $\xi$  және  $\eta$  айнымалыларының өлшемдері ұзындықтың жарты дәрежесіне тең. Сондықтан кейбір әдебиеттерде  $\xi$  және  $\eta$  айнымалыларының орнына  $\xi^{1/2}$  және  $\eta^{1/2}$  мәндері пайдаланылады.



Мұнда  $\xi = 2$  –ге тең қызыл түсті параболоид,  $\eta = 1$  – ге көк түсті параболоид сәйкес келсе, сары түсті жартылай жазықтық  $x$  осімен (жасыл түсті)  $\varphi = -60^\circ$  бұрышын құрайды. Үш беттің қиылысуынан қара түспен көрсетілген  $P$  нүктесі пайда болады, ал оның декарттық координаталары  $(1.0, -1.732, 1.5)$ -ге тең болады.

### 2.13-сурет. Параболалық координаталар

Параболалық координаталарын электр өрісіне орналасқан атомның энергетикалық деңгейлерінің талшықтануын (расщепление) сипаттайтын Штарк эффектін талдауда қолданады.

**Штарк эффектi.** Ол үшін  $z$  осінің бойымен бағытталған сыртқы  $\vec{E}_0$  электр өрісі берілісін. Онда Шредингердің толқындық теңдеуіндегі потенциалдық энергияға қосымша  $-eE_0z$  мүшесі қосылады:

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \bar{\nabla}^2 \psi - \frac{e^2}{r} \psi - eE_0z\psi = E\psi \quad (2.115)$$

Осы теңдеудегі айнымалыларды ажыратуымыз қажет. Ол үшін (2.18) және (2.114) теңдеулерін пайдаланамыз:

$$\bar{\nabla}^2 \psi = \frac{1}{\xi\eta(\xi^2 + \eta^2)} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \xi\eta \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \xi\eta \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right] \right\} + \frac{1}{\xi^2 \eta^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2}. \quad (2.116)$$

Оған қоса,

$$r = \frac{\xi^2 + \eta^2}{2} \quad (2.117)$$

Бастапқы (2.115) толқындық теңдеуіне соңғы екі өрнектерді апарып қойып және толық функцияны  $\psi = f(\xi) g(\eta) \Phi(\varphi)$  түрінде жазайық:

$$\begin{aligned} & \frac{\hbar^2}{2M} \cdot \frac{1}{(\xi^2 + \eta^2)} \left[ \frac{1}{\xi f} \cdot \frac{d}{d\xi} \left( \xi \frac{df}{d\xi} \right) + \frac{1}{\eta g} \cdot \frac{d}{d\eta} \left( \eta \frac{dg}{d\eta} \right) \right] + \\ & + \frac{\hbar^2}{2M} \cdot \frac{1}{\xi^2 \eta^2} \cdot \frac{1}{\Phi} \cdot \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + \frac{2e^2}{\xi^2 + \eta^2} + \frac{eE_0}{2} (\eta^2 - \xi^2) + E = 0. \quad (2.118) \end{aligned}$$

Егер келесі теңдікті енгізсек:

$$\frac{1}{\Phi} \cdot \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = -m^2, \quad (2.119)$$

онда (2.118) теңдеуі жеңілдеп, келесі жаңа екі теңдеуге айналады:

$$\frac{\hbar^2}{2M} \left[ \frac{1}{\xi f} \cdot \frac{d}{d\xi} \left( \xi \frac{df}{d\xi} \right) - \frac{m^2}{\xi^2} \right] + E\xi^2 - \frac{eE_0 \xi^4}{2} + A = 0, \quad (2.120)$$

$$\frac{\hbar^2}{2M} \left[ \frac{1}{\eta g} \cdot \frac{d}{d\eta} \left( \eta \frac{dg}{d\eta} \right) - \frac{m^2}{\eta^2} \right] + E\eta^2 + \frac{eE_0 \eta^4}{2} + B = 0. \quad (2.121)$$

$A$  және  $B$  – кез келген тұрақтылар, бірақ олар келесі шартты қанағаттандырады  $A + B = 2e^2$ .

### Жаттығулар

1. Жұптылық операторын ( $P$ ) қарастырайық (инверсия операторының көмегімен толқындық функцияның жұп немесе тақ болатыны анықталады).  $P$  жұптылық операторы - декарттық координаталар жүйесіндегі инверсия амалына тең:

$$P(x, y, z) = -x, -y, -z.$$

Осы операторлық теңдеуді келесі координаталық жүйелерде жазыңыздар:

1) сфералық координаталары жүйесінде:  $r, \theta, \varphi$ ;

- 2) цилиндрлік координаталары жүйесінде:  $\rho, \varphi, z$ ;
- 3) созылған сфероидтың координаталары жүйесінде:  $u, v, \varphi$ ;
- 4) созылған сфероидтың координаталары жүйесінде:  $\xi, \eta, \varphi$ ;
- 5) сығылған сфероидтың координаталар жүйесінде  $u, v, \varphi$ ;
- 6) параболалық жүйеде  $\xi, \eta, \varphi$ .

2. Сутегі тәріздес атом үшін толқындық теңдеудің түрі төмендегідей болады:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 u + Vu = Eu,$$

Мұндағы:  $V = -Ze^2/r$  – электронның потенциалдық энергиясы, ал  $E$  – толық энергия. Параболалық координаталарда осы теңдеудің айнымалыларын ажыратуға болатынын көрсетіңіздер. Егер атомның ядросын фокустардың біріне орналастырса, онда созылған сфероид координаталарының жүйесінде де айнымалыларды ажыратуға болатынын көрсетіңіздер.

3. Кулондық шашырау үрдісін сипаттайтын толқындық теңдеуде әсерлесу потенциалы  $V = (ZZ'e^2)/r$ , мұндағы  $Ze$  және  $Z'e$  - бірінші және екінші бөлшектердің зарядтары. Есепті параболалық координаталар жүйесінде шешіңіздер. Теңдеудің шешімі болатын  $u = e^{ikz} f(\xi)$  функциясы үстеленген (вырождение) гипергеометриялық теңдеудің қанағаттандыратынын көрсетіңіздер.

4. Егер параболалық координаттар қарапайым декарт координаталар жүйесімен келесі қатынастармен байланысатын болса:

$$x = \sqrt{\xi\eta} \cos \varphi, \quad y = \sqrt{\xi\eta} \sin \varphi, \quad z = \frac{1}{2}(\xi - \eta),$$

онда  $h_\xi^2$ ,  $h_\eta^2$  және  $h_\varphi^2$  коэффициенттерін анықтаңыздар.

5. Жазық параболалық жүйені  $\xi, \eta$  (2.8-бөлімді қараңыз)  $x$  осінің бойымен айналдырғанда пайда болатын үш өлшемді координаталар жүйесінде зерттеңіздер.

### 2.13. Тороидтық координаталары $\xi, \eta, \varphi$ .

Тороидтық координаталар жүйесі  $xu$  жазықтығындағы биполярлық жүйені (2.9-бөлім)  $y$  осінің бойымен (2.7-сурет) айналдырғанда пайда болады. Мұндай айналу орталықтары  $y$

осінің бойында ( $\xi = \text{const}$ ) орналасқан шеңберлер-сфераларды, ал орталықтары  $x$  осінің бойында ( $\eta = \text{const}$ ) болатын шеңберлер – тороидтарды құрайды (2.14-сурет). Координаталарды айналу осі  $z$  осімен сәйкес болатындай етіп таңдап аламыз. Онда түрлендіру өрнектері мынадай түрде болады:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{a \operatorname{sh} \eta \cos \varphi}{\operatorname{ch} \eta - \cos \xi} \\ y &= \frac{a \operatorname{sh} \eta \sin \varphi}{\operatorname{ch} \eta - \cos \xi} \\ z &= \frac{a \sin \xi}{\operatorname{ch} \eta - \cos \xi} \end{aligned} \right\} \quad (2.122)$$

Бұдан

$$\left. \begin{aligned} h_1 = h_\xi &= \frac{a}{\operatorname{ch} \eta - \cos \xi}, \\ h_2 = h_\eta &= \frac{a}{\operatorname{ch} \eta - \cos \xi}, \\ h_3 = h_\varphi &= \frac{a \operatorname{sh} \eta}{\operatorname{ch} \eta - \cos \xi}. \end{aligned} \right\} \quad (2.123)$$

Айналу кезіндегі координаттық беттері:

1) орталықтары  $(0, 0, a \cdot \operatorname{ctg} \xi)$  нүктелерінде және радиустары  $a |\cos \xi|$  болатын сфералар:

$$\xi = \text{const}, 2az \cdot \operatorname{ctg} \xi = x^2 + y^2 + z^2 - a^2, 0 \leq \xi \leq 2\pi, \quad (2.124)$$

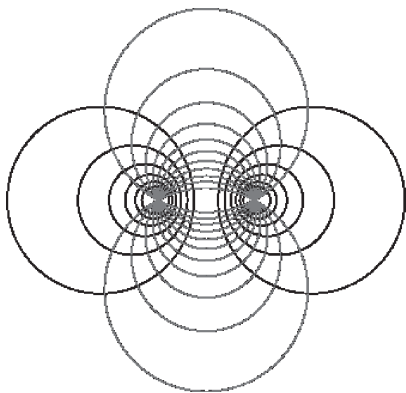
2) тороидтар  $\xi = \text{const}, 0 \leq \xi \leq 2\pi$ .

Тороидтардың көлденең қимасынан пайда болатын шеңберлердің орталықтары

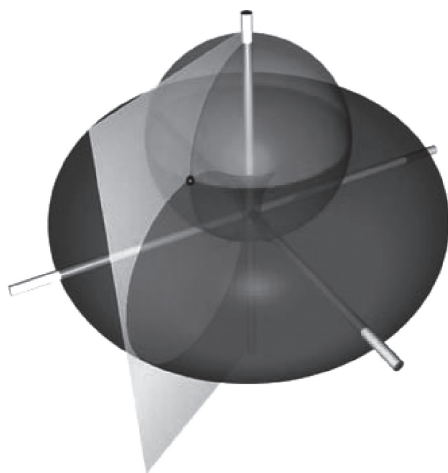
$$4a^2(x^2 + y^2) \operatorname{cth}^2 \eta = (x^2 + y^2 + z^2 + a^2)^2, \quad (2.125)$$

олардың  $z$  осінен қашықтықтары  $a \cdot \operatorname{cth} \eta$ , ал радиустары  $a \cdot \operatorname{csh} \eta$  тең болады.

1)  $z$  осі арқылы өтетін жартылай жазықтықтар:  $\varphi = \text{const}$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ .



Суретте көрсетілген екі өлшемді биполярлық координаталар жүйесін тік осьтің бойымен айналдырғанда үш өлшемді тороидтық координаталар жүйесін аламыз. Онда көлденең орналасқан қызыл түсті шеңберлерден – сфералар, ал көлденең осіндегі шеңберлерден – көк түсті торулар пайда болады.



**2.14-сурет.** Тороидтық координаталары

Бұл суретте екі фокустары  $z$  осімен бөлінген, тек жоғары бөлігі ғана көрсетілген. Қызыл түсті сфера  $\xi = 30^\circ$  изобетке, ал көк түсті торус  $\eta = 0.5$  изобетке сәйкес келеді. Сары түсті жартылай жазықтық жасыл түспен көрсетілген  $x$  осімен  $\varphi = 60^\circ$  бұрышын құрайды. Декарттық координаталары  $(0.996, -1.725, 1.911)$  болатын қара түсті нүкте осы үш беттің қиылысынан табылады.

Лаплас теңдеуі үшін тороидтық координалардың айнымалылары толығымен ажыратылады. Осы координаталар жүйесі өте сирек кездескенімен, кейбір физикалық қосымшаларда (мысалы, құйындық сақиналарды сипаттағанда) пайдаланылады.

$\xi$ ,  $\eta$ ,  $\varphi$  айнымалалары теріс (сол) жүйені құрайтынын атап өтелік. Оң жүйені құрау үшін айнымалылардың реті  $\eta, \xi, \varphi$  болуы қажет.

### Жаттығу

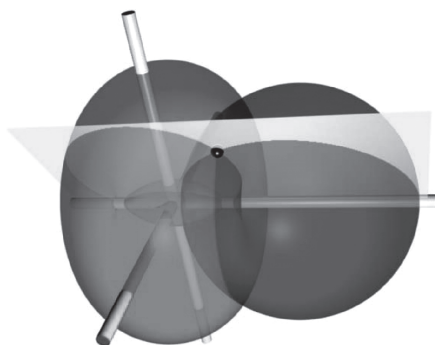
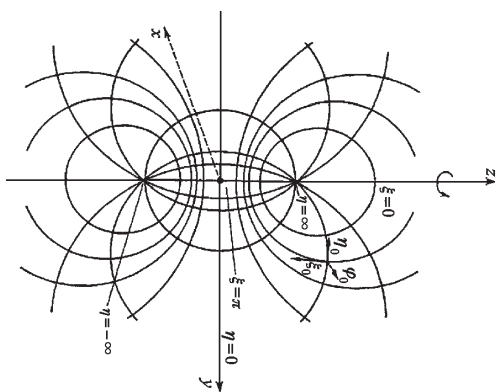
Тороид бетінің ауданы  $(2\pi a) \cdot (2\pi b) = 4\pi^2 ab$  болатынын көрсетіңіздер, мұндағы  $a$  – тороид радиусы,  $b$  – орталықтан оське дейінгі қашықтық.

## 2.14. Бисфералық координаталары $\xi$ , $\eta$ , $\varphi$ .

Енді қайтадан биполярлық координаталарға (2.9-бөлім) оралып,  $xu$  жазықтығында  $z$  осінің бойымен айналуын қарастырайық (2.7 – сурет). Онда ортогоналды қиылысатын сфералардың екі әулеті пайда болады (2.15-сурет). Тұрақты азимут жазықтықтарымен толықтырсақ, онда бисфералық координаталар жүйесін құрайды және төмендегі түрлендіру теңдеулерімен сипатталады:

$$x = \frac{a \sin \xi \cos \varphi}{ch \eta - \cos \xi}, \quad y = \frac{a \sin \xi \sin \varphi}{ch \eta - \cos \xi}, \quad z = \frac{a \operatorname{sh} \eta}{ch \eta - \cos \xi}. \quad (2.126)$$

Суретте  $z$  осінің бойында жататын екі фокустың арақашықтығы 1-ге тең. Қызыл түсті сфера  $\xi = 45^\circ$  изобетіне, көк түсті торус  $\eta = 0.5$  изобетіне сәйкес келеді. Ал сары түсті жартылай жазықтық жасыл түспен көрсетілген  $x$  осімен  $\varphi = 60^\circ$  бұрышын құрайды. Декарттық координаталары (0.841, -1.456, 1.239) болатын қара түсті сфера осы үш беттің қиылысынан табылады.



**2.15-сурет.** Бисфералық координаталары  
(тілшікпен симметрия осінің бойымен айналуы көрсетілген)

Айналу осін  $z$  деп қабылдап, қайта жазамыз, сонда:

(2.127)

$$\left. \begin{aligned} h_1 = h_\xi &= \frac{a}{ch \eta - \cos \xi}, \\ h_2 = h_\eta &= \frac{a}{ch \eta - \cos \xi}, \\ h_3 = h_\varphi &= \frac{a \sin \xi}{ch \eta - \cos \xi}. \end{aligned} \right\}$$

Торидтық жүйе келесі координаталық беттермен сипатталады:

1) төртінші ретті айналу беті ( $z$  осінің бойымен)

$$\xi = const \begin{cases} 0 < \xi < \frac{\pi}{2} & z \text{ осінің бойындағы «иірімдер»,} \\ \xi = \frac{\pi}{2} & \text{сфера,} \\ \frac{\pi}{2} < \xi < \pi & z \text{ осінің бойындағы Айдың} \\ & \text{«мүйіздері» тәрізді пішіндер;} \end{cases}$$

2) орталықтары  $(0, 0, a \cdot \text{cth} \eta)$  нүктелерінде болатын радиустары  $a |csh \eta|$  сфералары:  $\eta = const, -\infty < \eta < +\infty$ ;

3)  $z$  осі арқылы өтетін жартылай жазықтықтар:  $\varphi = const, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ .

Осы айнымалылар жүйесінде Лаплас теңдеуінің бөлігі ғана ажыратылады. Ал (2.1) теңдеуінің жалпы түрінде ( $k^2 \neq 0$ ) айнымалыларды ажыртау мүмкін емес. Бисфералық координаталар жүйесі электростатиканың арнайы есептерінде пайдаланылады. Мысалы, өткізгіш шар мен өткізгіш жазықтық арасындағы электростатикалық сыйымдылықты табу үшін қолдану тиімді (жаттығуды қараңыз).

### Жаттығу

Өткізгіш шар мен өткізгіш жазықтықтан құралған жүйенің электростатикалық сыйымдылығын анықтаңыздар (шар мен жазықтық қиылыспайды).

## 2.15. Қос фокусты эллипсоидтық координаталары $\xi_1, \xi_2, \xi_3$

Бұл жалпыланған координаталар жүйесі беттердің үш әулетінен құралған:

1) эллипсоидтар (барлық осьтері әртүрлі),  $\xi_1 = const$  :

$$\frac{x^2}{a^2 - \xi_1} + \frac{y^2}{b^2 - \xi_1} + \frac{z^2}{c^2 - \xi_1} = 1; \quad (2.128)$$

2) бір жолақты гиперболоидтар,  $\xi_2 = const$  :

$$\frac{x^2}{a^2 - \xi_2} + \frac{y^2}{b^2 - \xi_2} - \frac{z^2}{\xi_2 - c^2} = 1; \quad (2.129)$$

3) екі жолақты гиперболоидтар,  $\xi_3 = const$  :

$$\frac{x^2}{a^2 - \xi_3} - \frac{y^2}{\xi_3 - b^2} - \frac{z^2}{\xi_3 - c^2} = 1. \quad (2.130)$$

Мұндағы:  $a$ ,  $b$ , және  $c$  тұрақтылары – эллипсоидтар мен гиперболоидтарды сипаттайтын параметрлер, олар келесі теңсіздіктерді қанағаттандырады:

$$a^2 > \xi_3 > b^2 > \xi_2 > c^2 > \xi_1. \quad (2.131)$$

(2.128)–(2.130) теңдеулеріндегі кейбір мүшелердің алдындағы теріс таңбалар осы теңсіздіктердің салдары болып табылады.

Эллипсоидтық және декарттық координаталарының арасындағы түрлендірулер келесі формулалармен анықталады

$$\left. \begin{aligned} x^2 &= \frac{(a^2 - \xi_1)(a^2 - \xi_2)(a^2 - \xi_3)}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}, \\ y^2 &= \frac{(b^2 - \xi_1)(b^2 - \xi_2)(\xi_3 - b^2)}{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)}, \\ z^2 &= \frac{(c^2 - \xi_1)(\xi_2 - c^2)(\xi_3 - c^2)}{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)}. \end{aligned} \right\} \quad (2.132)$$

Біршама есептеулерден соң Ламе коэффициенттерін табамыз:

$$\left. \begin{aligned} h_1 = h_{\xi_1} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{(\xi_2 - \xi_1)(\xi_3 - \xi_1)}{(a^2 - \xi_1)(b^2 - \xi_1)(c^2 - \xi_1)} \right]^{\frac{1}{2}}, \\ h_2 = h_{\xi_2} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{(\xi_3 - \xi_2)(\xi_2 - \xi_1)}{(a^2 - \xi_2)(b^2 - \xi_2)(c^2 - \xi_2)} \right]^{\frac{1}{2}}, \\ h_3 = h_{\xi_3} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{(\xi_3 - \xi_1)(\xi_3 - \xi_2)}{(a^2 - \xi_3)(b^2 - \xi_3)(c^2 - \xi_3)} \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \right\} \quad (2.133)$$

Координаталық беттер тәрізді осы қатынастардың симметриясы әрбір коэффициенттер таңбасының оң болуы талабымен бұзылған.

(2.132) түрлендіру теңдеулерінен көріп тұрғанымыздай, кез келген  $P(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  нүктесіне декарттық координаталар жүйесінде мүмкін болатын сегіз нүктелері  $(\pm x; \pm y; \pm z)$  сәйкес келеді. Осы сегіз мәнділік  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  айнымалыларының таңбаларына қойылатын қосымша шарттардың нәтижесінде жойылады.

Қарастырып отырған координаталар жүйесі математикалық физиканың әртүрлі есептерін шешуде қолдануға келгенімен, оның жалпы сипаттамасының тым күрделілігінің нәтижесінде осьтері айналмалы симметрияға ие болатын эллипсоидтермен шектелеміз.

## 2.16. Конустық координаталары $\xi_1, \xi_2, \xi_3$

Координаталардың осы жүйесі қос фокусты эллипсоидтық координаталар жүйесінің арасындағы ең ерекшелерінің бірі болып табылады. Сондықтан да ең сирек қарастырылған түрі.

