

ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

НЕГІЗГІ ЗАҢДАР

И. Е. Иродов

ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ

7-Е ИЗДАНИЕ

Рекомендовано
учебно-методическим объединением
в области «Ядерная физика и технологии»
в качестве учебного пособия
для студентов физических специальностей
высших учебных заведений



Москва
БИНОМ. Лаборатория знаний
2010

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ ЖОҒАРЫ ОҚУ ОРЫНДАРЫНЫҢ
ҚАУЫМДАСТЫҒЫ

И. Е. ИРОДОВ

ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

НЕГІЗГІ ЗАҢДАР

ОҚУЛЫҚ

Алматы, 2013

ӘОЖ 537(075.8)

КБЖ 31.264 я 73

И 81

Қазақ тіліне аударғандар:

**Ибраева Г.И., Кулшыкова А.С.,
Құрманбай М.С., Тулепбергенов С.К.**

Иродов И.Е.

И 81 Электромагнетизм. Негізгі заңдар: Оқулық / И.Е. Иродов;
ауд. Г.И. Ибраева, А.С. Кулшыкова, М.С. Құрманбай, С.К. Тулеп-
бергенов. – Алматы: 2013. – 336 б.

ISBN 978-601-80333-4-6

Оқу құралы теориялық материалдан, (электромагнетизмнің негізгі идеялары) сондай-ақ көптеген мысалдар мен есептерді талдаудан тұрады. Есептер негізгі мәтінмен тығыз байланысқан және оның дамытылуы және толықтырылуы болып табылады. Кітап материалы мүмкіндігінше артық математикаландырудан босатылған – негізінен қарастырылып отырған құбылыстардың физикалық жағына ерекше көңіл бөлінген.

Жоғары оқу орындарының физика мамандығының студенттеріне арналған.

ӘОЖ 537(075.8)

КБЖ 31.264 я 73

ISBN 978-601-80333-4-6

ISBN 978-5-9963-0281-9

© БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010

© Қазақ тіліндегі басылым. ҚР жоғары оқу
орындарының қауымдастығы, 2013

Мазмұны



4-ші басылымға алғысөз.....	8
Қабылданған белгілеулер.....	10
1-тарау. Вакуумдағы электростатикалық өріс.....	12
§ 1.1. Электр өрісі.....	12
§ 1.2. Гаусс теоремасы.....	17
§ 1.3. Гаусс теоремасының қолданылулары.....	20
§ 1.4. Дифференциалдық түрдегі Гаусс теоремасы.....	25
§ 1.5. E векторының циркуляциясы. Потенциал.....	27
§ 1.6. Потенциал мен E векторы арасындағы байланыс.....	32
§ 1.7. Электрлік диполь.....	36
Есептер.....	41
2-тарау. Электр өрісіндегі өткізгіштер.....	49
§ 2.1. Заттағы өріс.....	49
§ 2.2. Өткізгіш ішіндегі және сыртындағы өріс.....	50
§ 2.3. Өткізгіш бетіне әсер ететін күштер.....	53
§ 2.4. Тұйықталған өткізгіш қабықшаның қасиеттері.....	54
§ 2.5. Электростатиканың жалпы есебі. Кескіндеу әдісі.....	57
§ 2.6. Электр сыйымдылық. Конденсаторлар.....	61
Есептер.....	64
3-тарау. Диэлектриктегі электр өрісі.....	72
§ 3.1. Диэлектриктің полярлануы.....	72
§ 3.2. Полярлану P	75
§ 3.3. P векторы өрісінің қасиеттері.....	76
§ 3.4. D векторы.....	80
§ 3.5. Шекаралық шарттар.....	84
§ 3.6. Біртекті диэлектриктегі өріс.....	88
Есептер.....	91

4-тарау. Электр өрісінің энергиясы.....	100
§ 4.1. Зарядтар жүйесінің электр энергиясы.....	100
§ 4.2. Зарядталған өткізгіш пен конденсатор энергиясы.....	105
§ 4.3. Электр өрісінің энергиясы.....	106
§ 4.4. Екі зарядталған денелер жүйесі.....	111
§ 4.5. Диэлектрик бар кездегі күштер.....	112
Есептер.....	117
5-тарау. Тұрақты электр тогы.....	124
§ 5.1. Ток тығыздығы. Үздіксіздік теңдеуі.....	124
§ 5.2. Біртекті өткізгіш үшін Ом заңы.....	127
§ 5.3. Жалпыланған Ом заңы.....	129
§ 5.4. Тармақталған тізбектер. Кирхгоф ережелері.....	133
§ 5.5. Джоуль-Ленц заңы.....	137
§ 5.6. Конденсаторы бар тізбектегі өтпелі процестер.....	140
Есептер.	143
6-тарау. Вакуумдағы магнит өрісі.....	150
§ 6.1. Лоренц күші. B өрісі.....	150
§ 6.2. Био-Савар заңы.....	153
§ 6.3. Магнит өрісінің негізгі заңдары.....	156
§ 6.4. B векторының циркуляциясы туралы теореманың қолданылулары.....	159
§ 6.5. Магнит өрісінің негізгі заңдарының дифференциалдық түрі	163
§ 6.6. Ампер күші.....	165
§ 6.7. Тогы бар контурға әсер ететін күштердің моменті.....	168
§ 6.8. Тогы бар контур орын ауыстырған кездегі жұмыс.....	170
Есептер.....	173
7-тарау. Заттағы магнит өрісі.....	183
§ 7.1. Заттың магниттелуі. J магниттелгендік.....	183
§ 7.2. J векторының циркуляциясы.....	186
§ 7.3. H векторы.....	188
§ 7.4. B және H үшін шектік шарттар.....	193
§ 7.5. Біртекті магниттегі өріс.....	196
§ 7.6. Ферромагнетизм.....	199
Есептер.....	202

8-тарау. Электр және магнит өрістерінің салыстырмалылығы.....	210
§ 8.1. Электромагниттік өріс. Зарядтың инварианттылығы.....	210
§ 8.2. E және B өрістерін түрлендіру заңдары.....	212
§ 8.3. Өрістерді түрлендірулер заңдарының салдарлары.....	218
§ 8.4. Электромагниттік өріс инварианттары.....	220
Есептер.....	221
9-тарау. Электромагниттік индукция.....	231
§ 9.1. Электромагниттік индукция заңы.....	231
§ 9.2. Электромагниттік индукцияның табиғаты.....	234
§ 9.3. Өздік индукция құбылысы.....	240
§ 9.4. Өзара индукция.....	245
§ 9.5. Магнит өрісінің энергиясы.....	249
§ 9.6. Тоғы бар екі контурдың магнит энергиясы.....	253
§ 9.7. Магнит өрісіндегі энергия мен күштер.....	255
Есептер.....	260
10-тарау. Максвелл теңдеулері. Электромагниттік өрістің энергиясы 270	270
§ 10.1. Ығысу тогы.....	270
§ 10.2. Максвелл теңдеулерінің жүйесі.....	274
§ 10.3. Максвелл теңдеулерінің қасиеттері.....	278
§ 10.4. Энергия және энергия ағыны. Пойнтинг векторы.....	281
§ 10.5. Электромагниттік өріс импульсы.....	286
Есептер.....	288
11-тарау. Электрлік тербелістер.....	296
§ 11.1. Тербелмелі контурдың теңдеуі.....	296
§ 11.2. Еркін электрлік тербелістер.....	299
§ 11.3. Еріксіз электрлік тербелістер.....	304
§ 11.4. Айнымалы ток.....	309
Есептер.....	312
Қосымшалар.....	320
1. Шамалардың СИ және Гаусс жүйесіндегі бірліктері.....	320
2. Электромагнетизмнің СИ және Гаусс жүйесіндегі негізгі формулалар.....	321
3. Негізгі шамалар және СИ бірліктері.....	324
4. Грек алфавиті.....	325
5. Кейбір физикалық тұрақтылар.....	325
Тақырыптық көрсеткіш.....	326

4-ші басылымға алғысөз

Ұсынылып отырған кітаптың негізгі идеясы – бір оқу құралында теория принциптерін баяндау мен есеп шығару практикасын табиғи байланыста қатар қолдану. Осы мақсатта әрбір тарауда алдымен сәйкес мәселенің теориясы баяндалады (нақты мысалдарда иллюстрациялаумен), содан кейін бірқатар есептерге талдау жасалған, онда автордың пікірінше, оларды қалай шығарудың жолдары көрсетілген. Есептер негізгі мәтінмен тығыз байланысты, көбінесе оның дамытылуы және толықтырылуы болып табылады, сондықтан олармен жұмыс негізгі материалды оқып-білумен параллель жүргізілуі тиіс. Бұдан басқа, автордың түпкі ойынша, ұсынылып отырған есептер топтамасы оқушыларға бірқатар маңызды сұрақтарды қосымша ойлауға мүмкіндік беруі және оқып-білетін идеялардың қосымшаларының кең диапазонынан түсінік алуға көмектесуі керек (тіпті егер көптеген есептерді шығармай, жай оқып шығу).

Теориялық материалды баяндауда автор зейінді электромагнетизмнің негізгі заңдарына, дербес жағдайда түсінуге анағұрлым қиын сұрақтарға аудару үшін, мәтіннен барлық негізгі нәрселерді алып тастауға талпынды, негізгі идеяларды қысқа, түсінікті және сонымен бірге жеткілікті дәл баяндауға талпыну автордың материалды артық математикаландырудан мүмкіндігінше арылтып, қарастырылып отырған құбылыстардың физикалық жағына ерекше көңіл бөлуіне түрткі болды. Осы мақсатта әртүрлі модельдік түсініктер, оңайлататын факторлар дербес жағдайлар, симметрия түсініктері т.б. кеңінен пайдаланылған.

Баяндау СИ-де жүргізіледі. Сонымен бірге Гаусс жүйесінің жеткілікті кеңінен пайдаланылатыны ескеріліп, қосымшада негізгі бірліктер және анағұрлым маңызды формулалардың мәліметтері СИ-де, сондай-ақ Гаусс жүйесінде де берілген.

Аса маңызды қағидалар мен терминдер курсивпен белгіленген. Петит қиын материалдар және көп есептеулер, сондай-ақ мысалдар мен есептер үшін пайдаланылады (бұл материалды бірінші оқылымда қалдырып кетуге де болады).

Кітап оқу құралы ретінде физика бойынша кеңейтілген бағдарламадағы жоғары оқу орындарының студенттеріне арналған (физиканың жалпы курсы шеңберінде). Ол сондай-ақ жоғары оқу орындарының оқытушыларына пайдалы.

Төртінші басылымда кейбір толықтырулар мен анықтаулар енгізілген, сондай-ақ оқырмандар байқаған қателер түзетілген. Бұл оқырмандарға автор шынайы алғысын білдіреді.

И. Иродов

Қабылданған белгілеулер

Векторлар жуан түзу шрифтпен (мысалы $\mathbf{r}, \mathbf{E}$); жіңішке шрифтпен белгіленген сол әріп (мысалы r, E) векторлардың модулін білдіреді.

Орташа шамалар $\langle \rangle$ жақшалармен белгіленген, мысалы $\langle \mathbf{v} \rangle$, $\langle P \rangle$.

Шамалардың алдындағы **символдар** төмендегілерді білдіреді:

Δ – шаманың шекті өсімшесі, яғни оның соңғы және бастапқы мәндерінің айырымы, мысалы $\Delta \mathbf{E} = \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1$, $\Delta \varphi = \varphi_2 - \varphi_1$;

d – дифференциал (шексіз аз өсімше), $d\mathbf{E}$, $d\varphi$;

δ – шаманың элементар мәні, мысалы δA ;

$\propto$ – пропорционалдық, мысалы $\varphi \propto q$;

$\sim$ – ... реттік шама. Мысалы $l \sim 10^2 \text{ м}$;

Орттар – бірлік векторлар:

$\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ (немесе $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$) – декарттық координаталардың орттары;

$\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$ – ρ, φ, z цилиндрлік координаталардың орттары;

$\mathbf{n}$ – бет элементіне нормальдың орты;

$\boldsymbol{\tau}$ – контурға, немесе бөліп тұрған шекараға жанаманың орты.

Қалауымызша алынған f функциядан **уақыт бойынша туынды** $\partial f / \partial t$ не функцияның үстінде тұрған нүктемен белгіленген, $\dot{f}$.

Кез келген еселі **интегралдар** жалғыз бір $\int$ таңбамен белгіленеді және айырмашылығы тек интегралдау элементінің белгіленуінде болады: $dV, dS, d\mathbf{l}$ – көлемнің, беттің, контурдың элементтері. $\oint$ таңбасы – тұйық контур, не тұйық бет бойынша интегралдау.

∇ (набла) **векторлық операторы**. Онымен операциялардың белгіленуі мынадай:

$\nabla \varphi$ – градиент φ ($\text{grad} \varphi$),

$\nabla \cdot \mathbf{E}$ – дивергенция $\mathbf{E}$ ($\text{div} \mathbf{E}$),

$\nabla \times \mathbf{E}$ – ротор $\mathbf{E}$ ($\text{rot} \mathbf{E}$).

Бірліктердің белгілеулері және аттары

А – ампер	Дж – джоуль	с – секунд
В – вольт	Кл – кулон	См – сименс
Вб – вебер	м – метр	ср –стерадиан
Вт – ватт	мин – минут	Тл – тесла
Гн – генри	Мкс – максвелл	Ф – фарад
Гс – гаусс	Н – ньютон	ч – час
Гц – герц	Ом – ом	Э – эрстед
дин – дина	рад – радиан	эВ – электронвольт

Бірліктердің аттарына ондық жалғаулар

Г – гига, 10^9	м – милли, 10^{-3}
М – мега, 10^6	мк – микро, 10^{-6}
к – кило, 10^3	н – нано, 10^{-9}
с – санти, 10^{-2}	п – пико, 10^{-12}

Вакуумдағы электростатикалық өріс



§ 1.1. Электр өрісі

Электр заряды. Қазіргі кезде табиғаттың барлық алуан түрлі құбылыстарының негізінде элементар бөлшектердің төрт фундаментальді өзара әсері жатқандығы белгілі – күшті, электромагниттік, әлсіз және гравитациялық. Өзара әсердің әрбір түрі бөлшектің белгілі бір қасиеттерімен байланысады. Мысалы, гравитациялық өзара әсер бөлшектердің массаларына, электромагниттік – электр зарядтарына байланысты.

Бөлшектің электр заряды оның негізгі, бастапқы сипаттамаларының бірі болып табылады. Оған келесі фундаментальді қасиеттер тән:

- 1) электр заряды екі түрде өмір сүреді: оң, сондай-ақ теріс;
- 2) кез келген электрлік оңашаланған жүйеде зарядтардың қосындысы өзгермейді, бұл ұйғарым *электр зарядының сақталу заңын* білдіреді;
- 3) электр заряды релятивистік инвариантты болып табылады: оның шамасы санақ жүйесіне тәуелді емес, демек ол қозғалыста ма, әлде тыныш тұр ма, оған тәуелді емес.

Электр зарядының бұл фундаментальдық қасиеттерінің салдарының алда көретініміздей, ауқымы кең.

Электр өрісі. Қазіргі заманғы түсініктерге сәйкес зарядтар арасындағы өзара әсер өріс арқылы жүзеге асады. Әрбір q электр заряды оны қоршаған кеңістіктің қасиеттерін белгілі бір түрде өзгертеді – *электр өрісін* туғызады. Бұл өріс өзін оның қандай да бір нүктесіне қойылған басқа «сыншы» зарядқа күш әсер ететіндігімен білдіреді.

Тәжірибе қозғалмайтын нүктелік q' сыншы зарядқа әсер ететін F күшті мына түрде беруге болатынын көрсетеді:

$$\mathbf{F} = q'\mathbf{E}, \quad (1.1)$$

Мұндағы, $\mathbf{E}$ векторы берілген нүктедегі электр өрісінің **кернеулігі** деп аталады. (1.1)-ден көрініп тұрғандай, $\mathbf{E}$ векторын қозғалмайтын бірлік оң зарядқа әсер ететін күш ретінде анықтауға болады. Бұл жерде q' сыншы зарядтың енгізілуі біз қарастырып отырған өрісті байқарлықтай бұрмаламауы үшін, ол жеткілікті кішкентай болуы керек деп ұйғарылады (өрісті туғызушы зарядтардың мүмкін боларлық қайта таралуы салдарынан).

Нүктелік заряд өрісі. Қозғалмайтын нүктелік q зарядтың одан r қашықтықтағы өріс кернеулігін төмендегідей түрде беруге болатындығы тікелей тәжірибеден (Кулон заңы) шығады,

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \mathbf{e}_r, \quad (1.2)$$

мұндағы, ϵ_0 – электрлік тұрақты; $\mathbf{e}_r$ – q заряд орналасқан өріс центрінен біз қарастыратын нүктеге дейін жүргізілген $\mathbf{r}$ радиус – вектордың орты. (1.2) формуласы СИ-де жазылған. Мұнда коэффициент

$$1/4\pi\epsilon_0 = 9 \cdot 10^9 \text{ м/Ф},$$

q заряд **кулонмен** (Кл), өріс кернеулігі $\mathbf{E}$ – **метрге вольтпен** (В/м) анықталады. $\mathbf{E}$ векторы q зарядтың таңбасына тәуелді $\mathbf{r}$ сияқты, не оған қарама-қарсы бағытталған.

Өз мәнісінде (1.2) басқа емес, **Кулон заңын**, бірақ «өрістік» түрде өрнектейді. Нүктелік заряд өрісінің $\mathbf{E}$ кернеулігінің r қашықтыққа кері пропорционалдығы өте маңызды. Эксперименттік фактылардың барлық жиынтығы бұл заңның 10^{-13} см-ден бірнеше километрге дейінгі қашықтықтар үшін дұрыс екенін көрсетеді, әзірге бұл заң одан үлкен қашықтықтарда орындалмайды дейтіндей негіз жоқ.

Қозғалмайтын нүктелік заряд туғызған өрісте сыншы зарядқа әсер ететін күш сыншы заряд тыныш тұр ма, әлде қозғала ма оған тәуелді емес екенін тағы еске саламыз.

Суперпозиция принципі. (1.2) заңынан басқа бір тәжірибелік фактының мәнісі сонда, қозғалмайтын нүктелік зарядтар жүйесінің

өріс кернеулігі жеке алғандағы әрбір зарядтың жасайтын өріс кернеуліктерінің векторлық қосындысына тең:

$$\mathbf{E} = \sum \mathbf{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum \frac{q_i}{r_i^2} \mathbf{e}_{ri}, \quad (1.3)$$

мұндағы, $r_i - q_i$ зарядтан біз қарастыратын өріс нүктесіне дейінгі қашықтық.

Бұл ұйғарым электр өрістерінің *суперпозиция принципі* (қабаттасуы) деп аталады. Ол өрістердің ең тамаша қасиеттерінің бірін білдіреді және (1.2) формулаға кіретін нүктелік зарядтардың жиынтығы түрінде қарап, зарядтардың кез келген жүйесінің өріс кернеулігін есептеп табуға мүмкіндік береді.

Зарядтардың таралуы. Математикалық есептеулерді оңайлату үшін, көп жағдайларда зарядтардың дискреттік құрылымы болатыны фактысына назар аудармай, оларды кеңістікте белгілі бір түрде «жайылған» деп есептеу қолайлы болады. Басқаша айтқанда, нүктелік дискретті зарядтардың шын мағынасындағы таралып орналасуын жалған үздіксіз таралумен алмастырған қолайлы. Бұл елерліктей қате жібермей, есептеулерді едәуір жеңілдетуге мүмкіндік береді.

Үздіксіз таралуға өтуде зарядтардың тығыздығы жөнінде ұғым енгізіледі – көлемдік ρ , беттік σ және сызықтық λ . Анықтама бойынша,

$$\rho = \frac{dq}{dV}, \sigma = \frac{dq}{dS}, \lambda = \frac{dq}{dl}, \quad (1.4)$$

мұндағы, dq – сәйкес dV көлемде, dS бетте және dl ұзындықтағы заряд.

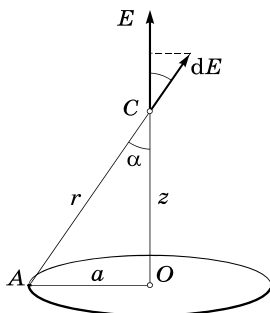
Осы таралуларды ескергенде, (1.3) формуласын басқа түрде беруге болады. Мысалы, егер заряд көлем бойынша таралса, онда q_i -ді $dq = \rho dV$ және $\sum$ –ны $\int$ –мен алмастыру керек, онда

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho \mathbf{e}_r dV}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho r dV}{r^3}, \quad (1.5)$$

мұндағы, интегралдау ρ – нөлден өзгеше болатын барлық кеңістік бойынша жүргізіледі.

Осылайша, зарядтардың таралуын біле отырып, егер таралу үздікті болса, (1.3) формуласы бойынша, егер таралу үздіксіз болса, оған баламалы (1.5) формуласы бойынша электр өрісі кернеулігін табуға арналған есептерді толығымен шығара аламыз. Жалпы жағдайларда есептеу едәуір қиындықтармен байланысты (рас, принципті сипаттағы емес). Шынында, $\mathbf{E}$ векторын табу үшін, алдымен оның E_x, E_y, E_z проекцияларын есептеп табу керек, бұл шындығында (1.5) типтегі үш интеграл. Зарядтар жүйесінің қандай да бір симметриясы болғанда ғана есеп әдетте жеңілдейді. Екі мысал келтірейік.

1-мысал. Біркелкі зарядталған жіңішке сақина осіндегі өріс. $q > 0$ заряд радиусы a жұқа сақина бойында біркелкі таралған. Сақина осі бойындағы E электр өрісі кернеулігін оның центрінен z қашықтықтың функциясы ретінде табу керек.



Берілген жағдайда $\mathbf{E}$ векторының сақина осі бойымен бағытталуы керек екенін оңай пайымдауға болады (1.1-сурет). Сақинадағы A нүктесінің маңында dl элементті бөліп аламыз. C нүктесіндегі осы элементтің dE_z құраушысы үшін өрнек жазамыз:

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{r^2} \cos \alpha,$$

1.1-сурет

мұндағы, $\lambda = q/2\pi a$. Сақинаның барлық элементтері үшін r және α бірдей болады, сондықтан бұл өрнекті интегралдау λdl -ді q -мен алмастыруға келіп тіреледі. Нәтижесінде

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

$z \gg a$ болғанда өріс $E \approx q/4\pi\epsilon_0 z^2$, яғни үлкен қашықтықтарда бұл жүйе өзін нүктелік заряд сияқты ұстайды.

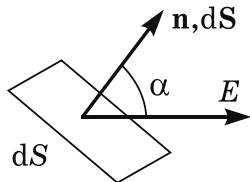
2-мысал. Біркелкі зарядталған жіптің өрісі. Ұзындығы $2l$ жіңішке түзу жіп q зарядпен біркелкі зарядталған. Жіп центрінен x қашықтықтағы және оның ұштарына қатысты симметриялы орналасқан нүктедегі E өріс кернеулігін табу керек.

ауданшаны қиып өтетін сызықтар саны $\mathbf{E}$ векторының модуліне пропорционал болатындай етіп жүргізеді. Бұдан басқа, бұл сызықтардың бағыты $\mathbf{E}$ векторының бағытымен дәл келеді деп есептеледі. Алынған сурет бойынша берілген электр өрісі кернеулігінің конфигурациясы жөнінде – өрістің әртүрлі нүктелеріндегі $\mathbf{E}$ векторының бағыты мен модулі жөнінде пікір айту оңай болады.

Е өрістің жалпы қасиеттері жөнінде. Анықталғандай, жоғарыда анықталған $\mathbf{E}$ өрістің аса маңызды екі қасиеті бар, оларды білу өріс ұғымының өзінің мәнін терең ұғынуға, оның заңдарын тұжырымдауға көмектесті, сондай – ақ бірқатар сұрақтарды оңай шешуге мүмкіндік берді. Бұл қасиеттер – Гаусс теоремасы деп аталатын және $\mathbf{E}$ векторының циркуляциясы туралы теорема – барлық векторлық өрістердің екі маңызды математикалық сипаттамаларымен байланысқан: *ағынмен* және *циркуляциямен*. Алда көретініміздей, тек осы екі ұғымды пайдалана отырып, тек электр өрісінің ғана емес, магнетизмнің де заңдарын сипаттауға болады. Осы қасиеттерді ретімен қарастыруға көшелік.

§ 1.2. Гаусс теоремасы

Е векторының ағыны. Көрнекілікті арттыру үшін, электр өрісін сипаттаудың геометриялық суреттемесін пайдаланамыз ($\mathbf{E}$ векторының сызықтарының көмегімен) және пайымдауды жеңілдету үшін, $\mathbf{E}$ сызықтарының қоюлығы $\mathbf{E}$ векторының модуліне *тең* деп есептейтін боламыз. Онда n нормалі $\mathbf{E}$ векторымен α бұрыш жасайтын элементар dS ауданшаны қиып өтетін сызықтар саны 1.3-суретке сәйкес $E dS \cos \alpha$ түрінде анықталады. Бұл шама dS ауданша арқылы өтетін $\mathbf{E}$ векторының ағыны $d\Phi$. Анағұрлым жинақы түрде



1.3-сурет

$$d\Phi = E_n dS = E dS \cos \alpha,$$

мұндағы, E_n – $\mathbf{E}$ векторының dS ауданшаның $\mathbf{n}$ нормалындағы проекциясы, dS – модулі dS -ке тең, бағыты ауданшаның $\mathbf{n}$

нормалімен дәл келетін вектор $\mathbf{n}$ векторының бағытын таңдау шартты екенін еске саламыз (демек $d\mathbf{S}$ -те), оны қарама-қарсы жаққа бағыттауға да болар еді.

Егер қайсыбір S бет қалауымызша алынған болса, онда ол арқылы өтетін $\mathbf{E}$ векторының ағыны

$$\Phi = \int_S \mathbf{E} d\mathbf{S}. \quad (1.6)$$

Бұл алгебралық шама: ол тек $\mathbf{E}$ өрістің конфигурациясына ғана емес, нормальдың бағытын таңдауға да тәуелді болады. *Тұйықталған* беттер жағдайында $\mathbf{n}$ нормальды осы беттер қамтитын аймақтан *сыртқа* бағыттау, яғни *сыртқы* нормальды таңдау қабылданған, әрі қарай әрқашанда осы ескерілетін болады.

Бұл жерде $\mathbf{E}$ векторының ағыны жөнінде айтылғанмен, ағын ұғымы бірдей дәрежеде кез келген векторлық өріске қатысты болады.

Гаусс теоремасы. Қалауымызша алынған S тұйық бет арқылы өтетін $\mathbf{E}$ векторы ағынының таңқаларлық және тамаша қасиеті бар: ол тек осы бет қамтитын зарядтардың алгебралық қосындысына тәуелді болады. Дәлірек,

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} q_{\text{ішкі}}, \quad (1.7)$$

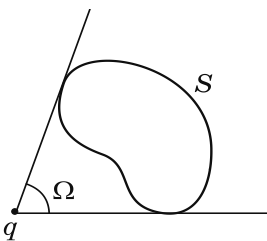
мұнда интегралдағы дөңгелекше, интегралдау тұйықталған бет бойынша жүргізілетінін білдіреді.

Бұл өрнек **Гаусс теоремасының** мағынасын көрсетеді: *тұйықталған бет арқылы өтетін $\mathbf{E}$ кернеулік векторының ағыны осы бет ішіндегі зарядтардың алгебралық қосындысын ε_0 -ге бөлгенге тең.*

Теореманы дәлелдеу. Алдымен бір нүктелік q зарядтың өрісін қарастырамыз. Осы зарядты қалауымызша алынған S бетпен қоршаймыз да, $d\mathbf{S}$ элемент арқылы өтетін $\mathbf{E}$ векторының ағынын табамыз:

$$d\Phi = \mathbf{E} d\mathbf{S} = E dS \cos \alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} dS \cos \alpha = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega, \quad (1.8)$$

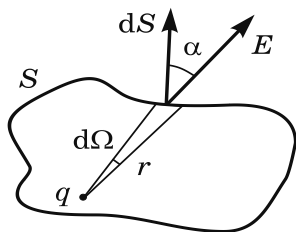
мұндағы, $d\Omega$ – төбесі q заряд орналасқан нүктеде болатын, беттің dS элементіне тірелетін денелік бұрыш. Осы өрнекті бүкіл S бет бойынша интегралдау, бүкіл денелік бұрыш бойынша интегралдаумен, яғни $d\Omega$ -ны 4π -ге алмастырумен эквивалентті, бұдан (1.7) формуласы талап еткендей, $\Phi = q/\varepsilon_0$ аламыз.