Координаттық беттер:

1) орталықтары координаталар басында және радиустары төмендегідей болатын сфералар:

$$\xi_1 = \text{const}: x^2 + y^2 + z^2 = \xi_1^2, \quad (2.134)$$

2) эллипстік конустар (конустардың шыңдары координаталар басымен, ал осьтері –  $z$  осімен сәйкес келеді,  $\xi_2 = \text{const}$ ):

$$\frac{x^2}{\xi_1^2} + \frac{y^2}{\xi_1^2 - b^2} = \frac{z^2}{c^2 - \xi_2^2}; \quad (2.135)$$

3) эллипстік конустар (конустардың шыңдары координаталар басымен, ал осьтері –  $x$  осімен сәйкес келеді,  $\xi_3 = \text{const}$ ):

$$\frac{x^2}{\xi_3^2} = \frac{y^2}{b^2 - \xi_3^2} + \frac{z^2}{c^2 - \xi_3^2}; \quad (2.136)$$

2.15-бөлімде көрсетілгендей  $b$  және  $c$  параметрлері келесі шарттарды қанағаттандырады:

$$c^2 > \xi_2^2 > b^2 > \xi_3^2. \quad (2.137)$$

(2.134)–(2.136) теңдеулерін  $x^2$ ,  $y^2$  және  $z^2$  айнымалыларына қатысты шешу арқылы келесі түрлендіру формулаларын табамыз:

$$\left. \begin{aligned} x^2 &= \left( \frac{\xi_1 \xi_2 \xi_3}{bc} \right)^2; \\ y^2 &= \frac{\xi_1^2 (\xi_2^2 - b^2)(b^2 - \xi_3^2)}{b^2 (c^2 - b^2)}; \\ z^2 &= \frac{\xi_1^2 (c^2 - \xi_2^2)(c^2 - \xi_3^2)}{c^2 (c^2 - b^2)}. \end{aligned} \right\} \quad (2.138)$$

Табылған формулалар және (2.6) теңдеуінің көмегімен Ламе коэффициенттерін есептей аламыз:

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= h_{\xi_1} = 1, \\ h_2 &= h_{\xi_2} = \left( \frac{\xi_1^2 (\xi_2^2 - \xi_3^2)}{(\xi_2^2 - b^2)(c^2 - \xi_2^2)} \right)^{1/2}, \\ h_3 &= h_{\xi_3} = \left( \frac{\xi_1^2 (\xi_2^2 - \xi_3^2)}{(b^2 - \xi_3^2)(c^2 - \xi_3^2)} \right)^{1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.139)$$

Осы тақ сфералық координаталар жүйесінде қозғалыс мөлшері моментінің өзіндік функцияларын ассимметриялық ротор есебінде сипаттау мүмкін болады.

## 2.17. Қос фокусты параболоидтық координаталары $\xi_1, \xi_2, \xi_3$

Биполярлық, тороидтық және бисфералық координаталар жүйесінен өзгелерін қос фокусты эллипсоидтық жүйеден алуға болады (2.15-бөлім). Осы сөтінеген жүйелер қатарының ең соңында қос фокусты параболоидтық координаталар жүйесі қарастырылады. Оның координаталық беттері:

1) кимасы эллипс болатын қос фокусты параболоидтар (осьтері  $z$  - тің теріс бағытына сәйкес,  $\xi_1 = const$  ):

$$\frac{x^2}{a^2 - \xi_1} + \frac{y^2}{b^2 - \xi_1} + 2z + \xi_1 = 0' \quad (2.140)$$

2) гиперболалық параболоидтар,  $\xi_2 = const$  :

$$\frac{x^2}{a^2 - \xi_2} + \frac{y^2}{\xi_2 - b^2} + 2z + \xi_2 = 0; \quad (2.141)$$

3) қимасы эллипс болатын қос фокусты параболоидтар (осьтері  $z$ -тің оң бағытына сәйкес,  $\xi_3 = const$ ):

$$\frac{x^2}{\xi_3 - a^2} + \frac{y^2}{\xi_3 - b^2} - 2z - \xi_3 = 0. \quad (2.142)$$

2.15 және 2.16 бөлімдері тәрізді  $a^2$ ,  $b^2$  және тәуелсіз айнымалылары келесі теңсіздіктерге бағынады:

$$\xi_3 > a^2 > \xi_2 > b^2 > \xi_1. \quad (2.143)$$

Түрлендіру теңдеулерін жазалық:

$$\left. \begin{aligned} x^2 &= \frac{(a^2 - \xi_1)(a^2 - \xi_2)(\xi_3 - a^2)}{(a^2 - b^2)}; \\ y^2 &= \frac{(b^2 - \xi_1)(\xi_2 - b^2)(\xi_3 - b^2)}{(a^2 - b^2)}; \\ z^2 &= \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - \xi_1 - \xi_2 - \xi_3). \end{aligned} \right\} \quad (2.144)$$

Бұдан Ламе коэффициенттерін табамыз:

$$\left. \begin{aligned} h_1 = h_{\xi_1} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{(\xi_2 - \xi_1)(\xi_3 - \xi_1)}{(a^2 - \xi_1)(b^2 - \xi_1)} \right]^{1/2}; \\ h_2 = h_{\xi_2} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{(\xi_3 - \xi_2)(\xi_2 - \xi_1)}{(a^2 - \xi_2)(\xi_2 - b^2)} \right]^{1/2}; \\ h_3 = h_{\xi_3} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{(\xi_3 - \xi_1)(\xi_3 - \xi_2)}{(\xi_3 - a^2)(\xi_3 - b^2)} \right]^{1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.145)$$

Бұл жүйе электромагниттік өріс теориясында пайдаланылады.

## II тараудың бақылау сұрақтары

1. Қисық сызықты координаталар және декарт координаталар жүйелерінің арасындағы байланыс қалай анықталады? Ламе коэффициенттерінің анықтамасын жазыңыздар.

2. Қисық сызықты координаталардағы дифференциалдық векторлық операторлардың түрлері қалайша өзгереді?

3. Сфералық координаталар жүйесіндегі беттердің негізгі жиынтықтарын және декарт координаталар жүйесімен байланысын көрсетіңіздер.

4. Дифференциалдық операторлардың цилиндрлік координаталар жүйесіндегі түрлерін жазыңыздар.

5. Дербес туындылар дифференциалдық тендеулерінің шешу тәсілдерін атаңыздар. Айнымалыларды ажырату тәсілінде *ажырату тұрақтысын* қандай мақсатта енгізеді?

6. Эллипстік цилиндрлік және декарт координаталары арасындағы байланысын, Ламе коэффициенттерін жазыңыздар.

7. Параболалық цилиндрлер координаталарын және олардың аксонометриясын сызып көрсетіңіздер.

8. Созылған және сығылған сфероидтың координаталарын жазыңыздар және олардың ерекшеліктерін көрсетіңіздер.

## 3 - т а р а у

### ТЕНЗОРЛЫҚ ТАЛДАУ

#### 3.1. Кіріспе. Негізгі түсініктер

Тензорлар физиканың көптеген облыстарында үлкен рөл атқарады. Мысал ретінде жалпы салыстырмалық және электромагниттік теорияларында, қатты дененің анизотропты қасиеттерін зерттеуде. Енді Ом заңының қарапайым түрін жазайық:

$$\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E} \quad (3.1)$$

мұндағы,  $\vec{j}$  – тоқ тығыздығы;  $\vec{E}$  – электр өрісінің кернеулігі;  $\sigma$  – электр өткізгіштік.

Егер зерттелетін орта изотропты болса, онда  $\sigma$  электр өткізгіштік шамасы скалярлық шама болады. Яғни,  $x$ - құрамдас бөлігі үшін алдыңғы теңдеу төмендегідей жазылады:

$$j_1 = \sigma \cdot E_1 \quad (3.2)$$

Алайда, орта көптеген кристалдар тәрізді анизотропты, яғни  $x$  - бағытындағы токтың тығыздығы  $y$  және  $z$  бағыттарындағы электр өрісінің кернеуліктеріне тәуелді болуы да мүмкін. Осы тәуелділікті сызықты деп жорамалдасақ, онда (3.2) теңдеуін келесі түрде қайта жазуға болады:

$$j_1 = \sigma_{11}E_1 + \sigma_{12}E_2 + \sigma_{13}E_3 \quad (3.3)$$

немесе жалпы түрде

$$j_i = \sum_k \sigma_{ik} E_k \quad (3.4)$$

Демек, скалярлық электр өткізгіштігі тоғыз элементтің жиынтығынан құралады:

$$\sigma \rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

Координаталар жүйесінің бұрылысында өзгермейтін шамаларды (яғни, инвариантты шамалар) скалярлық, ал құрамдас бөліктерінің түрлендірілуі радиус-вектор құрамдас бөліктерінің түрлендіру заңына бағынатын болса, ондай шамаларды векторлық деп атадық:

$$A'_i = \sum_j a_{ij} A_j \quad (3.6)$$

Мұндағы  $a_{ij}$  –  $x'_i$  және  $x_j$  векторларының арасындағы бұрыштардың косинустары. Алайда мұндай анықтаманың өзі де сұрақтар туғызуы мүмкін, яғни бірмәнді емес. Сондықтан төмендегі екі жағдайды қарастыралық.

Біріншіден, радиус-вектор  $\vec{r}$  үшін

$$x'_i = \sum_j \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} \cdot x_j \quad (3.7)$$

болғандықтан, туындыларды төмендегідей анықтаймыз:

$$a_{ij} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} \quad (3.8)$$

Онда (3.6) және (3.7) теңдеулері бірдей болады. Кез келген  $A_j$  шамаларының жиынтығы

$$A'_i = \sum_j \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} A_j \quad (3.9)$$

заңымен түрлендірілсе, онда мұндай векторларды *контравариантты* деп атайды. Контравариантты вектордың ең маңызды мысалдарының бірі – координаталар дифференциалын құрайтын  $dx^i$  векторы.

Шындығында үш өлшемді кеңістікте күрделі функцияның дифференциалын құрау ережесіне сәйкес келесі теңдікті аламыз:

$$dx'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial x'^i}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial x'^i}{\partial x^3} dx^3$$

Осы теңдіктен  $dx^i$ -дің (3.9) түрлендіру өрнегіне бағынатынына көзіміз жетеді. Сол себепті олардың контраварианттық вектордың құраушылары болып табылатыны анық.

Жоғарыда келтірілген теңдік контраварианттық вектор анықтамасының ең жалпы түрі болып табылады. Ал біз үшін оның физикалық мәнін анықтаудың маңызы өте зор. Сондықтан келесі мысалды қарастыралық.

Кез келген нүктенің үш өлшемді евклидтік кеңістіктегі  $x_1, x_2, x_3$  координаттары ретінде – тікбұрышты, ал  $x_1, x_2, x_3$  координаталары ретінде – сфералық  $r, \theta, \varphi$  координаталарын алайық. Ендеше декарттық координаталар жүйесінде жылдамдықтың құрамдас бөліктері төмендегідей болатыны анық:

$$\frac{dx^1}{dt}, \frac{dx^2}{dt}, \frac{dx^3}{dt}.$$

Жоғарыда айтылғанға сәйкес сфералық  $r, \theta, \varphi$  координаталар жүйесіндегі жылдамдық векторының құрамдас бөліктерін жазайық:

$$\frac{dr}{dt}, \frac{d\theta}{dt}, \frac{d\varphi}{dt}.$$

Алайда соңғы үш шаманың әрқайсысы әртүрлі сипатқа ие. Себебі  $dr/dt$  сызықтық жылдамдық болса, ал қалған екі құрамдас бөліктері, яғни  $d\theta/dt$  және  $d\varphi/dt$  бұрыштық жылдамдықтарды береді. Сонымен, контраварианттық вектордың  $d\theta/dt$  және  $d\varphi/dt$  құрамдас бөліктері әдеттегі қарапайым мағынадағы жылдамдық векторының кескіндері бола алмайды.

Екіншіден, скалярдың градиентін қарастырайық:

$$\bar{\nabla}\varphi = \bar{i} \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \bar{j} \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \bar{k} \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} \quad (3.10)$$

Осы вектордың түрленуі келесі заңға бағынады:

$$\frac{\partial\varphi'}{\partial x'_i} = \sum_j \frac{\partial\varphi'}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} = \sum_j \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} \quad (3.11)$$

Мұндағы:  $\varphi = \varphi(x, y, z) = \varphi'(x', y', z') = \varphi'$  – скаляр. Соңғы (3.11) түрлендіру заңы мен (3.9) түрлендіру заңының айырмашылығы бар.

Сонымен, (3.11) теңдеуі ковариантты векторды анықтайды.

Декарт координаталар жүйесінде

$$\frac{\partial x_j}{\partial x'_i} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} = a_{ij}, \quad (3.12)$$

яғни ковариантты және контравариантты түрлендіру формулалары эквивалентті. Ал өзге координаталар жүйелерінің ешқайсысында (3.12) қатынасы орындалмайды. Бұдан әрі контравариантты векторларының құрамдас бөліктерін  $A^i$  (индекстері жоғарыда), ал ковариантты векторларының құрамдас бөліктерін  $A_i$  (индекстері төменде) етіп белгілейміз.

Скалярды – нөлінші рангылы, ал векторды – бірінші рангылы тензор деп қайта анықтайық.

Енді контравариантты, аралас және ковариантты екінші реттік тензорларды келесі қатынастармен өрнектейміз:

$$\left. \begin{aligned} A'^{ij} &= \sum_{kl} \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x'_j}{\partial x_l} A^{kl} \\ B'^i_j &= \sum_{kl} \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_l}{\partial x'_j} B^k_l \\ C'_{ij} &= \sum_{kl} \frac{\partial x_k}{\partial x'_i} \cdot \frac{\partial x_l}{\partial x'_j} C_{kl} \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

Теңдіктерден көріп тұрғанымыздай,  $A^{kl}$  екі индексі бойынша – контравариантты; ал  $B^k_l$  тензоры  $k$  бойынша – контравариантты,  $l$  бойынша – ковариантты;  $C_{ij}$  – екі индексі бойынша да ковариантты. Декарттық координаталар жүйесінде екінші рангылы тензорлардың – контравариантты, аралас және ковариантты, яғни үш түрі де бірдей болады.

Құрамдас бөліктері  $A^{kl}$  болатын екінші рангылы  $A$  тензорының құрамдас бөліктерін квадраттық кесте түрінде жазған ыңғайлы (үш өлшемді кеңістік үшін  $3 \times 3$ ):

$$A = \begin{pmatrix} A^{11} & A^{12} & A^{13} \\ A^{21} & A^{22} & A^{23} \\ A^{31} & A^{32} & A^{33} \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

Бірақ кез келген сандардың не функциялардың квадраттық кестелері тензорды құрай бермейді. Тензор құрамдас бөліктеріне қойылатын ерекше шарт бар. Олар (3.13) заңы бойынша *түрленуі* қажет.

Мысалы, екі өлшемді тензорды қарастыралық:

$$T = \begin{pmatrix} -xy & -y^2 \\ x^2 & xy \end{pmatrix}$$

Бұрылған координаталар жүйесінде  $T^{11'}$  құрамдас бөлігі  $-x'y'$ -қа тең болуы керек. Енді  $T^{11'}$  құрамдас бөлігі (3.13) заңы бойынша түрлендіріле ме? Тексеріп көрейік:

$$T^{11'} = -x'y' = \sum_{kl} \frac{\partial x'_1}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x'_1}{\partial x_l} T^{kl} = \sum_{kl} a_{1k} a_{1l} T^{kl},$$

$a_{1k}$  және  $T^{kl}$  шамаларының айқын түрін орнына қойсақ,

$$\begin{aligned} -(x \cos \theta + y \sin \theta)(-x \sin \theta + y \cos \theta) &= \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} = \\ &= \cos^2 \theta T^{11} + \cos \theta \sin \theta T^{12} + \sin \theta \cos \theta T^{21} + \sin^2 \theta T^{22} = \\ &= -xy \cdot \cos^2 \theta - y^2 \cos \theta \sin \theta + x^2 \sin \theta \cos \theta + xy \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

Осылайша (3.13) теңдеуі  $T^{11'}$  және басқа құрамдас бөліктері үшін де орындалатынына көз жеткіземіз. Демек,  $T$  - 2<sup>ші</sup> рангылы тензор.

Тензорларды қосу амалын векторларды қосу амалына ұқсас етіп анықталық:

$$A+B=C. \quad (3.15)$$

Яғни, соңғы теңдік  $A^j+B^j=C^j$ . болғанда ғана орынды. Ал ол үшін  $A$  және  $B$  тензорларының рангылары да және өлшемдіктері де бірдей кеңістікте берілуі қажет.

(3.13) теңдеуін қысқаша жазуға да болады. Егер индекстері бірдей және біреуі жоғарғы, екіншісі төменгі болса, онда мұндай индекстер бойынша қосынды бар деп есептейміз. Сондықтан (3.13) теңдеуінің екіншісін келесідей түрде жазамыз:

$$B_j^i = \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} B_l^k, \quad (3.16)$$

яғни,  $k$  және  $l$  бойынша қосындысы болады. Бұл **қосындылау ережесін** анықтайды.

Осы ережені түсіндіру үшін Кронекер таңбасының аралас 2<sup>ші</sup> рангылы тензор екенін дәлелдейік. Біріншіден, (3.13) теңдеуі бойынша түрлене ме, яғни тензор болып табыла ма?

Ендеше қосындылау ережесіне сәйкес:

$$\delta_l^k \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_l}{\partial x'_j} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial x'_j}, \quad (3.17)$$

ал

$$\frac{\partial x'_i}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial x'_j} = \frac{\partial x'_i}{\partial x'_j}. \quad (3.18)$$

Алайда  $x'_j$  және  $x'_i$  тәуелсіз координаталар болғандықтан:

$$\frac{\partial x'_i}{\partial x'_j} = \delta_j^i. \quad (3.19)$$

Сондықтан

$$\delta_l^k \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_l}{\partial x'_j} = \delta_j^i,$$

Яғни,  $\delta_l^k$  – екінші рангылы аралас тензор болып табылады. Кронекер таңбасының тағы бір маңызды қасиеті: оның құрамдас бөліктері барлық айналатын координаталар жүйесінде бірдей, яғни изотропты.

Жалпы жағдайда  $A^{mn}$  құрамдас бөліктері  $A^{nm}$  құрамдас бөліктеріне тәуелсіз. Сондықтан тензор индекстерінің орналасу тәртібі маңызды.

Бірақ кейде

$$A^{mn} = A^{nm} \quad (3.20)$$

тензорлары кездеседі. Бұл тензорларды *симметриялы* деп атайды. Ал, егер

$$A^{mn} = -A^{nm} \quad (3.21)$$

болса, онда ол *антисимметриялы* тензорлар деп аталады. Демек, кез келген екінші рангылы тензорларды симметриялы және антисимметриялы тензорларға бөліп жазуға болады.

$$A^{mn} = \frac{1}{2}(A^{mn} + A^{nm}) + \frac{1}{2}(A^{mn} - A^{nm}) \quad (3.22)$$

симметриялы  
тензорлар

антисимметриялы  
тензорлар

## Жаттығулар

1.  $A = \begin{pmatrix} y^2 & -xy \\ -xy & x^2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -xy & x^2 \\ -y^2 & xy \end{pmatrix}$  – тензорлар,

Ал  $C = \begin{pmatrix} y^2 & xy \\ xy & x^2 \end{pmatrix}$ ,  $D = \begin{pmatrix} xy & y^2 \\ x^2 & -xy \end{pmatrix}$  – тензор болмайтынын

дәлелденіздер.

2. Жалпы салыстырмалық теориясында төрт өлшемді төртінші рангылы қисықтық тензоры  $R_{iklm}$  (Риман-Кристофель тензоры) келесі симметрия шартын қанағаттандырады:  $R_{iklm} = -R_{ikml} = -R_{kilm}$ . Олай болса:

а)  $R_{iklm} = -R_{ikml} = -R_{kilm}$  болса, онда тәуелсіз құрамдас бөліктерінің саны 256-дан 36-ға дейін кемитіндігін;

б)  $R_{iklm} = R_{lmik}$  болса, онда тәуелсіз компоненттердің қосымша 21-ге дейін кемитіндігін;

в)  $R_{iklm} + R_{ilmk} + R_{imkl} = 0$  болса, онда тәуелсіз құрамдас бөліктерінің саны 20-ға тең болатынын көрсетіңіздер.

*Ескерту:* Соңғы қатынаста егер барлық индекстері әр түрлі болса ғана қосымша деп атауға болады.

3.  $\begin{pmatrix} -xy & x^2 \\ -y^2 & xy \end{pmatrix}$  тензорын симметриялы және антисимметриялы бөліктеріне бөліп жазыңыздар.

4. Егер кез келген рангылы тензордың құрамдас бөліктері нөлге тең болса, онда осы тензордың құрамдас бөліктері басқа координаталар жүйесінде де нөлге тең болатынын дәлелденіздер.

5. Қандай да берілген координаттар жүйесінде  $A$  тензорының құрамдас бөліктері  $B$  тензорының құрамдас бөліктеріне тең болсын, яғни  $A_{ji} = B_{ji}$ .

Онда барлық координаталар жүйесінде  $A_{ij} = B_{ij}$  екенін көрсетіңіздер.

### 3.2. Тікелей көбейтінді

Векторларды зерттеу кезінде, олардың скалярлық көбейтіндісін (1.3-бөлім) - векторлардың аттас құрамдас бөліктері көбейтінділерінің қосындысы деп қарастырдық:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \{A_i B_i\} \quad (3.23)$$

Осы өрнектің жалпы түрін тензорлық талдауда *ықшамдалу* амалы деп атайды. Екі бірдей индекстері бойынша (біреуі – ковариантты, екіншісі – контравариантты) бір-біріне теңестіріліп, сонан соң (қосындылау ережесіне сәйкес) қайталанатын индексі бойынша қосу амалы орындалады.

Мысалы:

$$B_j^{i'} \rightarrow B_i^{i'} = \frac{\partial x_{i'}}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_l}{\partial x_{i'}} B_l^k = \frac{\partial x_l}{\partial x_k} B_l^k \quad (3.24)$$

Егер (3.18) және (3.19) теңдеулерін ескеретін болсақ, онда:

$$B_i^{i'} = \frac{\partial x_l}{\partial x_k} B_l^k = \delta_k^{i'} B_l^k = B_k^k \quad (3.25)$$

Сонымен, аралас екінші рангылы тензорына *ықшамдалу* амалының нәтижесінде инвариантты, яғни скалярлық шама аламыз. Осы айтылған 1.3-бөліміндегі скалярлық көбейтінді 1.7-бөліміндегі вектордың дивергенциясымен нақты сәйкес келеді. *Ықшамдалу* амалы тензордың рангын екіге кемітеді.