1.4-сурет

Тұйықталған бет пішіні тым күрделі болғанда, α бұрыш $\pi/2$ -ден үлкен бола алатындығын еске саламыз, демек (1.8)-дегі $\cos \alpha$ және $d\Omega$, жалпы айтқанда, оң да, терісте мән қабылдайды. Сонымен, $d\Omega$ – алгебралық шама: егер $d\Omega$ S беттің ішкі жағына тірелсе, онда $d\Omega > 0$, егер сыртқы жағына тірелсе, онда $d\Omega < 0$.

Осыдан дербес жағдайда, шығатыны: егер q заряд тұйықталған S беттің сыртында орналасқан болса, онда ол арқылы өтетін $\mathbf{E}$ векторының ағыны нөлге тең. Бұл үшін тұйықталған бетке жанама болатындай етіп, q зарядтан басталатын конустық бет жүргізсе жеткілікті, онда (1.8) өрнекті S бет бойынша интегралдау Ω бойынша интегралдаумен эквивалентті (1.5-сурет): S беттің сыртқы жағы q нүктесінен $\Omega > 0$ бұрышпен, ал ішкісі Ω бұрышпен көрінеді (екі бұрыш модулі жағынан тең). Қосындысында нөлді аламыз, және де $\Phi = 0$, бұл да сондай-ақ (1.7) ұйғарыммен дәл келеді. Бұл S бетпен шектелген көлемге $\mathbf{E}$ кернеулік векторының қанша сызығы кірсе, соншасы шығады дегенді білдіреді.



1.5-сурет

Енді электр өрісін q_1, q_2 және т.б. нүктелік зарядтар жүйесі туғызатын жағдайға көңіл аударайық. Бұл жағдайда суперпозиция принципіне сәйкес $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots$, мұндағы, $\mathbf{E}_1$ – q_1 заряд жасайтын өріс және т.б. Онда $\mathbf{E}$ векторының ағынын былай жазуға болады:

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{S} = \oint (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots) d\mathbf{S} = \oint \mathbf{E}_1 d\mathbf{S} + \oint \mathbf{E}_2 d\mathbf{S} + \dots = \Phi_1 + \Phi_2 + \dots$$

Егер q_i заряд тұйықталған S беттің *ішінде* болса, осының алдындағыға сәйкес, оң жақтағы әрбір интеграл q_i/ε_0 тең де, егер S беттің *сыртында* болса, онда нөлге тең. Сондықтан оң жақта *тек* S беттің ішіндегі зарядтардың алгебралық қосындысы қалады.

Теореманы дәлелдеуді аяқтау үшін, зарядтар координаталарға тәуелді көлемдік тығыздықта үздіксіз таралған жағдайды ескеру ғана қалады. Бұл жағдайда әрбір элементар dV көлемнің ρdV «нүктелік» заряды бар деп есептеуге болады. Онда (1.7)-ның оң жағында

$$q_{\text{ішкі}} = \int \rho dV, \quad (1.9)$$

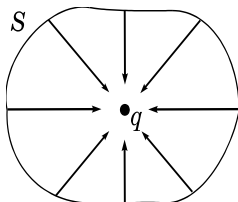
мұнда, интегралдау тек тұйықталған S бет ішіндегі көлем бойынша жүргізіледі.

Келесі маңызды жағдайға назар аудару қажет: **Е** өрістің өзі **барлық** зарядтардың конфигурациясына тәуелді болған кезде, қалауымызша алынған тұйықталған S бетті қиып өтетін **Е** векторының ағыны тек S бет *ішіндегі* зарядтардың алгебралық қосындысымен анықталады. Демек, егер зарядтарды қозғаса, онда өріс **Е** барлық жерде, дербес жағдайда, S бетте де өзгереді, жалпы айтқанда, S арқылы өтетін **Е** векторының ағыны да өзгереді. Егер заряд S бетпен қиылыспай орын ауыстырса, осы бет арқылы өтетін **Е** векторының ағыны *бұрынғыша* қалады, бірақ, дегенмен, қайталап айтамыз, **Е** өрістің өзі өзгере алады, және де өте елерліктей. Электр өрісінің таңғаларлық қасиеті!

§ 1.3. Гаусс теоремасының қолданылулары

Е өріс **барлық** зарядтардың конфигурациясына тәуелді болғандықтан, Гаусс теоремасы, жалпы айтқанда, осы өрісті табуға мүмкіндіктер бермейді. Алайда бірқатар жағдайларда Гаусс теоремасы аса тиімді аналитикалық инструмент болып табылады: ол кейбір түбегейлі сұрақтарға есеп шығармай-ақ жауап алуға, сондай-ақ **Е** өрістің өзін өте оңай жолмен табуға мүмкіндік береді. Бірнеше мысалдар қарастырамыз, содан кейін қандай жағдайларда Гаусс теоремасын қолдану неғұрлым тиімді болатындығы жөніндегі кейбір жалпы қорытындыларды тұжырымдаймыз.

1-мысал. Электр өрісіндегі зарядтың орнықты тепе-теңдігінің мүмкін еместігі жөнінде. Вакуумда тепе-теңдікте тұрған қозғалмайтын нүктелік зарядтар жүйесі бар делік. Осы зарядтардың бірін – q зарядты қарастырайық. Оның тепе-теңдік күйі орнықты бола ала ма?

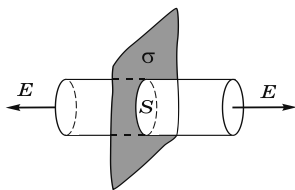


1.6-сурет

Бұл сұраққа жауап беру үшін, q зарядты тұйықталған кішкентай S бетпен қоршаймыз. Анықтылық үшін $q > 0$ деп аламыз. Онда зарядтың тепе-теңдігі орнықты болуы үшін, S беттің барлық нүктелерінде жүйенің барлық **қалған** зарядтарының туғызған E өрісі q зарядқа қарай бағытталуы қажет: тек осы жағдайда ғана q зарядтың тепе-теңдік қалыптан кез-келген аз ығысуы кезінде оған **қайтарушы** күш әсер етеді де, тепе-теңдік

қалпы шын мәнінде орнықты болады. Бірақ q зарядтың айналасындағы E өрістің мұндай конфигурациясы Гаусс теоремасына қайшы келеді: S бет арқылы өтетін E векторының ағыны теріс, ал Гаусс теоремасына сәйкес ол нөлге тең болуы керек, өйткені бұл ағынды S беттен **тысқары** жатқан зарядтар туғызады. E векторы ағынының нөлге тең болуы, S беттің қайсыбір нүктелерінде E ішке, ал қайсы бірінде сыртқа бағытталғанын білдіреді. Осыдан кез келген электростатикалық өрісте зарядтың орнықты тепе-теңдігінің мүмкін еместігі шығады.

2-мысал. Біркелкі зарядталған жазықтықтың өрісі. Зарядтың беттік тығыздығы σ болсын делік. Есептің симметриясынан E векторының зарядталған жазықтыққа тек перпендикуляр бола алатыны анық. Бұдан басқа, осы жазықтыққа қатысты симметриялы нүктелерде E векторы



1.7-сурет

модулі бойынша бірдей, бағыты жағынан қарама-қарсы екені түсінікті. Өрістің мұндай конфигурациясы тұйықталған бет ретінде 1.7-суреттегідей орналасқан түзу цилиндрді таңдау керек екендігін ойға салады, $\sigma > 0$ деп алынады.

Осы цилиндрдің бүйір беті арқылы өтетін ағын нөлге тең, сондықтан да цилиндрдің бүкіл беті арқылы өтетін толық ағын $2E\Delta S$ болады, мұндағы, ΔS әрбір табанның ауданы. Цилиндр ішінде $\sigma\Delta S$ заряд бар. Гаусс теоремасына сәйкес $2E\Delta S = \sigma\Delta S/\varepsilon_0$, осыдан $E = \sigma/2\varepsilon_0$. Дәлірек бұл өрнек былай жазылуы тиіс:

$$E_n = \sigma/2\varepsilon_0, \quad (1.10)$$

мұндағы, E_n – $\mathbf{E}$ векторының зарядталған жазықтыққа жүргізілген нормальдағы проекциясы, сонымен бірге $\mathbf{n}$ векторы осы жазықтықтан сыртқа бағытталған. Егер $\sigma > 0$ болса, онда $E_n > 0$, демек $\mathbf{E}$ векторы 1.7-суреттегідей зарядталған жазықтықтан сыртқа бағытталған; егер $\sigma < 0$ болса, онда $E_n < 0$, демек $\mathbf{E}$ векторы зарядталған жазықтыққа қарай бағытталған. E -нің жазықтыққа дейінгі қашықтыққа тәуелді болмайтындығы фактысы, сәйкес электр өрісінің біртекті екенін білдіреді (жазықтықтың оң жағында да, сол жағында да).

Алынған нәтиже тек шексіз жазық бет үшін дұрыс, өйткені тек осы жағдайда ғана келтірілген симметриялық пайымдауларды пайдалануға болады. Алайда ол шектелген біркелкі зарядталған жазық беттің ортаңғы бөлігіне іргелес, оның шеттерінен алыстағы аймақтар үшін де шамамен дұрыс болады.

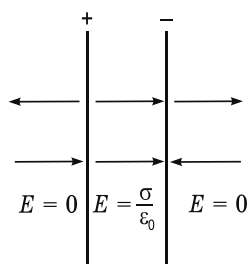
3-мысал. Екі параллель жазықтықтың өрісі, олардың тығыздықтары σ және $-\sigma$ әртүрлі таңбалы зарядтармен біркелкі зарядталған.

Бұл өрісті әрбір жазықтықтың жеке-жеке туғызған өрістерінің суперпозициясы ретінде оңай табуға болады (1.8-сурет). Мұнда жоғарғы тілшелер оң зарядталған жазықтықтың, төменгілері – теріс зарядталған жазықтықтың өрісіне сәйкес келеді. Жазықтықтар арасында қосылатын өрістердің кернеуліктерінің бағыттары бірдей болады, сондықтан (1.10) нәтижесі тек екі еселенеді де, жазықтықтар арасындағы өрістің қорытқы кернеулігі

$$E = \sigma / 2\varepsilon_0, \quad (1.11)$$

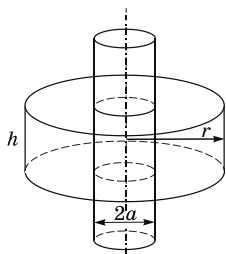
мұндағы, σ – зарядтың беттік тығыздығының модулі. Осы аймақтан тысқары өрістің нольге тең екенін көру оңай. Сөйтіп, берілген жағдайда өріс жазықтықтар арасында шоғырланған және осы аймақта біртекті болады.

Егер жазықтықтардың арақашықтығы олардың сызықтық өлшемдерінен анағұрлым кіші болса, онда алынған нәтиже шектеулі өлшемді пластиналар үшін де шамамен алғанда дұрыс. Мұнда өрістің біртектіліктен ауытқуы тек пластиналардың жиегіне жақын жерлерде байқалады (есептеулерде бұл көбінесе ескерілмейді).



1.8-сурет

4-мысал. Шексіз дөңгелек цилиндр өрісі, ол бірлік ұзындығына λ зарядтан келетіндей болып, бет бойымен біркелкі зарядталған.



1.9-сурет

цилиндрдің бүйір бетіне жүргізілген $\mathbf{n}$ нормальмен бағытталған $\mathbf{r}$ радиус-вектордағы $\mathbf{E}$ векторының проекциясы. Гаусс теоремасы бойынша $r > a$ жағдай үшін, $E_r 2\pi r h = \lambda h / \epsilon_0$, осыдан

$$E_r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r^2} (r > a). \quad (1.12)$$

$\lambda > 0$ болғанда, $E_r > 0$, яғни $\mathbf{E}$ векторы зарядталған цилиндрден сыртқа бағытталған және керісінше.

Егер $r < a$ болса, онда тұйықталған бет ішінде заряд болмайды, сондықтан r -ге тәуелсіз бұл аймақта $E = 0$.

Сөйтіп бетінің бойымен біркелкі зарядталған дөңгелек шексіз цилиндр ішінде өріс жоқ.

5-мысал. Сфералық беттің өрісі, ол q зарядпен біркелкі зарядталған. Радиусы a -ға тең.

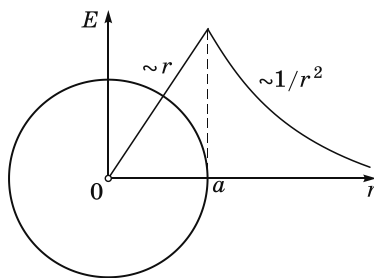
Бұл өрістің центрлік-симметриялы екені түсінікті: $\mathbf{E}$ векторының бағыты кез келген нүктеде сфера центрінен өтеді, ал $\mathbf{E}$ векторының модулі сфера центріне дейінгі $\mathbf{r}$ қашықтыққа тәуелді болуы керек. Өрістің мұндай конфигурациясында тұйықталған бет ретінде концентрлі сфераны алу керек екені анық. Оның радиусы $r > a$ болсын делік, онда Гаусс теоремасы бойынша $E_r 4\pi r^2 = q / \epsilon_0$, осыдан

$$E_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} (r > a), \quad (1.13)$$

мұндағы, E_r – бағыты бойынша әрбір нүктеде бетке жүргізілген $\mathbf{n}$ нормальмен дәл келетін $\mathbf{r}$ радиус-вектордағы $\mathbf{E}$ векторының проекциясы. q зарядтың таңбасы бұл жерде де E_r проекцияның таңбасын, демек $\mathbf{E}$ векторының өзінің де бағытын анықтайды: зарядталған сферадан сыртқа ($q > 0$ болғанда) не оған қарай ($q < 0$ болғанда).

Егер $r < a$ болса, онда тұйықталған бет ішінде зарядтар болмайды, сондықтан бұл аймақтың барлық жерінде $E = 0$, яғни біркелкі зарядталған сфералық бет ішінде электр өрісі болмайды. Беттен тысқары өріс r арақашықтыққа байланысты нүктелік зарядтағыдай заңмен кемиді.

6-мысал. Біркелкі зарядталған шардың өрісі. q заряд радиусы a шар бойында біркелкі таралған болсын. Мұндай жүйенің өрісі тағы да центрлік-симметриялы екендігі түсінікті, сондықтан бұл жерде де өрісті табу үшін, тұйықталған бет ретінде концентрлі сфераны алу керек. Шардан тысқары өріс үшін, алдыңғы мысалдағыдай [(1.13)-ті қараңыз] нәтиже алынатынын пайымдау қиын емес. Шар ішінде өріс өрнегі басқаша болады. Радиусы $r < a$ сфера $q' = q(r/a)^3$ зарядты қамтиды, өйткені біздің жағдайымызда зарядтар көлемдер сияқты, ал соңғылары радиустардың кубтарындай болып қатынасады. Сондықтан Гаусс теоремасына сәйкес



1.10-сурет

$$E_r = 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} q(r/a)^3,$$

осыдан

$$E_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{a^3} r \quad (r < a), \quad (1.14)$$

яғни, біркелкі зарядталған шар ішінде кернеулік оның центрінен r қашықтыққа сызықтық түрде артады. E -нің r -ге тәуелділік графигі 1.10-суретте көрсетілген.

Жалпы қорытындылар. Осы мысалдарда алынған нәтижелерді (1.5) формуласы көмегімен тікелей интегралдау арқылы табуға болар еді. Алайда, көз жеткізгеніміздей, Гаусс теоремасы бұл есептерді теңдесі жоқ оңай жолмен шешуге мүмкіндік берді.

Қарастырылған есептердің оңай шешілуі, Гаусс теоремасын қолдануға негізделген әдістің пәрмені жөнінде және осы теорема көмегімен көптеген есептерді шешудің мүмкіндігі жөнінде бұлдыр пікір туғызуы мүмкін. Өкінішке орай, бұлай емес. Гаусс теоремасы көмегімен оңай шешілетін есептер саны шектеулі. Біркелкі

зарядталған дискідегі сияқты, заряд симметриялы таралғандағы өрісті шешуде-ақ Гаусс теоремасы қауқарсыз болып шықты. Бұл жағдайда өріс конфигурациясы жеткілікті күрделі, **E** векторы ағынын есептеуді оңайлатуға қажетті пішіні бар тұйықталған бет те бұл жерде жоқ.

Өрістің арнайы симметриясы бар болған жағдайда ғана, Гаусс теоремасын өрістерді есептеуде пайдалану тиімді болады (көбінесе жазық, цилиндрлік және сфералық). Симметрия, демек өріс конфигурациясы да, біріншіден, жеткілікті қарапайым тұйықталған S бетті таба алатындай, екіншіден, **E** векторы ағынын есептеуді E_n (немесе E_n -ді) S беттің, не бөлігінің ауданына қарапайым көбейтуге әкелетіндей болуы керек. Егер бұлай болмаса, өрісті табу жөніндегі есепті не тікелей (1.5) формуласының көмегімен, не басқа әдістер көмегімен шешуге тура келеді, олармен біз төменде танысамыз.

§ 1.4. Дифференциалдық түрдегі Гаусс теоремасы

Гаусс теоремасы өрнектейтін электр өрісінің тамаша қасиеті, бұл теореманы оның зерттеу мен есептеудің инструменті ретіндегі мүмкіндіктерін кеңейтетін, басқа түрде беруге түрткі болады.

(1.7) формуладан өзгеше – ол интегралдық деп аталады – біз Гаусс теоремасының дифференциалдық түрін іздейтін боламыз, онда зарядтың көлемдік тығыздығы ρ мен кеңістіктің берілген нүктесінің маңайындағы **E** кернеулігінің өзгерісі арасындағы байланыс тағайындалады.

Бұл үшін, алдымен, S тұйықталған бет қамтитын V көлемдегі q зарядты $q_{\text{ішкі}} = \langle \rho \rangle V$ түрінде береміз, мұндағы $\langle \rho \rangle$ – зарядтың көлемдік тығыздығының V көлем бойынша орташа мәні. Содан кейін осы өрнекті (1.7) теңдеуге қоямыз да, оның екі жағын V -ға бөлеміз. Нәтижесінде мынаны аламыз:

$$\frac{1}{V} \oint \mathbf{E} d\mathbf{S} = \langle \rho \rangle / \epsilon_0. \quad (1.15)$$

Енді V көлемді өрістің біз қарастырып отырған нүктесіне дейін қысып, оны нөлге ұмтылдырамыз. Сонда $\langle \rho \rangle$ -ның өрістің

берілген нүктесіндегі ρ мәніне ұмтылатыны, демек (1.15) теңдеуінің сол жағындағы қатынастың ρ/ε_0 -ге ұмтылатыны анық.

$V \rightarrow 0$ болғанда $\oint \mathbf{E} d\mathbf{S}$ -тың V -ға қатынасының шегі болып табылатын шама E өрістің **дивергенциясы** деп аталады да, $\operatorname{div} \mathbf{E}$ деп белгіленеді. Сөйтіп, анықтама бойынша

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint \mathbf{E} d\mathbf{S}. \quad (1.16)$$

Кез келген басқа векторлық өрістің дивергенциясы баламалы түрде анықталады. (1.16) анықтамасынан дивергенцияның координаталардың скаляр функциясы екені шығады.

$\mathbf{E}$ өрістің дивергенциясына арналған өрнекті алу үшін, (1.16)-ға сәйкес шексіз аз V көлемді алып, осы көлемді қамтитын тұйықталған бет арқылы өтетін $\mathbf{E}$ векторы ағынын анықтап, осы ағынның көлемге қатынасын табу керек. Дивергенция үшін алынған өрнек координаталар жүйесін таңдап алуға тәуелді болады (эртүрлі координаталар жүйесінде эртүрлі болады). Мысалы, декарттық координаталар жүйесінде

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}. \quad (1.17)$$

Сонымен, біз $V \rightarrow 0$ болғанда (1.15) өрнектің оң жағы ρ/ε_0 -ге, ал сол жағы $\operatorname{div} \mathbf{E}$ -ге ұмтылатынын көрдік. Демек, $\mathbf{E}$ өрістің дивергенциясы сол нүктеде заряд тығыздығымен төмендегі теңдеумен байланысты:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0. \quad (1.18)$$

Осы теңдеу дифференциалдық түрдегі Гаусс теоремасын өрнектейді.

Егер ∇ («набла») векторлық дифференциалдық оператор енгізілсе, көптеген формулалардың жазылуы және оларға қолданылатын амалдар анағұрлым ықшамдалады. Декарттық координаталар жүйесінде оның түрі мынадай болады:

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}, \quad (1.19)$$

мұндағы, $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ – X, Y, Z – осьтерінің орттары. ∇ векторының өзінің мағынасы жоқ. Скалярлық, не векторлық функциялармен тіркесінде, оларға символ түрінде көбейтілгенде ғана мағына алады. Мысалы, ∇ векторды $\mathbf{E}$ векторына скалярлы көбейтіп, мынаны аламыз:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla_x E_x + \nabla_y E_y + \nabla_z E_z = \frac{\partial}{\partial x} E_x + \frac{\partial}{\partial y} E_y + \frac{\partial}{\partial z} E_z,$$

бұл басқа емес, (1.17)-ге сәйкес $\text{div } \mathbf{E}$.

Сөйтіп, E өрісінің дивергенциясын $\text{div } \mathbf{E}$ немесе $\nabla \cdot \mathbf{E}$ түрінде жазуға болады (екі жағдайда да «дивергенция $\mathbf{E}$ » деп оқылады). Біз екінші, анағұрлым қолайлы белгілеуді пайдаланатын боламыз. Онда, мысалы, Гаусс теоремасы (1.18) мына түрде болады:

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0} \quad (1.20)$$

Дифференциалдық түрдегі Гаусс теоремасы локальды теорема болып табылады: берілген нүктедегі $\mathbf{E}$ өрісінің дивергенциясы басқа ештеңеге емес тек сол нүктедегі электр зарядының ρ тығыздығына тәуелді. Бұл – электр өрісінің тамаша қасиеттерінің бірі. Мысалы нүктелік заряд өрісінің әртүрлі нүктелерінде $\mathbf{E}$ өріс бір-бірінен өзгеше болады. Бұл, жалпы айтқанда, $\partial E_x / \partial x, \partial E_y / \partial y, \partial E_z / \partial z$ кеңістік туындыларға да қатысты. Алайда, Гаусс теоремасы пайымдайтындай, $\mathbf{E}$ дивергенцияны анықтайтындай осы туындылардың қосындысы өрістің барлық нүктелерінде (зарядтың өзінен тысқары) нөлге тең.

$\mathbf{E}$ дивергенция оң болатын өріс нүктелерінде өріс **көзі** болады (оң зарядтар), ол теріс болатын нүктелерде – **құяр** жері болады (теріс зарядтар). $\mathbf{E}$ векторының сызықтары өріс көзінен шығады, ал құяр жерде аяқталады.

§ 1.5. $\mathbf{E}$ векторының циркуляциясы. Потенциал

$\mathbf{E}$ векторының циркуляциясы туралы теорема. Центрілік күштердің кез келген стационар өрісі консервативті болып табылатыны, яғни осы өріс күштерінің жұмысы жолға тәуелді емес,

тек бастапқы және соңғы нүктенің орнына тәуелді екені механикадан белгілі. Қозғалмайтын зарядтар жүйесі туғызатын өріс – электростатикалық өріс осындай қасиетке ие. Егер берілген $\mathbf{E}$ өрістің 1 нүктесінен 2 нүктесіне көшірілетін сыншы заряд ретінде бірлік *оң* заряд алынса, онда өріс күштерінің $d\mathbf{l}$ орын ауыстырудағы элементар жұмысы. $\mathbf{E} d\mathbf{l}$ -ге тең, ал 1-ші нүктеден 2-ші нүктеге дейінгі жолда өріс күштерінің барлық жұмысы төмендегідей анықталады:

$$\int_1^2 \mathbf{E} d\mathbf{l}. \quad (1.21)$$

Бұл интеграл қайсыбір сызық (жол) бойынша алынады, сондықтан ол *сызықтық* деп аталады.

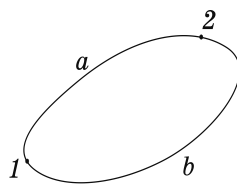
Біздің қазір көрсететініміздей, (1.21) сызықтық интегралдың екі нүкте арасындағы жолға тәуелді еместігінен, қалауымызша алынған тұйықталған жолда бұл интегралдың нөлге тең екендігі шығады. Тұйық жол бойынша алынған (1.21) интегралы $\mathbf{E}$ векторының *циркуляциясы* деп аталады да, $\oint$ -мен белгіленеді.

Осылайша, біз кез келген *электростатикалық* өрісте $\mathbf{E}$ векторының циркуляциясы нөлге тең деп ұйғарамыз, яғни

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0. \quad (1.22)$$

Осы ұйғарым $\mathbf{E}$ *векторының циркуляциясы туралы теорема* деп аталады.

Осы теореманы дәлелдеу үшін, қалауымызша алынған тұйық жолды *1a2* және *2b1* екі бөлікке бөлеміз (1.11-сурет). (1.21) сызықтық интеграл – оны $\int_{12}$ деп белгілейміз – 1- және 2-нүктелер арасындағы жолға тәуелді болмайтындықтан, $\int_{12}^{(a)} = \int_{12}^{(b)}$. Екінші жағынан $\int_{12}^{(b)} = - \int_{21}^{(b)}$ екені анық, мұндағы $\int_{21}^{(b)}$ – сол *b* участок бойынша, бірақ кері бағыттағы интеграл. Сондықтан



1.11-сурет

$$\int_{12}^{(a)} + \int_{21}^{(b)} = \int_{12}^{(a)} - \int_{12}^{(b)} = 0,$$

дәлелдеу керегі де осы еді.

(1.22) қасиетке ие өріс **потенциалды** деп аталады. Демек, *кез келген электростатикалық өріс потенциалды болып табылады.*

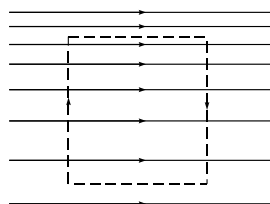
Е векторының циркуляциясы туралы теорема іс жүзінде есептеулерге сүйенбей, бірқатар маңызды қорытындылар жасауға мүмкіндік береді. Міне екі мысал.

1-мысал. Е электростатикалық өрісінің сызықтары тұйық болмайды.

Шын мәнісінде, егер бұлай болмаса және **Е** векторының қандай да бір сызығы тұйық болса, онда осы сызық бойымен **Е** векторының циркуляциясын алсақ, біз бірден (1.22) теоремасымен қайшылыққа келеміз. Демек, шынында да электростатикалық өрісте **Е** векторының тұйық сызықтары болмайды: сызықтар оң зарядтардан басталады және теріс зарядтарда аяқталады (не шексіздікке кетеді).

2-мысал. Электростатикалық өрістің 1.12-суреттегідей конфигурациясы мүмкін бе?

Жоқ, мүмкін емес. Егер біз суретте пунктирмен көрсетілген тұйық контур үшін **Е** векторының циркуляциясы теоремасын қолдансақ, бұл бірден анық болады. Контурдағы тілшелер айналу бағытын көрсетеді. Контурды мұндай әдейі таңдау кезінде оның вертикаль бөліктердегі циркуляцияға үлесі нөлге тең: мұнда $\mathbf{E} \perp d\mathbf{l}$ және $\mathbf{E} d\mathbf{l} = 0$; ұзындықтары бірдей екі горизонталь участоктар қалады. Бұл участоктарда циркуляцияға үлестер таңба жағынан қарама-қарсы, бірақ модулдері бірдей емес екені суреттен көрініп тұр (сызықтар қою болғандықтан жоғарғы участокте үлкен, демек **Е** үлкен). Сондықтан циркуляция нөлден өзгеше болып шығады, бұл (1.22)-ге қайшы келеді.



1.12-сурет

Потенциал. Осы кезге дейін біз электр өрісін **Е** векторы көмегімен сипаттауды қарастырдық. Алайда, екінші адекваттық тәсіл бар – ϕ потенциал көмегімен сипаттау (бірден ескертеміз, бұл екі тәсілдің де, бір-біріне сәйкестігі бір мәнді). Алда көретініміздей, екінші тәсілдің бірқатар мәнді артықшылықтары бар.

Бірлік оң зарядты 1-ші нүктеден 2-ші нүктеге орын ауыстыру кезінде өріс күштері жұмысы болып табылатын (1.21) сызықтық интегралының осы нүктелер арасындағы жолға тәуелді болмайтындығы фактысы, электр өрісінде координаталардың қайсыбір скаляр

функциясы $\varphi(\mathbf{r})$ бар деп ұйғарым жасауға мүмкіндік береді, оның *кемуі*

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \mathbf{E} d\mathbf{I}, \quad (1.23)$$

мұндағы, φ_1 және φ_2 – φ функцияның 1-ші және 2-ші нүктелердегі мәндері. Осылай анықталған $\varphi(\mathbf{r})$ функциясы ***өріс потенциалы*** деп аталады. (1.23) өрнегін потенциалдық өріс күштері жұмысының өрнегімен салыстыру арқылы (ол өрістегі бөлшектің потенциалдық энергиясының кемуіне тең) былай деп айтуға болады: ***потенциал*** – *бұл сан жағынан өрістің берілген нүктесіндегі бірлік оң зарядтың потенциалдық энергиясына тең шама.*

Өрістің қалауымызша алынған қайсыбір O нүктесінің потенциалына шартты түрде кез келген φ_0 мәнін беруге болады. Онда өрістің барлық басқа нүктелерінің потенциалдары (1.23)-ке сәйкес бір мәнді анықталады. Егер φ_0 -ді қайсыбір $\Delta\varphi$ шамаға өзгертсе, өрістің барлық басқа нүктелерінің потенциалдары да сондай шамаға өзгереді. Сөйтіп, потенциал φ қалауымызша алынған аддитивті тұрақтыға дейінгі дәлдікпен анықталады. Бұл тұрақтының мәнінің рөлі жоқ, өйткені барлық электрлік құбылыстар тек электр өрісінің кернеулігіне тәуелді. Соңғысы алда көретініміздей, өрістің берілген нүктесіндегі потенциалдың өзімен немесе өрістің көршілес нүктелеріндегі потенциалдар айырымымен анықталады. Потенциалдың өлшем бірлігі ***вольт*** (В).

Нүктелік заряд өрісінің потенциалы. (1.23) формуласы тек φ потенциалдың анықтамасын ғана емес, осы функцияны табудың тәсілін де береді. Бұл үшін екі нүкте арасындағы кез келген жол бойынша $\int \mathbf{E} d\mathbf{I}$, интегралды есептеп, алынған нәтижені қайсыбір функцияның кемуі ретінде берсе жеткілікті, бұл $\varphi(\mathbf{r})$ функциясы. Оңай жолмен істеуге де болады. (1.23) формуланың тек шектеулі орын ауыстырулар үшін ғана емес, элементар $d\mathbf{I}$ үшін де дұрыс екенін пайдаланамыз. Онда бұл формулаға сәйкес осы орын ауыстырудағы потенциалдың элементар *кемуі*

$$-d\varphi = \mathbf{E} d\mathbf{I}. \quad (1.24)$$

Басқаша айтқанда, егер $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ өріс белгілі болса, онда φ -ді табу үшін, $\mathbf{E} d\mathbf{I}$ -ді (сәйкес түрлендірулер жолымен) қайсыбір функцияның кемуі ретінде беру керек. Бұл функция – φ .

Осы тәсілмен қозғалмайтын нүктелік заряд өрісінің потенциалын табамыз:

$$\mathbf{E} d\mathbf{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \mathbf{e}_r d\mathbf{l} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2} = -d\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} + \text{const}\right),$$

мұнда, $\mathbf{e}_r d\mathbf{l} = 1 \cdot (d\mathbf{l})_r$ екені ескерілген, өйткені $d\mathbf{l}$ векторының $\mathbf{e}_r$ векторына демек, $\mathbf{r}$ -ге проекциясы $\mathbf{r}$ векторы модулінің өсімшесіне, яғни dr -ге тең. Дөңгелек жақша ішінде дифференциал таңбасы астында тұрған шама $\varphi(\mathbf{r})$ болып табылады. Бұл жерде аддитивті константа ешқандай физикалық рөл атқармайды, φ -ге арналған өрнекті қарапайым қылу үшін, әдетте оны қалдырып кетеді. Сөйтіп нүктелік зарядтың өрісінің потенциалы

$$\boxed{\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}} \quad (1.25)$$

Бұл өрнекте аддитивті константаның болмауы, біздің шартты түрде шексіздікте ($r \rightarrow \infty$) потенциал нөлге тең деп ұйғарғанымызды білдіреді.

Зарядтар жүйесінің потенциалы. Жүйе $q_1, q_2, \dots$ қозғалмайтын нүктелік зарядтардан тұрады делік. Суперпозиция принципіне сәйкес өрістің кез келген нүктесінде кернеулік $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots$, мұндағы, $\mathbf{E}_1 - q_1$ зарядтың өріс кернеулігі және т.б. Онда (1.24) формуласын пайдаланып, былай жазуға болады:

$$\mathbf{E} d\mathbf{l} = (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots) d\mathbf{l} = \mathbf{E}_1 d\mathbf{l} + \mathbf{E}_2 d\mathbf{l} + \dots = -d\varphi_1 - d\varphi_2 - \dots = -d\varphi,$$

мұндағы, $\varphi = \sum \varphi_i$, яғни суперпозиция принципі потенциал үшін де дұрыс. Сөйтіп, қозғалмайтын нүктелік зарядтар жүйесінің потенциалы

$$\boxed{\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum \frac{q_i}{r_i}} \quad (1.26)$$

мұндағы, $r_i - q_i$ нүктелік зарядтан біз қарастырып отырған нүктеге дейінгі қашықтық. Мұнда да қалауымызша алынған тұрақты түсіп қалған. Бұл зарядтардың кез келген реал жүйесінің кеңістікте

шектеулі екені, сондықтан шексіздікте оның потенциалын нөлге тең деп алуға болатындығы фактысына толығымен сәйкес келеді.

Егер жүйені құрап тұрған зарядтар үздіксіз таралған болса, онда әдетте біз әрбір dV элементар көлемде ρdV «нүктелік» заряд бар деп есептейміз, мұндағы ρ көлем тұрған орындағы зарядтың көлемдік тығыздығы. Осыны ескергенде (1.26) формуласы басқа түрге келеді:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho dV}{r}, \quad (1.27)$$

мұнда интегралдау не бүкіл кеңістік бойынша, не оның зарядтар бар бөлігі бойынша жүргізіледі. Егер зарядтар тек S бетте орналасқан болса, онда

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho dS}{r}, \quad (1.28)$$

мұндағы, σ – зарядтың беттік тығыздығы; dS – S беттің элементі. Баламалы өрнек зарядтар сызықтық түрде таралған жағдайда да болады.

Осылайша, зарядтардың таралуын (дискретті, үздіксіз) біле отырып, біз түптеп келгенде кез келген жүйе өрісінің потенциалын таба аламыз.

§ 1.6. Потенциал мен $\mathbf{E}$ векторы арасындағы байланыс

Электр өрісі, белгілі болғандай, $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ векторлық функциясымен толығымен сипатталады. Оны біле отырып, біз өрістің кез келген нүктесінде біз қарастырып отырған зарядқа әсер ететін күшті таба аламыз, заряд қандай да болмасын орын ауыстырғандағы өріс күштерінің жұмысын есептеп таба аламыз және т.б. Ал, потенциалдың енгізілуі не береді? Бәрінен бұрын берілген өрістің $\varphi(\mathbf{r})$ потенциалын біле отырып, $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ өрістің өзін жеткілікті оңай шығарып алуға болады. Осы сұрақты егжей-тегжейлі қарастырайық.

φ мен $\mathbf{E}$ арасындағы байланысты (1.24) теңдеуінің көмегімен тағайындауға болады. $d\mathbf{l}$ орын ауыстыру X осіне параллель

болсын делік, онда $d\mathbf{l} = \mathbf{i}dx$, мұндағы $\mathbf{i}$ – X осінің орты, dx – x координатаның өсімшесі.

$$\mathbf{E} d\mathbf{l} = \mathbf{E} \mathbf{i} dx = E_x dx,$$

мұндағы, E_x – $\mathbf{E}$ векторының $\mathbf{i}$ орттағы проекциясы ($d\mathbf{l}$ орын ауыстырудағы емес). Соңғы өрнекті (1.24) формуласымен салыстырып, мынаны аламыз:

$$E_x = -\partial \varphi / \partial x, \quad (1.29)$$

мұндағы, дербес туындының символы y және z -ті тұрақты деп есептеп, $\varphi(x, y, z)$ функцияны тек x бойынша дифференциалдау керек екенін көрсетеді.

Баламалы пайымдау арқылы E_y және E_z проекциялары үшін сәйкес өрнектерді алуға болады. E_x, E_y, E_z -ті анықтап алғаннан кейін, $\mathbf{E}$ векторының өзін де оңай табуға болады:

$$\mathbf{E} = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \mathbf{k}\right). \quad (1.30)$$

Жақша ішіндегі шама басқа емес, φ **потенциалдың градиенті** ($\text{grad } \varphi$ немесе $\nabla \varphi$). Біз анағұрлым қолайлы екінші белгілеуді пайдаланамыз және $\nabla \varphi$ -ді формальды түрде символдық ∇ вектордың φ -ге көбейтіндісі ретінде қарастырамыз. Онда (1.30) теңдеуін анағұрлым ықшам түрде беруге болады:

$$\boxed{\mathbf{E} = -\nabla \varphi}, \quad (1.31)$$

яғни, өрістің $\mathbf{E}$ кернеулігі минус таңбасымен алынған потенциал градиентіне тең. $\varphi(\mathbf{r})$ функцияны біле отырып, бұл формула көмегімен $\mathbf{E}$ өрісті шығарып алуға болады.

Мысал. Потенциалының түрі: 1) $\varphi(x, y) = -axy$, a – тұрақты, 2) $\varphi(\mathbf{r}) = -a\mathbf{r}$ болатын $\mathbf{E}$ өріс кернеулігін табу керек, $\mathbf{a}$ – тұрақты вектор, $\mathbf{r}$ – өрістің біз қарастырып отырған нүктесінің радиус-векторы.

1. (1.30) формуласын пайдаланып, $\mathbf{E} = a(y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$ -ді аламыз.

2. Алдымен φ функцияны $\varphi = -a_x x + a_y y - a_z z$ түрінде береміз, мұндағы,

a_x, a_y, a_z – тұрақтылар. Содан кейін (1.30) формуласының көмегімен мынаны табамыз: $\mathbf{E} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k} = \mathbf{a}$. Берілген жағдайда $\mathbf{E}$ өрістің біртекті екені көрініп тұр.

Тағы бір пайдалы формуланы аламыз. (1.24) қатысының оң жағын $\mathbf{E} d\mathbf{l} = E_l dl$ түрінде жазамыз, мұндағы, $dl = |d\mathbf{l}|$ – элементар жол; E_l – $\mathbf{E}$ векторының $d\mathbf{l}$ орын ауыстырудағы проекциясы. Осыдан

$$\boxed{E_l = -\partial\varphi/\partial l}, \quad (1.32)$$

яғни, $\mathbf{E}$ векторының $d\mathbf{l}$ орын ауыстыру бағытындағы проекциясы минус таңбамен алынған потенциалдың берілген бағыт бойынша туындысына тең (бұл дербес туынды символымен көрсетілген).

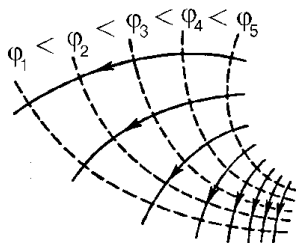
Эквипотенциал беттер. *Эквипотенциал бет* – барлық нүктелерінде φ потенциал бірдей болатын бет ұғымын енгіземіз. $\mathbf{E}$ векторының әрбір нүктеде эквипотенциал бетке жүргізілген нормаль бойымен φ потенциалдың кему жағына қарай бағытталғанына көз жеткіземіз. Шынында, (1.32) формуладан берілген нүктеде эквипотенциал бетке жанама болатын кез келген бағыттағы $\mathbf{E}$ векторы проекциясының нөлге тең екендігі шығады. Ал бұл $\mathbf{E}$ векторының берілген бетке нормаль екендігін көрсетеді. Әрі қарай, $d\mathbf{l}$ орын ауыстыруды бетке нормаль бойымен φ -дің кему жағына қарай аламыз, онда $d\varphi < 0$ және (1.32)-ге сәйкес $E_l > 0$, яғни $\mathbf{E}$ векторы φ потенциалдың кему жағына қарай, немесе $\nabla\varphi$ векторына қарама-қарсы бағытталған.

Эквипотенциал бетті екі көршілес беттер үшін потенциалдар айырымы бірдей болатындай етіп жүргізген қолайлы. Сол кезде эквипотенциал беттердің қоюлығы бойынша әртүрлі нүктелердегі өріс кернеулігінің мәні туралы пікір айтуға болады. Қай жерде бұл беттер қоюырақ болса («потенциалдық рельеф тіктеу»), сол жерде өріс кернеулігі үлкен.

Бұдан әрі $\mathbf{E}$ векторы барлық жерде эквипотенциал бетке нормаль болғандықтан, $\mathbf{E}$ векторының сызықтары осы беттерге ортогональ болады.

1.13 суретте электр өрісінің екі өлшемді электр өрісінің суреті берілген: пунктирмен-эквипотенциалдар, тұтас сызықтармен – $\mathbf{E}$ векторының сызықтары. Мұндай кескіннің көрнекілігі үлкен. $\mathbf{E}$ векторының қай жаққа бағытталғаны, қай жерде кернеулік үлкен,

қай жерде аз, қай жерде потенциалдық рельефтің тіктігі үлкен екендігі бірден көрініп тұр. Мұндай суреттер көмегімен бірқатар сұрақтарға сапалы жауаптар да ала аламыз: қандай да бір нүктеге орналастырылғанда заряд қай жаққа қозғалады, потенциал градиенті (модулі бойынша) қай жерде үлкен, өрістің қай нүктесінде зарядқа үлкен күш әсер етеді және т.б.



1.13-сурет

Потенциалдың артықшылықтары. Электростатикалық өрістің $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ векторлық функциямен толығымен сипатталатындығы бұрында айтылған болатын. Потенциалды енгізудің пайдасы қандай? Потенциалдың шынында өте пайдалы ұғым екенін сенімді растайтын бірнеше салмақты себептер бар, бұл ұғымның физика да ғана емес, техникада да кеңінен қолданылатынын кездейсоқ емес.

1. $\varphi(\mathbf{r})$ потенциалды біле отырып, q' нүктелік зарядты 1-нүктеден 2-нүктеге орын ауыстырғандағы өріс күштерінің жұмысын ең оңай жолмен есептеп табуға болады:

$$A_{12} = q'(\varphi_1 - \varphi_2), \quad (1.33)$$

мұндағы, φ_1 және φ_2 — 1- және 2-нүктелердің потенциалдары. Демек, ізделініп отырған жұмыс зарядты 1-нүктеден 2-нүктеге орын ауыстырғанда, оның өрістегі потенциалдық энергиясының *кемуіне* тең. (1.33) формуласы бойынша өріс күштерінің жұмысын есептеу тек оңай ғана емес, кейбір жағдайларда жалғыз мүмкіндік болып табылады.

Мысал. Заряд радиусы a жұқа сақина бойымен таралған. Нүктелік q' зарядты сақина центрінен шексіздікке көшіру кезіндегі өріс күштерінің жұмысын табу керек.

Зарядтың сақина бойымен қалай таралғаны белгісіз болғандықтан, осы заряд өрісінің $\mathbf{E}$ өріс кернеулігі жөнінде ешнәрсе айтуға болмайды.

Демек, жұмысты тікелей $\int q' \mathbf{E} d\mathbf{l}$ интеграл ретінде есептеп табу бұл жерде оңай емес. Потенциал көмегімен бұл есеп элементар шешіледі. Шынында да, сақинаның барлық элементтері сақина центрінен бірдей a қашықтықта жатқандықтан, бұл нүктеде

потенциал $\varphi_0 = q/4\pi\epsilon_0 a$. Ал шексіздікте потенциал $\varphi = 0$. Демек, жұмыс $A = q'\varphi_0 = q'q/4\pi\epsilon_0 a$.

2. Көптеген жағдайларда электр өрісінің **E** кернеулігін табу үшін, оны тікелей есептеп тапқаннан гөрі, алдымен φ потенциалды есептеп тауып, содан кейін оның градиентін алған оңай болады. Бұл потенциалдың аса мәнді артықшылығы. Шындығында, φ -ді есептеп табу үшін бір интеграл алу керек болса, **E**-ны есептеп табу үшін – үш интеграл алу керек (бұл вектор ғой). Сонымен қатар, әдетте, E_x, E_y, E_z -ті есептеуге арналған интегралдарға қарағанда, φ -ді есептеуге арналған интегралдар қарапайым.

Бірден еске саламыз, мұның симметриясы жеткілікті жоғары, біршама санаулы есептерге қатысы жоқ. Бұл жағдайларда **E** кернеулікті көбінесе тікелей, не Гаусс теоремасының көмегімен табу анағұрлым оңай.

§ 1.7. Электрлік диполь

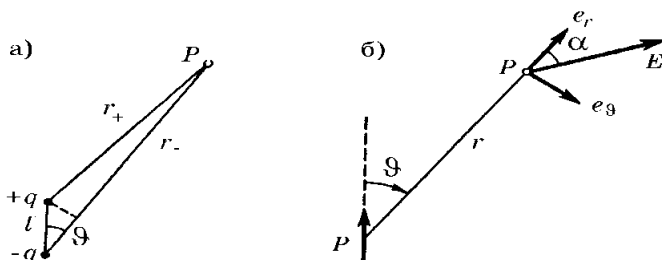
Диполь өрісі. *Электрлік диполь* – бұл модулі жағынан бірдей, бір-бірінен қайсыбір l қашықтықта орналасқан екі әр аттас $+q$ және $-q$ зарядтардан тұратын жүйе. Диполь өрісі туралы айтқанда, дипольдың өзі нүктелік деп ұйғарылады, яғни дипольдан біз қарастырып отырған нүктеге дейінгі r қашықтық l -ден анағұрлым үлкен деп есептеледі.

Диполь осінің осьтік симметриясы бар, сондықтан диполь осі арқылы өтетін кез келген жазықтықта өріс суреті бірдей және **E** векторы осы жазықтықта жатады.

Алдымен диполь өрісінің потенциалын, содан кейін кернеулікті табамыз. (1.25)-ке сәйкес диполь өрісінің потенциалы P нүктесінде (1.14, a -сурет) мына түрде анықталады:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_+} - \frac{q}{r_-} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(r_- - r_+)}{r_+ r_-}.$$

$r \gg l$ болғандықтан, 1.14, a -суреттен көрініп тұрғандай, $r_- - r_+ = l \cos \vartheta$ және $r_+ r_- = r^2$, мұндағы, r – P нүктесінен дипольге дейінгі қашықтық (ол нүктелік!). Осыны ескергенде,



1.14-сурет

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \vartheta}{r^2}, \quad (1.34)$$

мұндағы, $p = ql$ – **дипольдің электрлік моменті**. Осы шаманың векторы үшін, диполь осі бойымен теріс зарядтан оң зарядқа қарай бағытталған вектор алынады:

$$\mathbf{p} = q\mathbf{l}, \quad (1.35)$$

мұндағы, $q > 0$ және $\mathbf{l}$ – $\mathbf{p}$ бағытында бағытталған вектор.

(1.34) формуласынан диполь өрісі оның $\mathbf{p}$ электрлік моментіне тәуелді екені көрініп тұр. Әрі қарай көретініміздей, дипольдің сыртқы өрісте өзін-өзі ұстауы да $\mathbf{p}$ -ға тәуелді. Демек, $\mathbf{p}$ дипольдің маңызды сипаттамасы болып табылады.

Сондай-ақ, диполь өрісінің потенциалы, нүктелік заряд потенциалына қарағанда r қашықтыққа байланысты шаппаң кемитініне назар аудару керек. ($1/r^2$ орнына $1/r$)

Диполь өрісін табу үшін (1.32) формуласын пайдаланамыз, оның көмегімен $\mathbf{E}$ векторының өзара перпендикуляр бағыттағы – $\mathbf{e}_r$ және $\mathbf{e}_\vartheta$ орттары бойындағы проекцияларын есептеп табамыз (1.14, б-сурет):

$$E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p \cos \vartheta}{r^3}, \quad E_\vartheta = -\frac{\partial \varphi}{r \partial \vartheta} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin \vartheta}{r^3}. \quad (1.36)$$

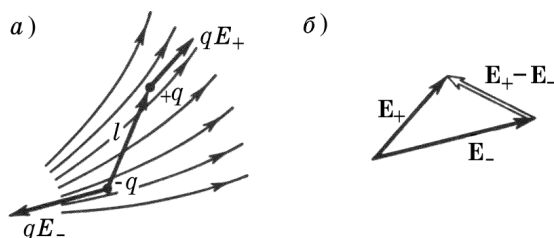
Осыдан $\mathbf{E}$ векторының модулі

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} \sqrt{1 + \cos^2\theta}. \quad (1.37)$$

Дербес жағдайда $\theta = 0$ және $\theta = \pi/2$ болғанда, диполь осі бойындағы ($E_{||}$) және оған перпендикуляр ($E_{\perp}$) өріс кернеуліктері үшін сәйкес өрнектер аламыз:

$$E_{||} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{r^3}, \quad E_{\perp} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3}, \quad (1.38)$$

яғни, r бірдей болғанда, $E_{||}$ кернеулік $E_{\perp}$ -дан екі есе үлкен.



1.15-сурет

Дипольға әсер ететін күш. Дипольді сыртқы біртекті емес электр өрісіне қоялық. E_+ және E_- – дипольдың оң және теріс зарядтары орналасқан нүктелердегі сыртқы өрістің кернеуліктері болсын. Онда дипольға әсер ететін қорытқы күш (1.15, а-сурет).

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}_+ - q\mathbf{E}_- = q(\mathbf{E}_+ - \mathbf{E}_-).$$

$\mathbf{E}_+ - \mathbf{E}_- - \mathbf{l}$ векторы бағытындағы дипольдың l ұзындығына тең кесіндідегі $\mathbf{E}$ векторының $\Delta\mathbf{E}$ өсімшесі. Бұл кесіндінің кішкентайлығынан

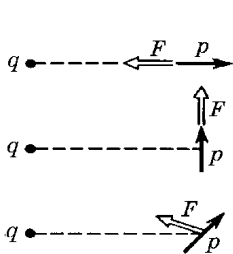
$$\Delta\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ - \mathbf{E}_- = \frac{\Delta\mathbf{E}}{\Delta l} l = \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial l} l.$$

Осы өрнекті $\mathbf{F}$ -ке арналған формулаға қойғаннан кейін, дипольға әсер ететін күшті табамыз:

$$\mathbf{F} = p \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial l}, \quad (1.39)$$

мұндағы, $p = ql$ – дипольдің электрлік моменті. Осы өрнекке кіретін туындыны вектордың бағыт бойынша туындысы деп атау қабылданған. Дербес туынды белгісі, бұл туындының белгілі бір бағыт бойынша $\mathbf{l}$ не $\mathbf{p}$ векторымен дәл келетін бағыт бойынша алынатынын нақтылайды.

(1.39) формуласының қарапайымдылығы $\partial \mathbf{E} / \partial l$ туындысы жеткілікті күрделі математикалық операция болып табылады. Біз бұған егжей-тегжейлі тоқталмайтын боламыз, алынған нәтеже мәнісіне көңіл аударатын боламыз. Бәрінен бұрын біртекті ортада $\partial \mathbf{E} / \partial l = 0$, болғандықтан $\mathbf{F} = 0$ екендігін еске саламыз. Демек, жалпы айтқанда, дипольға тек біртекті емес өрісте күш әсер етеді. Бұдан әрі, жалпы жағдайда $\mathbf{F}$ векторының бағыты $\mathbf{E}$ векторымен де, $\mathbf{p}$ векторымен де дәл келмейді. $\mathbf{F}$ векторы бағыты бойынша, тек $\mathbf{l}$ векторы не $\mathbf{p}$ векторы бағытындағы $\mathbf{E}$ векторының элементар өсімшесімен дәл келеді (1.15, б-сурет).

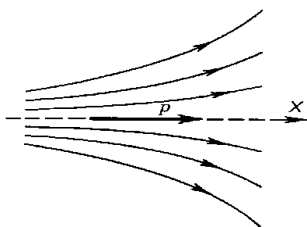


1.16-сурет

1.16-суретте оң нүктелік q зарядтың өрісінде, дипольдың әртүрлі үш қалпында, дипольға әсер ететін $\mathbf{F}$ күштің бағыты көрсетілген. Мұның шындығында осылай екендігіне өз бетінше көз жеткізу керек.

Егер біз $\mathbf{F}$ күштің қайсыбір X осіндегі проекциясын қарастыратын болсақ, (1.39) теңдігін осы бағыттағы проекциясы арқылы жазсақ жеткілікті

$$F_x = p \frac{\partial E_x}{\partial l}, \quad (1.40)$$



1.17-сурет

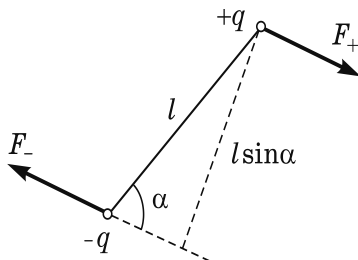
мұндағы, $\partial E_x / \partial l$ – $\mathbf{E}$ векторының сәйкес проекциясының тағы да $\mathbf{l}$ не $\mathbf{p}$ векторының бағыты бойынша туындысы.

Моменті $\mathbf{p}$ диполь қайсыбір біртекті емес $\mathbf{E}$ өрістің симметрия осінің бойында орналасқан болсын делік. Мысалы, X осінің бағытын 1.17-суретте көрсетілгендей етіп аламыз. $\mathbf{p}$ векторы бағытында

E_x проекциясының өсімшесі теріс болатындықтан, $F_x < 0$, демек $\mathbf{F}$ векторы солға – өріс кернеулігі үлкен жаққа қарай бағытталған. Диполь центрі өрістің симметрия осімен дәл келетіндей етіп, осы суреттегі $\mathbf{p}$ векторын 90° -қа бұрса, онда бұл қалыпта проекция $F_x = 0$ екенін пайымдау қиын емес.

Дипольға әсер ететін күш моменті. Сыртқы $\mathbf{E}$ электр өрісінде $\mathbf{p}$ электрлік дипольдің өзін қалай ұстайтынын қарастырайық. 1.18-суреттен көрініп тұрғандай, дипольдің оң және теріс зарядтарына әсер ететін күштер иіні $l \sin \alpha$ -ға тең жұп құрайды:

$$\mathbf{F}_+ = q\mathbf{E} \text{ және } \mathbf{F}_- = -q\mathbf{E},$$



1.18-сурет

яғни, дипольдің $\mathbf{E}$ өріске қатысты бағдарлануына тәуелді болады. Осы күштердің әрқайсысының модулі qE -ге тең, және де дипольға біздің білетініміздей, qE мен жұп иінінің көбейтіндісімен анықталатын N механикалық момент әсер ететін болады, яғни,

$$N = qE \cdot l \sin \alpha = pE \sin \alpha,$$

мұндағы, $p = ql$ – дипольдің электрлік моменті.

Алынған формуланы векторлық түрде былай беруге болады:

$$\boxed{\mathbf{N} = [\mathbf{pE}]} \quad (1.41)$$

Бұл күштердің моменті дипольді, оның $\mathbf{p}$ электрлік моменті $\mathbf{E}$ сыртқы өріс бағытында орналасатындай етіп, бұруға тырысады. Дипольдің бұл қалпы орнықты болып табылады.