Векторлардың (яғни бірінші рангылы тензордың) ковариантты және контравариантты құрамдас бөліктерін бір-біріне көбейту арқылы,  $a_i b^j$  мүшесін аламыз. (3.13) теңдеуіне сәйкес, көбейтіндінің нәтижесінде екінші рангылы тензор шығады:

$$a_i b^{j'} = \frac{\partial x_k}{\partial x_{i'}} a_k \frac{\partial x_{j'}}{\partial x_l} b^l = \frac{\partial x_k}{\partial x_{i'}} \cdot \frac{\partial x_{j'}}{\partial x_l} a_k b^l. \quad (3.26)$$

*Ықшамдалу* амалын қолданып, қарапайым скалярлық көбейтіндіні қарастырайық:

$$a_i b^{i'} = \frac{\partial x_k}{\partial x_{i'}} \cdot \frac{\partial x_{i'}}{\partial x_l} a_k b^l = \frac{\partial x_k}{\partial x_l} a_k b^l = \delta_l^k a_k b^l = a_k b^k. \quad (3.27)$$

Бұл амал *тікелей көбейтінді* деп аталады. Екі вектордың тікелей көбейтілуі нәтижесінен екінші рангылы тензор аламыз.

Анық осы мағынада  $\vec{\nabla} \vec{E}$  шамасын векторлық талдау аясында анықтай алмадық.

Екі тензордың тікелей көбейтіндісінен рангысы екі тензордың рангыларының қосындысына тең болатын жаңа тензор пайда болады, яғни

$$A_j^i B^{kl} = C_j^{ikl}, \quad (3.28)$$

мұндағы  $C_j^{ikl}$  – төртінші рангылы тензор.

Осыған дейін ковариантты және контравариантты түрлендірулердің айырмашылығын сақтап келдік. Себебі, евклидік емес кеңістіктерде оларды ескеру қажет, әрі жалпы салыстырмалық теориясында бұл маңызды қызметін атқарады. Бұдан былай ковариантты және контравариантты тензорлардың айырмашылықтарын ескермейміз, сондықтан төменгі индекстер жүйесін қабылдаймыз. Одан әрі қосындылау және ықшамдалу амалдарын пайдаланамыз.

*Қосындылау амалы (ережесі).* Теңдіктің бір бөлігінде бірдей екі индекс (сан емес, әріппен жазылуы) кездессе, онда осы индекстер бойынша қосындылау қажет.

*Ықшамдалу амалы.* Екі әр түрлі индекстерді бір-біріне теңестіріп, содан соң қосындылау ережесін пайдаланамыз.

### Жаттығулар

1.  $n^{\text{ші}}$  рангылы  $T_{\dots i}$  тензор берілген.  $\partial T_{\dots i} / \partial x_j - (n+1)^{\text{ші}}$  рангылы тензор екенін (декарт координаталарында) дәлелдеңіздер.

2.  $n^{\text{ші}}$  рангылы  $T_{ijk\dots}$  тензор берілген.  $\sum \partial T_{ijk\dots} / \partial x_j - (n-1)^{\text{ші}}$  рангылы тензор екенін (декарт координаталарында) дәлелдеңіздер.

3.  $L$  – декарттық емес  $q_i$  координаталардың, олардың уақыт бойынша алынған бірінші ретті туындысы  $\dot{q}_i$  және уақыттың  $t$  айқын түрдегі скалярлық функциясы болсын, яғни

$$L'(q'_i, \dot{q}'_i, t) = L(q_i, \dot{q}_i, t). \text{ Онда } \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} - \text{вектордың}$$

құрамдас бөліктері екенін көрсетіңіздер.

*Ескерту:*  $q_j$  және  $\dot{q}_j$  тәуелсіз айнымалылар.

Бірақ  $\partial \dot{q}_j / \partial q_j \neq 0$ .

### 3.3. Бөлінді ережесі

Егер  $A_i$  және  $B_j$  – векторлар берілген болса, онда  $A_i B_j$  –  $2^{\text{ші}}$  рангылы тензор болады. Енді кері тәуелділіктерді қарастырайық.

$$K'_i A_i = B, \quad (3.29a)$$

$$K'_{ij} A_j = B_i, \quad (3.29б)$$

$$K'_{ij} A_{jk} = B_{ik}, \quad (3.29в)$$

$$K'_{ijkl} A_{ij} = B_{kl}, \quad (3.29г)$$

$$K'_{ij} A_k = B_{ijk}. \quad (3.29д)$$

Мұндағы  $A$  және  $B$  – белгілі тензорлар болсын, ал олардың рангылары индекстер санына тең, оған қоса  $A$  – кез келген тензор. Барлық жағдайда  $K$  – белгісіз шама. Осы шаманың түрленуі кезіндегі оның қасиеттерін зерттелік.

Бөлінді ережесіне сәйкес: егер қарастырып отырған теңдік кез келген бұрылған декарт координаталар жүйесінде орынды болса, онда  $K$  – көрсетілген рангылы тензор. Мысал ретінде (3.29 б) теңдеуін қарастырайық.  $B$ -ның векторлық түрлендіру қасиетін ескеріп, бұрылмайтын координаталар жүйесінде жазатын болсақ, онда:

$$K'_{ij} A'_j = B'_i = a_{ik} B_k \quad (3.30)$$

(3.29 б) теңдеуі кез келген айналатын декарттық координаталар жүйесінде орындалады

$$a_{ik} B_k = a_{ik} (K'_{kl} A_l). \quad (3.31)$$

Соңғы теңдеудегі  $A$ -ны айналатын координаталар жүйесінде қайта жазайық (бірақ енді кері түрлендірудегі бағыттаушы косинустар  $a_{jl}$  индекстеріне мұқият болу керек), яғни

$$A_l = \sum_j \frac{\partial x_l}{\partial x'_j} A'_j = \sum_j a_{jl} A'_j,$$

$$K'_{ij} A'_j = a_{ik} K'_{kl} a_{jl} A'_j, \quad (3.32)$$

$$\Rightarrow (K'_{ij} - a_{ik} a_{jl} K'_{kl}) A'_j = 0. \quad (3.33)$$

Соңғы өрнек кез келген  $i$  үшін және кез келген айналатын жүйеде орындалады.  $A'_j$  – кез келген болғандықтан

$$K'_{ij} = a_{ik} a_{jl} K_{kl} \quad (3.34)$$

екінші рангылы тензорлардың анықтамасына сәйкес келеді.

(3.29) теңдеулерінің өзгелері де осыған ұқсас. Қорытындылай келе, бөлінді ережесін дұрыс пайдалану керектігін ескертеміз. Егер  $B=0$  болса, онда бұл ереже орындалмауы мүмкін. Бұл жағдай үшін оның түрлендіру қасиеттері анықталмаған.

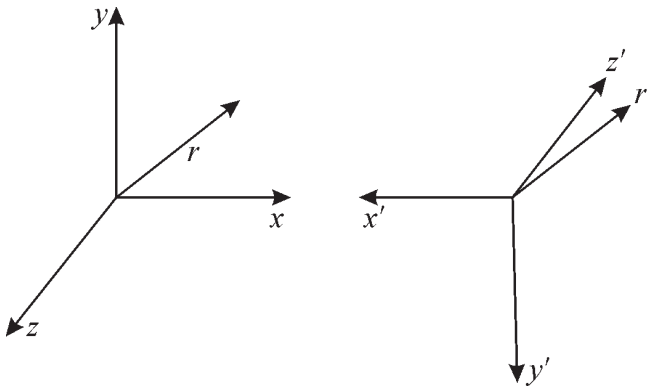
### 3.4. Псевдотензорлар

Осыған дейін координаталар жүйесінің айналуын және бұрылуын қарастырдық. Енді *шағылу* немесе *инверсия* амалын қарастырамыз.

Түрлендіру коэффициенттері берілсін  $a_{ij} = -\delta_{ij}$ , онда

$$x_i = -x'_i \quad (3.35)$$

Яғни, инверсия амалы оң координаталар жүйесін сол координаталар жүйесіне ауыстырады. Оның радиус-векторы келесі түрде жазылады:  $\vec{r} = (x'_1, x'_2, x'_3) = (-x_1, -x_2, -x_3)$ . Осы жаңа вектордың құрамдас бөліктері жаңадан түрленген осьтерде теріс таңбалы болады. Бір моментте осьтердің де, вектор құрамдас бөліктерінің де таңбаларын өзгерткенде векторлардың кеңістіктегі бағыты өзгермейді (3.1-сурет).



3.1-сурет. Декарттық координаталардың инверсиясы.

Полярлық вектор

Егер координаталар жүйесінің инверсиясы немесе шағылуы осындай сипаттамаға ие болса (мысалы, радиус-вектор және өзге де векторлар), онда мұндай векторларды *полярлық* деп атайды.

Ал енді екі полярлық векторлардың векторлық көбейтіндісінен пайда болған жаңа вектордың қасиеті мүлде басқаша болады.  $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$  болсын, мұндағы  $\vec{A}$  және  $\vec{B}$  векторлары – полярлық векторлар. Онда  $\vec{C}$  векторының құрамдас бөліктері (1.33) теңдеуі бойынша, былай жазылады:

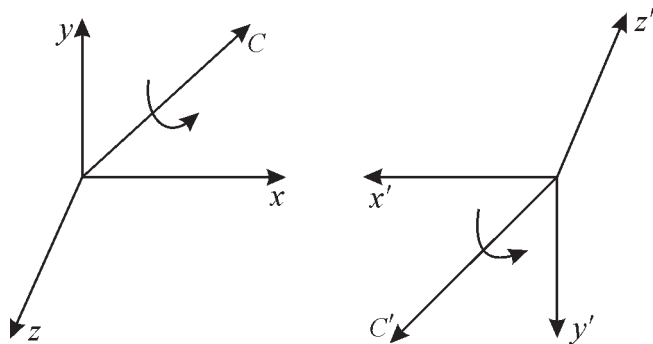
$$\vec{C} = \vec{A}_2 \vec{B}_3 - \vec{A}_3 \vec{B}_2 \quad (3.36)$$

$\vec{C}$  векторы шағылған кезде полярлық вектор сияқты өзгермейді. Мұндай векторларды *псевдовекторлар* немесе *аксиалдық векторлар* деп атайды (3.2-сурет).

Осындай псевдовекторлардың мысалы ретінде мына шамаларды айтуға болады: бұрыштық жылдамдық  $\vec{\omega} = \vec{r} \times \vec{v}$ , қозғалыс мөлшерінің моменті  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P}$ , айналу моменті

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{f} \quad \text{және} \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{V} \times \vec{E} \quad \text{болатын} \quad \vec{B} \quad \text{магнит өрісі.}$$

Сондықтан  $\vec{C}$  векторының бағыты оң координаталар жүйесінде оң бұранда ережесімен анықталады. Ал теріс жүйеде, яғни инверсияланған жүйеде сол бұранда ережесіне бағынады.



3.2-сурет. Декарттық координаталардың инверсиясы.

Аксиалдық вектор

Жалпы псевдовекторлар және псевдотензорлар келесі өрнектермен түрленеді:

$$C'_i = |a| a_{ij} C_j, \quad A'_{ij} = |a| a_{ik} a_{jl} A_{kl}, \quad (3.37)$$

мұндағы  $|a| - a_{mm}$  коэффициенттерінен құрылған анықтауыш.

Инверсия операциясы үшін анықтауыштың түрі:

$$|a| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \quad (3.38)$$

Егер инверсия амалын тек  $x$  осі бойынша анықтайтын болсақ, онда:

$$|a| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad (3.39)$$

Кез келген таза айналыс үшін анықтауыш әрқашан  $|a| = +1$  –ге тең болады. (3.37) теңдеуіне сәйкес түрлендірілетін шамалар *тензорлық тығыздықтар* деп аталады.

$S = \vec{A} \times \vec{B} \cdot \vec{C}$  аралас көбейтіндінің нәтижесінде скалярлық шама (айналу кезінде) пайда болады. Бірақ инверсия кезінде (3.35) теңдеуіне сәйкес  $S \rightarrow -S$  болғандықтан,  $S$ -псевдоскалярлық шама болып табылады. Аралас көбейтіндінің осы қасиетін оның геометриялық түсініктемесі – параллелепипед көлемінің «мысы басады». Шынында, егер үш параметрлерін, яғни ұзындығы, ені және биіктігінің таңбаларын теріс өзгертсе, онда бұл шамалардың көбейтіндісі де теріс шама болады. Сол сияқты электр заряды да псевдоскалярлық шама болып табылады.

Леви-Чивита үшөлшемді  $\epsilon_{ijk}$  таңбасын енгізейік:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1, \\ \epsilon_{132} = \epsilon_{213} = \epsilon_{321} = -1, \end{aligned} \right\} \quad (3.40)$$

қалған құрамдас бөліктері  $\epsilon_{ijk} = 0$ .

Үшінші рангылы  $\delta_{ijk}$  псевдотензоры белгілі бір координаталар жүйесінде  $\epsilon_{ijk}$  -ға тең болсын. Демек, анықтама бойынша:

$$\delta'_{ijk} = |a| a_{ip} a_{jq} a_{kr} \epsilon_{pqr}. \quad (3.41)$$

$$\delta'_{123} = |a| \cdot a_{1p} a_{2q} a_{3r} \varepsilon_{pqr} = |a| \cdot \begin{pmatrix} a_{11} a_{22} a_{33} \cdot 1 + a_{12} a_{23} a_{31} \cdot 1 + \\ + a_{13} a_{21} a_{32} \cdot 1 - a_{11} a_{23} a_{32} - \\ - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{13} a_{22} a_{31} \end{pmatrix} =$$

$$= |a|^2 = 1. \quad (3.42)$$

$$\Rightarrow a_{1p} a_{2q} a_{3r} \varepsilon_{pqr} = |a|.$$

Басқа құрамдас бөліктері үшін де осылай табамыз:

$$\delta'_{ijk} = \varepsilon_{ijk} \quad (3.43)$$

және бұл кез келген айналатын координаталар жүйесінде құрамдас бөліктері бірдей болатын изотропты псевдотензор.

Кез келген *антисимметриялы* екінші рангылы  $C_{ij}$  тензорына (үш өлшемді кеңістікте) *дуальді*  $C_i$  псевдовекторын сәйкес қоюға болады. Оны төмендегідей анықтаймыз:

$$C_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \cdot C_{jk}, \quad (3.44)$$

$$C_{jk} = \begin{pmatrix} 0 & C_{12} & -C_{31} \\ -C_{12} & 0 & C_{23} \\ C_{31} & -C_{23} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.45)$$

5<sup>ші</sup> рангылы  $\varepsilon_{ijk} C_{jk}$  тензорын екі ретті ықшамдаған соң,  $C_i$ -дің шамалары координаталар бұрылысында вектор сияқты түрленуі қажет. Алайда  $\varepsilon_{ijk}$  псевдотензорының қатысы болғандықтан,  $C_i$  псевдовектор болып табылады.  $\vec{C}$  псевдовекторының құрамдас бөліктері:

$$(C_1, C_2, C_3) = (C_{23}, C_{31}, C_{12}) \quad (3.46)$$

Мұндағы индекстердің циклдік реті  $\varepsilon_{ijk}$  псевдотензоры құрамдас бөліктерінің циклділігінен туындайды. Дуальді болғандықтан векторлардың үш өлшемді көбейтіндісін псевдовектор түрінде немесе антисимметриялы 2<sup>ші</sup> рангылы тензор ретінде қарастыруға болады.

Үш полярлық  $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$  векторлары берілсін, онда:

$$V_{ijk} = \begin{vmatrix} A_i & B_i & C_i \\ A_j & B_j & C_j \\ A_k & B_k & C_k \end{vmatrix} = A_i B_j C_k - A_i B_k C_j + \dots \quad (3.47)$$

құруға болады.  $A_p B_q C_r$  әрбір мүшесі 3<sup>ми</sup> рангылы тензор. (3.47) теңдеуі толық антисимметриялы болғандықтан, кез келген екі индекстердің орнын ауыстырғанда таңбасы өзгереді. Ал келесі дуальді шама

$$V = \frac{1}{3!} \varepsilon_{ijk} V_{ijk} \quad (3.48)$$

псевдоскалярлық болады. Оның дұрыстығына көз жеткізу мақсатында анықтауышты ашып жазайық:

$$V = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}, \quad (3.49)$$

Мұның аралас көбейтінді екені көрініп тұр.

Максвелл теңдеулерінің коварианттылығын дәлелдеу үшін жоғарыдағы нәтижелерді төрт өлшемді кеңістікте қайта жазу, әрі төрт өлшемді көлем элементінің  $dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$  – псевдоскаляр екендігін көрсету қажет.

Төрт өлшемді Леви-Чивита  $\delta_{ijkl}$  таңбасын енгізейік ( $\varepsilon_{ijk}$  таңбасының аналогы). Өзінің анықтамасына сәйкес ол барлық индекстері бойынша антисимметриялы.

$\delta_{ijkl} = +1$ , егер индекстері жұп рет орын алмастырса,

$\delta_{ijkl} = -1$ , егер индекстері тақ рет орын алмастырса.

Төртінші рангылы **H** тензорын енгізелік:

$$H_{ijkl} = \begin{vmatrix} A_i & B_i & C_i & D_i \\ A_j & B_j & C_j & D_j \\ A_k & B_k & C_k & D_k \\ A_l & B_l & C_l & D_l \end{vmatrix}, \quad (3.50)$$

оның элементтері –  $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D}$  полярлық векторлардың құрамдас бөліктері болсын. Онда келесі дуальді шаманы анықтауға болады

$$H = \frac{1}{4!} \delta_{ijkl} H_{ijkl}. \quad (3.51)$$

Ал  $\delta_{ijkl}$  – псевдотензор болғандықтан  $H_{ijkl}$  – де псевдотензор болып табылады. Енді  $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D}$  векторлары төрт координатаның осьтері бойынша шексіз кіші ұзындыққа ие болсын (Миньковский кеңістігі)

$$\vec{A} = (dx_1, 0, 0, 0), \quad \vec{B} = (0, dx_2, 0, 0), \dots \quad (3.52)$$

ал төртөлшемді көлем элементі

$$H = dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 \quad (3.53)$$

псевдоскалярлық шама болады.

Үш өлшемді кеңістіктен төрт өлшемді кеңістікке математикалық индукция (жалпылау) әдісімен көштік. Дәл осылайша  $N$  өлшемді кеңістік үшін де жазуға болады.

### Жаттығулар

1. Элементтері  $(C_1, C_2, C_3)$  псевдовекторын құрайтын антисимметриялы кесте берілсін

$$\begin{pmatrix} 0 & C_3 & -C_2 \\ -C_3 & 0 & C_1 \\ C_2 & -C_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & C_{12} & C_{13} \\ -C_{12} & 0 & C_{23} \\ -C_{13} & -C_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

$C_i = \frac{1}{2!} \varepsilon_{ijk} C_{jk}$  қатынасы барлық координат жүйесінде орынды деп жорамалдап,  $C_{jk}$  тензор екенін дәлелдеңіздер (бөлінді ережесінің өзге түрі).

2.  $\vec{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$  операторын  $\sum_{i=1}^4 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$  түрінде жазуға болады (мұндағы:  $x_4 = ic \cdot t$ ). Бұл төрт өлшемді лапласианды –

даламбериан деп атап,  $\square^2$  - таңбамен белгілейді. Осы оператордың скалярлық болатынын дәлелдеңіздер.

3.  $\delta_{ii} = 3, \delta_{ij} \varepsilon_{ijk} = 0, \varepsilon_{ipq} \varepsilon_{jpr} = 2\delta_{ij}, \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijk} = 6$  болатынын дәлелдеңіз.

4.  $\varepsilon_{ijk} \cdot \varepsilon_{pqk} = \delta_{ip} \delta_{jq} - \delta_{iq} \delta_{jp}$  болатынын дәлелдеңіз.

5. Келесі 4<sup>ші</sup> рангылы тензорлардың әрқайсысы  $\delta_{ij}\delta_{kl}$ ,  $\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}$ ,  $\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}$  – изотропты болатынын тексеріңіздер, яғни әрқайсысының пішіні координаталар жүйесін айналдырғанда тәуелсіз болатынын көрсету қажет.

6. Инверсияны пайдаланып, изотропты тензордың табиғаты шындығында псевдотензорлық екендігін дәлелдеңіздер.

### 3.5. Аффинорлар

Аффинорды енгізу арқылы 2<sup>ші</sup> рангылы тензорлар үшін қарапайым векторлық талдау ережелерін пайдаланудың мүмкіндіктері туындайды.  $\vec{i}$  және  $\vec{j}$  екі вектордан құралған  $\vec{i}\vec{j}$  комбинациясын қарастырайық. Осы комбинация *аффинор* деп аталады. Сол жағынан көбейту – сол жақтағы көбейткіш оң жағындағы жұптың біріншісіне көбейту ретінде анықталсын:

$$\vec{A} \cdot \vec{i}\vec{j} = \left[ (\vec{i}A_x + \vec{j}A_y + \vec{k}A_z) \cdot \vec{i} \right] \vec{j} = A_x \cdot \vec{j}. \quad (3.60)$$

Оң жағынан көбейту кері ретте жүргізіледі:

$$\vec{i}\vec{j} \cdot \vec{A} = \vec{i} \left[ \vec{j} (\vec{i}A_x + \vec{j}A_y + \vec{k}A_z) \right] = \vec{i}A_y \quad (3.61)$$

Көріп тұрғанымыздай, көбейту амалы коммутациялы емес. Әрқашан  $\vec{i}\vec{j}$  аффинорын құрайтын  $\vec{i}$  және  $\vec{j}$  векторлары өзара әсерлеспейтінін есте сақтау қажет. Егер бұл векторлардың скалярлық коэффициенттері бар болса, онда олар көбейтіледі. Алайда бірлік векторлардың өздері не скалярлық, не векторлық көбейтінді құрмайды, яғни  $\vec{i}\vec{j} \neq \vec{j}\vec{i}$ .