Біртекті емес электр өрісінде диполь өзін төмендегідей ұстайды: Күштердің моменті (1.41) әсерінен диполь өріс бойымен орналасуға ($\mathbf{p} \uparrow \uparrow \mathbf{E}$), ал қорытқы күш әсерінен (1.39) $\mathbf{E}$ -нің модулі үлкен болатын бағытта орын ауыстыруға тырысады. Екі қозғалыс бір мезгілде болады.

Дипольдің өрістегі энергиясы. Сыртқы өрістегі q нүктелік зарядтың энергиясы $W = q\varphi$ екенін білеміз, мұндағы, φ – өрістің

q заряд тұрған нүктесіндегі потенциалы. Диполь – бұл екі зарядтан тұратын жүйе, сондықтан оның сыртқы өрістегі энергиясы:

$$W = q_+\varphi_+ + q_-\varphi_- = q(\varphi_+ - \varphi_-),$$

мұндағы, φ_+ және φ_- – $+q$ және $-q$ зарядтар орналасқан нүктелердегі сыртқы өрістің потенциалы. Екінші ретті аз шамаға дейінгі дәлдікте

$$\varphi_+ - \varphi_- = \frac{\partial\varphi}{\partial l}l,$$

мұндағы, $\partial\varphi/\partial l$ – потенциалдың $\mathbf{l}$ векторының бағыты бойынша туындысы. (1.32)-ге сәйкес $\partial\varphi/\partial l = -E_l$, сондықтан $\varphi_+ - \varphi_- = -E_l l = -\mathbf{E}\mathbf{l}$ және

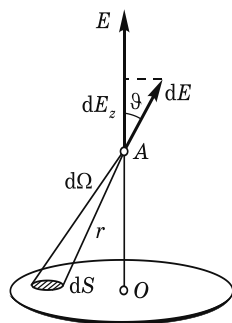
$$\boxed{W = -\mathbf{p}\mathbf{E}}. \quad (1.42)$$

Бұл формуладан минималь энергияға ($W_{\min} = -pE$) дипольдың $\mathbf{p} \uparrow \uparrow \mathbf{E}$ қалыпта ие болатындығы шығады (орнықты тепе-теңдік қалпы). Бұл қалыптан ауытқығанда, дипольді тепе-теңдік қалпына қайтаратын сыртқы күштердің моменті пайда болады.

Есептер

- 1.1.** Өте жұқа дискі $\sigma > 0$ беттік тығыздықта зарядталған. Осы дискі осіндегі, дискі Ω денелік бұрышпен көрінетін нүктедегі $\mathbf{E}$ электр өрісінің кернеулігін табу керек.

Шешімі. Симметриялық пайымдаулардан, дискі осінде $\mathbf{E}$ вектордың осы ось бағытымен дәл келетіні анық (1.19-сурет). Сондықтан зарядтың dS ауданшадағы элементінің dE_z құраушысын тауып, содан кейін алынған өрнекті дискінің барлық беті бойынша интегралдаса жеткілікті.



1.19-сурет

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma dS}{r^2} \cos \vartheta \quad (1)$$

екенін ұғу қиын емес (1.19-сурет).

Берілген жағдайда $dS \cos \vartheta / r^2 = d\Omega$ – A нүктесінен dS ауданша көрінетін денелік бұрыш, (1) өрнекті қайтадан былай жазуға болады:

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sigma d\Omega.$$

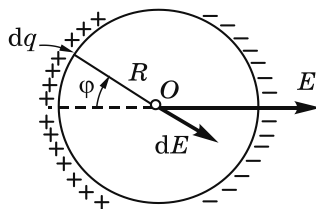
Осыдан ізделініп отырған шама

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sigma \Omega.$$

Дискіден үлкен қашықтықтарда $\Omega = S/r^2$, екенін еске саламыз, мұндағы, S – дискінің ауданы, және де $E = q/4\pi\epsilon_0 r^2$ – $q = \sigma S$ нүктелік заряд өрісіндей болады. O нүктесіне тікелей жақын жерде денелік бұрыш $\Omega = 2\pi$ және $E = \sigma/2\epsilon_0$.

- 1.2. Радиусы R өткізбейтін жіңішке сақина $\lambda = \lambda_0 \cos \varphi$ сызықтық тығыздықта зарядталған, мұндағы λ_0 – оң тұрақты, φ – азимуттық бұрыш. Сақина центріндегі электр өрісінің E кернеулігін табу керек.

Шешімі. Зарядтың берілген таралуы 1.20-суретте көрсетілген. Бұл таралудың симметриялылығынан O нүктесінде $\mathbf{E}$ векторының оңға қарай бағытталғаны және бұл вектордың модулі dq элементар зарядтардың $d\mathbf{E}$ векторларының $\mathbf{E}$ бағытындағы проекцияларының қосындысына тең екені анық. $d\mathbf{E}$ векторының $\mathbf{E}$ векторындағы проекциясы:



1.20-сурет

$$dE \cos \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{R^2} \cos \varphi, \quad (1)$$

мұндағы, $dq = \lambda R d\varphi = \lambda_0 R \cos \varphi d\varphi$. (1)-ді φ бойынша O ден 2π -ге дейін интегралдап, $\mathbf{E}$ векторының модулін табамыз:

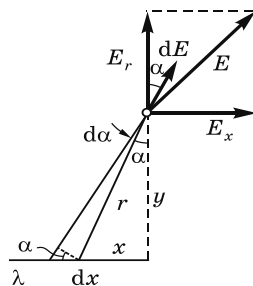
$$E = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0 R} \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{\lambda_0}{4\epsilon_0 R}.$$

$\langle \cos^2 \varphi \rangle = 1/2$ екенін біле отырып, бұл интегралды оңай есептеп табуға болатынын еске саламыз. Сонда

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \, d\varphi = \langle \cos^2 \varphi \rangle 2\pi = \pi.$$

- 1.3.** Жартылай шексіз біркелкі зарядталған түзу жіптің ұзындық бірлігіндегі заряды λ . Жіптен r қашықтықта және оның бір ұшы арқылы өтетін перпендикулярда жатқан нүктедегі электр өрісі кернеулігінің модулі мен бағытын анықтау керек.

Шешімі. Есеп $\mathbf{E}$ векторының E_x және E_r проекцияларын табуға тіреледі (1.21-сурет, онда $\lambda > 0$ деп ұйғарылады) E_x -тен бастаймыз. dx бөліктегі заряд элементінің E_x -ке қосатын үлесі төмендегідей:



1.21-сурет

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda \, dx}{r^2} \sin \alpha. \quad (1)$$

Бұл өрнекті интегралдауға оңай түрге келтіреміз. Біздің жағдайымызда $dx = r d\alpha / \cos \alpha$, $r = y / \cos \alpha$. Онда

$$dE_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 y} \sin \alpha \, d\alpha.$$

Бұл өрнекті α бойынша 0-ден $\pi/2$ -ге дейін интегралдап, мынаны аламыз:

$$E_x = \lambda / 4\pi\epsilon_0 r$$

E_r проекцияны табу үшін, dE_r -дің dE_x -тен айырмашылығы $\sin \alpha$ -ны (1) теңдіктегі $\cos \alpha$ -ға алмастыру болатынына назар аударсақ жеткілікті. Онда

$$dE_r = \lambda \cos \alpha \, d\alpha / 4\pi\epsilon_0 r \text{ және } E_x = \lambda / 4\pi\epsilon_0 r.$$

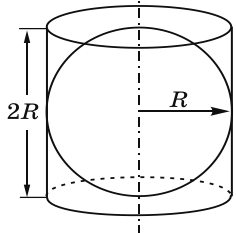
Біз қызық нәтижеге келдік: r -ге тәуелсіз $E_x = E_r$, яғни $\mathbf{E}$ векторы жіппен 45° бұрыш жасай бағдарланған. $\mathbf{E}$ векторының модулі

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_r^2} = \lambda \sqrt{2} / 4\pi\epsilon_0 r.$$

- 1.4. Гаусс теоремасы.** Аксиаль-симметриялы өріс берілген, оның кернеулігінің тек оның осіне дейінгі r қашықтыққа тәуелділігі $\mathbf{E} =$

$a r/r^2$ түрінде болады, мұндағы a – тұрақты. Центрі осы өріс осінде жатқан радиусы R сферамен шектелген көлемдегі зарядты табу керек.

Шешімі: Гаусс теоремасына сәйкес ізделініп отырған заряд көрсетілген сфера арқылы өтетін $\mathbf{E}$ векторы ағынын ε_0 -ге көбейткенге тең. Берілген жағдайда ағынды табу үшін, былай етуге болады. $\mathbf{E}$ өрістің осьтік симметриялы екенін еске алып, (біркелкі зарядталған жіп өрісі), R сфера арқылы өтетін ағын радиусы сондай және биіктігі $2R$, 1.22-суретте көрсетілгендей болып орналасқан цилиндрдің бүйір беті арқылы өтетін ағынға тең деген қорытындыға келеміз, онда



1.22-сурет

$$q = \varepsilon_0 \oint \mathbf{E} d\mathbf{S} = \varepsilon_0 E_r S,$$

мұндағы, $E_r = a/R$ және $S = 2\pi R \cdot 2R = 4\pi R^2$. Ақыр соңында,

$$q = 4\pi\varepsilon_0 aR.$$

- 1.5. Жүйе радиусы R біркелкі зарядталған сферадан және көлемдік тығыздығы $\rho = \alpha/r$, зарядпен толтырылған қоршаған ортадан тұрады, мұндағы, ρ_0 және α – оң тұрақтылар, r – сфера центрінен қашықтық. Шардан тысқары электр өрісінің кернеулігі r -ге тәуелді болмаған кездегі шар зарядын табу керек. E неге тең?

Шешімі. Сфераның ізделініп отырған заряды q болсын делік, онда Гаусс теоремасын пайдаланып, радиусы r сфера бет үшін мынаны жазамыз (заряды q сфера сыртында):

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} + \frac{1}{\varepsilon_0} \int_R^r \frac{\alpha}{r} 4\pi r^2 dr.$$

Осы теңдеуді интегралдап, мына түрге келтіреміз:

$$E \cdot 4\pi r^2 = (q - 2\pi\alpha R^2)/\varepsilon_0 + 4\pi\alpha r^2/2\varepsilon_0.$$

Жақша ішіндегі өрнек нөлге тең болғанда, E кернеулік r -ге тәуелді болмайды. Осыдан

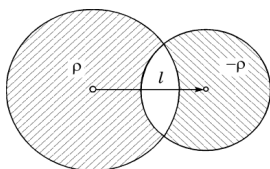
$$q = 2\pi\alpha R^2 \text{ және } E = \alpha/2\varepsilon_0.$$

- 1.6. Егер көлемдік тығыздықтары ρ және $-\rho$ таңбасы жағынан әр аттас зарядтармен біркелкі зарядталған екі шар центрлерінің арақашықтығы l векторымен сипатталатын болса, онда шарлардың қиылысу аймағындағы $\mathbf{E}$ электр өрісінің кернеулігін табу керек (1.23-сурет).

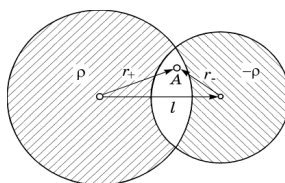
Шешімі. Біркелкі зарядталған шар ішіндегі электр өрісі кернеулігін Гаусс теоремасы көмегімен көрсету қиын емес

$$\mathbf{E} = (\rho/3\epsilon_0)\mathbf{r},$$

мұндағы, $\mathbf{r}$ – шар центріне қатысты радиус-вектор. Шарлардың қиылысу аймағындағы өрісті екі біркелкі зарядталған шарлардың өрістерінің суперпозициясы деп қарастыруға болады.



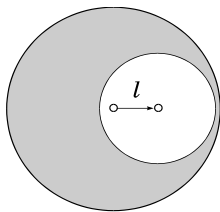
1.23-сурет



1.24-сурет

Онда осы аймақтың қалауымызша алынған A нүктесінде

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = \rho (\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_-)/3\epsilon_0 = \rho \mathbf{l}/3\epsilon_0.$$



1.25-сурет

Сөйтіп, мұндай шарлардың қиылысу аймағындағы өріс біртекті болып табылады. Бұл қорытынды шарлардың радиустарының арақатынасына және олардың центрлерінің арақашықтығына тәуелсіз дұрыс. Бұл, дербес жағдайда, бір шар толығымен екінші шардың ішінде болғанда, немесе шар ішінде сфералық қуыс болғанда да дұрыс (1.25-сурет).

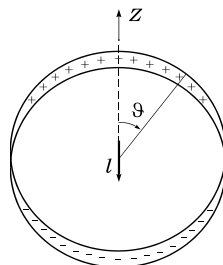
- 1.7. Алдыңғы есептің шешімін пайдаланып, бойымен беттік тығыздығы $\sigma = \sigma_0 \cos \vartheta$, заряд таралған сфера ішіндегі $\mathbf{E}$ өріс кернеулігін табу керек, мұндағы σ_0 – тұрақты, ϑ – полярлық бұрыш.

Шешімі. Көлемі бойынша тығыздықтары ρ және $-\rho$ зарядтар біркелкі таралған радиустары бірдей екі шарды қарастырайық, мұндағы, σ_0 – тұрақты, ϑ – полярлық бұрыш. Шарлар центрлері бір-біріне қатысты l қашықтыққа ығысқан болсын делік (1.26-сурет). Онда алдыңғы есептің

шешіміне сәйкес осы шарлардың қиылысу аймағында өріс біртекті болады:

$$\mathbf{E} = (\rho/3\varepsilon_0)\mathbf{l}. \quad (1)$$

Біздің жағдайымызда көлемдік заряд тек беттік қабатта нөлден өзгеше болады. l өте аз болғанда сферадағы зарядтың беттік тығыздығы туралы түсінікке келеміз. ϑ бұрышымен анықталатын нүктелерде зарядталған қабат қалыңдығы $l \cos \vartheta$ -ға тең (1.26-сурет). Демек, бұл жерде аудан бірлігіне $\sigma = \rho l \cos \vartheta = \sigma_0 \cos \vartheta$ зарядтан келеді, мұндағы, $\sigma_0 = \rho l$, (1) өрнекті мына түрде беруге болады:



1.26-сурет

$$\mathbf{E} = -(\rho_0/3\varepsilon_0)\mathbf{k},$$

мұндағы, $\mathbf{k}$ – ϑ бұрыш бастап есептелетін Z осінің орты.

- 1.8. Потенциал.** Қайсыбір электр өрісінің потенциалы $\varphi = \alpha(xy - z^2)$ түрінде болады. $M(2, 1, -3)$ нүктеде $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 3\mathbf{k}$ векторы бағытындағы $\mathbf{E}$ векторының проекциясын табу керек.

Шешімі. Алдымен $\mathbf{E}$ векторын табамыз:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi = -\alpha(y\mathbf{i} + x\mathbf{j} - 2z\mathbf{k}).$$

Ізделініп отырған проекция

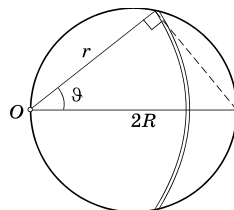
$$E_a = \mathbf{E} \frac{\mathbf{a}}{a} = \frac{-\alpha(y\mathbf{i} + x\mathbf{j} - 2z\mathbf{k})(\mathbf{i} + 3\mathbf{k})}{\sqrt{1 + 3^2}} = \frac{-\alpha(y - 6z)}{\sqrt{10}}.$$

M нүктесінде

$$E_a = \frac{-\alpha(1 + 18)}{\sqrt{10}} = -\frac{19}{\sqrt{10}}\alpha.$$

- 1.9.** Бір жағында беттік тығыздығы σ заряд біркелкі таралған жұқа дискі шетіндегі φ потенциалды табу керек. Дискі радиусы R -ге тең.

Шешімі. Анықтама бойынша зарядтың беттік таралуы жағдайында потенциал (1.28) интегралымен беріледі. Интегралдауды жеңілдету үшін, dS ауданша ретінде радиусы r , ені dr сақина



1.27-сурет

бөлігін тандап аламыз (1.27-сурет). Онда $dS = 2\vartheta r dr$, $r = 2R \cos \vartheta$, $dr = -2R \sin \vartheta d\vartheta$. Осы өрнектерді (1.28) интегралға қойғаннан кейін, O нүктесіндегі φ потенциал үшін мынаны аламыз:

$$\varphi = -\frac{\sigma R}{\pi \epsilon_0} \int_{\pi/2}^0 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta.$$

$\vartheta = u$, $\sin \vartheta d\vartheta = dv$ деп белгілеп, бөліктеп интегралдауды жүргіземіз:

$$\int \vartheta \sin \vartheta d\vartheta = -\vartheta \cos \vartheta + \int \cos \vartheta d\vartheta = -\vartheta \cos \vartheta + \sin \vartheta,$$

интегралдау шектерін қойғаннан кейін (-1) -ді береді. Нәтижесінде

$$\varphi = \sigma R / \pi \epsilon_0.$$

- 1.10.** Зарядталған шар ішіндегі өріс потенциалы тек оның центріне дейінгі r қашықтыққа $\varphi = ar^2 + b$, заңымен тәуелді болады, мұндағы a және b – тұрақтылар. Шар ішіндегі $\rho(r)$ көлемдік зарядтың таралуын табу керек.

Шешімі. Алдымен өріс кернеулігін табамыз. (1.32)-ге сәйкес

$$E_r = -\partial \varphi / \partial r = -2ar. \quad (1)$$

Содан кейін Гаусс теоремасын пайдаланамыз: $4\pi r^2 E_r = q / \epsilon_0$. Бұл өрнектің дифференциалы

$$4\pi d(r^2 E_r) = \frac{1}{\epsilon_0} dq = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \cdot 4\pi r^2 dr,$$

мұндағы, dq – радиустары r және $r + dr$ сфералар арасындағы заряд. Осыдан

$$r^2 dE_r + 2r E_r dr = \frac{1}{\epsilon_0} \rho r^2 dr, \quad \frac{\partial E_r}{\partial r} + \frac{2}{r} E_r = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

(1)-ді соңғы теңдеуге қойып, мынаны аламыз:

$$\rho = -6\epsilon_0 a,$$

яғни, шар ішінде заряд біркелкі таралған.

1.11. Диполь. Егер $\mathbf{p}_1$ және $\mathbf{p}_2$ векторлары дипольдарды қосатын түзу бойымен бағытталған және соңғылардың арақашықтығы l болса, онда моменттері $\mathbf{p}_1$ және $\mathbf{p}_2$ екі нүктелік дипольдардың өзара әсер күшін табу керек.

Шешімі. (1.39)-ға сәйкес

$$F = p_1 |\partial E / \partial l|,$$

мұндағы, E – (1.38)-дің бірінші формуласымен анықталатын $\mathbf{p}_2$ диполь өрісінің кернеулігі:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p_2}{l^3}.$$

Соңғы өрнектен l бойынша туынды алып, оны F -ке арналған формулаға қойып, мынаны аламыз:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{6p_1 p_2}{l^4}.$$

$\mathbf{p}_1 \uparrow\uparrow \mathbf{p}_2$ болғанда дипольдардың тартылатынын, $\mathbf{p}_1 \downarrow\uparrow \mathbf{p}_2$ болғанда тебілетінін еске саламыз.

Электр өрісіндегі өткізгіш



§ 2.1. Заттағы өріс

Микро- және макроөріс. Кез келген заттағы нағыз өріс – ол *микроөріс* деп аталады – кеңістікте де, уақыт өтуімен де күрт өзгереді. Ол атомдардың әртүрлі нүктелерінде және олардың аралықтарында әртүрлі болады. Берілген мезетте қайсыбір нүктедегі нағыз өрістің **E** кернеулігін табу үшін, заттың барлық жеке-жеке зарядталған бөлшектерінің – электрондар мен ядролардың өрістерінің кернеуліктерін қосу керек болар еді. Бұл сұрақтың шешімі мүлдем жүзеге аспайтындығы өзінен-өзі түсінікті. Нәтижесінің өзінің де күрделілігі сондай, оны тіпті қолдануға да болмаған болар еді. Бұдан басқа, макроскопиялық есептерді шешуде мұндай өрістің мүлде қажеті де жоқ. Көптеген мақсаттар үшін, анағұрлым қарапайым және теңдесі жоқ анағұрлым долбарлы сипаттама жеткілікті, әрі қарай біз оларды пайдаланатын боламыз.

Заттағы электр өрісі **E** деп *макроөріс* аталады – біз кеңістік орташаланған *микроөрісті* түсінеміз (кеңістік орташалаудан кейін, уақыт бойынша орташалау талап етілмейді). Бұл орташалау *физикалық шексіз аз көлем* – көптеген атомдардан тұратын, бірақ өлшемдері макроөріс елеулі өзгертін қашықтықтармен салыстырғанда көптеген есе аз болатын көлем бойынша жүргізіледі. Мұндай көлемдер бойынша орташалау барлық жүйені емес және атом шамалас қашықтықтардағы микроөрістің шапшаң өзгертін вариацияларын бәсеңдетеді, бірақ макроскопиялық қашықтықтардағы макроөрістің бір қалыпты өзгерістерін сақтайды. Сонымен, заттағы өріс

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{макро}} = \langle \mathbf{E}_{\text{микро}} \rangle. \quad (2.1)$$

Заттың өріске ықпалы. Кез келген затты электр өрісіне енгізгенде, затта оң және теріс зарядтардың ығысуы болады (ядролар мен электрондардың), бұл өз кезегінде осы зарядтардың ішінара бөлінуіне әкеледі. Заттың қандай да бір жерлерінде әртүрлі таңбалы компенсацияланбаған зарядтар пайда болады. Бұл құбылыс *электростатикалық индукция*, ал бөліну кезінде пайда болған зарядтар – *индукцияланған зарядтар* деп аталады.

Индукцияланған зарядтар қосымша электр өрісін туғызады, ол бастапқы (сыртқы) электр өрісімен бірге қорытқы өріс жасайды. Сыртқы өрісті және индукцияланған зарядтардың таралуын біле отырып, қорытқы өрісті табу кезінде заттың өзінің барына назар аудармауға болады – оның рөлі индукцияланған зарядтар көмегімен ескерілген болатын.

Сөйтіп, зат бар кезде қорытқы өріс сыртқы өріс пен индукцияланған зарядтардың өрісінің суперпозициясы түрінде анықталады. Барлық осы зарядтардың кеңістікте қалай таралатынын алдын-ала білмейтіндігімізден іс күрделенеді – есеп алғашқыда көрінетіндей, соншалықты оңай емес. Әрі қарай көретініміздей, индукцияланған зарядтардың таралуы негізінен заттың өзінің қасиеттеріне – оның физикалық табиғатына және дененің пішініне тәуелді болады. Бұл сұрақтармен егжей-тегжейлі танысуымыз керек болады.

§ 2.2. Өткізгіштің ішіндігі және сыртындағы өріс

Өткізгіш ішінде $E = 0$. Металл өткізгішті сыртқы электр өрісіне қоямыз, не оған қандай-да бір заряд береміз. Екі жағдайда да өткізгіштің барлық зарядтарына электр өрісі әсер ететін болады, нәтижесінде барлық теріс зарядтар (электрондар) өріске қарсы ығысады. Зарядтардың мұндай орын ауыстыруы (ток) зарядтардың белгілі бір орналасуы тағайындалғанға дейін жалғасады (бұл іс жүзінде секундтың аз үлесі ішінде болады), бұл кезде өткізгіш ішіндегі барлық нүктелерде электр өрісі нөлге тең болады. Сөйтіп статикалық жағдайда өткізгіш ішінде электр өрісі болмайды ($E = 0$).

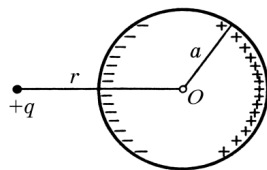
Әрі қарай өткізгіште $E = 0$ болғандықтан өткізгіш ішіндегі артық (компенсацияланбаған) зарядтардың тығыздығы барлық жерде нөлге тең, ($\rho = 0$). Мұны Гаусс теоремасының көмегімен

оңай түсінуге болады. Шынында да, өткізгіш ішінде $\mathbf{E} = 0$ болғандықтан, өткізгіш ішінде кез келген тұйықталған бет арқылы өтетін $\mathbf{E}$ векторының ағыны да нөлге тең. Демек, өткізгіш ішінде артық зарядтар жоқ.

Артық зарядтар тек өткізгіштің бетінде пайда болады, оның қайсыбір σ тығыздығы, жалпы айтқанда, оның бетінің әртүрлі нүктелерінде әртүрлі болады. Артық беттік зарядтың өте жұқа беттік қабатта болатынын еске саламыз (оның қалыңдығы бір – екі атом аралық қашықтық шамасында).

Өткізгіш ішінде өрістің болмауы (1.31)-ге сәйкес өткізгіштегі φ потенциалдың оның барлық жерінде бірдей екенін білдіреді, яғни электростатикалық өрістегі кез келген өткізгіш эквипотенциал аймақ болып табылады және беті эквипотенциалдық бет болады. Өткізгіш бетінің эквипотенциалдығы фактысынан тікелей осы бетте $\mathbf{E}$ өрістің әрбір нүктеде оған нормаль бойымен бағытталғандығы шығады. Бұлай болмаған болса, $\mathbf{E}$ -ның жанама құраушысы әсерінен зарядтар өткізгіш бетінде қозғалысқа келген болар еді, яғни зарядтардың тепе-теңдігі мүмкін болмас еді.

Мысал. Центрінен r қашықтықта нүктелік q заряд орналасқан зарядталмаған өткізгіш шардың потенциалын табу керек. Шардың барлық нүктелерінің φ потенциалы бірдей. Олай болса, оны шардың O центрі үшін табамыз, өйткені тек осы нүкте үшін есептеу анағұрлым оңай болады:



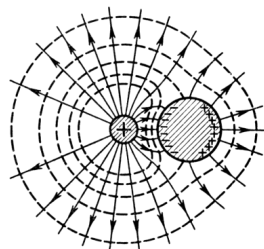
2.1-сурет

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} + \varphi', \quad (1)$$

мұндағы, бірінші қосылғыш – бұл q зарядтың потенциалы, ал екіншісі шар бетінде, индукцияланған зарядтардың потенциалы. Бірақ та барлық индукцияланған зарядтар O нүктесінен бірдей a қашықта болғандықтан, қосынды индукцияланған заряд нөлге тең, онда $\varphi' = 0$. Сөйтіп, берілген жағдайда шар потенциалы тек (1)-дегі бірінші қосылғышпен анықталады.

2.2-суретте біреуі (сол жақтағысы) зарядталған, екі өткізгіш шарлардан тұратын жүйе үшін, өріс және зарядтардың таралуы кескінделген. Электрлік индукция салдарынан оң жақтағы зарядталмаған шар бетінде қарама-қарсы таңбалы зарядтар пайда

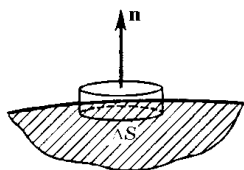
болады. Осы зарядтардың өрісі өз кезегінде сол жақтағы шар бетінде қайсыбір қайда таралуды туғызады – олардың бетте таралуы біркелкі болмайды. Суретте тұтас сызықтармен **E** векторының сызықтары, пунктир сызықтармен эквипотенциал беттердің сурет жазықтығымен қиылысуы көрсетілген. Осы жүйеден алыстаған сайын, эквипотенциал беттер анағұрлым сфералыққа жақын болады, ал **E** векторының сызықтары радиалға, өрістің өзі q нүктелік заряд өрісіне жақындайды.



2.2-сурет

Өткізгіш бетіндегі өріс. Тікелей өткізгіш бетіндегі электр өрісінің кернеулігі, қазір көретініміздей өткізгіш бетіндегі зарядтың локальды тығыздығымен қарапайым қатыспен байланысқан. Бұл байланысты Гаусс теоремасы көмегімен оңай тағайындауға болады.

Өткізгіштің біз қарастырып отырған бөлігі вакууммен шектескен болсын делік. **E** векторының сызықтары өткізгіш бетіне



2.3-сурет

перпендикуляр, сондықтан тұйықталған бет ретінде кішкентай цилиндр аламыз, оны 2.3-суретте көрсетілгендей етіп орналастырамыз. Онда осы бет арқылы өтетін **E** векторының ағыны тек цилиндрдің «сыртқы» шеті арқылы өтетін ағынға тең болады да (бүйір беті мен ішкі шеті арқылы өтетін ағындар нөлге тең), $E_n \Delta S = \sigma \Delta S / \epsilon_0$ -ді аламыз, мұндағы E_n – **E**

векторының сыртқы **n** нормальдағы проекциясы (өткізгішке қатысты). ΔS – цилиндр қимасының ауданы, σ – өткізгіштегі зарядтың локальдық беттік тығыздығы. Осы теңдіктің екі жағын ΔS -ке қысқартып, мынаны аламыз:

$$E_n = \sigma / \epsilon_0. \quad (2.2)$$

Егер $\sigma > 0$ болса, онда $E_n > 0$, яғни **E** векторы өткізгіш бетінен сыртқа бағытталған бағыты бойынша **n** нормальмен дәл келеді; егер $\sigma < 0$ болса, онда $E_n < 0$ – **E** векторы өткізгіш бетіне қарай бағытталған.

(2.2) қатысына байланысты өткізгішке жақын жерде **E** векторы тек зарядтың σ локальдық тығыздығына тәуелді болады деген қате

қорытынды туындауы мүмкін. Бұл олай емес. $\mathbf{E}$ кернеулік векторы да, σ -ның өзінің мәні сияқты қарастырылып отырған жүйенің барлық зарядтарымен анықталады.

§ 2.3. Өткізгіш бетіне әсер ететін күштер

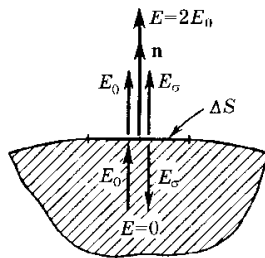
Өткізгіш бетінің зарядталған бөлігі вакууммен шектесетін жағдайды қарастырайық. Өткізгіш бетінің ΔS кішкентай элементіне әсер ететін күш

$$\Delta \mathbf{F} = \sigma \Delta S \cdot \mathbf{E}_0, \quad (2.3)$$

мұндағы, $\sigma \Delta S$ – осы элементтің заряды $\mathbf{E}_0$ – $\sigma \Delta S$ заряд тұрған жерде жүйенің барлық қалған зарядтарының туғызатын өріс кернеулігі. $\mathbf{E}_0$ -дің өткізгіш бетінің берілген элементіне жақын жердегі $\mathbf{E}$ өріс кернеулігіне тең емес екенін бірден еске саламыз, алайда олардың арасында қарапайым байланыс бар. Соны табамыз яғни, $\mathbf{E}_0$ -ді $\mathbf{E}$ арқылы өрнектейміз.

$\mathbf{E}_\sigma$ – ΔS ауданшадағы зарядтың осы ауданшаға жақын нүктелерде жасайтын өрісі болсын делік, мұнда ол өзін шексіз біркелкі зарядталған жазықтық сияқты ұстайды. Онда (1.10)-ға сәйкес $E_\sigma = \sigma/2\epsilon_0$.

Өткізгіш ішінде де, сыртында да қорытқы өріс $\mathbf{E}_0$ және $\mathbf{E}_\sigma$ өрістердің суперпозициясы болып табылады (ΔS ауданшаға жақын жерде), ΔS ауданшаны әртүрлі жақтарында $\mathbf{E}_0$ өріс іс жүзінде бірдей, ал $\mathbf{E}_\sigma$ өрістің қарама-қарсы бағыттары бар (2.4-сурет, онда анықтылық



2.4-сурет

үшін $\sigma > 0$ деп алынған). Өткізгіштегі $\mathbf{E} = 0$ шартынан, $E_\sigma = E_0$ екені шығады, онда өткізгіш сыртындағы оның бетінде $E = E_0 + E_\sigma = 2E_0$, сонымен,

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}/2, \quad (2.4)$$

(2.3) теңдеуі мына түрге келеді:

$$\Delta \mathbf{F} = 1/2 \sigma \Delta S \cdot \mathbf{E}. \quad (2.5)$$

Осы теңдеудің екі жағын ΔS -ке бөліп, өткізгіштің бірлік бетіне әсер ететін күштің өрнегін аламыз:

$$\mathbf{F}_{\text{бірл}} = 1/2 \sigma \mathbf{E}. \quad (2.6)$$

Бұл өрнекке кіретін σ және $\mathbf{E}$ шамалары өзара байланысты болғандықтан, оны басқа түрде жазуға болады. Шындығында, (2.2)-ге сәйкес $E_n = \sigma/\varepsilon_0$ немесе $\mathbf{E} = (\sigma/\varepsilon_0)\mathbf{n}$, мұндағы, $\mathbf{n}$ – өткізгіштің берілген нүктесінде бет элементіне сыртқы нормаль. Сондықтан

$$\mathbf{F}_{\text{бірл}} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} \mathbf{n} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \mathbf{n}, \quad (2.7)$$

мұнда, $\sigma = \varepsilon_0 E_n$ және $E_n^2 = E^2$ екені ескерілген. $\mathbf{F}_{\text{бірл}}$ шама **күштердің беттік тығыздығы** деп аталады. σ -ның таңбасына, демек $\mathbf{E}$ бағытына да тәуелсіз, $\mathbf{F}_{\text{бірл}}$ күш (2.7)-ден көрініп тұрғандай өткізгішті керуге тырысып, әрқашан одан сыртқа қарай бағытталады.

Мысал. Өткізгіш бетінің барлық нүктелерінде $\mathbf{E}$ өріс кернеулігі белгілі деп ұйғарып, вакуумда өткізгішке тұтастай әсер ететін электрлік күштер үшін өрнек жазамыз.

(2.7)-ні dS -ке көбейтіп, беттің dS элементіне әсер ететін $d\mathbf{F}$ күшке арналған өрнек аламыз:

$$d\mathbf{F} = 1/2 \varepsilon_0 E^2 d\mathbf{S},$$

мұндағы, $d\mathbf{S} = \mathbf{n}dS$. Бүкіл өткізгішке әсер ететін қорытқы күш осы теңдеуді өткізгіштің барлық беті бойынша интегралдау арқылы анықталады.

$$\mathbf{F} = \frac{\varepsilon_0}{2} \oint E^2 d\mathbf{S}.$$

§ 2.4. Тұйықталған өткізгіш қабықшаның қасиеттері

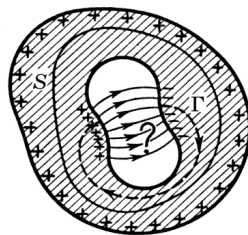
Біз тепе-теңдік күйде өткізгіш ішінде артық зарядтар жоқ екенін анықтадық; өткізгіш ішінде зат – электрлік нейтраль.

Сондықтан өткізгіш ішіндегі қайсыбір көлемнен затты шығарып тастау (тұйықталған қуыс жасау өрісті еш жерде өзгертпейді, яғни зарядтардың тепе-тең орналасуына ешқандай әсер етпейді. Демек, артық заряд қуысы бар өткізгіште тұтас өткізгіштегідей оның сыртқы бетінде таралады.

Сөйтіп, егер қуыста электр заряды жоқ болса, ондағы электр өрісі нөлге тең. *Сыртқы зарядтар, дербес жағдайда өткізгіштің сыртқы бетіндегі зарядтар өткізгіш ішіндегі қуыста ешқандай электр өрісін тудызбайды. Электростатикалық қорғау* – дене-лерді, мысалы өлшеуіш құралдарды сыртқы электростатикалық өрістерден экрандау нақ осыған негізделген. Іс жүзінде тұтас өткізгіш – қабықшаны жеткілікті тығыз металл тормен алмастыруға болады.

Бос қуыста электр өрісінің болмайтын-дығын басқаша да дәлелдеуге болады. Қуысты қамтитын және толығымен өткізгіш затында тұратын тұйықталған S бетті аламыз. Өткізгіштің барлық жерінде E өріс нөлге тең болғандықтан, онда S арқылы өтетін E векторының ағыны да нөлге тең.

Осыдан, Гаусс теоремасына сәйкес S ішіндегі қосынды заряд та нөлге тең. Бұл шындық, қуыстың өзінің бетінде бірдей мөлшерде оң және теріс зарядтар болған кездегі 2.5-суретте көрсетілген ситуацияны жоққа шығармайды. Бұл ұйғарымға алайда, басқа теорема – E векторының циркуляциясы туралы теорема тыйым салады. Шынында, Γ контур E векторы сызықтарының бірінің бойымен қуысты қиып өтсін және өткізгіш затымен тұйықталған болсын делік. Осы контур бойынша E векторының сызықтық интегралы нөлге тең емес екені анық, циркуляция туралы теоремаға сәйкес бұлай болуы мүмкін емес.



2.5-сурет

Енді қуыс бос емес, онда қандай да бір электр заряды (біреу болмауы да мүмкін) бар жағдайды қарастырайық. Сондай-ақ барлық сыртқы кеңістік өткізгіш ортамен толтырылған болсын делік. Тепе-теңдік кезінде ондағы өріс нөлге тең, демек орта электрлік бейтарап және еш жерде артық зарядтар жоқ.

Өткізгіштің барлық жерінде $E = 0$, болғандықтан, қуысты қоршап тұрған тұйық бет арқылы өтетін E векторының ағыны да нөлге тең болады. Гаусс теоремасы бойынша, бұл осы тұйықталған бет ішіндегі зарядтардың алгебралық қосындысы да нөлге тең

екенін білдіреді. Сөйтіп қуыс бетіндегі индукцияланған зарядтардың алгебралық қосындысы осы қуыс ішіндегі зарядтардың алгебралық қосындысына модулі бойынша тең, таңбасы жағынан қарама-қарсы.

Тепе-теңдік кезінде қуыс бетінде индукцияланған зарядтар, қуыс сыртында қуыс ішіндегі зарядтардың өрісін компенсациялайтындай болып орналасады.

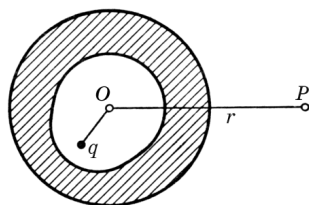
Өткізгіш орта барлық жерде электрлік бейтарап болғандықтан, ол электр өрісіне ешқандай әсер ете алмайды. Сондықтан, егер оны алып тастап, тек қуыс айналасындағы өткізгіш қабықшаны қалдырса, бұдан өріс еш жерде өзгермейді және қабықша сыртында нөлге тең болып қалады.

Сөйтіп, өткізгіш қабықшамен қоршалған зарядтардың және қуыс бетінде индукцияланған зарядтардың (қабықшаның ішкі бетіндегі) өрісі бүкіл сыртқы кеңістікте нөлге тең.

Біз келесі маңызды қорытындыға келеміз: *тұйық өткізгіш қабат барлық кеңістікті электрлік тұрғыдан бір-біріне мүлде тәуелді емес, ішкі және сыртқы бөліктерге бөледі.* Мұны былай түсіну керек: зарядтардың қабықша ішінде кез келген орын ауыстыруынан кейін, сыртқы кеңістікте өрістің ешқандай өзгерісі болмайды, олай болса, қабықшаның сыртқы бетінде зарядтардың таралуы бұрынғыша қалады. Бұл қуыс ішіндегі өріске (егер онда зарядтар бар болса) және индукцияланған зарядтардың таралуына да қатысты – қабықша сыртында зарядтардың орын ауыстыруының нәтижесінде олар да өзгермей қалады.

Мысал. Нүктелік q заряд сыртқы беті сфера болатын, электрлік бейтарап қабықша ішінде орналасқан. (2.6-сурет) Қабықшадан тысқары, сыртқы беттің O центрінен r қашықтықтағы P нүктесіндегі φ потенциалды табу керек.

P нүктесінде өріс тек қабықшаның сыртқы бетінде – сферада индукцияланған зарядтармен анықталады, өйткені бұрын көрсетілгендей, нүктелік q зарядтың және қабықшаның ішкі бетінде индукцияланған зарядтардың өрісі, қуыс сыртында барлық жерде нөлге тең. Әрі қарай, сыртқы қабықшадағы заряд, оның симметриялығынан, біркелкі таралады, сондықтан



2.6-сурет

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}.$$

Шексіз өткізгіш жазықтық тұйық өткізгіш қабықшаның дербес жағдайы болып табылады. Мұндай жазықтықтың бір жағындағы барлық кеңістік электрлік тұрғыдан оның екінші жағындағы кеңістікке тәуелді емес.

Тұйықталған өткізгіш қабықшаның көрсетілген қасиеттерін алдағы уақытта да әлденеше рет пайдаланатын боламыз.

§ 2.5. Электростатиканың жалпы есебі. Кескіндеу әдісі

Зарядтардың таралуы белгісіз, бірақ өткізгіштердің потенциалы, олардың пішіндері және салыстырмалы орналасулары берілген есептерді өте жиі кездестіруге тура келеді. Тағы өткізгіштер арасындағы өрістің кез келген нүктесіндегі $\varphi(\mathbf{r})$ потенциалды анықтау талап етіледі. $\varphi(\mathbf{r})$ потенциалды біле отырып, $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ өрістің өзін шығарып алуға және $\mathbf{E}$ -нің тікелей өткізгіш бетіндегі мәні бойынша, ондағы беттік зарядтардың таралуын табуға болатынын еске саламыз.

Пуассон және Лаплас тендеулері. Потенциал – φ функция қанағаттандыратын дифференциалдық тендеуді табайық. Бұл үшін (1.20)-ның сол жақ бөлігіндегі $\mathbf{E}$ орнына оның φ арқылы өрнегін қоямыз, яғни $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$. Нәтижесінде потенциал үшін жалпы дифференциалдық тендеу – *Пуассон теңдеуін* аламыз:

$$\boxed{\nabla^2\varphi = -\rho/\epsilon_0} \quad (2.8)$$

мұндағы, ∇^2 – *Лаплас операторы (лапласиан)*. Оның декарттық координаталардағы түрі

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

яғни, $\nabla \cdot \nabla$ скаляр көбейтіндіні береді [(1.19)-ды қараңыз]. Егер өткізгіштер арасында зарядтар болмаса ($\rho = 0$), онда (2.8) теңдеуі анағұрлым қарапайым *Лаплас теңдеуіне* өтеді:

$$\boxed{\nabla^2 \varphi = 0.} \quad (2.9)$$

Потенциалды анықтау өткізгіштер арасындағы барлық кеңістікте (2.8), не (2.9) теңдеулерін қанағаттандыратындай φ функциясын табуға тіреледі, ал өткізгіштердің өздерінің беттерінде φ_1, φ_2 және т.б. берілген мәндерді қабылдайды.

Теорияда бұл есептің жалғыз шешімі бар екені дәлелденеді. Бұл ұйғарым *жалғыздық теоремасы* деп аталады. Физикалық көзқарас тұрғысынан бұл қорытынды жеткілікті түсінікті: егер шешім біреу болмаса, онда потенциалдық «рельеф» біреу болмайды, демек әрбір нүктесінде $\mathbf{E}$ өріс, жалпы айтқанда, бір мәнді емес физикалық абсурдқа келдік.

Сондай-ақ, бірден-бірлік теоремасы бойынша, статикалық жағдайда заряд өткізгіш бетінде жалғыз-ақ жолмен таралады. Шындығында, өткізгіштегі зарядтар мен оның бетіне жақын жердегі электр өрісі арасында бір мәнді байланыс бар (2.2): $\sigma = \varepsilon_0 E_n$. Осыдан бірден $\mathbf{E}$ өрістің жалғыздығы зарядтың өткізгіш бетінде таралуының жалғыздығының анықтайтындығы шығады.

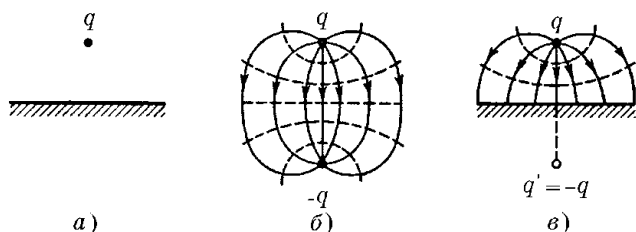
Жалпы жағдайда (2.8) және (2.9) теңдеулерін шешу – күрделі және еңбекті көп керек ететін есеп. Бұл теңдеулердің аналитикалық шешімдері тек аз ғана дербес жағдайлар үшін алынған. Бірден-бірлік теоремасын пайдалану бірқатар электростатикалық есептердің шешімін өте оңайлатады. Егер есептің шешімі Лаплас теңдеуін (не Пуассон) және шекаралық шарттарды қанағаттандыратын болса, онда біз оны қандай тәсілдермен (ең болмаса болжам жолымен) тапсақ та, оны дұрыс және бірден-бір болып табылады деп ұйғаруға болады.

Мысал. Өткізгіштің бос қуысында өрістің болмайтындығын көрсетейік.

Қуыстағы φ потенциал (2.9) Лаплас теңдеуін қанағаттандырып, қуыс қабырғаларында қандай да бір φ_0 мәнді қабылдауы керек. Осы шартты қанағаттандыратын Лаплас теңдеуінің шешімін бірден болжап білуге болады: $\varphi = \varphi_0$. Бірден-бірлік теориясына сәйкес басқа шешім болуы мүмкін емес. Сондықтан $\mathbf{E} = -\nabla\varphi = 0$.

Кескіндеу әдісі. Бұл бірқатар жағдайларда (өкінішке орай, көп емес) электр өрісін жеткілікті оңай есептеп табуға мүмкіндік беретін жасанды әдіс. Ең қарапайым мысал ретінде шексіз өткізгіш

жазықтық жанында орналасқан нүктелік q зарядты алып, осы әдістің идеясын қарастырайық (2.7, а-сурет).



2.7-сурет

Әдіс идеясының мәнісі сонда, біз шешімін, не оның бөлігін пайдалануға болатын және оңай шешілетін басқа есепті табуымыз керек. Біздің жағдайымызда мұндай қарапайым есеп, екі q және $-q$ зарядтардан тұратын есеп болып табылады. Бұл жүйенің өрісі белгілі (олардың эквипотенциалдары және $\mathbf{E}$ векторының сызықтары 2.7, б-суретте көрсетілген).

Ортаңғы эквипотенциал бетпен (оның потенциалы $\varphi = 0$) өткізгіш жазықтықты біріктіреміз және $-q$ зарядты алып тастаймыз. Бірден-бірлік теоремасына сәйкес жоғарғы жартылай кеңістікте өріс бұрынғыша қалады. Шындығында, өткізгіш жазықтықта және шексіздікте $\varphi = 0$, нүктелік q зарядты радиусы нөлге, ал потенциалы шексіздікке ұмтылатын кішкентай сфералық өткізгіштің шектік жағдайы деп қарастыруға болады. Сөйтіп жоғарғы жартылай кеңістікте потенциал үшін шекаралық шарттар сол күйінде қалды; олай болса, осы аймақтағы өріс те сол күйінде қалады (2.7, в-сурет).

Бұл қорытындыға тұйықталған өткізгіш қабықша қасиеттері арқылы келуге болады (§ 2.4-ке қараңыз), өйткені өткізгіш жазықтықпен бөлінген екі жартылай кеңістік электрлік тұрғыдан бір-біріне тәуелсіз, $-q$ зарядты алып тастау жоғарғы жартылай кеңістіктегі өріске әсерін тигізбейді, оның бұрынғыша қалатынын байқаймыз.

Сонымен, қарастырылып отырған жағдайда жоғарғы жартылай кеңістікте өріс нөлден өзгеше, осы өрісті есептеу үшін, өткізгіш жазықтықтың таңбасы жағынан q зарядқа қарама – қарсы екінші жағында одан q зарядтың қашықтығында орналасқан

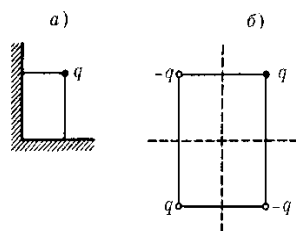
$q' = -q$ жалған заряд – кескінді енгізсе жеткілікті. Жалған q' заряд жоғарғы жартылай кеңістікте жазықтықта индукцияланған зарядтардай өріс жасайды. Жалған заряд барлық индукциялық зарядтардың «әсерін» алмастырады деп айтқанда, дәл осы ойға алынады. Жалған заряд «әсері» тек шын q заряд орналасқан жартылай кеңістікке қолданылатыны есте болуы керек. Басқа жартылай кеңістікте өріс жоқ.

Қорыта келгенде, кескіндеу әдісінің мәнісі потенциалды шекаралық шарттарға келтіруге негізделгенін айтуымызға болады, кеңістіктің біз қарастырып отырған бөлігінде өріс конфигурациясы сондай болатындай басқа есепті табуға тырысамыз (зарядтардың конфигурациясын). Егер осыны жеткілікті қарапайым конфигурациялар көмегімен істеуге болатын болса, онда кескіндеу әдісі өте тиімді болады. Тағы бір мысал қарастырайық.

Мысал. Нүктелік q заряд екі өзара перпендикуляр өткізгіш жартылай жазықтықтар арасында тұр. (2.8, а-сурет). q зарядқа әсері берілген жартылай жазықтықтардағы барлық индукцияланған зарядтардың әсеріне эквивалентті болатын жалған нүктелік зарядтардың орналасу қалпын табу керек.

$\varphi = 0$ эквипотенциал беттері өткізгіш жартылай жазықтықтармен дәл келетін нүктелік зарядтар жүйесін табу керек. Бұл жерде бір не екі жалған зарядтармен, амалдауға болмайды, мұндай зарядтар үшеу болуы керек. (2.8, б-сурет). Төрт зарядтан тұратын жүйенің тек осындай конфигурациясы кезінде қажетті «келтіруді» жүзеге асыруға – өткізгіш жартылай жазықтықта потенциалдың нөлге тең болуын қамтамасыз етуге болады. Дәл осы үш жалған заряд «тік бұрыш ішінде» өткізгіш жартылай жазықтықтардағы индукцияланған зарядтардай өріс жасайды.

Нүктелік зарядтардың осы конфигурациясын таба отырып (басқа есепті), содан кейін бірқатар есептерді, мысалы «тікбұрыш» ішіндегі кез-келген нүктедегі өріс потенциалы мен кернеулігін, q зарядқа әсер ететін күшті табу және т.б. бірқатар сұрақтарды оңай шешуге болады.



2.8-сурет

§ 2.6. Электр сыйымдылық. Конденсаторлар

Оқшауланған өткізгіштің электр сыйымдылығы. Қандай да бір оқшауланған, яғни басқа өткізгіштерден, денелерден және зарядтардан алыстатылған өткізгішті қарастырайық. Тәжірибе мұндай өткізгіштің заряды мен φ потенциалы (шексіздікте потенциал нольге тең деп есептеуге келіскенбіз) арасында тура пропорционалдық болады: $\varphi \propto q$. q/φ демек, q зарядқа тәуелді болмайды, әрбір оқшауланған өткізгіш үшін бұл шаманың өз мәні болады.

$$C = q/\varphi \quad (2.10)$$

шама оқшауланған өткізгіштің *электр сыйымдылығы* деп аталады (қысқаша *сыйымдылық*). Ол сан жағынан өткізгіштің потенциалын бір бірлікке арттыруға қажетті зарядқа тең. Сыйымдылық өткізгіштің өлшемдеріне және пішініне тәуелді болады.

Мысал. Радиусы R шар формалы оқшауланған өткізгіштің сыйымдылығын табайық.

(2.10) формуладан көрініп тұрғандай, бұл үшін берілген өткізгішті ойша q зарядпен зарядтап, оның φ потенциалын есептеп табу керек. (1.23)-ке сәйкес шар потенциалы

$$\varphi = \int_R^{\infty} E_r dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_R^{\infty} \frac{q}{r^2} dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}.$$

Алынған нәтижені (2.10)-ға қойып, мынаны аламыз:

$$C = 4\pi\epsilon_0 R. \quad (2.11)$$

Сыйымдылықтың өлшем бірлігіне 1 Кл заряд бергенде потенциалы 1 В-қа өзгертін өткізгіштің сыйымдылығы алынады. Сыйымдылықтың бұл бірлігі *фарад* (Ф) деп аталады.

Фарад – өте үлкен шама: радиусы 9 млн. км, яғни Жер радиусынан 1500 есе үлкен болатын оқшауланған шардың сыйымдылығы 1 Ф болған болар еді (Жердің сыйымдылығы $C = 0,7$ мФ). Практикада көбінесе 1 мкФ-тан 1 пФ-қа дейінгі интервалдағы сыйымдылықтар қолданылады.

Конденсаторлар. Егер өткізгіш оқшауланбаған болса, оған басқа денелер жақындатылғанда, оның сыйымдылығы елерліктей артады. Бұған, берілген өткізгіштің өрісінің қоршаған денелерде зарядтардың бөлініп таралуын туғызатындығынан индукциялық зарядтардың пайда болуы себепші болады. Өткізгіштің заряды $q > 0$ болсын делік. Онда индукцияланған теріс зарядтар, оң зарядтарға қарағанда өткізгішке жақын орналасады. Сондықтан, меншікті зарядтар мен басқа денелерде индукцияланған зарядтардың потенциалының алгебралық қосындысы болып табылатын өткізгіш потенциалы, оған басқа зарядталмаған денелерді жақындатқанда азаяды. Демек, оның сыйымдылығы артады.

Бұл оқшауланған өткізгішке қарағанда сыйымдылығы едәуір үлкен және оған қоса қоршаған денелерге тәуелсіз болатын өткізгіштер жүйесін жасауға мүмкіндік берді. Мұндай жүйе **конденсатор** деп аталады. Ең қарапайым конденсатор бір-біріне жақын орналасқан екі өткізгіштерден (астарлардан) тұрады.

Сыртқы денелер конденсатор сыйымдылығына әсер етпеуі үшін, олардың астарлары бір-біріне қатысты, оларда жинақталған зарядтар өрісі іс жүзінде конденсатор ішінде шоғырланатындай етіп орналастырылады. Бұл бір астарда басталған **E** векторының сызықтары екіншісінде аяқталуы керек дегенді білдіреді, яғни астарлардағы зарядтар модулі бойынша бірдей, таңбасы жағынан қарама-қарсы болуы керек (q және $-q$).

Конденсатор сыйымдылығы оның негізгі сипаттамасы болып табылады. Оқшауланған өткізгіш сыйымдылығынан айырмашылығы, конденсатор сыйымдылығы деп, конденсатор зарядының оның астарлары арасындағы потенциалдар айырымына қатынасын түсінеді (бұл айырым кернеу деп аталады):

$$C = q/U. \quad (2.12)$$

Конденсатордың q заряды ретінде оның оң зарядталған астарында орналасқан заряд алынады.

Конденсатор сыйымдылығы да фарадпен өлшенеді.

Конденсатор сыйымдылығы оның геометриясына (өлшемдеріне және астарлар формасына), олардың арасындағы саңылауға және конденсаторды толтырып тұрған ортаға тәуелді болады. Астарларының арасында вакуум деп есептеп, кейбір конденсаторлардың сыйымдылығының өрнегінің табайық.

Жазық конденсатордың сыйымдылығы. Бұл конденсатор ені h саңылаумен бөлінген екі параллель пластиналардан тұрады. Егер конденсатор заряды q болса, онда (1.11)-ге сәйкес оның астарлары арасындағы өріс кернеулігі $E = \sigma/\varepsilon_0$, мұндағы $\sigma = q/S$, S – әрбір пластинаның ауданы. Демек астарлар арасындағы кернеу

$$U = Eh = q h/\varepsilon_0 S.$$

Осы өрнекті (2.12)-ге қойғаннан кейін, мынаны аламыз:

$$C = \varepsilon_0 S/h. \quad (2.13)$$

Бұл есептеулер пластина шеттерінде өрістің бұрмалануы есепке алынбай жүргізілген (жиіктік эффектілерді ескермей). Пластиналардың сызықтық өлшемдерімен салыстырғанда h саңылау неғұрлым кішкентай болса, реал жазық конденсатордың сыйымдылығы алынған өрнекпен дәлірек анықталады.