Енді  $\vec{A}$  және  $\vec{B}$  векторларының комбинациясын құрайық.

$$\begin{aligned} \vec{T} &= \vec{A}\vec{B} = (\vec{i}A_x + \vec{j}A_y + \vec{k}A_z)(\vec{i}B_x + \vec{j}B_y + \vec{k}B_z) = \\ &= \vec{i}\vec{i}A_xB_x + \vec{i}\vec{j}A_xB_y + \vec{i}\vec{k}A_xB_z + \vec{j}\vec{i}A_yB_x + \vec{j}\vec{j}A_yB_y + \\ &+ \vec{j}\vec{k}A_yB_z + \vec{k}\vec{i}A_zB_x + \vec{k}\vec{j}A_zB_y + \vec{k}\vec{k}A_zB_z. \end{aligned} \quad (3.62)$$

$\vec{T} = \vec{A}\vec{B}$  – аффинорлар комбинациясынан құралған аффинорлық шама. Екі вектордың көбейтіндісі  $2^{\text{ші}}$  рангылы тензор болатынын жоғарыда айтқанбыз. Демек, аффинорлар да  $2^{\text{ші}}$  рангылы тензор, әрі табиғаты вектор екені айрықша көрсетіліп жазылады.

Жоғарыда вектор мен аффинорлар көбейтіндісінің коммутативті емес екендігін жазғанбыз. Бірақ операцияның коммутативті қасиетке ие болатын маңызды дербес жағдайын арнайы қарастырайық

$$\vec{a} \cdot \vec{A}\vec{B} = \vec{A}\vec{B} \cdot \vec{a} , \quad (3.63)$$

мұндағы  $\vec{A}\vec{B}$  – аффинор,  $\vec{a}$  – кез келген вектор.

Егер  $\vec{a} = \vec{i}$  болса, онда  $A_x \cdot \vec{B} = \vec{A}B_x$ , яғни

$$\vec{i} A_x B_x + \vec{j} A_x B_y + \vec{k} A_x B_z = \quad (3.64)$$

$$= \vec{i} A_x B_x + \vec{j} A_y B_x + \vec{k} A_z B_x$$

әр құрамдас бөліктерін жеке-жеке теңестіріп, табатынымыз:

$$A_x B_x = A_x B_x, \quad A_x B_y = A_y B_x, \quad A_x B_z = A_z B_x . \quad (3.65)$$

Яғни,  $\vec{A} = c \cdot \vec{B}$ , мұндағы  $c = const$ . Басқаша айтқанда, кез келген векторға көбейту коммутативті болу үшін, аффинор симметриялы болуы керек.

Аффинордың ең маңызды қасиеттерінің бірі – координат осьтерін арнайы таңдай отырып, оларды *эрқашан* нормальдік немесе диагональдық түрге келтіруге болады:

$$\vec{T} \rightarrow \vec{ii} T_{xx} + \vec{jj} T_{yy} + \vec{kk} T_{zz} . \quad (3.66)$$

Симметриялы аффинордың геометриялық түсініктемесі қызықты әрі пайдалы. Жеңіл болуы үшін, симметриялы  $\vec{T}$  аффиноры диагональдық түрде берілсін. Онда  $\vec{r}$  радиус-векторының көмегімен келесі теңдеуді жазалық:

$$\vec{r} \cdot \vec{T} \cdot \vec{r} = 1 . \quad (3.67)$$

Ол  $\vec{r}$  -дің бағытына байланысты оның абсолюттік шамасына шек қояды.

$$\left. \begin{aligned} (\vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z)(\vec{i}\vec{i}T_{xx} + \vec{j}\vec{j}T_{yy} + \vec{k}\vec{k}T_{zz})(\vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z) = 1 \\ x^2T_{xx} + y^2T_{yy} + z^2T_{zz} = 1 \end{aligned} \right\}, \quad (3.68)$$

Соңғы теңдік жартылай осьтері төменде келтірілген эллипсоидты береді:

$$a = T_{xx}^{-1/2}, \quad b = T_{yy}^{-1/2}, \quad c = T_{zz}^{-1/2}. \quad (3.69)$$

Демек, аффиноорды диагональдық түрге келтіру – аффиноорлық эллипсоидтің осьтері мен координаталар осьтерін сәйкестендірумен тең.

Кез келген  $\vec{U}$  антисимметриялы аффиноор берілсін, яғни  $U_{ii} = 0$ ,  $U_{ij} = -U_{ji}$  ( $i \neq j$ ,  $i, j = x, y, z$ ) Онда кез келген  $\vec{a}$  векторы үшін:

$$\vec{a} \cdot \vec{U} = -\vec{U} \cdot \vec{a}. \quad (3.70)$$

Басқа сөзбен айтқанда, вектордың антисимметриялы аффиноормен көбейтіндісі антикоммутация ережесіне бағынады.

### Жаттығулар

1. Антисимметриялы  $\vec{U}$  аффинооры мен  $\vec{V}$  векторы берілген. Онда  $\vec{V} \cdot \vec{U} = -\vec{U} \cdot \vec{V}$ ,  $\vec{V} \cdot \vec{U} \cdot \vec{V} = 0$  екендігін дәлелдеңіздер.

2. Симметриялы  $\vec{U}$  аффинооры,  $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{r}$  векторы берілген, мұндағы  $|\vec{a}| = 1$ .  $\vec{r} = \vec{U} \cdot \vec{a}$  болғанда, радиус-вектордың ұшы эллипсоидтың бетімен қозғалатынын көрсетіңіздер.

3. Екі өлшемді  $\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y$ ,  $\vec{t} = -\vec{i}y + \vec{j}x$  векторлары  $\vec{r}\vec{U} = \vec{t}$  теңдеуімен байланысқан. Қарапайым тензорлық бейнелеуді пайдаланып,  $\vec{U}$  тензоры анықтаңыздар.  $\vec{U}$ -ды табыңыздар және оған аффиноорлар тұрғысынан анықтама беріңіздер.

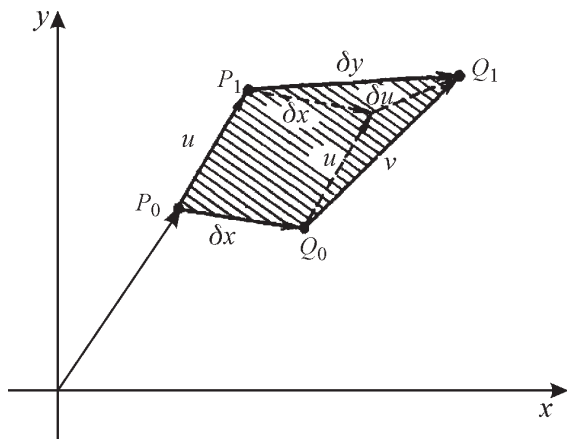
4. Кез келген  $\vec{V}$  векторы үшін  $\vec{I} \cdot \vec{V} = \vec{V}$  теңдігі орындалатын болса, онда  $\vec{I} = \vec{i}\vec{i} + \vec{j}\vec{j} + \vec{k}\vec{k}$  бірлік аффинооры екенін көрсетіңіздер.

### 3.6. Серпімділік теориясы

Егер қатты денеге сыртқы күш әсер етсе, онда ол деформацияланады немесе оның ішінде қандай да кернеуліктер пайда болады. Сол себепті тензорлық талдауды қолдану арқылы серпімділік теориясын қарастыруды келесі үш кезеңге бөлу орынды:

- 1) серпімді дененің деформациясын сипаттау;
- 2) деформацияны тудыратын күштерді (әдетте оларды кернеуліктер деп атайды) сипаттау;
- 3) Гук заңының жалпыланған түрін тензорлық пішінде жазу.

**Серпімді дененің деформациясы.** Қатты денеге сыртқы күштер әсер етсін. Онда серпімді дененің деформациясы кезінде оның кейбір бөліктері бір-бірімен салыстырғанда өзгеріске ұшырайды. Түсінікті болу үшін координаттар басынан  $r$  қашықтағы  $P_0$  нүктесі мен осы нүктеден  $\delta x$  қашықтағы  $Q_0$  нүктесін қарастыралық (3.3-сурет).



3.3-сурет. Серпімді деформация

Деформацияланбаған қатты денедегі  $Q_0$  және  $P_0$  нүктелерінің салыстырмалы координаттарын  $\delta x_i$  етіп белгілейік. Дене деформацияланғанда  $P_0$  нүктесі  $\vec{u}$  қашықтықтағы  $P_1$  нүктесіне, ал  $Q_0$  нүктесі  $\vec{v}$  қашықтығындағы  $Q_1$  нүктесіне ығысады; мұнда  $Q_1$  және  $P_1$  нүктелерінің салыстырмалы координаталары  $\delta y_i = \delta x_i + \delta u_i$  болады. Демек,  $Q$  және  $P$  нүктелерінің

салыстырмалы орналасуы  $\delta u_i$  -ға тең. Екінші және одан жоғары дифференциалдарды ескермейтін болсақ, онда келесі теңдіктерді аламыз:

$$\delta \vec{u} = \vec{u}(\vec{r} + \delta \vec{x}) - \vec{u}(\vec{r}) = (\delta \vec{x} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}, \quad \delta u_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \delta x_k \quad (3.71)$$

$u_i$  вектордың құрамдас бөлігі болғандықтан,  $du_i / dx_k$  туындысы екінші рангылы  $\vec{\nabla} \vec{u}$  тензорының элементі болады. Енді осы тензорды симметриялы және антисимметриялы бөліктеріне жіктеп жазайық:

$$\begin{aligned} \delta u_i &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \delta x_k - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) \delta x_k = \\ &= \eta_{ik} \delta x_k - \xi_{ik} \delta x_k \end{aligned} \quad (3.72)$$

Антисимметриялы  $\xi_{ik}$  бөлігін таза айналумен теңестіруімізге әбден болады.

Енді аксиалдық  $\vec{\xi}$  векторы мен  $\xi_{ik}$  арасындағы байланысты 3.4-бөліміне сәйкес көрсетейік:

$$\vec{\xi} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} \times \vec{u} \quad (3.73)$$

Антисимметриялы  $\xi_{ik} dx_k$  бөлігіне  $\delta \vec{u}$  ығысуы тең болады:

$$\delta \vec{u} = -\frac{1}{2} (\vec{\nabla} \times \vec{u}) \times \delta \vec{x} \quad (3.74)$$

Ал бұл  $P_0$  нүктесі арқылы  $\vec{\nabla} \times \vec{u}$  бағытындағы лездік ось бойымен  $|\vec{\nabla} \times \vec{u}| / 2$  бұрышына (радианмен өлшегенде) бұрғанға тең. Қалған  $\eta_{ik}$  симметриялы бөлігі *таза деформация тензоры* деп аталады. Осы тензордың диагональдық элементтері – ұзаруды, ал диагональдық емес элементтері – ығысу деформациясын сипаттайды.

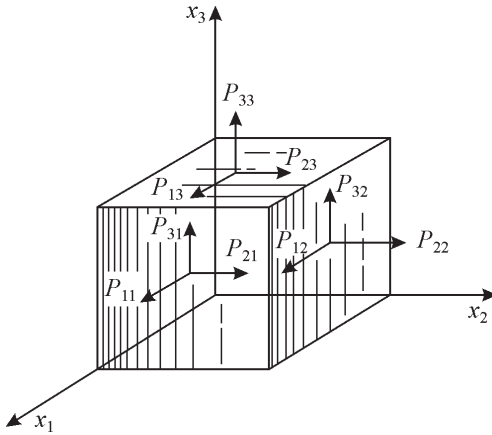
Егер  $Q_0$  нүктесі  $P_0$ -мен салыстырғанда  $x$  осінің бағытымен ғана ығысатын болса, онда  $\delta \vec{x} = \vec{i} \delta x_1$ . Онда (3.72) теңдеуінен

$$\delta u_1 = \eta_{11} \delta x_1, \quad \delta u_2 = \eta_{21} \delta x_1, \quad \delta u_3 = \eta_{31} \delta x_1. \quad (3.75)$$

Демек, дене деформацияланатын болса, онда ығысу тең болады:

$$\left. \begin{aligned} \delta y_1 &= \delta x_1 + \delta u_1 = (1 + \eta_{11}) \delta x_1 \\ \delta y_2 &= \delta u_2 = \eta_{21} \delta x_1 \\ \delta y_3 &= \delta u_3 = \eta_{31} \delta x_1 \end{aligned} \right\} \quad (3.76)$$

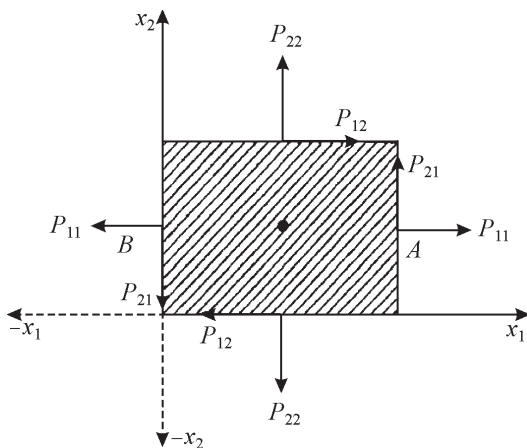
Жоғарыда келтірілген  $\delta \vec{x} = \vec{i} \delta x_1$  жағдайы үшін  $\eta_{11}$  диагональдық элементі  $\delta \vec{y}$ -тің бірінші құрамдас бөлігінің ұзаруын, ал  $\eta_{21}$  және  $\eta_{31}$  элементтері сәйкесінше  $\delta y_2$  және  $\delta y_3$  компоненттерінің ығысуын сипаттайды.



3.4-сурет. Кернеуліктер

**Кернеулік.** Кернеуліктерді немесе күштерді аса мұқияттылықпен анықтау қажет. Осы мақсатта 3.4-суретіне назар аударайық. Мұнда  $P_{ij} dA$  символымен  $dA$  ауданына  $x_i$  бағыты бойымен, ал  $x_j$  бағытына перпендикуляр болатын әсер етуші күшті белгілейік.  $P_{ij}$ -дің мағынасы - күштің ауданға қатынасы болатын қысымды береді. Егер мәселе күш жөнінде болса, онда  $P_{ij}$  шамаларын сәйкес келетін бет элементінің ауданына көбейту қажет. Кіші параллелепипедке әсер ететін күштер 3.4-суретінде көрсетілген. Суреттегі белгілеулер тым көп болмас үшін, ең жақын үш фронтальды қырларына әсер ететін күштер ғана келтірілген. Егер кернеуліктер изотропты болатын болса, онда қарама-қарсы беттерге түсірілген күштердің таңбасы кері болады (3.5-сурет). Мұнда  $x_2$  бағытындағы параллелепипед қырының ығысуын  $P_{21}$  сипаттайтынын ескертеміз.

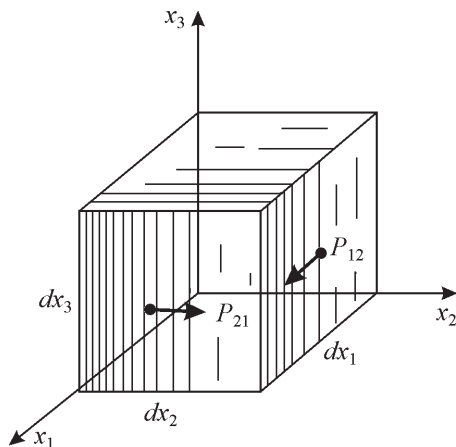
Изотропты кернеуліктер жағдайында бет жағынан *сыртқы ортаға* дәл сол  $P_{21}$  күші әсер етеді. Өз кезегінде В бетіне  $x_2$  осінің кері бағытында түсірілген күш те  $P_{21}$  -ге тең болады. Осы аталған қорытындылардың негізінде ерекше атап өтетін үш ереже жатыр.



**3.5-сурет.** Біртекті кернеуліктер.

Күштердің қарама-қарсы бағыты

Олар: 1) кернеулік қатты денеде изотропты беріледі; 2) статикалық тепе-теңдіктің орын алуы; 3) ішкі күштердің (мысалы гравитациялық) және айналу моменттерінің (магниттік домендерге әсер ететін сыртқы магнит өрісінің) мүлде болмауы.



**3.6-сурет.** Біртекті кенеуліктер.

Айналдыру уақыттарының тепе-теңдігі

Осы аталған жорамалдар  $P_{ij}$ -ге одан әрі қосымша шектеулер орнатуға мүмкіндік береді. Енді  $x_3$  осінің бойымен айналатын параллелепипедтің (3.4- және 3.6-суреттерді қараңыз) айналу моментін қарастырайық. Нөлдік иінге тең болатын  $P_{31}$  және  $P_{32}$  ығыстыру күштері моментті туғызбайды. Ал ығыстыру күштері  $P_{13}$  және  $P_{23}$  бір-біріне тең болғанымен, төменгі қырында ( $x_3=0$ ) олардың бағыттары қарама-қарсы. Сонымен, әзірге екі айналу моменттері қалды:

$$P_{21}(dx_2dx_3)dx_1, \quad P_{12}(dx_1dx_3)dx_2 \quad (3.77)$$

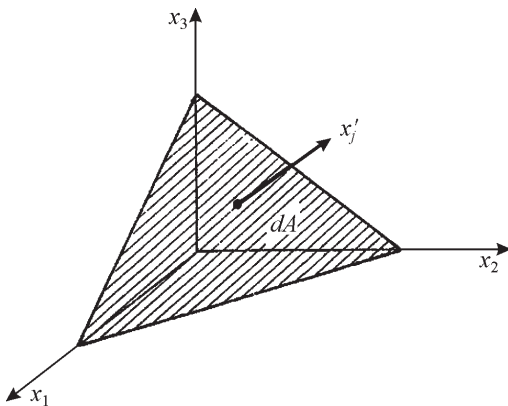
Егер айналу болмаған жағдайда, онда оларды біріне-бірін теңестіруге болады:

$$P_{21}(dx_2dx_3)dx_1 = P_{12}(dx_1dx_3)dx_2 \quad (3.78)$$

Яғни,  $P_{21} = P_{12}$ . Аналогиялық талдаулар нәтижесінде, егер  $x_1$  және  $x_2$  осьтерінің бойымен айналу болмаса, келесі жалпы қатынасты табамыз:

$$P_{ij} = P_{ji} \quad (3.79)$$

Бұдан келесі маңызды қорытынды жасауымызға болады: бірінші индексмен берілген шамалардың, нақтырақ айтқанда олардың абсолюттік шамаларының (ешқандай да бағытының емес) тең болатыны айқындалады.



3.7-сурет. Шексіз кіші тетраэдр. Күштердің тепе-теңдігі

Сонымен,  $P_{ij}$  күштерін (қысымын) сипаттайтын элементтер кестесі симметриялы болды. Бұдан осы кесте тензорды

анықтайтынын көреміз. Енді шексіз кіші тетраэдрді қарастырайық (3.7-сурет). Оның ауданы  $dA$ -ға тең және  $x'_j$  бағытына перпендикуляр. Осы еңіс жатқан бетке түсірілген күш  $P'_{ij}dA$ -ға тең. Ал басқа,  $x_1=0$ ,  $x_2=0$  және  $x_3=0$  беттеріне түсірілген күштер сәйкесінше  $P_{m1}(a_{j1}dA)$ ,  $P_{m2}(a_{j2}dA)$  және  $P_{m3}(a_{j3}dA)$  – шамаларына тең болады. Мұндағы жақшаның ішіндегі аудан –  $x_k=0$  болғандағы  $a_{jk}dA$  – қырының ауданы; ол  $dA$  еңіс ауданының  $x_k=0$  бетіне түсірілген проекциясы. Ал,  $a_{jk}$  шамасы қарапайым бағыттаушы косинусты, яғни  $x'_j$  және  $x_k$  осьтерінің арасындағы косинусты анықтайды.

$P_{m1}(a_{j1}dA)$  күші  $x_m$  осінің бойымен бағытталған. Оның  $x'_j$  бағытына проекциясы  $a_{im}a_{j1}P_{m1}dA$  -ға тең, мұнда  $m$  индекстері бойынша қосындылау жоқ. Ал егер  $m$  индексі бойынша қосындылау амалын жүргізсек, онда  $x'_j$  бағытындағы  $x_1=0$  артқы қырына түсірілген үш күштің  $x'_j$  - құрамдас бөліктерінің қосындысын анықтайды.

Егер төмендегі статикалық тепе-теңдік орнаса:

$$a_{im}a_{jk}P_{mk}dA = P'_{ij}dA, \quad (3.80)$$

онда қалған үш қыры бойынша қосынды  $x'_j$  бойымен әсер ететін толық күшті береді. Аудан элементі  $dA$  қалауымызша таңдалғандықтан, келесі қатынас орындалады:

$$P'_{ij} = a_{im}a_{jk}P_{mk}. \quad (3.81)$$

Өз кезегінде анықтамаға сәйкес  $P_{mk}$  - тензор болатынын көреміз.