Сфералық конденсатор сыйымдылығы. Конденсатордың ішкі және сыртқы астарларының радиусы сәйкесінше a және b болсын делік. Егер конденсатор заряды q болса, онда астарлары арасындағы өріс кернеулігі Гаусс теоремасы бойынша анықталады:

$$E_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2}.$$

Конденсатордағы кернеу

$$U = \int_a^b E_r dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right).$$

Осыдан сфералық конденсатор сыйымдылығы төмендегідей болатыны оңай көрінеді:

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{ab}{a-b}. \quad (2.14)$$

Астарлар арасындағы саңылау кішкентай болғанда, яғни $(b - a) \ll a$ (немесе b) шартында алынған өрнек (2.13)-ке – жазық конденсатор сыйымдылығының өрнегіне өтеді.

Цилиндрлік конденсатор сыйымдылығы. Сфералық конденсатор жағдайындағыдай пайымдап, мынаны аламыз:

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln(b/a)}, \quad (2.15)$$

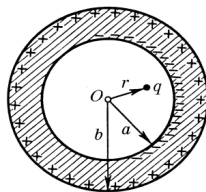
мұндағы, l – конденсатор ұзындығы; a және b – цилиндрлік астарлардың ішкі және сыртқы радиустары. Мұнда да алдыңғы жағдайдағыдай астарлар арасындағы саңылау кішкентай болғанда, алынған өрнек (2.13)-ке өтеді.

Конденсатор сыйымдылығына ортаның әсері туралы §3.6.-ны қараңыз.

Есептер

2.1 Потенциалды табу туралы. Ішкі және сыртқы радиустары сәйкесінше a және b болатын зарядталмаған өткізгіш сфералық қабаттың O центрінен r қашықтықта q нүктелік заряд орналасқан, егер $r < a$ болса, онда O нүктесіндегі потенциалды табу керек.

Шешімі. Электростатикалық индукция нәтижесінде қабаттың ішкі бетіне, айталық, теріс зарядтар, ал сыртқы бетіне оң зарядтар шығады делік (2.9-сурет). Суперпозиция принципіне сәйкес ізделініп отырған O нүктесіндегі потенциалды мына түрде беруге болады:



2.9-сурет

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r} + \oint \frac{\sigma_- dS}{a} + \oint \frac{\sigma_+ dS}{b} \right),$$

мұндағы, бірінші интеграл қабаттың ішкі бетіндегі барлық индукцияланған зарядтар бойынша, ал екінші интеграл қабаттың сыртқы бетіндегі барлық зарядтар бойынша алынады. Осы өрнектен шығатыны:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right).$$

Тек O нүктесінде ғана саңылау потенциалын осылай оңай табуға болатынын еске саламыз, өйткені тек осы нүктеден ғана бірдей

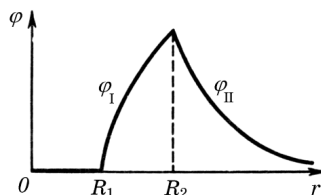
таңбалы барлық индукцияланған зарядтар бірдей қашықтықта болады да, олардың таралуы (бізге белгісіз) рөл атқармайды.

- 2.2.** Жүйе екі концентрлі өткізгіш сфералардан тұрады, сонымен бірге радиусы R_1 ішкі сферада q_1 заряд орналасқан. Ішкі сфераның потенциалы нөлге тең болуы үшін, радиусы R_2 сыртқы сфераға қандай q_2 зарядты орналастыру керек? Потенциал φ жүйе центріне дейінгі r қашықтыққа қалай тәуелді болады? Егер $q_1 < 0$ болса, осы тәуелділіктің шамамен алынған графигін сызу керек.

Шешімі. Жүйеден тысқары (φ_{II}) және сфералар арасындағы аймақтағы (φ_I) потенциал үшін өрнек жазамыз:

$$\varphi_{II} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 + q_2}{r},$$

$$\varphi_I = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r} + \varphi_0,$$



2.10-сурет

мұндағы, φ_0 — қайсыбір тұрақты.

Оның мәнін шекаралық шарттардан

оңай табуға болады: $r = R_2$ болғанда, потенциал $\varphi_{II} = \varphi_I$. Осыдан

$$\varphi_0 = q_2 / 4\pi\epsilon_0 R_2.$$

$\varphi_I(R_1) = 0$ шартынан $q_2 = -q_1 R_2 / R_1$ -ді табамыз. $\varphi(r)$ тәуелділігінің түрі (2.10-сурет):

$$\varphi_{II} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1 - R_2 / R_1}{r}, \quad \varphi_I = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1} \right).$$

- 2.3. Беттік зарядқа әсер ететін күш.** Радиусы R зарядталмаған металл шар сыртқы біртекті электр өрісіне орналастырылды, нәтижесінде шар бетінде беттік тығыздығы $\sigma = \sigma_0 \cos \vartheta$, индукцияланған заряд пайда болды, мұндағы, σ_0 — оң тұрақты, ϑ — полярлық бұрыш. Бір таңбалы зарядқа әсер ететін қорытқы электрлік күштің модулін табу керек.

Шешімі. (2.5)-ке сәйкес элементар dS ауданшаға әсер ететін электрлік күш:

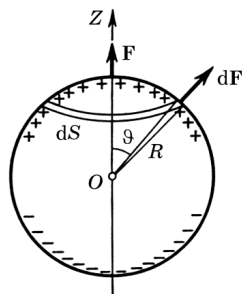
$$d\mathbf{F} = \frac{1}{2} \sigma \mathbf{E} dS. \quad (1)$$

Симметриялық пайымдаулардан ізделініп отырған $\mathbf{F}$ күш Z осі бойымен бағытталатыны анық (2.11-сурет), сондықтан да оны

элементар күштердің (1) Z осіне проекцияларының қосындысы (интеграл) деп қарауға болады:

$$dF_Z = dF \cos \vartheta. \quad (2)$$

dS ауданша ретінде бірден $dS = 2\pi R \sin \vartheta \cdot R d\vartheta$ элементар поясты алған қолайлы болады. Бұдан басқа $E = \sigma/\epsilon_0$ екенін ескеріп, (2)-ні төмендегідей түрлендіреміз:



2.11-сурет

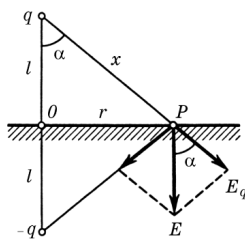
$$dF_Z = \frac{\pi \sigma^2 R^2}{\epsilon_0} \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta = -\frac{\pi \sigma_0^2 R^2}{\epsilon_0} \cos^3 \vartheta d(\cos \vartheta).$$

Бұл өрнекті жарты сфера бойынша интегралдап (яғни, $\cos \vartheta$ бойынша 1-ден 0-ге дейін), мынаны аламыз:

$$F = \pi \sigma_0^2 R^2 / 4 \epsilon_0.$$

2.4. Кескіндеу әдісі. Нүктелік q заряд шексіз өткізгіш жазықтықтан l қашықтықта орналасқан. q зарядтан жазықтыққа түсірілген перпендикуляр табанынан r қашықтықтың функциясы ретінде жазықтықта индукцияланған зарядтардың беттік тығыздығын анықтау керек.

Шешімі. (2.2)-ге сәйкес өткізгіштегі зарядтардың беттік тығыздығының өткізгішке жақын жердегі электр өрісімен (вакуумда) байланысы $\sigma = \epsilon_0 E_n$ түрінде болады. Демек, есеп өткізгіш жазықтыққа жақын жердегі E өрісті табуға тіреледі. O нүктесінен r қашықтықтағы P нүктесінде (2.12-сурет) жазықтыққа жақын жердегі өрісті кескіндеу әдісімен табамыз:



2.12-сурет

$$E = 2E_q \cos \alpha = 2 \frac{ql}{4\pi\epsilon_0 x^2} \frac{1}{x}.$$

Демек,

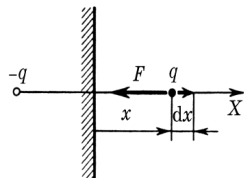
$$\sigma = -\frac{ql}{2\pi(l^2 + r^2)^{3/2}},$$

мұндағы, минус таңбасы индукцияланған зарядтың q нүктелік зарядқа таңба жағынан қарама-қарсы екенін көрсетеді.

- 2.5.** Нүктелік q заряд шексіз өткізгіш жазықтықтан l қашықтықта орналасқан. q зарядты жазықтықтан өте үлкен қашықтыққа баяу алыстатқанда, оған әсер ететін электрлік күштің жасайтын жұмысын табу керек.

Шешімі. Анықтама бойынша бұл күштің dx элементар орын ауыстыру кезіндегі жұмысы (2.13-сурет).

$$\delta A = F_x dx = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(2x)^2} dx,$$



2.13-сурет

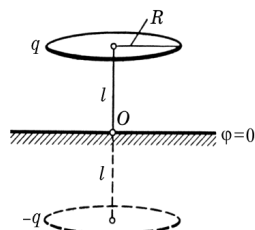
мұндағы, күштің өрнегі кескіндеу әдісінің көмегімен алынған. Бұл теңдеуді x бойынша l -ден ∞ -ке дейін интегралдап, мынаны табамыз:

$$A = -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0} \int_l^\infty \frac{dx}{x^2} = -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 l}.$$

Ескерту. Бұл есепті басқа әдіспен – потенциал арқылы шешуге талпыныс теріс нәтиже береді (оның біз алған нәтижеден айырмашылығы екі есе болады). Бұл $A = q(\varphi_1 - \varphi_2)$ қатысының тек потенциалдық өріс үшін дұрыс екенімен байланысты. Өткізгіш жазықтықпен байланысты санақ жүйесінде индукцияланған зарядтардың электр өрісі потенциалды емес: q зарядтың орын ауыстыруы индукциялық зарядтардың таралып орналасуының өзгерісіне әкеледі де, олардың өрісі уақытқа тәуелді болып шығады.

- 2.6.** Радиусы R , заряды q жіңішке өткізгіш сақина шексіз жазықтықтан l қашықтықта, оған параллель орналасқан. 1) жазықтықтың сақинаға қатысты симметриялы орналасқан нүктесіндегі зарядтың беттік тығыздығын; 2) сақина центріндегі электр өрісінің потенциалын табу керек.

Шешімі. Кескіндеу әдісіне сәйкес жалған заряд $-q$ сондай сақинада, бірақ өткізгіш жазықтықтың екінші жағында орналасуы керек екенін оңай аңғаруға болады. Шынында да, тек осы жағдайда ғана осы сақиналар арасындағы ортаңғы жазықтықта потенциал нөлге тең, яғни өткізгіш жазықтықтың потенциалымен дәл келеді. Енді өзімізге белгілі формулаларды пайдаланайық



2.14-сурет

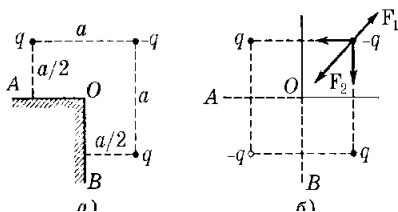
1. О нүктесіндегі σ -ны табу үшін, (2.2)-ге сәйкес осы нүктедегі E өріс кернеулігін табу керек (2.14-сурет). Бір сақинаның осьтегі E кернеулігінің өрнегі 1 мысалда алынған болатын (15-бетке қараңыз). Біздің жағдайымызда бұл өрнекті екі еселейміз. Нәтижесінде

$$\sigma = \frac{ql}{2\pi(R^2 + l^2)^{3/2}}.$$

2. Сақина центріндегі потенциал осы нүктеде q және $-q$ зарядтардың жасайтын потенциалдарының алгебралық қосындысына тең:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{R} - \frac{q}{\sqrt{R^2 + 4l^2}} \right).$$

- 2.7. Үш әр аттас нүктелік зарядтар 2.15, а-суретте көрсетілгендей болып орналасқан, мұндағы, AOB – екі өткізгіш жарты жазықтықтар жасап тұрған тікбұрыш. Әрбір зарядтың модулі $|q|$, олардың арақашықтығы суретте көрсетілген. 1) өткізгіш жарты жазықтықтарда индукцияланған қосынды зарядты; 2) $-q$ зарядқа әсер ететін күшті табу керек.



2.15-сурет

Шешімі. AOB бұрыш жасайтын жарты жазықтықтар шексіздікке кетеді, сондықтан олардың потенциалы $\varphi = 0$. $\varphi = 0$ болатын эквипотенциал беттері өткізгіш жарты жазықтықтармен дәл келетін жүйе 2.15, б-суретте

көрсетілген жүйе екенін пайымдау қиын емес. Сондықтан өткізгіш жарты жазықтықтарда индукцияланған зарядтардың әсері пунктир квадраттың төменгі сол жағындағы бұрышта орналасқан $-q$ жалған нүктелік зарядтың әсеріне эквивалентті.

1. Біз бұл сұраққа жауапты алып та қойдық: $-q$.
2. Төрт нүктелік заряд жүйесінен ізделініп отырған күшті де (2.15, б-суретке қараңыз) оңай табуға болады:

$$F = F_2 - F_1 = \frac{2\sqrt{2} - 1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{2a^2}.$$

- 2.8. **Параллель сымдардың сыйымдылығы.** Қимасының радиустары бірдей екі ұзын сымдар ауада бір-біріне параллель орналасқан. Сымдар осьтерінің арақашықтығы әрбір сымның қимасының радиусынан η есе үлкен. $\eta \gg 1$ жағдайда сымдардың бірлік ұзындығына келетін сыйымдылықты табу керек.

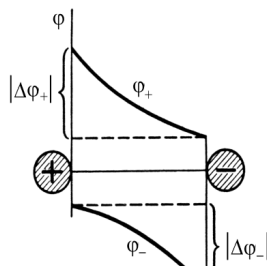
Шешімі. Бірлік ұзындыққа λ зарядтан келетіндей етіп, екі сымды ойша модуль жағынан бірдей, бірақ таңбалары қарама – қарсы зарядтармен зарядтаймыз. Онда анықтама бойынша, ізделініп отырған сыйымдылық

$$C_{\text{бірл}} = \lambda/U, \quad (1)$$

бұдан арғының бәрі сымдар арасындағы потенциалдар айырымын табуға тіреледі. φ_+ және φ_- потенциалдардың оң және теріс зарядталған сымдарға тәуелділік графиктері көрсетілген. 2.16-суреттен ізделініп отырған потенциалдар айырымы төмендегідей екенін түсіну қиын емес:

$$U = |\Delta\varphi_+| + |\Delta\varphi_-| = 2|\Delta\varphi_+|. \quad (2)$$

Сымдардың біреуінің өз осінен x қашықтықта жасайтын электр өрісінің кернеулігін Гаусс теоремасының көмегімен оңай табуға болады: $E = \lambda/2\pi\epsilon_0 x$. Онда



2.16-сурет

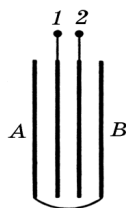
$$|\Delta\varphi_+| = \int_a^{b-a} E dx = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b-a}{a}, \quad (3)$$

мұндағы, a – сым қимасының радиусы, b – өткізгіштер осьтерінің арақашықтығы. (1), (2) және (3)-тен шығатыны:

$$C_{\text{бірл}} = \pi\epsilon_0/\ln \eta,$$

мұнда, $b \gg a$ екені ескерілген.

- 2.9.** Төрт бірдей металл пластиналар ауада бір-бірінен бірдей h қашықтықта орналасқан, сонымен бірге сыртқы пластиналар өзара өткізгішпен жалғасқан. Әрбір пластинаның ауданы S . Осы жүйенің сыйымдылығын табу керек. (1 және 2-нүктелер арасындағы, 2.17-сурет).

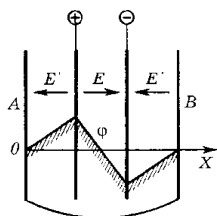


2.17-сурет

Шешімі. 1-ші және 2-ші пластиналарға сәйкес q_0 және $-q_0$ зарядтар береміз. Пластиналар арасында пайда болған шашырау өрісінің (жиектік эффект) әсерінен тұйықтаушы өткізгіште зарядтардың орын ауыстыруы болады, содан кейін A пластина теріс, ал B пластина оң зарядталады. Барлық пластиналар арасындағы кеңістікте электр өрісі және сәйкес φ потенциалдың таралуы болады (2.18-сурет). Жүйенің симметриясынан, оның ортасында, сондай-ақ сыртқы пластиналарда

потенциалдар нөлге тең екенін еске саламыз. Анықтама бойынша берілген жағдайда жүйенің сыйымдылығы

$$C = q_0/U, \quad (1)$$



2.18-сурет

мұндағы, U 1-ші және 2-ші нүктелер арасындағы потенциалдар айырымы, оны табуымыз керек. 2.18-суреттен ортаңғы пластиналар арасындағы потенциалдар айырымы, яғни U , шеткі пластиналар жұптары (сол жақтағы және оң жақтағы) арасындағы потенциалдар айырымынан екі есе көп екені көрініп тұр. Бұл өріс кернеулігіне де қатысты:

$$E = 2E'. \quad (2)$$

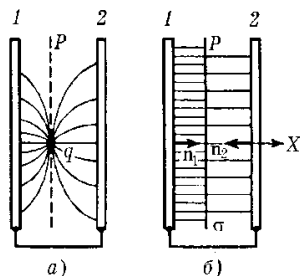
$E \propto \sigma$ болғандықтан, (2)-ге сәйкес 1-ші пластинадағы q_0 заряд екі бөлікке бөлінеді деп ұйғаруымызға болады: $q_0/3$ – 1-ші пластинаның сол жағында және $2q_0/3$ – оң жағында. Сондықтан

$$U = Eh = \sigma h/\epsilon_0 = 2q_0 h/3\epsilon_0 S,$$

жүйе сыйымдылығы (1-ші және 2-ші нүктелер арасындағы)

$$C = 3\epsilon_0 S/2h.$$

- 2.10. Индукцияланған зарядтың таралуы.** Нүктелік q заряд бір-бірінен l қашықтықтағы екі үлкен параллель 1 және 2 өткізгіш пластиналар арасында орналасқан. Егер пластиналар өткізгішпен қосылған болса, заряд q сол жақтағы пластина 1-ден l_1 қашықтықта орналасқан болса, онда пластиналардың әрқайсысындағы q_1 және q_2 толық зарядтарды табу керек (2.19, а-сурет).



2.19-сурет

Шешімі. Суперпозиция принципін пайдаланамыз. P жазықтықтың әйтеуір бір жерінде ойша q зарядты орналастырайық.

Мұның әрбір пластинадағы беттік зарядты екі еселейтіні анық. Егер P бетте беттік тығыздығы σ қайсыбір заряд біркелкі таралса, онда электр өрісі есептеу үшін жеңіл болады (2.19, б-сурет).

Пластиналар өткізгішпен қосылған, сондықтан олардың арасындағы потенциалдар айырымы нөлге тең. Осыдан

$$E_{1x}l_1 + E_{2x}(l - l_1) = 0,$$

мұндағы, E_{1x} және E_{2x} – P жазықтықтың сол және оң жағындағы $\mathbf{E}$ векторының X осіндегі проекциялары (2.19, б-сурет).

Екінші жағынан,

$$\sigma = -(\sigma_1 + \sigma_2)$$

екені анық, мұнда (2.2)-ге сәйкес $\sigma_1 = \varepsilon_0 E_{1n_1} = \varepsilon_0 E_{1x}$ және $\sigma_2 = \varepsilon_0 E_{2n_2} = \varepsilon_0 E_{2x}$ (таңба минус, өйткені $\mathbf{n}_2$ нормаль X осінің ортына қарама-қарсы).

Осы теңдеулерден E_{1x} және E_{2x} -ті шығарсақ,

$$\sigma_1 = -\sigma(l - l_1)/l, \quad \sigma_2 = -\sigma l_1/l.$$

Ізделініп отырған q_1 және q_2 заряд үшін, q заряд арқылы алынатын формулалар баламалы түрде болады.

Бұл есепті кескіндеу әдісімен шешу өте қиын: q зарядтың екі жағында орналасқан жалған зарядтардың шексіз қатары қажет болады да, мұндай жүйенің өрісін табу күрделі мәселе болады.

Диэлектриктегі электр өрісі



§ 3.1. Диэлектриктің полярлануы

Диэлектриктер. Іс жүзінде электр тогын өткізбейтін заттар *диэлектриктер* (немесе изоляторлар) деп аталады. Бұл, демек өткізгіштерден өзгешелігі, диэлектриктерде ток туғыза отырып, едәуір қашықтыққа орын ауыстыруға қабілетті зарядтар жоқ.

Тіпті бейтарап диэлектрикті сыртқы электр өрісіне енгізгенде, өрісте де, диэлектриктің өзінде де мәнді өзгерістер байқалады: соңғысы диэлектрикке күш әсер ете бастайтындығынан-ақ, диэлектрикпен толтырғанда конденсатор сыйымдылығының артатындығынан т.б. байқалады.

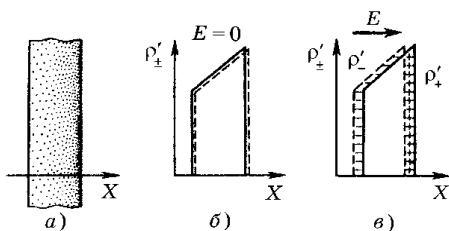
Неліктен бұлай болатындығын түсіну үшін, ең алдымен диэлектриктердің не нейтраль молекулалардан, не кристалдық тордың түйіндерінде орналасқан зарядталған иондардан тұратынын ескеру қажет (иондық кристалдар, мысалы NaCl типтес). Молекулалардың өзі *полярлы* және *полярлы емес* бола алады. Полярлы молекулаларда теріс зарядтың «ауырлық» центрі оң зарядтардың ауырлық центріне қатысты ығысқан, соның нәтижесінде олардың $\mathbf{p}$ меншікті дипольдық моменті болады: оларда оң және теріс зарядтардың ауырлық центрлері дәл келеді.

Полярлану. Сыртқы электр өрісінің әсерінен диэлектрик *полярланады*. Бұл құбылыстың мәнісі мынадай. Егер диэлектрик полярлы емес молекулалардан тұратын болса, онда әрбір молекула шегінде оң зарядтардың өріс бағытында, теріс зарядтардың өріске қарсы ығысуы болады. Егер диэлектрик полярлы молекулалардан тұратын болса, онда сыртқы өріс болмаған кезде олардың дипольдық моменттері мүлде хаосты бағдарланған (жылулық қозғалыстан). Сыртқы өріс әсерінен дипольдық моменттер көбінесе сыртқы өріс бағытында бағдарланады. Соңында, NaCl типтес

диэлектрик кристалдарда сыртқы өрісті қосқанда барлық оң иондар өріс бағытында, теріс иондар өріске қарсы ығысады¹.

Сөйтіп, полярлану механизмі диэлектриктің нақты құрылысымен байланысты. Алайда мұнан былай бұл процесте полярлану механизміне тәуелсіз барлық оң зарядтардың өріс бағытында, ал теріс зарядтардың өріске қарсы ығысатындығы ғана мәнді болады. Кәдімгі жағдайларда зарядтардың ығысуы молекулалардың өлшемдерімен салыстырғанда барынша аз, бұл диэлектрикке әсер ететін сыртқы өріс кернеулігінің молекулалардағы ішкі электр өрістерінің кернеуліктерінен едәуір аз екенімен байланысты.

Көлемдік және байланысқан зарядтар. Полярлану нәтижесінде диэлектрик бетінде, сондай-ақ, жалпы айтқанда, оның көлемінде де компенсацияланбаған зарядтар пайда болады. Бұл зарядтардың қалай пайда болатындығын түсіну үшін (әсіресе көлемдік), келесі модельге көңіл аударайық. Нейтраль біртекті емес диэлектриктен жасалған пластина бар болсын делік. (3.1 а-сурет), оның мысалы, тығыздығы x координата артқан сайын артады. Заттағы оң және теріс зарядтардың көлемдік тығыздықтарының **модульдерін** ρ'_+ және ρ'_- деп белгілейміз (бұл зарядтар ядролар мен электрондармен байланысқан).



3.1-сурет

Сыртқы электр өрісі болмаған кезде, диэлектриктің әрбір нүктесінде $\rho'_+ = \rho'_-$, өйткені диэлектрик электрлік бейтарап, бірақ диэлектриктің біртекті еместігінен ρ'_+ -те, сондай-ақ ρ'_- -те x артқан сайын артады (3.1, б-сурет). Егер сыртқы өріс жоқ болса, онда екі таралу бір-біріне дәл беттесетіндігі осы суреттен көрініп тұр.

¹ Сыртқы өріс болмағанда да полярланатын иондық кристалдар бар. *Электреттер* деп аталатын диэлектриктер осындай қасиетке ие (олар тұрақты магниттерге ұқсас).

($\rho'_+(x)$ таралу тұтас, ал $\rho'_-(x)$ таралу пунктир сызықпен көрсетілген).

Сыртқы **E** өрістің қосылуы оң зарядтардың өріс бағытында, теріс зарядтарының өріске қарсы ығысуына әкеледі де екі таралу бір-біріне қатысты ығысады. Нәтижесінде диэлектрик бетінде де, оның көлемінде де компенсацияланбаған зарядтар пайда болады (біздің суретте көлемде компенсацияланбаған теріс заряд пайда болды). Өріс бағытын кері өзгерту барлық осы зарядтардың таңбасының өзгеруіне әкелетінін еске саламыз. Біртекті диэлектриктен, жасалған пластина жағдайында әрбір $\rho'_+(x)$ және $\rho'_-(x)$ таралулар П-тәрізді формалы болатындығын және олардың салыстырмалы ығысуы кезінде **E** өрісте тек беттік компенсацияланбаған зарядтар пайда болатындығын көру қиын емес.

Диэлектриктің полярлануы нәтижесінде пайда болатын компенсацияланбаған зарядтар **полярланған** немесе **байланысқан** зарядтар деп аталады. Соңғы термин мұндай зарядтардың еркін қозғалысының шектеулі екенін көрсетеді. Олар электрлік бейтарап молекулалар ішінде ғана ығыса алады. Байланысқан зарядтарды штрихпен белгілейтін боламыз (q', ρ', σ'). Осылайша диэлектриктің полярлануы кезінде жалпы жағдайда онда көлемдік те, беттік те байланысқан зарядтар пайда бола алады.

Диэлектрик молекулаларының құрамына кірмейтін зарядтар **бөгде**² зарядтар деп аталады. Бұл зарядтар диэлектрик ішінде де, сондай-ақ сыртында да бола алады.

Диэлектриктегі өріс. Тосын зарядтардың **E₀** өрісімен байланысқан зарядтардың **E'** өрісінің суперпозициясы болып табылатын шаманы **E** өрісі деп атайтын боламыз:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}', \quad (3.1)$$

мұндағы, **E₀** және **E'** макроөрістер, яғни сәйкес бөгде және байланысқан зарядтардың физикалық шексіз кішкентай көлем бойынша орташаланған микроөрістері болып табылады. Осылайша анықталған диэлектриктегі **E** өрісте макроөріс болатыны анық.

² бөгде зарядтар көбінесе **еркін** деп аталады, бірақ соңғы атау бірқатар жағдайларда қолайлы емес: бөгде зарядтар еркін болмауы да мүмкін.

§ 3.2. Полярлану Р

Анықтама. Диэлектриктің полярлануын сандық жағынан сипаттау үшін бірлік көлемдегі дипольдік моментті алу орынды. Егер сыртқы өріс, не диэлектрик (не екеуі де) біртекті емес болса, полярлану дәрежесі диэлектриктің әртүрлі нүктелерінде әртүрлі болады. Берілген нүктедегі полярлануды сипаттау үшін, осы нүктені қамтитын физикалық шексіз кішкентай ΔV көлем ойша бөліп алынады да, содан кейін осы көлемдегі молекулалардың дипольдік моменттерінің векторлық қосындысын тауып, төмендегі қатынас алынады

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum \mathbf{p}_i. \quad (3.2)$$

Осылайша анықталған $\mathbf{P}$ векторы диэлектриктің *полярлануы* деп аталады. Бұл вектор заттың бірлік көлемдегі дипольдық моментіне тең. $\mathbf{P}$ векторын берудің тағы екі пайдалы жағы бар. ΔV көлемде ΔN дипольдер бар болсын делік. (3.2) өрнегінің оң жағын ΔN -ге көбейтіп, ΔN -ге бөлеміз. Онда былай жазуға болады:

$$\mathbf{P} = n \langle \mathbf{p} \rangle, \quad (3.3)$$

мұндағы, $n = \Delta N / \Delta V$ – молекулалардың концентрациясы (олардың бірлік көлемдегі саны); $\langle \mathbf{p} \rangle = (\sum \mathbf{p}_i) / \Delta N$ – бір молекуланың орташа дипольдік моменті.