**Гук заңы.** Алдымен, серпімді қатты денені изотроптық деп пайымдайық. Төменірек жалпы анизотроптық жағдайын да талдаймыз. Ол үшін  $x_1$  осіне параллель біртекті стерженьді қарастырайық (мұндай арнайы таңдау басты осьтер жүйесіне жеткізеді. Ал осы жүйенің өзіне тән ерекшелігі – ығысу деформациясының жойылуына әкеледі). Егер оны созатын күштің  $P_{11}$  шамасы кіші болса, онда

$$E\eta_{11} = P_{11} \quad E\eta_{22} = -\sigma P_{11} \quad E\eta_{33} = -\sigma P_{11} \quad (3.82)$$

Мұндағы  $E$  – Юнг модулі,  $\sigma$  – Пуассон қатынасы. Кіші болатын  $P_{22}$  және  $P_{33}$  шамаларын қосымша қосатын болсақ, онда (3.82) теңдеуінің біріншісі келесі түрге өзгереді:

$$E\eta_{11} = P_{11} - \sigma P_{22} - \sigma P_{33} \quad (3.83)$$

Мұнда біз тек әлсіз күштер және кіші деформациялармен шектелдік. Сондықтан осы шамалар өзара сызықтық байланыста болады. Енді (3.83) теңдеуін қайта жазамыз:

$$E\eta_{11} = (1 + \sigma)P_{11} - \sigma(P_{11} + P_{22} + P_{33}) \quad (3.84)$$

Осындай өрнектер  $E\eta_{22}$  және  $E\eta_{33}$  үшін де жазылады.

Жоғарыда көрсеткеніміздей  $\eta_{ij}$  және  $P_{ij}$  - тензорлар. Тандалған жүйеміздің симметриялығына байланысты осы тензорлардың диагональдік емес элементтері нөлге тең. Енді кез келген бағыт-бағдарланған (ориентированный) декарттық координаталар жүйесінде (3.84) теңдеуінің жалпы түрін жазу мақсатында жүйенің айналуын қарастырайық:

$$\eta'_{ij} = a_{ik} a_{jk} \eta_{kk}, \quad P'_{ij} = a_{ik} a_{jk} P_{kk} \quad (3.85)$$

Егер (3.84) теңдеуін  $a_{i1} a_{j1}$  -ге көбейтіп, ал  $E\eta_{22}$  және  $E\eta_{33}$  үшін өрнектерін сәйкесінше  $a_{i2} a_{j2}$  және  $a_{i3} a_{j3}$  көбейтіп, нәтижелерінің қосындысын жазатын болсақ, онда:

$$E a_{ik} a_{jk} \eta_{kk} = (1 + \sigma) a_{ik} a_{jk} P_{kk} - \sigma (P_{mm}) a_{ik} a_{jk} \quad (3.86)$$

(3.85) және (3.18) теңдеулерін пайдаланып, келесі өрнекті табамыз:

$$E\eta'_{ij} = (1 + \sigma) P'_{ij} - \sigma (P'_{mm}) \delta_{ij}, \quad (3.87)$$

мұндағы

$$(P'_{mm}) = (P_{mm}) = P_{11} + P_{22} + P_{33}, \quad (3.88)$$

$P_{ij}$  – ықшамдалған (демек, инвариантты) тензор.

Соңғы теңдеуді  $P_{ij}$  -ге қатысты шешу жиі кездеседі. Ол үшін  $i=j$  деп қабылдап, ықшамдау амалын жүргізіп, мына теңдеуді аламыз:

$$E\eta_{jj} = (1 + \sigma) P_{jj} - 3\sigma P_{jj} = (1 - 2\sigma) P_{jj} \quad (3.89)$$

Қайта (3.87) теңдеуіне апарып қояйық:

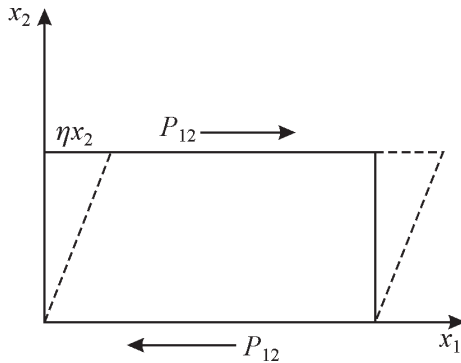
$$(1 + \sigma) P_{ij} = E \eta_{ij} + \frac{E \sigma}{1 - 2\sigma} \eta_{mm} \delta_{ij} \quad (3.90)$$

немесе

$$P_{ij} = 2\mu \eta_{ij} + \lambda \eta_{mm} \delta_{ij}, \quad (3.91)$$

Мұндағы  $\lambda$  және  $\mu$  – Ламе коэффициенттері:

$$\lambda = \frac{\sigma E}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \sigma)} \quad (3.92)$$



**3.8-сурет.** Ығысудың кернеулігі мен деформациясы

Мұндағы  $\mu$  тұрақтысын ығысу модулімен байланыстыруға болады. Ол үшін  $x_3=0$  жазықтығына нық бекітілген параллелепипедті (3.8-сурет) қарастыралық. Осы параллелепипедке тангенциалдық  $P_{12}$  күші әсер етсін. Онда ығысуды  $(\eta x_2, 0, 0)$ -ға тең деп жазамыз. Тензорлық «тілде»

$\eta_{12} = \eta_{21} = \frac{\eta}{2}$ , ал барлық қалған  $\eta_{ij}$  нөлге тең болатынын ескертеміз. Онда (3.91) өрнегінен мынаны аламыз:

$$P_{12} = 2\mu \frac{1}{2} \eta = \mu \eta \quad (3.93)$$

Бұдан  $\mu$  -шамасы – ығысу кернеулігінің  $\eta$  ығысу модуліне қатынасын беретінін көреміз.

Егер деформация гидростатикалық сығылуға ұқсас сфералық симметриялы болса, онда

$$\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33}, \quad \eta_{12} = \eta_{13} = \eta_{23} = 0. \quad (3.94)$$

Осы жағдай үшін

$$P_{11} = 3\lambda\eta_{11} + 2\mu\eta_{11} = 3k\eta_{11}, \quad (3.95)$$

мұндағы

$$k = \lambda + \frac{2}{3}\mu \quad (3.96)$$

Бірінші жуықтауда  $3\eta_{11}$  көлемнің салыстырмалы өзгерісін білдіретін болғандықтан,  $k$  – тұрақтысын көлемдік ұлғаю коэффициентімен теңестіруге болады.

Жалпы анизотроптық жағдайды қарастыру мақсатында жалпыланған Гук заңын, оған қоса белгілі кернеулік пен ығысудың арасындағы сызықтық байланысты пайдаланып, келесі өрнекті жазуға болады:

$$P_{ij} = c_{ijkl}\eta_{kl} \quad (3.97)$$

Мұнда бөлінді ережесіне сәйкес  $c_{ijkl}$  – төртінші рангылы тензор. Кернеулік  $P_{ij}$  тензоры мен деформация  $\eta_{ij}$  тензорларының симметриялығының нәтижесінде

$$c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{ijlk} = c_{jilk}, \quad (3.98)$$

Тәуелсіз құрамдас бөліктері  $3^4 = 81$ -ден  $36$ -ға дейін кемиді. Одан әрі

$$c_{ijkl} = c_{klij} \quad (3.99)$$

болатынын көрсетуге болады. Нәтижесінде тәуелсіз компоненттердің саны  $21$ -ге дейін қысқарады.

Жалпы (3.97) тензорлық қатынасын изотропты денеге қолданатын болсақ, онда  $c_{ijkl}$  – серпімділік тензоры жалпы изотропты төртінші рангылы тензорларының комбинациясы болуы қажет. Енді, 3.4-бөлімдегі 5-жаттығудың нәтижесін пайдаланып, келесі теңдеуді табамыз:

$$c_{ijkl} = a\delta_{ij}\delta_{kl} + b[\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}] + c[\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}] \quad (3.100)$$

Осы өрнекті (3.97) теңдеуіне апарып қоятын болсақ, онда

$$P_{ij} = a\delta_{ij}\eta_{kl} + b[\eta_{ij} + \eta_{ji}] + c[\eta_{ij} - \eta_{ji}] \quad (3.101)$$

Алайда  $\eta_{ij}$  симметриялы болғандықтан, (3.91) теңдеуімен толық келісімде болады:

$$P_{ij} = a\eta_{kk}\delta_{ij} + 2b\eta_{ij}$$

### Жаттығу

а) Төртінші рангылы үш өлшемді  $c_{ijkl}$  тензоры келесі шарттарды қанағаттандырады:  $c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{ijlk} = c_{jilk}$ . Осы шарттар тәуелсіз 81-компоненттің (элементтердің) санын 36-ға дейін кемітетінін көрсетіңіздер.

б) Егер  $c_{ijkl} = c_{klij}$  шарты орындалса, онда тәуелсіз компоненттердің саны тіпті 21-ге дейін қысқаратынын дәлелдеңіздер.

## 3.7 Максвелл теңдеулерінің ковариантты пішіні

Арнайы салыстырмалық теориясына сәйкес кеңістік пен уақытқа байланысты Лоренц түрлендірулері төрт өлшемді Миньковский кеңістігіндегі (төртінші координата  $x_4 = ict$  бойымен) бұрылысқа эквивалент. Үш өлшемді кеңістіктегі Пифагор теоремасына аналогиялы болуы үшін төрт өлшемді кеңістікте жорамал  $i$  бірлігі арнайы енгізіледі. Енді Миньковский кеңістігінде Максвелл теңдеулерінің тензорлық түрін жазып көрсетелік. Егер ол мүмкін болса, онда арнайы салыстырмалық теориясымен келісімде болуы тек тензорларды түрлендіру қасиеттерінің нәтижесі болатынын атап өтеміз. Сонымен, вакуумдегі Максвелл теңдеулері келесі түрде жазылады:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (3.102 \text{ а})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \rho \vec{v}, \quad (3.102 \text{ б})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho, \quad (3.102 \text{ в})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (3.102 \text{ г})$$

мұндағы

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H}. \quad (3.103)$$

Скалярлық және векторлық потенциалдарды пайдаланалық:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \varphi \quad (3.104)$$

(3.104) теңдеуіне  $\vec{A}$ -ның роторы кіреді; ал  $\vec{A}$ -ның дивергенциясын әзірге анықтаған жоқпыз (1.13- және 1.15-бөлімдерін қараңыз). Алайда  $\vec{A}$  векторлық потенциалына қосымша Лоренц шартын қоюымызға болады:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (3.105)$$

(3.102 в) және (3.105) теңдеулерінен

$$\vec{\nabla}^2 \varphi + \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (3.106)$$

ал (3.102 б), (3.104) және (1.80) теңдеулерінен

$$\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \vec{\nabla} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \left\{ \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A} \right\} = -\frac{\rho \vec{v}}{\epsilon_0} \quad (3.107)$$

өрнектері табылады. Енді Лоренцтің (3.105) шартымен және  $\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$  тәуелділігін пайдаланалық:

$$\left[ \vec{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \vec{A} = -\mu_0 \rho \vec{v}, \quad \left[ \vec{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3.108)$$

Ал  $\square^2 = \vec{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2}$  дифференциалдық операторын Миньковский кеңістігінде келесі түрде жазуға болады:  $\sum_{\lambda=1}^4 \frac{\partial^2}{\partial x_\lambda^2}$ .

Мұнда арнайы салыстырмалық теориясында қабылданған индекстер пайдаланылды. Ал,  $\square^2$  - операторының скалярлық екенін көрсету жеңіл (3.4-бөлімінің 2-жаттығуын қараңыз).

Ыңғайлы болу үшін төмендегі белгілеулерді енгіземіз:

$$\begin{aligned} A_1 &\equiv \frac{A_x}{\mu_0 c} = c \epsilon_0 A_x, & A_2 &\equiv \frac{A_y}{\mu_0 c} = c \epsilon_0 A_y, \\ A_3 &\equiv \frac{A_z}{\mu_0 c} = c \epsilon_0 A_z, & A_4 &\equiv i \epsilon_0 \varphi. \end{aligned} \quad (3.109)$$

Қосымша келесі белгілеулерді енгізелік:

$$\frac{\rho v_x}{c} \equiv j_1, \quad \frac{\rho v_y}{c} \equiv j_2, \quad \frac{\rho v_z}{c} \equiv j_3, \quad i\rho \equiv j_4 \quad (3.110)$$

Онда (3.108а) теңдеуін келесі пішінде қайта жазуға болады:

$$\sum_{\lambda} \frac{\partial^2}{\partial x_{\lambda}^2} A_{\mu} = -j_{\mu} \quad (3.111)$$

Сыртқы түріне қарай бұл тензорлық теңдеуге ұқсас, алайда жай ғана ұқсастық – ол дәлелдеме емес. Дәлелдеу үшін жалпыланған  $j_{\mu}$  тогының түрлендіру қасиеттерін қарастырайық. Электр зарядының элементі  $de$  – инварианттық шама, ол келесі теңдікке тең:

$$de = \rho dx_1 dx_2 dx_3 \quad (3.112)$$

3.4-бөлімінде төрт өлшемді  $dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$  көлемі де инвариантты болатынын көрсеткенбіз. Сондықтан (3.53) және (3.112) теңдеулерін салыстыра отырып, электр зарядының  $\rho$  тығыздығы да төрт өлшемді кеңістіктің төртінші құрамдас бөлігі  $dx_4$  тәрізді түрленетініне көз жеткіземіз.  $j_{\mu}$  векторының төртінші құрамдас бөлігі  $i\rho$ -ға тең. (3.110) теңдеуіндегі осы вектордың өзге компонентерін  $j_4$  арқылы өрнектеуге болады:

$$j_1 = \frac{\rho v_x}{c} = \frac{\rho}{c} \frac{dx_1}{dt} = \frac{i\rho}{ic} \frac{dx_1}{dt} = j_4 \frac{dx_1}{dx_4} \quad (3.113)$$

$j_4$  құрамдас бөлігінің түрленуі  $dx_4$ -ке ұқсас болғандықтан,  $j_1$  құрамдас бөлігі  $dx_1$  тәрізді түрленеді.  $j_2$  және  $j_3$  құрамдас бөліктері үшін де дәл осындай нәтижелер аламыз. Демек,  $j_{\mu}$  және  $dx_{\mu}$  құрамдас бөліктері бірдей заңдылықпен түрленеді, яғни  $j_{\mu}$  – Миньковский кеңістігіндегі төрт өлшемді вектор.

Максвелл теңдеулерінің (3.102) тікелей салдарлары болатын (3.111) теңдеуі барлық декарт координаталар жүйелерінде орынды деп жорамалданады. Бұл жағдайда бөлінді ережесінің негізінде  $A_{\mu}$  векторы және (3.111) теңдеуі тензорлық деген қорытынды жасауымызға болады.

Енді (3.104) теңдеуіне қайта оралып, оларды келесі түрде жазамыз:

$$\left. \begin{aligned} i\varepsilon_0 E_j &= \frac{\partial A_j}{\partial x_4} - \frac{\partial A_4}{\partial x_j}, \quad j=1,2,3 \\ \frac{1}{\mu_0 c} B_i &= \frac{\partial A_k}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_k}, \quad (i,j,k)=(1,2,3) \end{aligned} \right\} \quad (3.114)$$

Мұндағы  $(i, j, k) = (1, 2, 3)$  индекстерінің циклдік орын алмастыруын білдіреді.

Жаңа антисимметриялы екінші рангылы тензорды ( $A_\mu$  - вектор болғандықтан) анықтайық:

$$\frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\lambda} \equiv f_{\mu\lambda} = -f_{\lambda\mu}$$

Оның айқын түрін жазатын болсақ:

$$f_{\mu\lambda} = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} 0 & cB_z & -cB_y & -iE_x \\ -cB_z & 0 & cB_x & -iE_y \\ cB_y & -cB_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix} \quad (3.115)$$

Осы тензордың көмегімен Максвелдің (3.102б) және (3.102в) теңдеулерін тензорлық түрде жазуымызға болады:

$$\frac{\partial f_{\lambda\mu}}{\partial x_\mu} = j_\lambda \quad (3.116)$$

Осы теңдіктің сол жағында төрт өлшемді тензордың дивергенциясын көреміз. Яғни, ол – вектор. Ал бірінші рангылы тензор дегеніміз - үшінші рангылы  $df_{\lambda\mu}/dx_\nu$  тензордың ықшамдалуына эквивалентті, әрине (3.2 бөлімнің 1-ші және 2-ші жаттығуларын қараңыз). Максвелдің қалған екі теңдеуін де тензорлық пішінде жазалық. (3.102г) теңдеуінің тензорлық түрі төмендегідей болады

$$\frac{\partial f_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{12}}{\partial x_3} = 0. \quad (3.117)$$

Ал (3.102а) теңдігінің тензорлық пішіні келесі үш теңдеуді құрайды:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f_{34}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{42}}{\partial x_3} + \frac{\partial f_{23}}{\partial x_4} &= 0 \\ \frac{\partial f_{12}}{\partial x_4} + \frac{\partial f_{24}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{41}}{\partial x_2} &= 0 \\ \frac{\partial f_{13}}{\partial x_4} + \frac{\partial f_{34}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{41}}{\partial x_3} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (3.118)$$

Ал  $df_{\lambda\mu} / dx_\nu = t_{\lambda\mu\nu}$  – үшінші рангылы тензор болғанықтан, (3.102а) және (3.102г) қатынастарын келесі тензорлық теңдеуімен өрнектеуге болады:

$$t_{\lambda\mu\nu} + t_{\nu\lambda\mu} + t_{\mu\nu\lambda} = 0 \quad (3.119)$$

(3.117) және (3.118) теңдеулерінен көрініп тұрғаны:  $\lambda$ ,  $\mu$  және  $\nu$  индекстері әртүрлі болуы қажет; ал басқа жағдайда, яғни екі индекс бірдей болса, онда (3.119) теңдеуі автоматты түрде нөлге тең болады (4-жаттығуды қараңыз).

(3.116) және (3.119) қатынастарын алу арқылы, біз Максвелл теңдеулерін коварианттық пішінде жазуды толығымен аяқтадық.

Ал  $f_{\lambda\mu}$  тензорлық қасиеттерін зерттеу өте қызықты есеп. Дене  $z$  осінің ( $x_3$  осі) бойымен  $v$  жылдамдығымен қозғалсын. Онда Лоренц түрлендірулеріндегі «бағыттаушы косинустарының» түрін жазайық:

$$a_{\mu\lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i\beta\gamma \\ 0 & 0 & -i\beta\gamma & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.120)$$

мұндағы

$$\beta = v/c, \quad \gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}. \quad (3.121)$$

Тензорларды түрлендіру ережелерін пайдаланып, қозғалыстағы жүйенің электр және магнит өрістерін қозғалмайтын жүйенің шамалары арқылы өрнектеуге болады.

(3.113), (3.115) және (3.120) теңдеулерінен табамыз:

$$\left. \begin{aligned} E'_x &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (E_x - vB_y) \\ E'_y &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (E_y + vB_x) \\ E'_z &= E_z \end{aligned} \right\}; \quad (3.122)$$

$$\left. \begin{aligned} B'_x &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left( B_x + \frac{v}{c} E_y \right) \\ B'_y &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left( B_y - \frac{v}{c} E_x \right) \\ B'_z &= B_z \end{aligned} \right\}. \quad (3.123)$$

Жалпы,  $\vec{E}$  және  $\vec{B}$  векторларының арасындағы байланыстың болатыны алдын ала түсінікті болды. Мысал ретінде келесі дербес жағдайды қарастыралық: қозғалмайтын жүйедегі электр өрісі нөлге тең болсын, яғни  $E_x = E_y = E_z = 0$ . Онда қозғалмайтын зарядталмаған бөлшекке ешқандай да күш әсер етпейтіні анық. Бөлшек кіші<sup>1</sup>  $v$  жылдамдықпен  $z$  осінің бойымен қозғалғанда, онымен бірге қозғалатын бақылаушы  $E'_x = -vB_y$ ,  $E'_y = vB_x$  өрісінің «пайда» болғанын байқаймыз (себебі ол зарядталған бөлшекке әсер етеді). Мұндағы  $\vec{B}$  – қозғалмайтын жүйедегі магнит өрісі. Осы теңдіктерге векторлық пішін беруге болады

$$\vec{E} = \vec{v} \times \vec{B}, \quad \vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}. \quad (3.124)$$

Әдетте осы теңдеулер магнит өрісінің анықтамасы ретінде пайдаланылады.

Тензорлық (немесе векторлық) қасиеттерді пайдаланып, әртүрлі инвариантты шамаларды құрауға болады. Солардың ішіндегі ең маңыздыларының бірі – төрт өлшемді  $A_\lambda$  және  $j_\lambda$  екі векторлардың скалярлық көбейтіндісі болып табылады:

$$A_\lambda j_\lambda = c\epsilon_0 A_x \frac{\rho v_x}{c} + c\epsilon_0 A_y \frac{\rho v_y}{c} + c\epsilon_0 A_z \frac{\rho v_z}{c} +$$

<sup>1</sup>Егер жылдамдық үлкен болып, яғни қатынасын ескеру керек болса, онда релятивистік қатынастарды пайдалану қажет

$$+i\varepsilon_0\phi\rho = \varepsilon_0(\vec{A} \cdot \vec{j} - \rho\phi), \quad (3.125)$$

мұндағы  $\vec{A}$  – векторлық потенциал;  $\vec{j}$  – тоқтың тығыздығы. Соңғы  $\rho\phi$  мүшесі қарапайым электростатикалық байланысты сипаттайды, ал оның өлшем бірлігі – бірлік көлемдегі энергияға тең. Демек, жаңадан құрылған скалярлық шама энергия тығыздығын өрнектейді. Өріс пен тоқтың динамикалық әсерлесуі  $\vec{A} \cdot \vec{j}$  көбейтіндісімен анықталады. Электормагниттік өрістің өзге де мүмкін варианттары 3-жаттығуда қарастырылған.

### Жаттығулар

1.  $B$  тензорын дуальді төрт өлшемді екінші рангылы  $B'$  тензоры арқылы өрнектеуге болады:

$$B'_{ij} = \frac{1}{2!} \delta_{ijkl} B'_{kl}$$

Айналу кезінде  $B'$  тензорының екінші рангылы тензор ретінде, ал инверсия амалында – псевдотензор ретінде түрленетінін көрсетіңіздер.

2. Элементтері (3.115) өрнегімен анықталатын  $f$  тензорының көмегімен  $f'$  – дуальді тензорын құраңыздар.

$$\text{Жауабы: } f' = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} 0 & -iE_z & iE_y & cB_x \\ iE_z & 0 & -iE_x & cB_y \\ -iE_y & iE_x & 0 & cB_z \\ -cB_x & -cB_y & -cB_z & 0 \end{pmatrix}$$

Ол үшін  $f'$  тензорында  $c\vec{B} \rightarrow i\vec{E}$ ,  $-i\vec{E} \rightarrow c\vec{B}$  алмастыруларын жүргізу қажет. Ғылыми әдебиеттерде кейде «дуальді» деп аталатын осы түрлендірулер вакуумдағы Максвелдің инварианттық теңдеулерін құрайды.

3.  $c^2 B^2 - E^2$  және  $\vec{B} \cdot \vec{E}$  инвариантты болатыны көрсетіңіздер.

4. (3.119) теңдеуіндегі  $\lambda$ ,  $\mu$  және  $\nu$  индекстерінің ең болмағанда екеуі тең болғанда, тривиальді (ең қарапайым)  $0 \equiv 0$  тепе-теңдігіне айналатынын көрсетіңіздер.

5. Лоренцтің шартын (3.105) Миньковский кеңістігіндегі тензорлық теңдеу түрінде жазыңыздар.

6.  $\sum_{\lambda} \frac{dj_{\lambda}}{\partial x_{\lambda}} = 0$  өрнегі заряд пен тоқтың үздіксіздік шарттарына

сәйкес келетінін көрсетіңіздер. Егер осы теңдеудің барлық лоренцтік жүйелерде орындалатыны белгілі болса, онда нәліктен  $\vec{j}_\mu$  - векторлық шама деп қабылдауға болмайды?

7. Өлшемдік түрлендіруі (*калибровочное преобразование*)  $\varphi_1$  скалярлық және  $A_1$  векторлық потенциалдарын келесі түрде жазуға мүмкіндік береді:

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\partial \chi}{\partial t}, \quad \vec{A}_2 = \vec{A}_1 - \vec{\nabla} \chi.$$

Мұндағы жаңа  $\chi$  функциясы біртекті толқындық теңдеуді қанағаттандырады

$$\vec{\nabla}^2 \chi - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0.$$

Келесі тапсырмаларды орындаңыздар:

- 1) Лоренц түрлендіру өзгеріссіз қалатынын;
- 2) жаңа потенциалдар да алғашқылары тәрізді біртекті емес толқындық теңдеулерді қанағаттандыратынын;
- 3)  $\vec{E}$  және  $\vec{B}$  өрістерінің өзгермейтінін дәлелдеңіздер.

### III тараудың бақылау сұрақтары

1. Тензор құрамдас бөліктерінің түрленуін жазыңыздар. Симметриялы және антисимметриялы тензорлардың анықтамасын беріңіздер.

2. Қосындылау ережесін жазыңыздар. Мысалдар келтіріңіздер.

3. Ықшамдалу операциясының анықтамасын пайдаланып, қарапайым скалярлық көбейтіндіні (тікелей көбейтінді) жазыңыздар,

4. Бөлінді ережесінің анықтамасын беріңіздер.

5. Инверсия амалы, оның салдарларын айтыңыздар. Скалярлық және псевдоскалярлық шамалар, полярлық және аксиалдық векторларға мысалдар келтіріңіздер.

6. Тензорлық тығыздықтар ұғымын енгізу не үшін қажет?  $N$  өлшемді кеңістіктегі теңдеулерді жазыңыздар.

7. Аффинордың екінші рангылы тензор және табиғаты – векторлық шама болатынын көрсетіңіздер. Аффинорлардың қасиеттерін жазыңыздар.

8. Серпімді дене деформациясының, кернеуліктің анықтамасын, Гук заңын түсіндіріңіздер.

9. Миньковский кеңістігінің ерекшеліктерін көрсетіңіздер және ондағы Максвелл теңдеулерінің тензорлық түрін жазыңыздар.

10.  $\vec{A}$  векторлық потенциалына қойылатын қосымша Лоренц шартын жазыңыздар. Лоренц түрлендірулерінің «бағыттаушы косинустарының» өрнектерін көрсетіңіздер.

## 4 - т а р а у

### ЕСЕПТЕР

#### 4.1 Есептерді шығару мысалдары

1.  $Oz$  осінің оң бағытымен сүйір бұрыш құрайтын және  $S$  беті нормалінің бағытында жүргізілген  $M$  нүктесіндегі  $u(x,y,z)$  скаляр өрісінің туындысын табыңыздар.

**Шешімі:**

$$u = \ln(1 + x^2 + y^2) - \sqrt{x^2 + z^2},$$

$$S : x^2 - 6x + 9y^2 + z^2 = 4z + 23,$$

$$M(3, 0, -4).$$

$$\vec{N} = \text{grad } F(x, y, z).$$

$$F = x^2 - 6x + 9y^2 + z^2 - 4z - 23,$$

$$\text{grad } F = \frac{\partial F}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z} \vec{k} = (2x - 6)\vec{i} + 18y\vec{j} + (2z - 4)\vec{k}.$$

$$\vec{N}|_M = 0\vec{i} + 0\vec{j} - 12\vec{k},$$

$$|\vec{N}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + (-12)^2} = 12.$$

$$\cos \alpha = 0; \quad \cos \beta = 0, \quad \cos \gamma = -1.$$

$$\frac{\partial U}{\partial N} = \frac{\partial U}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial U}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial U}{\partial z} \cos \gamma.$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{2x}{1+x^2+y^2}; \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{2y}{1+x^2+y^2}; \quad \frac{\partial U}{\partial z} = 0.$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} \Big|_M = 0,6; \quad \frac{\partial U}{\partial y} \Big|_M = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial z} \Big|_M = 0;$$

$$\frac{\partial U}{\partial N} = 0,6 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) = 0.$$

2.  $u(x,y,z)$  және  $v(x,y,z)$  скалярлық өрістері градиенттерінің  $M$  нүктесіндегі бұрышын табыңыздар.

**Шешімі:**

$$v = x^2 - y^2 - 3z^2, \quad U = \frac{x}{yz^2}, \quad M \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$

$\alpha$  – ізделінді бұрыш.

$$\cos \alpha = \frac{(\text{grad } v \cdot \text{grad } U)}{|\text{grad } v| \cdot |\text{grad } U|};$$

$$\text{grad } v = 2x\vec{i} - 2y\vec{j} - 6z\vec{k},$$

$$\text{grad } v \Big|_M = \sqrt{2}\vec{i} - \sqrt{2}\vec{j} - 2\sqrt{3}\vec{k},$$

$$|\text{grad } v| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2 + (-2\sqrt{3})^2} = 4,$$

$$\text{grad } U = \frac{1}{yz^2}\vec{i} - \frac{x}{y^2z^2}\vec{j} - \frac{2x}{yz^3}\vec{k},$$

$$\text{grad } U \Big|_M = 3\sqrt{2}\vec{i} - 3\sqrt{2}\vec{j} - 6\sqrt{3}\vec{k},$$

$$|\text{grad } U| = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 + (-3\sqrt{2})^2 + (-6\sqrt{3})^2} = 12,$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{3}}{4 \cdot 12} = 1. \Rightarrow \alpha = 0, 2\pi.$$

3.  $\vec{a}$  векторлық өрісінің векторлық сызықтарын табыңыздар.

**Шешімі:**

$$\vec{a} = 3x\vec{i} + 6z\vec{k}.$$

$\vec{a}$  өрісінің векторлық сызықтарының дифференциалдық теңдеуі:

$$\frac{dx}{3x} = \frac{dy}{0} = \frac{dz}{6z} \Rightarrow \begin{cases} dy = 0 \Rightarrow y = C_0, \\ \frac{2dx}{x} = \frac{dz}{z} \end{cases}$$

$$2 \ln x = \ln z + \ln C,$$

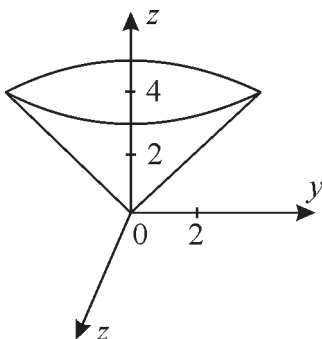
$$x^2 = Cz.$$

4.  $P$  жазықтығымен қиғанда пайда болған  $S$  беті арқылы өтетін  $a$  векторлық өрісінің ағынын табыңыздар. Мұнда аталған беттерден құралған тұйық беттің сыртқы нормалін пайдалану қажет.

**Шешімі:**

$$\vec{a} = xz\vec{i} + yz\vec{j} + (z^2 - 1)\vec{k},$$

$$S : x^2 + y^2 = z^2 (z \geq 0), P : z = 4.$$



4.1-сурет

$$\Pi = \iint_S \vec{a} \cdot \vec{n} \cdot dS = \iint_S a_x dydz + a_y dx dz + a_z dx dy,$$

$$\begin{aligned} \iint_S a_x dydz &= \iint_S xz dydz = \iint_S z\sqrt{z^2 - y^2} dydz = \int_0^4 z dz \int_{-z}^z \sqrt{z^2 - y^2} dy = \\ &= \int_0^4 z \left( \frac{y}{2} \sqrt{z^2 - y^2} + \frac{z^2}{2} \arcsin \frac{y}{z} \right) \Big|_{-z}^z dz = \\ &= \frac{1}{2} \pi \int_0^4 z^3 dz = \frac{1}{2} \pi \cdot \frac{1}{4} z^4 \Big|_0^4 = 32\pi. \end{aligned}$$

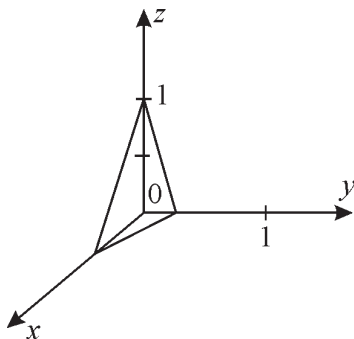
$$\begin{aligned} \iint_S a_y dx dz &= \iint_S yz dx dz = \iint_S z\sqrt{z^2 - x^2} dx dz = \int_0^4 z dz \int_{-z}^z \sqrt{z^2 - x^2} dx = \\ &= \int_0^4 z \left( \frac{x}{2} \sqrt{z^2 - x^2} + \frac{z^2}{2} \arcsin \frac{x}{z} \right) \Big|_{-z}^z dz = \frac{\pi}{2} \int_0^4 z^3 dz = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{4} z^4 \Big|_0^4 = 32\pi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_S a_z dx dy &= \iint_S (z^2 - 1) dx dy = \iint_S (x^2 + y^2 - 1) dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-z}^z \rho(\rho^2 - 1) d\rho = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^4 (\rho^3 - \rho) d\rho = \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{4} \rho^4 - \frac{1}{2} \rho^2 \right) \Big|_0^4 d\varphi = 56 \int_0^{2\pi} d\varphi = 56 \cdot \varphi \Big|_0^{2\pi} = 112\pi, \end{aligned}$$

$$\Pi = 32\pi + 32\pi + 112\pi = 176\pi.$$

5. Бірінші октантта орналасқан  $P$  жазықтығының бөлігі арқылы  $\vec{a}$  векторлық өрісінің ағынын табыңыздар. Нормальдің  $Oz$  осімен сүйір бұрыш құрайтынын ескеріңіздер.

**Шешімі:**



4.2-сурет

$$\vec{a} = 2x\vec{i} + 3y\vec{j} + 4z\vec{k}, \quad P: 2x + 3y + z = 1.$$

$$\Pi = \iint_{\sigma} \vec{a} \cdot \vec{n} \cdot d\sigma = \iint_S (a_x \cos \alpha + a_y \cos \beta + a_z \cos \gamma) d\sigma =$$

$$= \iint_{\sigma} (2x \cos \alpha + 3y \cos \beta + 4z \cos \gamma) d\sigma.$$

$$\vec{n} = \{2, 3, 1\}, \quad \Rightarrow |\vec{n}| = \sqrt{4 + 9 + 1} = \sqrt{14}.$$

$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{14}}, \quad \cos \beta = \frac{3}{\sqrt{14}}, \quad \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{14}},$$

$$d\sigma = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy = \sqrt{1 + 4 + 9} dx dy = \sqrt{14} dx dy,$$

$$\Pi = \iint_{D_{xy}} \left( \frac{2 \cdot 2x}{\sqrt{14}} + \frac{3 \cdot 3y}{\sqrt{14}} + \frac{4z}{\sqrt{14}} \right) \sqrt{14} dx dy =$$

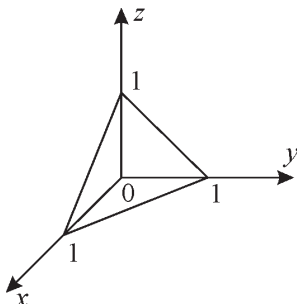
$$= \int_0^{1/2} dx \int_0^{\frac{1}{3} - \frac{2}{3}x} (4x + 9y + 4(1 - 2x - 3y)) dy =$$

$$= \int_0^{1/2} dx \int_0^{\frac{1}{3} - \frac{2}{3}x} (4 - 4x - 3y) dy = \frac{1}{3} \int_0^{1/2} \left( \frac{7}{2} - 10x + 6x^2 \right) dx =$$

$$= \frac{1}{3} \left( \frac{7}{2}x - 5x^2 + 2x^3 \right) \Big|_0^{1/2} = \frac{1}{4}.$$

6. Бірінші октантта орналасқан  $P$  жазықтығының бөлігі арқылы  $\vec{a}$  векторлық өрісінің ағынын табыңыздар. Нормальдің  $Oz$  осімен сүйір бұрыш құрайтынын ескеріңіздер.

**Шешімі:**



4.3-сурет

$$a = 9\pi y\vec{j} + (7z + 1)\vec{k}, \quad P: x + y + z = 1.$$

$$\Pi = \iint_{\sigma} \vec{a} \cdot \vec{n} \cdot d\sigma = \iint_{\sigma} (a_x \cos \alpha + a_y \cos \beta + a_z \cos \gamma) d\sigma =$$

$$= \iint_{\sigma} (2x \cos \alpha + 3y \cos \beta + 4z \cos \gamma) d\sigma.$$

$$\vec{n} = \{1, 1, 1\}; \quad \Rightarrow \quad |\vec{n}| = \sqrt{3}.$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$d\sigma = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy = \sqrt{1 + 1 + 1} dx dy = \sqrt{3} dx dy,$$

$$\Pi = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left( 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 9\pi y \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 7(1-x-y) + 1 \right) \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{3} dy =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (8 - 7x - 7y + 9\pi y) dy = \int_0^1 \left( 8y - 7xy - \frac{7}{2}y^2 + \frac{9\pi}{2}y^2 \right) \Big|_0^{1-x} dx =$$

$$= \int_0^1 \left( \frac{9 + 9\pi}{2} - (8 + 9\pi)x + \frac{7 + 9\pi}{2}x^2 \right) dx =$$

$$= \left( \frac{9 + 9\pi}{2}x - \frac{8 + 9\pi}{2}x^2 + \frac{7 + 9\pi}{2 \cdot 3}x^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{10 + 9\pi}{6}.$$

7.  $S$  тұйық бетінен (сыртқы нормаль)  $\vec{a}$  векторлық өрістің ағынын табыңыздар.

**Шешімі:**

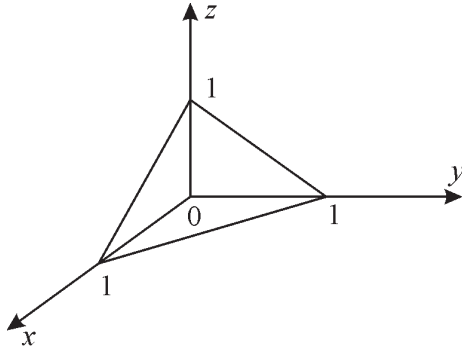
$$\vec{a} = (e^{-z} - x)\vec{i} + (xz + 3y)\vec{j} + (z + x^2)\vec{k},$$

$$S: 2x + y + z = 2, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

$$J = J_1 + J_2 + J_3;$$

$$J_1 = \iint_{D_{yoz}} (e^{-z} - x) dy dz = \int_0^2 dy \int_0^{2-y} \left( e^{-z} + 1 - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z \right) dz =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^2 \left( -e^{-z} + z - \frac{1}{2}yz - \frac{1}{4}z^2 \right) \Big|_0^{2-y} dy = \int_0^2 \left( -e^{y-2} + 1 - y + \frac{1}{4}y^2 \right) dy = \\
&= \left( -e^{y-2} + y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{12}y^3 \right) \Big|_0^2 = -\frac{1}{3}.
\end{aligned}$$



4.4-супер.

$$\begin{aligned}
J_2 &= \iint_{D_{xoz}} (xz + 3y) dz dx = \int_0^1 dx \int_0^{2-2x} (xz + 6 - 3z - 6x) dz = \\
&= \int_0^1 \left( \frac{1}{2}xz^2 + 6z - \frac{3}{2}z^2 - 6xz \right) \Big|_0^{2-2x} dx = \\
&= \int_0^1 (6 - 10x + 2x^2 + 2x^3) dx = \left( 6x - 5x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^4 \right) \Big|_0^1 = \\
&= 6 - 5 + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{7}{6} = \frac{13}{6}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_3 &= \iint_{D_{yox}} (z + x^2) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{2-2x} (2 - 2x - y + x^2) dy = \\
&= \int_0^1 \left( 2y - 2xy - \frac{1}{2}y^2 + x^2y \right) \Big|_0^{2-2x} dx =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^1 (2 - 4x + 4x^2 - 2x^3) dx = \left( 2x - 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^4 \right) \Big|_0^1 = \\
 &= 2 - 2 + \frac{4}{3} - \frac{1}{2} = \frac{5}{6}.
 \end{aligned}$$

$$J = J_1 + J_2 + J_3 = -\frac{1}{3} + \frac{13}{6} + \frac{5}{6} = \frac{8}{3}.$$

8.  $S$  тұйық беті (сыртқы нормаль) арқылы өтетін  $\vec{a}$  векторлық өрісінің ағынын табыңыздар.

**Шешімі:**

$$\vec{a} = 3x\vec{i} - z\vec{j},$$

$$S: \begin{cases} z = 6 - x^2 - y^2, \\ z^2 = x^2 + y^2 (z \geq 0) \end{cases}$$

$$\Pi = \oiint_{\sigma} \vec{a}\vec{n} d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \vec{a} dx dy dz,$$

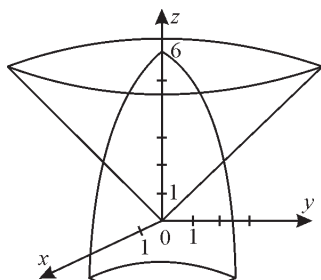
$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = 3 - 0 = 3.$$

Цилиндрлік координаталар жүйесіне ауысамыз

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = z \end{cases}$$

$$\Pi = \iiint_V 3 dx dy dz = 3 \cdot 2 \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{6}} r dr \int_r^{6-r^2} dz = 6 \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{6}} r(6-r^2-r) dr =$$

$$= 6 \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{6}} (6r - r^3 - r^2) dr = 6 \int_0^{\pi} (9 - 2\sqrt{6}) d\varphi = 6(9 - 2\sqrt{6})\varphi \Big|_0^{\pi} = 6(9 - 2\sqrt{6})\pi.$$



4.5-сурет.

9.  $S$  тұйық бетінен (сыртқы нормаль)  $\vec{a}$  векторлық өрісінің ағынын табыңыздар.

**Шешімі:**

$$\vec{a} = (zx + y)\vec{i} + (xy - z)\vec{j} + (x^2 + yz)\vec{k},$$

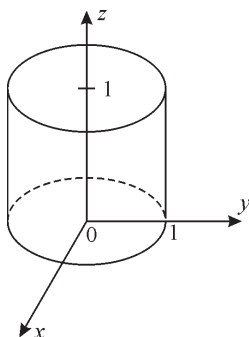
$$S: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 0, z = 1. \end{cases}$$

Остроградский-Гаусс формуласын пайдаланамыз.

$$\Pi = \oiint_S \vec{a}\vec{n} dS = \iiint_V \operatorname{div} \vec{a} dx dy dz,$$

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = x + y + z.$$

$$\Pi = \iiint (x + y + z) dx dy dz.$$



4.6-сурет.