$\mathbf{P}$ -ның басқа бір өрнегі оң және теріс «сұйықтардың» жиынтығы ретіндегі диэлектриктің моделіне сәйкес келеді. Диэлектрик ішінде өте кішкентай ΔV көлемді бөліп алайық. Полярлану пайда болғанда осы көлемге кіретін $\rho'_+ \Delta V$ оң заряд теріс зарядқа қатысты $\mathbf{l}$ шамаға ығысады да, бұл зарядтар $\Delta \mathbf{p} = \rho'_+ \Delta V \cdot \mathbf{l}$ дипольдік моментке ие болады. Осы теңдіктің екі жағын ΔV -ға бөліп, бірлік көлемдегі дипольдік момент үшін өрнекті, яғни $\mathbf{P}$ векторын аламыз:

$$\mathbf{P} = \rho'_+ \mathbf{l}. \quad (3.4)$$

$\mathbf{P}$ полярланудың бірлігі *квадрат метрге кулон* (Кл/м^2) болып табылады.

Р және Е арасындағы байланыс. Тәжірибе көрсеткендей, диэлектриктердің үлкен тобы және кең ауқымды құбылыстар үшін **Р** полярлану диэлектриктегі өрістің **Е** кернеулігіне *сызықтық* тәуелді болады. Егер диэлектрик изотропты және **Е** өте үлкен болмаса, онда

$$\mathbf{P} = \kappa \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad (3.5)$$

мұндағы, κ – заттың *диэлектрлік алғырлығы* деп аталатын өлшемсіз шама. Бұл шама **Е**-ге тәуелді емес, диэлектриктің өзінің қасиеттерін сипаттайды. Әрқашанда $\kappa > 0$.

Әрі қарай, егер арнайы ескертілмесе, біз тек (3.5) қатысы дұрыс болатын изотропты диэлектриктерді қарастыратын боламыз.

Алайда, (3.5) қолданылмайтын диэлектриктер де бар. Бұл кейбір иондық кристалдар және электреттер, сондай-ақ *сегнетоэлектриктер*. Сегнетоэлектриктерде **Р** мен **Е** арасындағы байланыс *сызықтық емес*, сонымен бірге **Е**-нің бұдан бұрынғы мәндеріне тәуелді (бұл құбылыс *гистерезис* деп аталады).

§ 3.3. Р векторы өрісінің қасиеттері

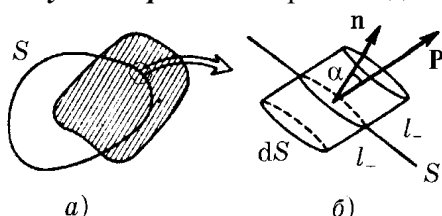
Р векторының өрісі үшін Гаусс теоремасы. Қазір біздің көрсететініміздей, **Р** векторы өрісінің келесі тамаша және маңызды қасиеті бар. Қалауымызша алынған тұйықталған S бет арқылы өтетін **Р** векторының ағыны S бет қамтитын көлемдегі диэлектриктің кері таңбамен алынған артық байланысқан зарядына тең екен, яғни

$$\oint \mathbf{P} \, d\mathbf{S} = -q'_{\text{ішкі}}. \quad (3.6)$$

Осы теңдеу **Р векторы үшін Гаусс теоремасын** өрнектейді.

Теореманың дәлелі.

Қалауымызша алынған S тұйықталған бет диэлектрик бөлігін қамтитын болсын делік (3.2 а-сурет, мұнда диэлектрик штрихталған). Сыртқы электр өрісін қосқанда диэлектрик



3.2-сурет

поляризуется – оң зарядтар теріс зарядтарға қатысты ығысады. S тұйықталған беттің dS элементі арқылы сыртқа өтетін зарядты табайық (3.2 б-сурет).

I_+ және I_- – поляризация нәтижесінде оң және теріс байланысқан зарядтардың ығысуын сипаттайтын векторлар болсын делік. Онда беттің dS элементі арқылы S беттің сыртына, қиғаш цилиндрдің «ішкі» бөлігіндегі $\rho_+ l_+ dS \cos \alpha$ оң заряд шығатыны анық (3.2 б-сурет). Бұдан басқа, dS элементі арқылы S беттің ішіне қиғаш цилиндрдің «сыртқы» бөлігіндегі $\rho_- l_- dS \cos \alpha$ теріс заряд кіреді. Бірақ біз, қайсыбір бағытта теріс зарядты тасымалдау қарама-қарсы бағытта оң зарядты тасымалдаумен эквивалентті екенін білеміз. Осыны ескеріп, dS элемент арқылы S беттен сыртқа өтетін қосынды байланысқан зарядты мына түрде жазуға болады:

$$dq' = \rho_+ l_+ dS \cos \alpha + |\rho_-| l_- dS \cos \alpha.$$

$$|\rho_-| = \rho_+ \text{ болғандықтан,}$$

$$dq' = \rho_+ (l_+ + l_-) dS \cos \alpha = \rho_+ l dS \cos \alpha, \quad (3.7)$$

мұндағы, $l = l_+ + l_-$ – поляризация кезінде диэлектриктің оң және теріс байланысқан зарядтарының бір-біріне қатысты ығысқан қашықтығы.

Бұдан әрі, (3.4)-ке сәйкес $\rho_+ l = P$ және $dq' = P dS \cos \alpha$, немесе

$$dq' = P_n dS = \mathbf{P} d\mathbf{S}. \quad (3.8)$$

Осы өрнекті барлық тұйықталған S бет бойынша интегралдап, поляризация кезінде S бет қамтитын көлемнен шыққан барлық зарядты табамыз. Ол $\oint \mathbf{P} d\mathbf{S}$ -ке тең. Нәтижесінде S бет ішінде қайсыбір артық q' байланысқан заряд қалады. Шыққан заряд кері таңбамен S бет ішінде қалған артық байланысқан зарядқа тең болуы керек екеніні анық, біз (3.6)-ға келдік.

(3.6) теңдеуінің дифференциалдық түрі. $\mathbf{P}$ векторының өрісі үшін Гаусс теоремасы – (3.6) теңдеуінің дифференциалдық түрі төмендегідей болады:

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{P} = -\rho'}, \quad (3.9)$$

яғни, $\mathbf{P}$ векторы өрісінің дивергенциясы кері таңбамен алынған сол нүктедегі артық байланысқан зарядтың көлемдік тығыздығына тең болады. Бұл теңдеуді (3.6)-дан дәл $\mathbf{E}$ векторының баламалы теңдеуін алғандағыдай жолмен алуға болады (25-бетті қараңыз). Сонда жүргізілген пайымдаулардан кейін, $\mathbf{E}$ -ні $\mathbf{P}$ -ға және ρ -ны және ρ' -қа алмастырса жеткілікті.

Қашан диэлектрикте $\rho' = 0$ болады? Қазір көрсететініміздей, диэлектрик ішіндегі артық байланысқан зарядтардың көлемдік тығыздығы бір мезгілде екі шарт орындалғанда нөлге тең болады:

1) диэлектрик біртекті болуы керек;

2) оның ішінде бөгде зарядтар болмауы керек ($\rho = 0$).

Шынында да, $\mathbf{P}$ векторы өрісінің негізгі қасиетінен (3.6) біртекті диэлектрик жағдайында (3.5)-ке сәйкес $\mathbf{P}$ -ны $\kappa \epsilon_0 \mathbf{E}$ -ге алмастыруға және κ -ны интеграл таңбасының астынан шығарып, төмендегідей жазуға болатындығы шығады:

$$\oint \kappa \epsilon_0 E dS = -q'.$$

Қалған интеграл басқа емес, қарастырылып отырған S тұйықталған бет ішіндегі барлық бөгде және байланысқан зарядтардың алгебралық қосындысы, яғни $q + q'$. Сондықтан $\kappa(q + q') = -q'$, осыдан

$$q' = \frac{\kappa}{1+\kappa} q. \quad (3.10)$$

Артық q' байланысқан заряд пен q бөгде заряд арасындағы қатыс диэлектрик ішіндегі кезкелген көлем үшін, дербес жағдайда $q' - dq' = \rho' dV$ және $q - dq = \rho dV$ болғандағы физикалық шексіз аз шама үшін де дұрыс. Онда (3.10) dV -ға қысқартқаннан кейін, мына түрге келеді:

$$\rho' = -\frac{\kappa}{1+\kappa} \rho. \quad (3.11)$$

Осыдан егер $\rho = 0$ болса, біртекті диэлектрикте $\rho' = 0$ екендігі шығады.

Сөйтіп, егер қалауымызша алынған электр өрісіне қандай пішінде болсын изотропты диэлектрик орналастырылса, оның полярлануы кезінде тек беттік зарядтардың пайда болатынына, ал

көлемдік артық байланысқан зарядтар диэлектриктің барлық нүктелерінде нөлге тең болатынына көз жеткізуге болады.

Р векторы үшін шекаралық шарттар. Екі біртекті изотропты диэлектриктерді бөліп тұрған шекарадағы **Р** векторын қарастырайық. Мұндай диэлектриктерде көлемдік артық байланысқан заряд жоқ екенін және полярлану нәтижесінде тек беттік байланысқан зарядтардың пайда болатынын біз қазір ғана тағайындадық.

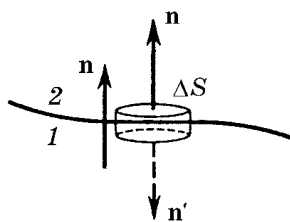
Диэлектриктерді бөліп тұрған шекарадағы **Р** полярланумен σ' байланысқан зарядтардың беттік тығыздығы арасындағы байланысты табайық. Бұл үшін **Р** векторы өрісінің қасиетін (3.6) пайдаланамыз. Тұйықталған бет ретінде кішкентай жазық цилиндрді аламыз, оның табандарын шекараның екі жағына орналастырамыз (3.3-сурет). Цилиндр биіктігін өте аз деп ұйғарамыз, ал әрбір табанының ΔS ауданының кішкентайлығы сондай, цилиндрдің әрбір табанының барлық нүктелеріндегі **Р** векторы бірдей болар еді (бұл байланысқан зарядтың σ' беттік тығыздығына да қатысты). **n** – берілген орында бөліп тұрған шекараға жүргізілген нормаль. **n** векторын әрқашан 1-ші диэлектриктен 2-ші диэлектрикке қарай жүргізуге келісеміз.

Таңдалып алынған цилиндрдің бүйір беті арқылы өтетін **Р** векторының ағынын ескермей, (3.6)-ға сәйкес былай жазамыз:

$$P_{2n}\Delta S + P_{1n'}\Delta S = -\sigma'\Delta S,$$

мұндағы, P_{2n} және $P_{1n'}$ – **Р** векторының 2-диэлектрикте **n** нормальдағы және 1-ші диэлектрикте **n'** нормальдағы проекциясы (3.3-сурет).

Р векторының **n'** нормальдағы проекциясы осы вектордың қарама-қарсы (жалпы) **n** нормальдағы кері таңбамен алынған проекциясына тең, яғни $P_{1n'} = -P_{1n}$, алдыңғы теңдеуді ΔS -ке қысқартқаннан кейін, мына түрде жазамыз:



3.12-сурет

$$P_{2n} - P_{1n} = -\sigma' \quad (3.12)$$

Бұл, диэлектриктерді бөліп тұрған шекарада **P** векторының нормаль құраушысының үзілетіндігін білдіреді, оның шамасы σ' -қа тәуелді. Дербес жағдайда, егер 2-ші орта вакуум болса, онда $P_{2n} = 0$ болады да, (3.12) шарты анағұрлым қарапайым түрге келеді:

$$\sigma' = P_n, \quad (3.13)$$

мұндағы, P_n – **P** вектордың берілген диэлектриктің бетіне жүргізілген сыртқы нормальдағы проекциясы. P_n проекцияның таңбасы берілген орындағы σ' беттік байланысқан зарядтың да таңбасын анықтайды. Соңғы формуланы басқа түрде беруге болады, атап айтқанда (3.5) формуласына сәйкес былай жазуға болады:

$$\sigma' = \kappa \varepsilon_0 E_n, \quad (3.14)$$

мұндағы, E_n – **E** векторының (диэлектрик ішінде бетіне жақын жерде) сыртқы нормальдағы проекциясы. Бұл жерде де E_n таңбасы σ' -тың таңбасын анықтайды.

P векторының өрісі жөнінде ескерту. (3.6) және (3.13) қатыстары көп жағдайда **P** векторының өрісі тек байланысқан зарядтарға тәуелді деп жаңсақ ойлауға негіз болады. Шын мәнісінде олай емес. **P** векторының өрісі **E** өрісі сияқты барлық зарядтарға, байланысқан, сондай-ақ бөгде зарядтарға да тәуелді, ең болмағанда **P** және **E** векторларының бір-бірімен $\mathbf{P} = \kappa \varepsilon_0 \mathbf{E}$ қатысы арқылы байланысты болу фактысы осыны көрсетеді. Байланысқан зарядтар **P** векторының өрісін емес, тек S тұйықталған бет арқылы өтетін осы вектордың ағынын анықтайды. Бұл ағынды барлық байланысқан зарядтар емес, тек S бет қамтитын байланысқан зарядтар ғана анықтайды.

§ 3.4. D векторы

D векторының өрісі үшін Гаусс теоремасы. Барлық электр зарядтары (бөгде және байланысқан) **E** өрістің көзі болып табылатындықтан, **E** өріс үшін Гаусс теоремасын былай жазуға болады:

$$\oint \varepsilon_0 \mathbf{E} d\mathbf{S} = (q + q')_{\text{ішкі}}, \quad (3.15)$$

мұндағы, q және q' – S бет қамтитын бөгде және байланысқан зарядтар. q' байланысқан зарядтардың пайда болуы істі күрделендіреді де, тіпті «жеткілікті жақсы» симметрияның өзінде диэлектриктегі $\mathbf{E}$ өрісті табу үшін, (3.15) формуласының пайдасы шамалы болып шығады. Шындығында да бұл формула белгісіз $\mathbf{E}$ өрістің қасиеттерін q' байланысқан зарядтар арқылы өрнектейді, олар өз кезегінде белгісіз $\mathbf{E}$ өріспен анықталады.

Егер q' заряд (3.6) формула бойынша $\mathbf{P}$ векторының ағыны арқылы өрнектелсе, бұл қиындықты шешуге болады. Онда (3.15) өрнегін мынадай түрге келтіруге болады:

$$\oint (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) d\mathbf{S} = q_{\text{ішкі}}. \quad (3.16)$$

Интеграл астында жақша ішінде тұрған шама $\mathbf{D}$ әрпімен белгіленеді. Осылайша, біз қосымша $\mathbf{D}$ векторын таптық:

$$\boxed{\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}}, \quad (3.17)$$

оның қалауымызша алынған тұйықталған бет арқылы өтетін ағыны осы бет қамтитын бөгде зарядтардың алгебралық қосындысына тең:

$$\boxed{\oint \mathbf{D} d\mathbf{S} = q_{\text{ішкі}}}. \quad (3.18)$$

Бұл ұйғарым $\mathbf{D}$ векторының өрісі үшін Гаусс теоремасы деп аталады.

$\mathbf{D}$ векторы екі мүлде әртүрлі шамалардың: $\varepsilon_0 \mathbf{D}$ және $\mathbf{P}$ -ның қосындысы болып табылатынын еске саламыз. Сондықтан ол шынында да қандай-да бір терең физикалық мағынасы жоқ, қосымша вектор болып табылады. Алайда (3.18) теңдеуімен өрнектелетін $\mathbf{D}$ векторы өрісінің қасиеті осы векторды енгізудің дұрыстығын білдіреді: ол көп жағдайларда диэлектриктердегі өрісті оқып-үйренуді едәуір жеңілдетеді³.

(3.17) және (3.18) қатыстары кезкелген диэлектрик (изотропты, сондай-ақ анизотропты) үшін дұрыс.

³ $\mathbf{D}$ шамасы көбінесе *электрлік ығысу*, немесе *электрлік индукция* деп аталады, алайда $\mathbf{D}$ *вектордың* көмекшілік сипатын тағы да баса айту үшін, біз бұл терминдерді пайдаланбайтын боламыз.

(3.17) өрнегінен көрініп тұрғандай, **D** векторының өлшем бірлігі **P** векторындай. **D** шамасының бірлігі *квадрат метрге Кулон* (Кл/м²).

(3.18) формуласының дифференциалдық түрі:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad (3.19)$$

яғни, **D** векторы өрісінің дивергенциясы сол нүктедегі бөгде зарядтың көлемдік тығыздығына тең.

Бұл теңдеуді (3.18)-ден **E** өрісі жағдайында жасалғандай тәсілмен алуға болады. Ондағы жүргізілген пайымдауларда **E**-ні **D**-ға алмастырып, тек бөгде зарядтарды ескерсек болғаны. **D** дивергенция оң болатын нүктелерде **D** өрістің *көздері* болады ($\rho > 0$), ол теріс болатын нүктелерде **D** өрістің *құяр* жерлері болады ($\rho < 0$).

D және E векторлары арасындағы байланыс. Изотропты диэлектриктер жағдайында полярлану $\mathbf{P} = \kappa \epsilon_0 \mathbf{E}$. Осы қатысты (3.17)-ге қойып, $\mathbf{D} = \epsilon_0(1 + \kappa)\mathbf{E}$ -ні аламыз немесе

$$\mathbf{D} = \epsilon \epsilon_0 \mathbf{E}, \quad (3.20)$$

мұндағы, ϵ – заттың *диэлектрик өтімділігі*:

$$\epsilon = 1 + \kappa. \quad (3.21)$$

Диэлектрик өтімділік ϵ (κ сияқты) диэлектриктің негізгі сипаттамасы болып табылады. Барлық заттар үшін $\epsilon > 1$, вакуум үшін $\epsilon = 1$. ϵ -нің мәндері диэлектриктің табиғатына байланысты және бірден айырмашылығы өте аз шамалардан (газдар) бірнеше мыңға дейін тербеледі (кейбір керамикалар). Судың ϵ -ының мәні үлкен ($\epsilon = 81$).

(3.20) формуладан изотропты диэлектриктерде **D** векторының **E** векторына коллинеарлы екені көрініп тұр. Анизотропты диэлектриктерде, жалпы айтқанда, бұл векторлар коллинеарлы емес.

D векторының өрісін **D** векторы сызықтарының көмегімен көрнекі кескіндеуге болады. Олардың бағыттары мен қоюлығы дәл **E** векторы сызықтарындағыдай анықталады. **E** векторының сызықтары бөгде зарядтарда да, сондай-ақ байланысқан зарядтарда да аяқтала алады: біз **E** өрістің көзі де, ағар жері де *кез келген* зарядтар болады деп айтамыз. **D** векторының *көздері* және *ағар*

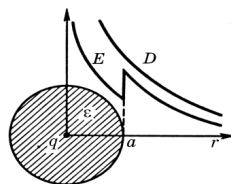
жерлері тек **бөгде** зарядтар болады: **D** векторының сызықтары тек соларда бастала алады және аяқталады. Өрістің байланысқан зарядтар тұрған аймағы арқылы **D** векторының сызықтары үзілмей өтеді.

D векторының өрісі жөнінде ескертулер. **D** векторының өрісі, жалпы айтқанда, бөгде зарядтарға да, сондай-ақ, байланысқан зарядтарға да тәуелді (**E** векторының өрісі сияқты). Бұл жөнінде $\mathbf{D} = \epsilon \epsilon_0 \mathbf{E}$ қатысы да айтып тұр. Алайда кейбір симметриялық жағдайларда **D** векторының өрісін тек бөгде зарядтарды пайдаланып анықтауға болады. Дәл осы жағдайлар үшін **D** векторы ерекше пайдалы болып табылады. Сонымен бірге бұл көбінесе **D** өрісі әрқашан тек бөгде зарядтарға тәуелді деп жаңсақ ойлауға және (3.18) бен (3.19) заңдарын қате түсіндіруге сылтау болады. Бұл заңдар **D** векторы өрісінің белгілібір қасиетін білдіреді, олар осы вектор өрісінің өзін анықтамайды.

Жоғарыда айтылғандарды бірнеше мысалдармен суреттейік.

1-мысал. Нүктелік бөгде q заряд радиусы a өтімділігі ϵ біртекті изотропты диэлектриктен жасалған шар центрінде орналасқан. Берілген шар центрінен r қашықтықтың функциясы ретінде өрістің **E** кернеулігін табу керек.

Жүйе симметриясы біз қарастырып отырған сұрақтың шешімін табуда **D** векторы үшін Гаусс теоремасын пайдалануға мүмкіндік береді (бұл жерде **E** өріс үшін баламалы теорияны пайдалану мүмкін болмайды, өйткені бізге байланысқан заряд белгісіз). Радиусы r центрі заряд тұрған нүктеде болатын сфера үшін мынаны жазуға болады: $4\pi r^2 D_r = q$. Осыдан D_r және (3.20) формуладан ізделініп отырған **E** кернеулікті табамыз:



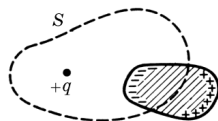
3.4-сурет

$$E_r(r < a) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\epsilon r^2}, \quad E_r(r > a) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}.$$

$D(r)$ және $E(r)$ тәуелділіктердің графиктері 3.4-суретте көрсетілген.

2-мысал. Жүйе $q > 0$ нүктелік зарядтан және қалауымызша алынған біртекті изотропты диэлектриктен тұрсын делік (3.5-сурет), мұндағы, S – қайсыбір тұйықталған бет. Егер диэлектрикті

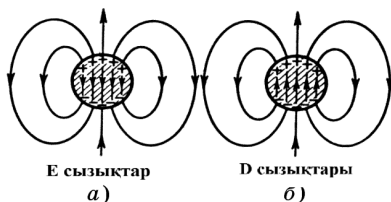
кашықтатса, $\mathbf{E}$ және $\mathbf{D}$ векторларының өрісімен, сондай-ақ олардың S бет арқылы өтетін ағындарымен не болатындығын анықтайық.



3.5-сурет

Кеңістіктің кезкелген нүктесінде $\mathbf{E}$ q зарядтың, сондай-ақ поляриланған диэлектриктің байланысқан зарядының себебінен де болады. Біздің жағдайымызда $\mathbf{D} = \epsilon \epsilon_0 \mathbf{E}$ болғандықтан, бұл $\mathbf{D}$ векторының өрісіне де қатысты. Ол сондай-ақ q бөгде зарядпен де, диэлектриктің байланысқан зарядтарымен де анықталады. Диэлектрикті қашықтату $\mathbf{E}$ өрістің өзгерісіне, демек $\mathbf{D}$ өрістің де өзгерісіне әкеледі. S бет арқылы өтетін $\mathbf{E}$ векторының ағыны да өзгереді, өйткені осы бет ішіндегі байланысқан теріс зарядтар жоғалады. $\mathbf{D}$ өрістің өзінің өзгерісіне қарамастан, $\mathbf{D}$ векторының S бет арқылы өтетін ағыны бұрынғыша қалады.

3-мысал. Тек байланысқан зарядтар бар, бірақ бөгде зарядтары жоқ жүйені қарастырайық. Мұндай жүйе, мысалы, электреттен жасалған шар бола алады. 3.6 а-суретте осындай жүйенің $\mathbf{E}$ өрісі көрсетілген. $\mathbf{D}$ векторының сәйкес өрісі туралы не айтуға болады? Бәрінен бұрын бөгде зарядтардың болмауы, $\mathbf{D}$ өрістің көздері жоқ екенін білдіреді: $\mathbf{D}$ векторының сызықтары еш жерде басталмайды, еш жерде аяқталмайды. Бірақ $\mathbf{D}$ өріс бар, ол 3.6 б-суретте көрсетілген. Шардан тысқары $\mathbf{E}$ және $\mathbf{D}$ векторларының сызықтары дәл келеді, шардың ішінде олардың бағыттары қарама-қарсы: бұл жерде $\mathbf{D} = \epsilon \epsilon_0 \mathbf{E}$ қатысы енді дұрыс болмайды, және $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$.



3.6-сурет

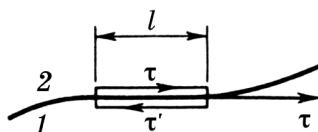
§ 3.5. Шекаралық шарттар

Алдымен екі біртекті изотропты диэлектриктерді бөліп тұрған шекарадағы $\mathbf{E}$ және $\mathbf{D}$ векторларын қарастырайық. Жалпылық үшін осы диэлектриктерді бөліп тұрған шекарада беттік бөгде заряд бар болсын делік. Ізделініп отырған шарттарды екі теореманың: $\mathbf{E}$

векторының циркуляциясы туралы теореманың және **D** векторы үшін Гаусс теоремасының көмегімен алу қиын емес:

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0, \quad \oint \mathbf{D} d\mathbf{S} = q_{\text{ішкі}}.$$

Е векторының шарты. Диэлектриктерді бөліп тұрған шекараға жақын жерде өріс 1-диэлектрикте $\mathbf{E}_1$, ал 2-диэлектрикте $\mathbf{E}_2$ болсын делік. Кішкентай созылған тік бұрышты контур аламыз, оны 3.7-суреттей көрсетілгендей бағдарлаймыз.



3.7-сурет

Контурдың екі ортаны бөліп тұрған шекараға параллель жақтарының ұзындығы сондай, оның шектерінде әрбір диэлектриктегі **E** өрісті бірдей деп есептеуге болады, ал контур «биіктігі» ескермеуге болатындай аз болуы керек. Онда **E** векторының циркуляциясы туралы теоремаға сәйкес

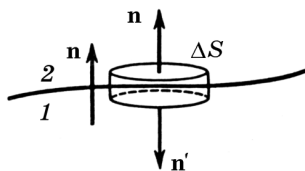
$$E_{2\tau}l + E_{1\tau'}l = 0,$$

мұндағы, **E** векторының проекциялары суретте тілшелермен көрсетілген контурды айналу бағытында алынған. Егер контурдың төменгі бөлігінде **E** векторының τ' ортағы емес, τ жалпы ортағы проекциясын алса, онда $E_{1\tau'} = -E_{1\tau}$ болады да, алдыңғы теңдеуден шығатыны:

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}, \quad (3.22)$$

яғни, екі ортаны бөліп тұрған шекараның екі жағында **E** векторының тангенциал құраушысы бірдей болады (секіrmелі өзгеріске ұшырамайды).

D векторының шарттары. Биіктігі өте кішкентай цилиндрді аламыз, оны екі диэлектрикті бөліп тұрған шекараға орналастырамыз (3.8-сурет). Цилиндр қимасы, оның әрбір табаны шегінде **D** векторы бірдей болатындай болуы керек. Онда **D** векторы үшін Гаусс теоремасына сәйкес



3.8-сурет

$$D_{2n}\Delta S + D_{1n}'\Delta S = \sigma\Delta S,$$

мұндағы, σ – екі ортаны бөліп тұрған шекарадағы бөгде зарядтың беттік тығыздығы. **D** векторының **n** жалпы нормальдағы екі проекциясын алып (ол 1-диэлектриктен 2-диэлектрикке қарай бағытталған), $D_{1n}' = -D_{1n}$ -ді аламыз, алдыңғы теңдеуді төмендегідей түрге келтіруге болады:

$$\boxed{D_{2n} - D_{1n} = \sigma.} \quad (3.23)$$

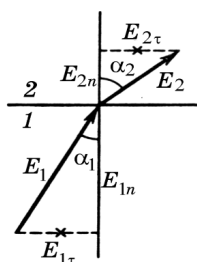
Бұл қатыстан **D** векторының нормаль құраушысы, жалпы айтқанда, екі ортаны бөліп тұрған шекарадан өткенде секіrmелі өзгеріске ұшырайтыны көрініп тұр. Бірақ егер екі ортаны бөліп тұрған шекарада бөгде зарядтар жоқ болса ($\sigma = 0$), онда

$$\boxed{D_{1n} = D_{2n}.} \quad (3.24)$$

Бұл жағдайда **D** векторының нормаль құраушылары секіrmелі өзгеріске ұшырамайды, олар екі ортаны бөліп тұрған шекараның әртүрлі жақтарында бірдей болады.