Цилиндрлік координаталар жүйесі: 
$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

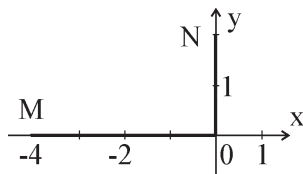
Осыдан,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r dr \int_0^1 (r \cos \varphi + r \sin \varphi + z) dz &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left( r^2 \cos \varphi + r^2 \sin \varphi + \frac{1}{2} \right) dr = \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{3} r^3 \cos \varphi + \frac{1}{3} r^3 \sin \varphi + \frac{1}{2} r \right) \Big|_0^1 d\varphi = \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{3} \cos \varphi + \frac{1}{3} \sin \varphi + \frac{1}{2} \right) d\varphi = \\ &= \left( \frac{1}{3} \sin \varphi - \frac{1}{3} \cos \varphi + \frac{1}{2} \varphi \right) \Big|_0^{2\pi} = 0 - \frac{1}{3} + \pi + \frac{1}{3} = \pi. \end{aligned}$$

10.  $M$  нүктесінен  $N$  нүктесіне дейін  $L$  сызығының бойымен қозғалғандағы  $\vec{F}$  күшінің жұмысын табыңыздар.

**Шешімі:**

$\vec{F} = (x^2 + 2y)\vec{i} + (y^2 + 2x)\vec{j}$ ,  $L$ :  $MN$  қиындысы  $M(-4, 0), N(0, 2)$ .



4.7-сурет

1)  $MO$   $y = 0$ ,  $dy = 0$ ,  $-4 \leq x \leq 0$ .

$$\int_L [(x^2 + 2y)dx + (y^2 + 2x)dy] = \int_{-4}^0 x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_{-4}^0 = \frac{64}{3}.$$

2)  $ON$   $x = 0$ ,  $dx = 0$ ,  $0 \leq y \leq 2$ .

$$\int_L [(x^2 + 2y)dx + (y^2 + 2x)dy] = \int_0^2 y^2 dy = \frac{1}{3} y^3 \Big|_0^2 = \frac{8}{3}.$$

$$\int_L [(x^2 + 2y)dx + (y^2 + 2x)dy] = \frac{64}{3} + \frac{8}{3} = \frac{72}{3} = 24.$$

11.  $\Gamma$  контурының бойындағы ( $t$  параметрінің өсу бағытында)  $\vec{a}$  векторлық өрісінің циркуляциясын табыңыздар.

**Шешімі:**

$$\vec{a} = x\vec{i} - z\vec{j} + y\vec{k},$$

$$\Gamma: \begin{cases} x = 2\cos t, y = 3\sin t, \\ z = 4\cos t - 3\sin t - 3. \end{cases}$$

$$dx = -2\sin t dt,$$

$$dy = 3\cos t dt,$$

$$dz = -4\sin t - 3\cos t.$$

$$C = \int_{\Gamma} a_x dx + a_y dy + a_z dz =$$

$$\int_0^{2\pi} [-2 \cdot 2\cos t \sin t - 3\cos t(4\cos t - 3\sin t - 3) + 3\sin t(-4\sin t - 3\cos t)] dt =$$

$$\int_0^{2\pi} [-2\sin 2t - 12\cos^2 t + 9\sin t \cos t - 9\cos t - 12\sin^2 t - 9\sin t \cos t] dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (-2\sin 2t - 12 - 9\cos t) dt = (\cos 2t - 9\sin t - 12t) \Big|_0^{2\pi} = -24\pi.$$

12.  $\Gamma$  контурының бойындағы  $\vec{a}$  векторлық өрісі циркуляциясының модулін табыңыздар.

**Шешімі:**

$$\vec{a} = 2y\vec{i} + 5z\vec{j} + 3x\vec{k},$$

$$\Gamma: \begin{cases} 2x^2 + 2y^2 = 1, \\ x + y + z = 3. \end{cases}$$

Стокс теңдігін пайдаланамыз:

$$\mathcal{I} = \oint_{\vec{A}} \vec{a} \cdot \vec{n} \cdot d\vec{l} = \iint_{\sigma} \vec{n} \cdot \text{rot} \vec{a} \cdot d\sigma$$

$$\text{rot} \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2y & 5z & 3x \end{vmatrix} = -5\vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k}.$$

$$\iint_{\sigma} \vec{n} \cdot \text{rot} \vec{a} \cdot d\sigma = \iint_{\sigma} (-5 \cos \alpha - 3 \cos \beta - 2 \cos \gamma) d\sigma.$$

$$\vec{n} = \{1, 1, 1\}, |\vec{n}| = \sqrt{3} \Rightarrow \cos \alpha = \cos \beta = \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

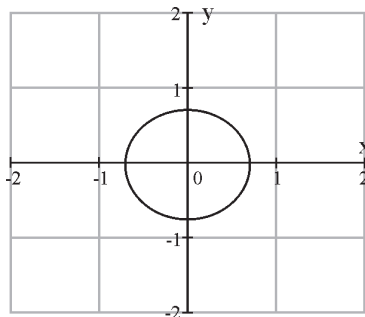
$$d\sigma = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy =$$

$$= \sqrt{1 + (-1)^2 + (-1)^2} dx dy = \sqrt{3} dx dy.$$

$$\mathcal{I} = \sqrt{3} \iint_{D_{xy}} \left( -\frac{5}{\sqrt{3}} - \frac{3}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} \right) dx dy = -10 \iint_{D_{xy}} dx dy = \begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} =$$

$$= -10 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{1/\sqrt{2}} r dr = -10 \varphi \Big|_0^{2\pi} \cdot \frac{1}{2} r^2 \Big|_0^{1/\sqrt{2}} = -10 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = -5\pi.$$

ХОҮ жазықтығына проекциясы



4.8-сурет.

## 4.2 Өзіндік жұмыс есептері

1.  $v = v(x, y, z)$  скалярлық өріс градиентінің бағытындағы  $u = u(x, y, z)$  скалярлық өрісінің туындысын табыңыздар.

2.  $u = \vec{C}\vec{r}$  скалярлық өрісінің градиентін табыңыздар, мұндағы  $\vec{C}$  – тұрақты вектор,  $\vec{r}$  – радиус-вектор. Осы өріс деңгейінің беттері қандай және  $\vec{C}$  векторымен салыстырғанда қалай орналасады?

3. Егер  $S$  бүтіндей тегіс емес тұйық беті және  $\vec{C}$  – нөлдік емес тұрақты вектор болса, онда

$$\oiint_S \cos(\vec{n}, \vec{C}) dS = 0,$$

болатынын дәлелдеңіздер, мұндағы  $\vec{n}$  – векторы  $S$  бетіне нормаль болады.

4. Келесі теңдеуді дәлелдеңіздер

$$\oiint_S \varphi \vec{n}^0 dS = \iiint_V (\varphi \operatorname{div} \vec{a} + \vec{a} \operatorname{grad} \varphi) dV,$$

Мұндағы:  $\varphi = \varphi(x, y, z)$ ;  $S$  беті  $V$  көлемді шектеп тұр;  $\vec{n}^0$  –  $S$  бетінің сыртқы нормалінің орты. Теңдеуді пайдаланудың шектерін бекітіңіздер.

5. Егер  $u(x, y, z)$  функциясы Лаплас теңдеуін қанағаттандырса

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

онда  $\oiint_S \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0$  болатынын дәлелдеңіздер.

Мұндағы  $\frac{\partial u}{\partial n}$  – бүтіндей тегіс емес  $S$  тұйық бетінің нормаль

бағытындағы туындысы.

6. Егер  $u(x, y, z)$  функциясы екінші дәрежелі көп мүше және бүтіндей тегіс емес  $S$  тұйық беті болса, онда

$$\oiint_S \frac{\partial u}{\partial n} dS$$

интегралы  $S$  бетімен шектелетін көлемге тепе-тең болатынын дәлелденіздер.

7.  $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$  болсын, мұндағы  $P, Q, R$  –  $x, y, z$  айнымалыларының функциясы. Оған қоса қандай да жазықтықта орналасқан бүтіндей тегіс емес  $\Gamma$  тұйық қисығы берілген. Егер  $\oint_{\Gamma} \vec{a} d\vec{r}$  циркуляциясы нөлден өзгеше болса, онда оның шамасы  $\Gamma$  контурымен шектелген фигураның ауданына тепе-тең болатынын дәлелденіздер.

8. Қатты дене координаттар басынан өтетін қозғалмайтын осьтің бойымен тұрақты бұрыштық жылдамдықпен айналады. Бұрыштық жылдамдық векторы мынаған тең:  $\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}$ . Дененің сызықтық жылдамдығы  $\vec{v} = [\vec{\omega} \times \vec{r}]$  болатын өрістің роторы мен дивергенциясын анықтаңыздар (мұндағы  $\vec{r}$  – радиус-вектор).

9.  $Oz$  осінің оң бағытымен сүйір бұрыш жасайтын  $S$  бетінің нормаль бағытындағы  $M$  нүктесіндегі  $u(x, y, z)$  скалярлық өрісінің туындысын табыңыздар.

$$9.1. u = 4 \ln(3 + x^2) - 8xyz, S: x^2 - 2y^2 + 2z^2 = 1, M(1, 1, 1).$$

$$9.2. u = x\sqrt{y} + y\sqrt{z}; S: 4z + 2x^2 - y^2 = 8, M(2, 4, 4).$$

$$9.3. u = -2 \ln(x^2 - 5) - 4xyz, S: x^2 + 2y^2 - 2z^2 = 1, M(1, 1, 1).$$

$$9.4. u = \frac{1}{4}x^2y - \sqrt{x^2 + 5z^2}, S: z^2 = x^2 + 4y^2 - 4, M\left(-2, \frac{1}{2}, 1\right).$$

$$9.5. u = xz^2 - \sqrt{x^3y}, S: x^2 - y^2 - 3z + 12 = 0, M(2, 2, 4).$$

$$9.6. u = x\sqrt{y} - yz^2, S: x^2 + y^2 = 4z + 9, M(2, 1, -1).$$

$$9.7. u = 7 \ln(1/13 + x^2) - 4xyz, S: 7x^2 - 4y^2 + 4z^2 = 7, M(1, 1, 1).$$

$$9.8. u = \arctg(y/x) + xz, S: x^2 + y^2 - 2z = 10, M(2, 2, -1).$$

$$9.9. u = \ln(1 + x^2) - xy\sqrt{z}, S: 4x^2 - y^2 + z^2 = 16, M(1, -2, 4).$$

$$9.10. u = \sqrt{x^2 + y^2} - z, S: x^2 + y^2 = 24z + 1, M(3, 4, 1).$$

$u(x, y, z)$  және  $v(x, y, z)$  скалярлық өрістері градиенттерінің арасындағы  $M$  нүктесіндегі бұрышын табыңыздар:

$$10.1. v = \frac{x^2}{2} + 6y^3 + 3\sqrt{6}z^3, u = \frac{yz^2}{x^2}, M\left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

$$10.2. v = \frac{4\sqrt{6}}{x} - \frac{\sqrt{6}}{9y} + \frac{3}{z}, u = x^2 yz^3, M\left(2, \frac{1}{3}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right).$$

$$10.3. v = 9\sqrt{2}x^3 - \frac{y^3}{2\sqrt{2}} - \frac{4z^3}{\sqrt{3}}, u = \frac{z^3}{xy^2}, M\left(\frac{1}{3}, 2, \sqrt{\frac{3}{2}}\right).$$

$$10.4. v = \frac{3}{x} + \frac{4}{y} - \frac{1}{\sqrt{6}z}, u = \frac{z}{x^3 y^2}, M\left(1, 2, \frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

$$10.5. v = \frac{x^3}{2} + 6y^3 + 3\sqrt{6}z^3, u = \frac{x^2}{yz^2}, M\left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

$$10.6. v = 3\sqrt{2}x^2 - \frac{y^2}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}z^3, u = \frac{z^2}{xy^2}, M\left(\frac{1}{3}, 2, \sqrt{\frac{2}{3}}\right).$$

$$10.7. v = 6\sqrt{6}x^3 - 6\sqrt{6}y^3 + 2z^3, u = \frac{xz^2}{y}, M\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, 1\right).$$

$$10.8. v = \frac{\sqrt{6}}{2x} - \frac{\sqrt{6}}{2y} + \frac{2}{3z}, u = \frac{yz^2}{x}, M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

$$10.9. v = 3\sqrt{2}x^2 - \frac{y^2}{\sqrt{2}} - 3\sqrt{2}z^2, u = \frac{xy^2}{z^2}, M\left(\frac{1}{3}, 2, \sqrt{\frac{2}{3}}\right).$$

$$10.10. v = \frac{3}{x} + \frac{4}{y} - \frac{1}{\sqrt{6}z}, u = \frac{x^3 y^2}{z}, M\left(1, 2, \frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

11.  $\vec{a}$  векторлық өрісінің векторлық сызықтарын табыңыздар:

$$11.1. \vec{a} = 4y\vec{i} - 9x\vec{j}.$$

$$11.2. \vec{a} = 2y\vec{i} + 3x\vec{j}.$$

$$11.3. \vec{a} = 2x\vec{i} + 4y\vec{j}.$$

$$11.4. \vec{a} = 2y\vec{i} + 3x\vec{j}.$$

$$11.5. \vec{a} = x\vec{i} + 4y\vec{j}.$$

$$11.6. \vec{a} = 3x\vec{i} + 6z\vec{k}.$$

$$11.7. \vec{a} = 4z\vec{i} - 9x\vec{k}.$$

$$11.8. \vec{a} = 2z\vec{i} + 3x\vec{k}.$$

$$11.9. \vec{a} = 4y\vec{j} + 8z\vec{k}.$$

$$11.10. \vec{a} = y\vec{j} + 3z\vec{k}.$$

12.  $P_1, P_2$  жазықтықтарын қиғаннан пайда болатын  $S$  беттерінің бөлігінен  $\vec{a}$  векторлық өрісінің ағынын табыңыздар. Мұнда аталған беттерден құралған тұйық беттің нормалі сыртқа бағытталғанын ескеру қажет.

$$12.1. \vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$S: x^2 + y^2 = 1,$$

$$P_1: z = 0, \quad P_2: z = 2.$$

$$12.2. \vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} - z\vec{k}$$

$$S: x^2 + y^2 = 1,$$

$$P_1: z = 0, \quad P_2: z = 4.$$

$$12.3. \vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + 2z\vec{k}$$

$$S: x^2 + y^2 = 1,$$

$$P_1: z = 0, \quad P_2: z = 3.$$

$$12.4. \vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z^3\vec{k}$$

$$S: x^2 + y^2 = 1,$$

$$P_1: z = 0, \quad P_2: z = 1.$$

$$12.5. \vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + xyz\vec{k}$$

$$S: x^2 + y^2 = 1,$$

$$P_1: z = 0, \quad P_2: z = 5.$$

$$12.6. \vec{a} = (x - y)\vec{i} + (x + y)\vec{j} + z^2\vec{k}$$

$$S: x^2 + y^2 = 1,$$

$$P_1: z = 0, \quad P_2: z = 2.$$

$$12.7. \vec{a} = (x + y)\vec{i} - (x - y)\vec{j} + xyz\vec{k}$$

$$S: x^2 + y^2 = 1,$$

$$P_1: z = 0, \quad P_2: z = 4.$$

$$12.8. \vec{a} = (x^3 + xy^2)\vec{i} + (y^3 + x^2y)\vec{j} + z^2\vec{k}$$

$$S: x^2 + y^2 = 1,$$

$$P_1: z = 0, \quad P_2: z = 3.$$

$$12.9. \vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + \sin z\vec{k}$$

$$S: x^2 + y^2 = 1,$$

$$P_1: z = 0, \quad P_2: z = 5.$$

$$12.10. \vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + \vec{k}$$

$$S: x^2 + y^2 = 1,$$

$$P_1: z = 0, \quad P_2: z = 2.$$

13. Бірінші октантта орналасқан  $P$  жазықтығының бөлігі арқылы  $\vec{a}$  векторлық өрістің ағынын табыңыздар. Нормальдің  $Oz$  осімен сүйір бұрыш құрайтынын ескеріңіздер.

$$13.1. \vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$P: x + y + z = 1.$$

$$13.2. \vec{a} = y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$P: x + y + z = 1.$$

$$13.3. \vec{a} = 2x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$P: x + y + z = 1.$$

$$13.4. \vec{a} = x\vec{i} + 3y\vec{j} + 2z\vec{k}$$

$$P: x + y + z = 1.$$

$$13.5. \vec{a} = 2x\vec{i} + 3y\vec{j}$$

$$P: x + y + z = 1.$$

$$13.6. \vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$P: x/2 + y + z = 1.$$

$$13.7. \vec{a} = x\vec{i} + 2y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$P: x/2 + y + z = 1.$$

$$13.8. \vec{a} = y\vec{j} + 3z\vec{k}$$

$$P: x/2 + y + z = 1.$$

$$13.9. \vec{a} = x\vec{i} + 2y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$P: x + y/2 + z/3 = 1.$$

$$13.10. \vec{a} = 2x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$P: x + y/2 + z/3 = 1.$$

14. Бірінші октантта орналасқан  $P$  жазықтығының бөлігі арқылы  $\vec{a}$  векторлық өрісінің ағынын табыңыздар. Нормальдің  $Oz$  осімен сүйір бұрыш құрайтынын ескеріңіздер.

$$14.1. \vec{a} = 7x\vec{i} + (5\pi y + 2)\vec{j} + 4\pi z\vec{k},$$

$$P: x + y/2 + 4z = 1.$$

$$14.2. \vec{a} = 2\pi x\vec{i} + (7y + 2)\vec{j} + 7\pi z\vec{k},$$

$$P: x + y/2 + z/3 = 1.$$

$$14.3. \vec{a} = 9\pi x\vec{i} + \vec{j} - 3z\vec{k},$$

$$P: x/3 + y + z = 1.$$

$$14.4. \vec{a} = (2x + 1)\vec{i} - y\vec{j} + 3\pi z\vec{k},$$

$$P: x/3 + y + 2z = 1.$$

$$14.5. \vec{a} = 7x\vec{i} + 9\pi y\vec{j} + \vec{k},$$

$$P: x + y/3 + z = 1.$$

$$14.6. \vec{a} = \vec{i} + 5y\vec{j} + 11\pi z\vec{k},$$

$$P: x + y + z/3 = 1.$$

$$14.7. \vec{a} = x\vec{i} + (\pi z - 1)\vec{k},$$

$$P: 2x + y/2 + z/3 = 1.$$

$$14.8. \vec{a} = 5\pi x\vec{i} + (9y + 1)\vec{j} + 4\pi z\vec{k},$$

$$P: x/2 + y/3 + z/2 = 1.$$

$$14.9. \vec{a} = 2\vec{i} - y\vec{j} + \left(\frac{3\pi}{2}\right)z\vec{k},$$

$$P: x/3 + y + z/4 = 1.$$

$$14.10. \vec{a} = (e^z + 2x)\vec{i} + e^x\vec{j} + e^y\vec{k},$$

$$S: x + y + z = 1, x = 0, y = 0, z = 0.$$

15.  $S$  тұйық беті (сыртқы нормаль) арқылы  $\vec{a}$  векторлық өрісінің ағынын табыңыздар.

$$15.1. \vec{a} = (e^z + 2x)\vec{i} + e^x\vec{j} + e^y\vec{k},$$

$$S: x + y + z = 1, x = 0, y = 0, z = 0.$$

$$15.2. \vec{a} = (3z^2 + x)\vec{i} + (e^x - 2y)\vec{j} + (2z - xy)\vec{k},$$
$$S: x^2 + y^2 = z^2, z = 1, z = 4.$$

$$15.3. \vec{a} = (\ln y + 7x)\vec{i} + (\sin z - 2y)\vec{j} + (e^y - 2z)\vec{k},$$
$$S: x^2 + y^2 + z^2 = 2x + 2y + 2z - 2.$$

$$15.4. \vec{a} = (\cos z + 3x)\vec{i} + (x - 2y)\vec{j} + (3z + y^2)\vec{k},$$
$$S: z^2 = 36(x^2 + y^2), z = 6.$$

$$15.5. \vec{a} = (e^{-z} - x)\vec{i} + (xz + 3y)\vec{j} + (z + x^2)\vec{k},$$
$$S: 2x + y + z = 2, x = 0, y = 0, z = 0.$$

$$15.6. \vec{a} = (6x - \cos y)\vec{i} - (e^x + z)\vec{j} - (2y + 3z)\vec{k},$$
$$S: x^2 + y^2 = z^2, z = 1, z = 2.$$

$$15.7. \vec{a} = (4x - 2y^2)\vec{i} - (\ln z - 4y)\vec{j} + (x + 3z/4)\vec{k},$$
$$S: x^2 + y^2 + z^2 = 2x + 3.$$

$$15.8. \vec{a} = (1 + \sqrt{z})\vec{i} + (4y - \sqrt{x})\vec{j} + xy\vec{k},$$
$$S: z^2 = 4(x^2 + y^2), z = 3.$$

$$15.9. \vec{a} = (\sqrt{z} - x)\vec{i} + (x - y)\vec{j} + (y^2 - z)\vec{k},$$
$$S: 3x - 2y + z = 6, x = 0, y = 0, z = 0.$$

$$15.10. \vec{a} = (yz + x)\vec{i} + (x^2 + y)\vec{j} + (xy^2 + z)\vec{k},$$
$$S: x^2 + y^2 + z^2 = 2z.$$

16.  $S$  тұйық беті (сыртқы нормаль) арқылы  $\vec{a}$  векторлық өрісінің ағынын табыңыздар.

$$16.1. \vec{a} = (x+z)\vec{i} + (z+y)\vec{k},$$

$$S: \begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ z = x, z = 0 (z \geq 0). \end{cases}$$

$$16.2. \vec{a} = 2x\vec{i} + z\vec{k},$$

$$S: \begin{cases} z = 3x^2 + 2y^2 + 1, \\ x^2 + y^2 = 4, z = 0. \end{cases}$$

$$16.3. \vec{a} = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + z\vec{k},$$

$$S: \begin{cases} y = x^2, y = 4x^2, y = 1 (x \geq 0) \\ z = y, z = 0. \end{cases}$$

$$16.4. \vec{a} = 3x\vec{i} - z\vec{j},$$

$$S: \begin{cases} z = 6 - x^2 - y^2, \\ z^2 = x^2 + y^2 (z \geq 0). \end{cases}$$

$$16.5. \vec{a} = (z+y)\vec{i} + y\vec{j} - x\vec{k},$$

$$S: \begin{cases} x^2 + y^2 = 2y, \\ y = 2. \end{cases}$$

$$16.6. \vec{a} = x\vec{i} - (x+2y)\vec{j} + y\vec{k},$$

$$S: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, z = 0, \\ x + 2y + 3z = 6. \end{cases}$$

$$16.7. \vec{a} = 2(z-y)\vec{j} + (x-z)\vec{k},$$

$$S: \begin{cases} z = x^2 + 3y^2 + 1, z = 0, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

$$16.8. \vec{a} = x\vec{i} + z\vec{j} - y\vec{k},$$

$$S: \begin{cases} z = 4 - 2(x^2 + y^2), \\ z = 2(x^2 + y^2). \end{cases}$$

$$16.9. \vec{a} = z\vec{i} - 4y\vec{j} + 2x\vec{k},$$

$$S: \begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ z = 1. \end{cases}$$

$$16.10. \vec{a} = 4x\vec{i} - 2y\vec{j} - z\vec{k},$$

$$S: \begin{cases} 3x + 2y = 12, & 3x + y = 6, & y = 0, \\ x + y + z = 6, & z = 0. \end{cases}$$

17.  $S$  тұйық беті (сыртқы нормаль) арқылы  $\vec{a}$  векторлық өрісінің ағынын табыңыздар.

$$17.1. \vec{a} = (x^2 + y^2)\vec{i} + (y^2 + x^2)\vec{j} + (y^2 + z^2)\vec{k},$$

$$S: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 0, & z = 1. \end{cases}$$

$$17.2. \vec{a} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k},$$

$$S: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ x^2 + y^2 = z^2, & (z \geq 0). \end{cases}$$

$$17.3. \vec{a} = x^2\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

$$S: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ z = 0, & (z \geq 0). \end{cases}$$

$$17.4. \vec{a} = xz\vec{i} + z\vec{j} + y\vec{k},$$

$$S: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 - z, \\ z = 0. \end{cases}$$

$$17.5. \vec{a} = 3xz\vec{i} - 2x\vec{j} + y\vec{k},$$

$$S: \begin{cases} x + y + z = 2, & x = 1, \\ x = 0, y = 0, z = 0. \end{cases}$$

$$17.6. \vec{a} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k},$$

$$S: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2, \\ z = 0 \quad (z \geq 0). \end{cases}$$

$$17.7. \vec{a} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k},$$

$$S: x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

$$17.8. \vec{a} = (zx + y)\vec{i} + (zy - x)\vec{j} - (x^2 + y^2)\vec{k},$$

$$S: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ z = 0, \quad (z \geq 0). \end{cases}$$

$$17.9. \vec{a} = y^2x\vec{i} + z^2y\vec{j} + x^2z\vec{k},$$

$$S: x^2 + y^2 + z = 1.$$

$$17.10. \vec{a} = x^2\vec{i} + xy\vec{j} + 3z\vec{k},$$

$$S: \begin{cases} x^2 + y^2 = z^2, \\ z = 4. \end{cases}$$

18.  $M$  нүктесінен  $N$  нүктесіне дейінгі  $L$  сызығының бойымен қозғалғандағы  $\vec{F}$  күшінің жұмысын табыңыздар.

$$18.1. \vec{F} = (x^2 + 2y)\vec{i} + (y^2 + 2x)\vec{j},$$

$$L: 2 - x^2/8 = y,$$

$$M(-4, 0), N(0, 2).$$

- 18.2.  $\vec{F} = (x+y)\vec{i} + 2x\vec{j}$ ,  
 $L: x^2 + y^2 = 4 \ (y \geq 0)$ ,  
 $M(2,0), N(-2,0)$ .
- 18.3.  $\vec{F} = x^3\vec{i} - y^3\vec{j}$ ,  
 $L: x^2 + y^2 = 4, \ (x \geq 0, y \geq 0)$ .  
 $M(2,0), N(0,2)$ .
- 18.4.  $\vec{F} = (x+y)\vec{i} + (x-y)\vec{j}$ ,  
 $L: y = x^2$ ,  
 $M(-1,1), N(1,1)$ .
- 18.5.  $\vec{F} = (2xy - y)\vec{i} + (x^2 + x)\vec{j}$ ,  
 $L: x^2 + y^2 = 9, \ (y \geq 0)$ ,  
 $M(3,0), N(-3,0)$ .
- 18.6.  $\vec{F} = (x+y)\vec{i} + (x-y)\vec{j}$ ,  
 $L: (x^2 + y^2)/9 = 1 \ (x \geq 0, y \geq 0)$ ,  
 $M(3,0), N(0,3)$ .
- 18.7.  $\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j}$ ,  
 $L: x^2 + y^2 = 1 \ (y \geq 0)$ ,  
 $M(1,0), N(-1,0)$ .
- 18.8.  $\vec{F} = (x^2 + y^2)\vec{i} + (x^2 - y^2)\vec{j}$ ,  
 $L: \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1; \\ 2-x, & 1 \leq x \leq 2; \end{cases}$   
 $M(2,0), N(0,0)$ .
- 18.9.  $\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j}$ ,  
 $L: x^2 + y^2 = 2, \ (y \geq 0)$ ,  
 $M(\sqrt{2},0), N(-\sqrt{2},0)$ .

$$18.10. \vec{F} = xy\vec{i} + 2y\vec{j},$$

$$L: x^2 + y^2 = 1, (x \geq 0, y \geq 0),$$

$$M(1,0), N(0,1).$$

19.  $\Gamma$  контурының бойымен ( $t$  параметрінің өсу бағытында)  $\vec{a}$  векторлық өрістің циркуляциясын табыңыздар.

$$19.1. \vec{a} = y\vec{i} - x\vec{j} + z^2\vec{k},$$

$$\Gamma: \begin{cases} x = (\sqrt{2}/2)\cos t, y = (\sqrt{2}/2)\cos t, \\ z = \sin t. \end{cases}$$

$$19.2. \vec{a} = -x^2y^3\vec{i} + \vec{j} + z\vec{k},$$

$$\Gamma: \begin{cases} x = \sqrt[3]{4}\cos t, y = \sqrt[3]{4}\sin t, \\ z = 3. \end{cases}$$

$$19.3. \vec{a} = (y-z)\vec{i} + (z-x)\vec{j} + (x-y)\vec{k},$$

$$\Gamma: \begin{cases} x = \cos t, y = \sin t, \\ z = 2(1 - \cos t). \end{cases}$$

$$19.4. \vec{a} = x^2\vec{i} + y\vec{j} - z\vec{k},$$

$$\Gamma: \begin{cases} x = \cos t, y = (\sqrt{2}\sin t)/2, \\ z = (\sqrt{2}\cos t)/2. \end{cases}$$

$$19.5. \vec{a} = (y-z)\vec{i} + (z-x)\vec{j} + (x-y)\vec{k},$$

$$\Gamma: \begin{cases} x = 4\cos t, y = 4\sin t, \\ z = 1 - \cos t. \end{cases}$$

$$19.6. \vec{a} = 2y\vec{i} - 3x\vec{j} + x\vec{k},$$

$$\Gamma: \begin{cases} x = 2\cos t, y = 2\sin t, \\ z = 2 - 2\cos t - 2\sin t. \end{cases}$$

$$19.7. \vec{a} = 2z\vec{i} - x\vec{j} + y\vec{k},$$

$$\Gamma: \begin{cases} x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, \\ z = 1. \end{cases}$$

$$19.8. \vec{a} = y\vec{i} - x\vec{j} + z\vec{k},$$

$$\Gamma: \begin{cases} x = \cos t, y = \sin t, \\ z = 3. \end{cases}$$

$$19.9. \vec{a} = x\vec{i} + z^2\vec{j} + y\vec{k},$$

$$\Gamma: \begin{cases} x = \cos t, y = 2 \sin t, \\ z = 2 \cos t - 2 \sin t - 1. \end{cases}$$

$$19.10. \vec{a} = 3y\vec{i} - 3x\vec{j} + x\vec{k},$$

$$\Gamma: \begin{cases} x = 3 \cos t, y = 3 \sin t, \\ z = 3 - 3 \cos t - 3 \sin t. \end{cases}$$

20.  $\Gamma$  контурының бойымен  $\vec{a}$  векторлық өрісі циркуляциясының модулін табыңыздар.

$$20.1. \vec{a} = (x^2 - y)\vec{i} + x\vec{j} + \vec{k},$$

$$\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 1. \end{cases}$$

$$20.2. \vec{a} = xz\vec{i} - \vec{j} + y\vec{k},$$

$$\Gamma: \begin{cases} z = 5(x^2 + y^2) - 1, \\ z = 4. \end{cases}$$

$$20.3. \vec{a} = yz\vec{i} + 2xz\vec{j} + xy\vec{k},$$

$$\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25, \\ x^2 + y^2 = 9 \quad (z > 0). \end{cases}$$

$$20.4. \vec{a} = x\vec{i} + yz\vec{j} - x\vec{k},$$

$$\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + y + z = 1. \end{cases}$$

$$20.5. \vec{a} = (x - y)\vec{i} + x\vec{j} - z\vec{k},$$

$$\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 1. \end{cases}$$

$$20.6. \vec{a} = y\vec{i} - x\vec{j} + z^2\vec{k},$$

$$\Gamma: \begin{cases} z = 3(x^2 + y^2) + 1, \\ z = 4. \end{cases}$$

$$20.7. \vec{a} = yz\vec{i} + 2xz\vec{j} + y^2\vec{k},$$

$$\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25, \\ x^2 + y^2 = 16 \quad (z > 0). \end{cases}$$

$$20.8. \vec{a} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + xz\vec{k},$$

$$\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ x + y + z = 1. \end{cases}$$

$$20.9. \vec{a} = y\vec{i} + (1 - x)\vec{j} - z\vec{k},$$

$$\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ x^2 + y^2 = 1 \quad (z > 0). \end{cases}$$

$$20.10. \vec{a} = y\vec{i} - x\vec{j} + z^2\vec{k},$$

$$\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 4. \end{cases}$$

## ТЕРМИНДЕРДІҢ ҚЫСҚАША СӨЗДІГІ

### А

Абсолют шамасы- вектордың	Абсолютная величина - вектора	Magnitude of vector
Аксиал векторлар	Аксиальные векторы	Axial vector
Анықтауыш	Определитель	Determinant
Антикоммутация	Антикоммутация	Anti-commutative
Антисимметриялы тензорлар	Антисимметричные тензоры	Antisymmetric tensors
Аралас көбейтінді	Смешанное произведение	Triple scalar product
Аффинор	Аффинор	Affinor (dyadics)

### Ә

Әулет	Семейство	Family
-------	-----------	--------

### Б

Бағыттаушы косинустар	Направляющие косинусы	Direction cosines
Беттің векторлық элементі	Векторный элемент поверхности	Vector area element
Биполярлық координаталары	Биполярные координаты	Bipolar Coordinates
Бисфералық координаталары	Бисферические координаты	Bispherical Coordinates
Бөлінді ережесі	Правило частного	Quotient rule
Бірлік вектор	Единичный вектор	Unit vector
Бірлік нормаль вектор	Единичный (нормальный) вектор	Normal vector

### В

Вектор	Вектор	Vector
Векторларды интегралдау	Интегрирование векторов	Integration of vectors
Вектор коварианттық	Ковариантный вектор	Covariant

Вектор контраварианттық	Контравариантный вектор	
Векторлық көбейтінді	Векторное произведение	Vector product; vector (cross) product
Векторлық дифференциалдық оператор	Векторный дифференциальный оператор	Differential vector operator
Векторлық лапласиан	Векторный лапласиан	Vector Laplacian
Векторлық шамалар	Векторные величины	Vector quantities

### Г

Гаусс теоремасы	Теорема Гаусса	Gauss's theorem
Гаусс заңы	Закон Гаусса	Gauss's law
Гельмгольц теңдеуі	Уравнение Гельмгольца	Helmholtz equation
Гельмгольц теоремасы	Теорема Гельмгольца	Helmholtz's theorem
Градиент	Градиент	Gradient
Грин теоремасы	Теорема Грина	Green's theorem
Гук заңы	Закон Гука	Hooke's law

### Д

Декарт координаталары	Декартовы координаты	Cartesian Coordinates
Дивергенция	Дивергенция	Divergence
Дивергенцияның физикалық мағынасы	Физическая сущность дивергенции	Physical significance of divergence

### Е

Екі ретті векторлық көбейтінді	Двойное векторное произведение	Triple vector product
--------------------------------	--------------------------------	-----------------------

### К

Кернеулік, механикалық	Напряжение механическое	Stress (mechanics)
Коварианттық пішін	Ковариантная форма	Covariant
Коммутация	Коммутация	Commutative

Конустық координаталары	Конические координаты	Conical Coordinates
Косинустар заңы	Закон косинусов	The law of cosines
Кронекер символы	Символ Кронекера	Kronecker delta

### Қ

Қосындылау ережесі	Правило суммирования	Summation convention
Қос фокусты эллипсоидтық координаталары	Софокусные эллипсоидальные координаты	Confocal ellipsoidal coordinates
Қос фокусты параболоидтық координаталары	Софокусные параболоидальные координаты	Confocal paraboloidal coordinates
Құйынсыз векторлар	Безвихревые векторы	Irrotational vectors

### Л

Лапласиан	Лапласиан	Laplacian
Ламе коэффициенттері	Коэффициенты Ламе	Metric; Lamer's coefficients

### М

Максвелл тендеулері	Уравнения Максвелла	Maxwell's equations
---------------------	---------------------	---------------------

### О

Ортогоналдық векторлар	Ортогональные векторы	Orthogonal vectors
------------------------	-----------------------	--------------------

### Ө

Өлшемдік түрлендіру	Калибровочное преобразование	Gauge theory
---------------------	------------------------------	--------------

### П

Параболалық цилиндрлер координаталары	Параболические цилиндрические координаты	Parabolic cylindrical coordinates
Параболоидтық координаталары	Параболические координаты	Parabolic coordinates

Полярлық векторлар	Полярные векторы	Polar vectors
Потенциал теориясы	Теория потенциала	Potential theory
Псевдовекторлар	Псевдовекторы	Pseudovectors; axial vectors
Псевдотензорлар	Псевдотензоры	Pseudotensors
Пуассон тендеуі	Уравнение Пуассона	Poisson's equation

### P

Радиус-вектор	Радиус-вектор	Radius-vector
Ротор	Ротор	Curl

### C

Серпiмдiлiк теориясы	Теория упругости	Elasticity
Сетiнеу	Вырождение	Degeneration
Симметриялы тензор	Симметричный тензор	Symmetry tensors
Скаляр	Скаляр	Scalar
Скалярлық көбейтiндi	Скалярное произведение	Scalar product; dot product of vectors
Скалярлық функция	Скалярная функция	Scalar function
Стокс теоремасы	Теорема Стокса	Stoke's theorem
Созылған сфероидтың координаталары	Координаты вытянутого сфероида	Prolate spheroidal coordinates
Сығылған сфероидтың координаталары	Координаты сплюсченного сфероида	Oblate spheroidal coordinates
Сфералық координаталар	Сферические координаты	Spherical Coordinates

### T

Талшықтану	Расщепление	Split
Тензор - екі өлшемді	Тензор - двумерный	Tensor - two-dimensional
Тензорлық тығыздықтар	Тензорные плотности	Tensor density

Тікелей көбейтінді	Прямое произведение	Direct product
Тороидтық координаталары	Тороидальные координаты	Toroidal coordinates
<b>Ү</b>		
Үстелену	Вырождение	Degeneration
<b>Ұ</b>		
Ұзындық өсімшесі	Приращение длины	Differential length
<b>Ш</b>		
Шағылу амалы	Инверсия	Inversion
Шашыраңқылық	Дивергенция	Divergence
Штарк эффектісі	Эффект Штарка	Stark effect
<b>Ы</b>		
Ықшамдау амалы	Свертывание	Convolution (faltung); Constraction
<b>Ц</b>		
Цилиндрлік координаталар жүйесі	Система цилиндрических координат	Cylindrical coordinate system
<b>Э</b>		
Эллипстік цилиндрлік координаталары	Эллиптические цилиндрические координаты	Elliptic cylindrical coordinates

## Әдебиеттер

1. Жақсыбекова К. А., Буркова Н. А., Сахиев С. Қ. Векторлық және тензорлық талдау негіздері. Алматы, Қазақ университеті, 2003, 104 бет.
2. Сауытбеков С. С. Физиктерге арналған тензорлық анализ. Алматы, Қазақ университеті. 2003, 98 бет.
3. Кожамкулов Т. А., Мурзағалиев Г. Д. Элементы тензорного исчисления в евклидовом пространстве. Алма-Ата, Изд-во КазГУ. 1981, 118 с.
4. Кочин Н. Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М.: Наука, 1965, 426 с.
5. Арфкен Г. Математические методы в физике. М.: Атомиздат, 1970, 712 с.
6. Борисенко А. И., Таранов И. Е. Векторный анализ и начала тензорного исчисления. М.: Высшая школа, 1963, 262 с.
7. Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И. Векторный анализ. М., 2009. – 140 с.
8. Гречко Л. Г., Сугаков В. И. и др. Сборник задач по теоретической физике. М.: Высшая школа, 1972, 335 с.

### Қосымша:

1. Arfken George, Mathematical Methods for Physicists. Department of Physics, Miami University, Oxford, Ohio, Academic PRESS, New York, London, 654 p.
2. Алапашвили Г. Д. Основы векторного анализа и элементы теории поля. М.: Высшая школа, 1962, 80 с.

## МАЗМҰНЫ

КІРІСПЕ СӨЗ .....	3
-------------------	---

### 1 - т а р а у. ВЕКТОРЛЫҚ АЛГЕБРА

1.1 Негізгі түсініктер .....	5
1.2 Координаталар жүйесінің бұрылуы .....	9
1.3 Скалярлық көбейтінді .....	15
1.4 Векторлық көбейтінді .....	19
1.5 Үш вектордың аралас және екі ретті векторлық көбейтінділері .....	25

### ВЕКТОРЛЫҚ ТАЛДАУ

1.6 Градиент .....	32
1.7 Дивергенция .....	38
1.8 Ротор .....	41
1.9 $\bar{\nabla}$ операторын біртіндеп қолдану .....	45
1.10 Векторларды интегралдау .....	50
1.11 Гаусс теоремасы .....	56
1.12 Стокс теоремасы .....	58
1.13 Потенциал теориясы .....	62
1.14 Гаусс заңы. Пуассон тендеуі .....	72
1.15 Гельмгольц теоремасы .....	75

### 2 - т а р а у. КООРДИНАТАЛАР ЖҮЙЕЛЕРІ

2.1 Қисық сызықты координаталар .....	84
2.2 Дифференциалды векторлық операторлар .....	86
2.3 Декарт (тікбұрышты) координаталары .....	91
2.4 Сфералық координаталар .....	92
2.5 Айнымалыларды ажырату .....	96
2.6 Цилиндрлік координаталар жүйесі .....	101
2.7 Эллипстік цилиндрлік координаталары $u, v, z$ .....	104
2.8 Параболалық цилиндрлер координаталары $\xi, \eta, z$ .....	107
2.9 Биполярлық координаталары $\xi, \eta, z$ .....	109
2.10 Созылған сфероидтың координаталары $u, v, \varphi$ .....	113
2.11 Сығылған сфероидтың координаталары $u, v, \varphi$ .....	120

2.12	Параболоидтық координаталары $o, z, u$ .....	123
2.13	Тороидтық координаталары $o, z, u$ .....	126
2.14	Бисфералық координаталары $\xi, \eta, \varphi$ .....	129
2.15	Қос фокусты эллипсоидтық координаталары $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ .....	131
2.16	Конустық координаталары $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ .....	133
2.17	Қос фокусты параболоидтық координаталары $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ .....	134

### **3 - т а р а у. ТЕНЗОРЛЫҚ ТАЛДАУ**

3.1	Кіріспе. Негізгі түсініктер.....	137
3.2	Тікелей көбейтінді .....	144
3.3	Бөлінді ережесі .....	146
3.4	Псевдотензорлар .....	147
3.5	Аффинорлар.....	153
3.6	Серпімділік теориясы .....	156
3.7	Максвелл теңдеулерінің ковариантты пішіні .....	165

### **4 - т а р а у. ЕСЕПТЕР**

4.1	Есептерді шығару мысалдары .....	173
4.2	Өзіндік жұмыс есептері.....	185
	ТЕРМИНДЕРДІҢ ҚЫСҚАША СӨЗДІГІ.....	200
	Әдебиеттер.....	205

**С. Қ. Сахиев**

**ВЕКТОРЛЫҚ ЖӘНЕ ТЕНЗОРЛЫҚ ТАЛДАУ НЕГІЗДЕРІ**

*Оқулық*

Басуға 28.12.2012 қол қойылды. Қағазы офсеттік. Қаріп түрі «Times».  
Пішіні 60x90/16. Офсеттік басылым. Баспа табағы 13,0.  
Таралымы 1200 дана. Тапсырыс № 1265.

Тапсырыс берушінің дайын файлдарынан басылып шықты.



ЖШС РПБК «Дәуір», 050009,  
Алматы қаласы, Гагарин д-лы, 93а.  
E-mail: rpik-daur81@mail.ru