Сөйтіп егер екі біртекті изотропты диэлектрикті бөліп тұрған шекарада бөгде зарядтар жоқ болса, онда осы шекараны өту кезінде E_{τ} және D_n құраушылары секіrmелі емес, үздіксіз өзгереді. E_n және D_{τ} құраушылары секіrmелі өзгеріске ұшырайды.

E және D сызықтарының сынуы. Екі диэлектрикті бөліп



3.9-сурет

тұрған шекарада **E** және **D** векторларының құраушылары үшін біз алған шарттар, қазір көретініміздей, бұл векторлардың сызықтары осы шекарада сынатынын білдіреді (3.9-сурет). α_1 және α_2 бұрыштар арасындағы қатысты табайық.

Егер екі ортаны бөліп тұрған шекарада бөгде зарядтар жоқ болса, он (3.22) және (3.24)-ке сәйкес $E_{2\tau} = E_{1\tau}$, $\varepsilon_2 E_{2n} = \varepsilon_1 E_{1n}$. 3.9-суреттен шығатыны:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{E_{2\tau} / E_{2n}}{E_{1\tau} / E_{1n}}.$$

Осыдан алдыңғы шарттарды ескеріп, **E** сызықтарының, демек **D** сызықтарының да сыну заңын аламыз:

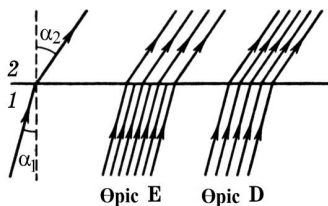
$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}. \quad (3.25)$$

Бұл ε -ның мәні үлкен диэлектрикте **E** мен **D**-ның екі ортаны бөліп тұрған шекараға жүргізілген нормальмен үлкен бұрыш жасайтынын білдіреді (3.9-суретте $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$).

Мысал. 1-ші және 2-ші екі біртекті диэлектрикті бөліп тұрған шекарадағы **E** және **D** өрістердің графиктерін саламыз, $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ және бұл бетте бөгде зарядтар жоқ деп есептейміз.

$\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ болғандықтан, (3.25)-ке сәйкес $\alpha_2 > \alpha_1$ (3.10-сурет).

Әрі қарай, **E** векторының тангенциал құраушыларының теңдігінен 3.9-сурет көмегімен модулі бойынша $E_2 < E_1$ екенін ұғу қиын емес, яғни 1-ші диэлектриктегі **E** векторының сызықтары қоюырақ болуы керек, бұл 3.10-суретте де көрсетілген. **D**



3.10-сурет

векторының нормаль құраушыларының теңдігінен де, модулі бойынша $D_2 > D_1$ екенін пайымдау қиын емес, яғни **D** векторының сызықтары 2-ші диэлектрикте қоюырақ болуы керек.

Біздің жағдайымызда **E** векторы сызықтарының сынатынын, бұдан басқа үзілетінін (байланысқан зарядтардың болуынан), **D** векторының сызықтары тек үзіліссіз сынатынын көреміз (өйткені шекарада бөгде зарядтар жоқ).

Өткізгіш – диэлектрик шекарасындағы шарт. Егер 1-ші орта өткізгіш, 2-ші орта диэлектрик болса, онда (3.23) формуладан шығатыны:

$$\boxed{D_n = \sigma}, \quad (3.26)$$

мұндағы, **n** – өткізгішке қатысты **сыртқы** нормаль (мұнда екі индексі алынып тасталған, өйткені берілген жағдайда ол мәнді емес). (3.26) формуланың дұрыстығына көз жеткізейік. Тепе-теңдік күйде өткізгіш ішіндегі электр өрісі $\mathbf{E} = 0$, демек полярлану $\mathbf{P} = 0$. Бұл өз кезегінде (3.17)-ге сәйкес өткізгіш ішінде вектор $\mathbf{D} = 0$

екенін білдіреді, яғни (3.23) формуладағы белгілеулерде $\mathbf{D}_1 = 0$ және $D_{1n} = 0$. $D_{2n} = \sigma$ қалады.

Өткізгіш бетіндегі байланысқан заряд. Егер өткізгіштің зарядталған бөлігіне біртекті диэлектрик жанасып жатса, онда осы диэлектрик пен өткізгіш шекарасында қайсыбір тығыздығы σ' байланысқан зарядтар шығады. (біртекті диэлектрик үшін байланысқан зарядтардың көлемдік тығыздығы $\rho' = 0$ екенін еске саламыз). (2.2) формуланы қорытқанда жасалғандай етіп, баламалы түрде Гаусс теоремасын енді $\mathbf{E}$ векторына қолданамыз. Өткізгіш пен диэлектрикті бөліп тұрған шекарада әрі бөгде, әрі байланысқан зарядтар (σ және σ') бар екенін ескеріп, келесі өрнекті аламыз: $E_n = (\sigma + \sigma')/\varepsilon_0$. Екінші жағынан, (3.26)-ға сәйкес $E_n = D_n/\varepsilon\varepsilon_0 = \sigma/\varepsilon\varepsilon_0$. Осы екі теңдеуден мынаны табамыз: $\sigma/\varepsilon = \sigma + \sigma'$, осыдан

$$\sigma' = -\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\sigma. \quad (3.27)$$

Диэлектриктегі байланысқан зарядтың σ' беттік тығыздығы өткізгіштегі σ бөгде зарядтың беттік тығыздығымен бір мәнді байланыста екені көрініп тұр, сонымен бірге бұл зарядтардың таңбалары қарама-қарсы.

§ 3.6. Біртекті диэлектриктегі өріс

Заттағы $\mathbf{E}$ қорытқы өріс кернеулігін анықтау үлкен қиындықтармен байланысты екені бұрын §2.1-де көрсетілген болатын, өйткені индукцияланған зарядтардың затта қалай таралатынын біз алдынала білмейміз. Тек бұл зарядтардың таралуы заттың табиғатына және пішініне, сондай-ақ сыртқы $\mathbf{E}_0$ өрістің конфигурациясына тәуелді екені анық.

Сондықтан жалпы жағдайда диэлектриктегі $\mathbf{E}$ қорытқы өріс туралы мәселе елеулі қиындықтарға келіп тіреледі: әрбір нақты жағдайларда байланысқан зарядтардың $\mathbf{E}'$ макроөрісін анықтау, жалпы айтқанда, күрделі өзіндік мәселе болып табылады, өкінішке орай $\mathbf{E}'$ -ті табуға арналған әмбебап формула жоқ.

$\mathbf{E}_0$ өрісі бар кеңістік біртекті изотропты диэлектрикпен толтырылған жағдайда басқаша болады. Бұл жағдайды егжей-

тегжейлі қарастырайық. Вакуумдағы зарядталған өткізгіш (не өткізгіштер) берілген болсын – әдетте бөгде зарядтар өткізгіштерде орналасады. Бұрыннан білетініміздей, тепе- теңдік жағдайда өткізгіш ішінде өріс $\mathbf{E} = 0$, бұл σ беттік зарядтың белгілібір және бірден бір таралуында болады. Өткізгішті қоршаған кеңістікте $\mathbf{E}_0$ өріс жасалған болсын делік.

Енді өріс бар кеңістікті біртекті диэлектрикпен толтырайық. Мұндай диэлектрикте оның полярлануының нәтижесінде өткізгішпен шекарада тек σ' – беттік байланысқан зарядтар пайда болады, оған қоса (3.27)-ге сәйкес σ' зарядтар өткізгіш бетіндегі σ бөгде зарядтармен бір мәнді байланысқан.

Өткізгіш ішінде бұрынғыша өріс болмайды ($\mathbf{E} = 0$). Бұл өткізгіш пен диэлектрикті бөліп тұрған шекарада беттік зарядтардың (бөгде $\sigma +$ байланысқан σ') таралуы бөгде зарядтардың (σ) бұрынғы таралуына *ұқсас* болады да, диэлектриктегі қорытқы $\mathbf{E}$ өрістің конфигурациясы диэлектрик жоқ кездегідей болып қалады. Тек өрістің әрбір нүктесіндегі өрістің мәні өзгереді.

Гаусс теоремасына сәйкес $\sigma + \sigma' = \epsilon_0 E_n$, мұндағы $E_n = D_n / \epsilon \epsilon_0 = \sigma / \epsilon \epsilon_0$, сондықтан

$$\sigma + \sigma' = \sigma / \epsilon. \quad (3.28)$$

Бірақ егер өткізгіш пен диэлектрикті бөліп тұрған шекараның барлық жерінде электр өрісін туғызатын зарядтар ϵ есе азайса, демек $\mathbf{E}$ өрістің өзі де барлық жерде $\mathbf{E}_0$ өрістен сонша есе аз болады:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 / \epsilon. \quad (3.29)$$

Осы теңдіктің екі жағын $\epsilon \epsilon_0$ -ге көбейтіп мынаны аламыз

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_0, \quad (3.30)$$

қарастырылып отырған жағдайда $\mathbf{D}$ векторының өрісі өзгермейді.

Бөгде зарядтардың $\mathbf{E}_0$ өрісінің (не сыртқы өрістің) эквипотенциал беттерінің арасындағы көлемді біртекті диэлектриктер түгелімен толтырып тұратын анағұрлым жалпы жағдайда да, (3.29) және (3.30) формулалары дұрыс болады. Мұнда

да диэлектрик ішінде $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0/\varepsilon$ және $\mathbf{D} = \mathbf{D}_0$. Көрсетілген жағдайларда байланысқан зарядтар өрісінің $\mathbf{E}'$ кернеулігі диэлектриктің $\mathbf{P}$ полярлануымен қарапайым байланыста болады, дәлірек

$$\mathbf{E}' = - \mathbf{P}/\varepsilon_0. \quad (3.31)$$

Егер $\mathbf{E}_0 = \varepsilon \mathbf{E}$ және $\mathbf{P} = \kappa \varepsilon_0 \mathbf{E}$ екенін ескерсек, бұл қатысты $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'$ формуласынан оңай алуға болады.

Басқа жағдайларда, бұрын ескерткендей, істің жайы едәуір күрделірек болады да, (3.29)–(3.31) формулалары дұрыс болмай қалады.

Салдарлар. Сонымен, егер біртекті диэлектрик өріс алып тұрған барлық кеңістікті толтыратын болса, онда $\mathbf{E}$ өріс кернеулігі сол бөгде зарядтардың, бірақ диэлектрик жоқ кездегі $\mathbf{E}_0$ кернеулігінен ε есе аз болады. Осыдан барлық нүктелерде φ потенциалдың ε есе кемітіндігі шығады:

$$\varphi = \varphi_0/\varepsilon, \quad (3.32)$$

мұндағы, φ_0 – диэлектрик жоқ кездегі өріс потенциалы. Бұл потенциал айырымына да қатысты.

$$U = U_0/\varepsilon, \quad (3.33)$$

мұндағы, U_0 – диэлектриксіз, вакуумдағы потенциалдар айырымы.

Қарапайым жағдайда, біртекті диэлектрик **конденсатор** астарлары арасындағы барлық кеңістікті толтырып тұрғанда, астарлар арасындағы U потенциалдар айырымы диэлектрик жоқ кездегіден ε есе аз болады (әлбетте астарлардағы зарядтардың сондай мәнінде). Олай болса, конденсатордың сыйымдылығы ($C = q/U$) оны диэлектрикпен толтырғанда ε есе артады:

$$C' = \varepsilon C, \quad (3.34)$$

мұндағы, C – диэлектрик жоқ кездегі конденсатор сыйымдылығы. Бұл формула конденсатор астарлары арасындағы барлық кеңістікті диэлектрикпен толтырғанда және жиіктік эффектілерді ескермеген кезде дұрыс болатынына көңіл аудару керек.

Кейбір диэлектриктердің (керамикалардың) көмегімен сыйымдылығы бірнеше фарад конденсаторлар жасалды (!).

Есептер

3.1. Диэлектриктің полярлануы және байланысқан заряд. Нүктелік бөгде заряд q өтімділігі тек радиал бағытта $\varepsilon = \alpha/r$ заңымен өзгертін біртекті емес изотропты диэлектриктің сфералық қабатының центрінде орналасқан, мұндағы, α – тұрақты, r – жүйе центріне дейінгі қашықтық. Қабат ішінде r -дің функциясы ретінде байланысқан зарядтардың ρ' көлемдік тығыздығын табу керек.

Шешімі. Центрі жүйе центрімен дәл келетін, радиусы r сфераны тұйықталған бет ретінде алып, (3.6) теңдеуін пайдаланамыз. Онда

$$4\pi r^2 \cdot P_r = -q'(r),$$

мұндағы, $q'(r)$ – осы сфера ішіндегі байланысқан заряд. Осы өрнектің дифференциалын жазамыз:

$$4\pi d(r^2 P_r) = -dq', \quad (1)$$

мұндағы, dq' – радиустары r және $r + dr$ сфералар арасындағы жұқа қабаттағы байланысқан заряд. $dq' = r' 4\pi r^2 dr$ екенін ескеріп, (1)-ді мына түрге келтіреміз:

$$r^2 dP_r + 2r P_r dr = -\rho' r^2 dr,$$

Осыдан

$$\rho' = -\left(\frac{dP_r}{dr} + \frac{2}{r} P_r\right). \quad (2)$$

Біздің жағдайымызда

$$P_r = \kappa \varepsilon_0 E_r = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} D_r = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \frac{q}{4\pi r^2},$$

(2) -де сәйкес түрлендірулерден кейін, мына түрге келеді:

$$\rho' = \frac{1}{4\pi\alpha} \frac{q}{r^2}.$$

Ізделініп отырған нәтиже де осы болатын.

3.2. D векторы үшін Гаусс теоремасы. Өтімділігі ε біртекті диэлектриктен жасалған шексіз үлкен пластина көлемдік тығыздығы $\rho > 0$ болатын бөгде зарядпен біркелкі зарядталған. Пластина қалыңдығы $2a$.

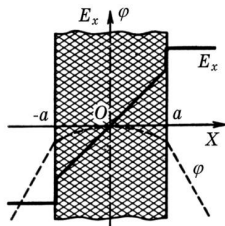
1) пластина центрінен l қашықтықтың функциясы ретінде $\mathbf{E}$ векторының модулін және φ потенциалды табу керек (пластина ортасында потенциалды нөлге тең деп алу керек); координата осін пластинаға перпендикуляр етіп алып, $\mathbf{E}$ векторының $E_x(x)$ проекциясының және $\varphi(x)$ -тің шамамен алынған графиктерін кескіндеу керек.

2) байланысқан зарядтың беттік және көлемдік тығыздықтарын табу керек.

Шешімі. 1. Симметриялық пайымдаулардан, пластина ортасында $E = 0$, ал барлық қалған нүктелерде $\mathbf{E}$ векторы пластина бетіне перпендикуляр екені анық. E -ні анықтау үшін, $\mathbf{D}$ векторына арналған Гаусс теоремасын пайдаланамыз (өйткені бізге тек бөгде зарядтардың таралуы белгілі). Бір табаны пластинаның ортаңғы жазықтығымен дәл келетін ұзындығы l түзу цилиндрді тұйықталған бет ретінде аламыз. Осы цилиндр қимасының ауданы S болсын делік, онда

$$DS = \rho Sl, \quad D = \rho l, \quad E = \rho l / \varepsilon \varepsilon_0, \quad (l \leq a).$$

$$DS = \rho Sa, \quad D = \rho a, \quad E = \rho a / \varepsilon_0, \quad (l \geq a).$$



$E_x(x)$ және $\varphi(x)$ функциялардың графиктері 3.11-суретте көрсетілген. $E_x(x)$ графигі $-\partial\varphi/\partial x$, туындымен сәйкес болатынына көз жеткізу пайдалы.

2. (3.13)-ке сәйкес байланысқан зарядтың беттік ттығыздығы

$$\sigma' = P_n = \kappa \varepsilon_0 E_n = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \rho a > 0.$$

3.11-сурет

Бұл нәтиже пластинканың екі беті үшін де дұрыс. Сөйтіп, егер бөгде заряд $\rho > 0$ болса, онда пластинаның екі бетінде де оң байланысқан заряд шығады.

Байланысқан зарядтың көлемдік тығыздығын анықтау үшін, (3.9) теңдеуін пайдаланамыз, біздің жағдайымызда оның түрі ең қарапайым болады.

$$\rho' = -\frac{\partial P_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \rho x \right) = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \rho.$$

Осыдан байланысқан зарядтың көлем бойынша біркелкі таралатындығы және таңбасы бөгде зарядқа қарама-қарсы болатындығы көрініп тұр.

- 3.3.** Біртекті диэлектрик ішкі және сыртқы радиустары a және b -ға тең сфералық қабат түрінде болады. Егер диэлектрикке: 1) қабаттың ішкі беті бойынша; 2) қабаттың көлемі бойынша біркелкі таралған оң бөгде заряд берілген болса, онда өрістің E кернеулігі мен φ потенциалының шамамен алынған графиктерін жүйе центрінен r қашықтықтың функциясы ретінде кескіндеу керек.

Шешімі. 1. Тұйықталған бет үшін радиусы r сфераны алып, $\mathbf{D}$ векторына арналған Гаусс теоремасын пайдаланамыз:

$$4\pi r^2 D = q,$$

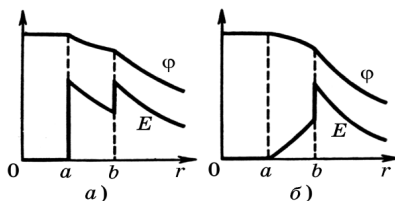
мұндағы, q – осы сфера ішіндегі бөгде заряд. Осыдан шығатыны:

$$D(r < a) = 0, \quad D(r > a) = q/4\pi r^2.$$

Ізделініп отырған кернеулік

$$E(r < a) = 0, \quad E(r > a) = D/\varepsilon\varepsilon_0.$$

$E(r)$ тәуелділігінің графигі 3.12 а-суретте көрсетілген. Осы суретте φ -дің r -ге тәуелділік графигі де кескінделген. $\varphi(r)$ графигінің түрі кері таңбамен алынған $\partial\varphi/\partial r$ туындысы $E(r)$ функциясының графигіне сәйкес болатындай болуы керек.



3.12-сурет

Сонымен бірге нормалау шарты да ескерілуі керек: $r \rightarrow \infty$ болғанда $\varphi \rightarrow 0$.

$\varphi(r)$ графигі үздіксіз болатынына көңіл аудару керек. E функциясының шеткі үзілген жерлерінде $\varphi(r)$ графигі тек сынады.

2. Берілген жағдайда Гаусс теоремасына сәйкес

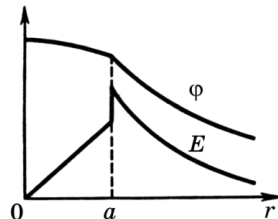
$$4\pi r^2 D = \frac{4}{3} \pi (r^3 - a^3) \rho,$$

мұндағы, ρ – бөгде зарядтың көлемдік тығыздығы. Осыдан

$$E = \frac{D}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\rho}{3\varepsilon\varepsilon_0} \frac{r^3 - a^3}{r^2}.$$

$E(r)$ және $\varphi(r)$ тәуелділіктерінің сәйкес графиктері 3.12 б-суретте көрсетілген.

- 3.4. Өтімділігі ϵ біртекті диэлектриктен жасалған радиусы a шар бойымен бөгде зарядтар $\rho > 0$ тығыздықпен таралған. 1) шар центрінен r қашықтықтың функциясы ретінде $\mathbf{E}$ векторының модулін табу керек, $E(r)$ және $\varphi(r)$ функцияларының шамамен алынған графиктерін кескіндеу керек; 2) байланысқан зарядтардың беттік және көлемдік тығыздықтарын табу керек.



3.13-сурет

Шешімі. 1.Тек бөгде зарядтардың таралуы берілгендіктен, E -ні анықтау үшін $\mathbf{D}$ векторына арналған Гаусс теоремасын пайдаланамыз:

$$r \leq a, \quad 4\pi r^2 D = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho, \quad D = \frac{\rho}{3} r, \quad E = \frac{D}{\epsilon \epsilon_0} = \frac{\rho}{3\epsilon \epsilon_0} r,$$

$$r \geq a, \quad 4\pi r^2 D = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho, \quad D = \frac{\rho a^3}{3r^2}, \quad E = \frac{D}{\epsilon_0} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{1}{r^2}.$$

$E(r)$ және $\varphi(r)$ функциялардың графиктері 3.13-суретте көрсетілген.

2. Байланысқан зарядтың беттік тығыздығы:

$$\sigma' = P_n = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \frac{\rho a}{3}.$$

Байланысқан зарядтардың көлемдік тығыздығын табу үшін, бізді (3.11) формулаға әкелген тұжырымдарды қайталаса жеткілікті болады да, мынаны аламыз:

$$\rho' = -\frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \rho. \quad (1)$$

Бұл нәтижені басқаша – (3.9) теңдеуінің көмегімен де алуға болады. Дәлірек, $\mathbf{P} = \kappa \epsilon_0 \mathbf{E}$ және κ координатаға тәуелді болмайтындықтан (шар ішінде),

$$\rho' = -\nabla \cdot \mathbf{P} = -\kappa \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E},$$

мұндағы, $\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho + \rho'$. Сондықтан $\rho' = -\kappa (\rho + \rho')$, осыдан (1) шығады.

3.5. Өткізгіш сыйымдылығы. Радиусы a шар түріндегі өткізгіштің сыйымдылығын табу керек, ол оған жанасқан өтімділігі ε және сыртқы радиусы b біртекті диэлектрик қабатымен қоршалған. Өрістің $E(r)$ және потенциалдың $\varphi(r)$ тәуелділіктерінің шамамен алынған графиктерін кескіндеу керек, мұндағы, r – шар центрінен қашықтық, өткізгіш оң зарядталған.

Шешімі. Анықтама бойынша сыйымдылық $C = q/\varphi$. Оған ойша q заряд беріп, өткізгіштің φ потенциалын табамыз:

$$\varphi = \int_a^{\infty} E_r dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_a^b \frac{q}{\varepsilon r^2} dr + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_b^{\infty} \frac{q}{r^2} dr.$$

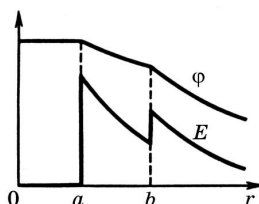
Осы өрнекті интегралдағаннан кейін, мынаны аламыз:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \left(\frac{1}{a} + \frac{\varepsilon - 1}{b} \right), \quad C = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon a}{1 + (\varepsilon - 1)a/b}.$$

$E(r)$ және $\varphi(r)$ тәуелділіктердің графиктері 3.14-суретте көрсетілген.

3.6. Конденсатор сыйымдылығы. Астарларының радиустары a және b сфералық конденсатор өтімділігі жүйенің центріне дейінгі r қашықтыққа $\varepsilon = \alpha/r$ түрінде тәуелді болатын изотропты, бірақ біртекті емес диэлектрикпен толтырылған, мұндағы $a < b$ және α – тұрақты. Осындай конденсатордың сыйымдылығын табу керек.

Шешімі. Конденсатор сыйымдылығының анықтамасына сәйкес ($C = q/U$) есеп берілген q зарядта U потенциалдар айырымын табуға келіп тіреледі:



3.14- сурет

$$U = \int_a^b E dr, \quad (1)$$

мұнда ішкі астардың заряды $q > 0$ деп ұйғарылады. E -ні $\mathbf{D}$ векторына арналған Гаусс теоремасының көмегімен табамыз.

$$4\pi r^2 D = q, \quad E = \frac{D}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{\varepsilon r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{\alpha r}.$$

Соңғы өрнекті (1)-ге қойып, сәйкес интегралдаудан кейін, мынаны табамыз:

$$U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\alpha} \ln \frac{b}{a}, \quad C = \frac{4\pi\epsilon_0\alpha}{\ln(b/a)}.$$

3.7. Гаусс теоремасы және суперпозиция принципі. Сыртқы электр өрісінен ажыратқаннан кейін, полярлану күйін сақтайтын диэлектрик шар берілген. Егер шар біртекті полярланған болса, онда оның ішіндегі электр өрісі $\mathbf{E}' = -\mathbf{P}/3\epsilon_0$, мұндағы $\mathbf{P}$ – полярлану.

1. Осылай полярланған шар диэлектриктің барлық оң зарядтарының барлық теріс зарядтарға қатысты аз ығысуының нәтижесі деп есептеп, осы формуланы алу керек.

2. Осы формуланы пайдаланып, шексіз статикалық полярланған ($\mathbf{P}$) диэлектрик ішіндегі сфералық қуыстағы өрістің $\mathbf{E}_0$ кернеулігін табу керек, қуыстан алыс жерде диэлектриктегі өріс кернеулігі $\mathbf{E}$ -ге тең.

Шешімі. 1. ρ және $-\rho$ тығыздықтарымен біркелкі таралған зарядтары бар, радиустары бірдей екі шар түріндегі сондай бір шар берілген. Аз ығысу нәтижесінде шарлардың центрлері бір-біріне қатысты $\mathbf{l}$ қашықтыққа ығысқан делік. (3.15-сурет). Онда шар ішіндегі қалауымызша алынған A нүктеде:



$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}'_+ + \mathbf{E}'_- = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_-) = -\frac{\rho \mathbf{l}}{3\epsilon_0},$$

3.15-сурет

мұнда, біркелкі зарядталған шар ішінде өріс кернеулігі $\mathbf{E} = \rho \mathbf{r}/3\epsilon_0$ екені пайдаланылған, бұл тікелей Гаусс теоремасынан шығады. (3.4)-ке сәйкес $\rho \mathbf{l} = \mathbf{P}$ екенін ескеру ғана қалды.

2. Диэлектрикте сфералық қуыс жасау шарикті полярланған заттан алып кетумен эквивалентті. Сондықтан суперпозиция принципі бойынша диэлектрик ішіндегі $\mathbf{E}$ өрісті $\mathbf{E} = \mathbf{E}' + \mathbf{E}_0$ қосындысы түрінде беруге болады. Осыдан

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{E} - \mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{P}/3\epsilon_0,$$

яғни, сфералық қуыстағы өріс диэлектриктегі $\mathbf{E}$ өрістен $\mathbf{P}/3\epsilon_0$ шамаға артық болады.

3.8. Шекаралық шарттар. Диэлектрик-вакуум шекарасындағы A нүктесіне жақын жерде (3.16-сурет) вакуумдағы электр өрісі $\mathbf{E}_0$ -ге тең, сонымен бірге $\mathbf{E}_0$ векторы бөліп тұрған бетке берілген нүктеде жүргізілген нормальмен α_0 бұрыш жасайды. Диэлектриктің өтімділігі ϵ . E/E_0 қатынасын табу керек, мұндағы E – диэлектрик ішіндегі A нүктесіне жақын жердегі өріс кернеулігі.

Шешімі. Диэлектрик ішіндегі өріс кернеулігі

$$E = \sqrt{E_t^2 + E_n^2}. \quad (1)$$

Диэлектриктерді бөліп тұрған шекарадағы (3.22) және (3.24) шарттарды пайдаланып мыналарды табамыз:

$$E_t = E_0 \sin \alpha_0, \quad E_n = D_n / \epsilon \epsilon_0 = E_{0n} / \epsilon = (E_0 / \epsilon) \cos \alpha_0,$$

мұндағы, E_{0n} – вакуумдағы $\mathbf{E}_0$ векторының нормаль құраушысы. Бұл өрнекті (1)-ге қойып, мынаны аламыз:

$$\frac{E}{E_0} = \sqrt{\sin^2 \alpha_0 + \frac{\cos^2 \alpha_0}{\epsilon^2}} < 1,$$

яғни, $E < E_0$.

- 3.9.** Барлық жарты кеңістікті толтырып тұрған біртекті диэлектриктің жазық бетінен l қашықтықта, вакуумда q нүктелік заряд орналасқан. Диэлектриктің өтімділігі ϵ . 1) нүктелік зарядтан r қашықтықтың функциясы ретінде байланысқан зарядтың беттік тығыздығын тауып, алынған нәтижені зерттеу керек; 2) диэлектрик бетіндегі қосынды байланысқан зарядты табу керек.

Шешімі. 1. Диэлектрик шекарасында $\mathbf{D}$ векторының нормаль құраушысының үздіксіздігін пайдаланамыз (3.17-сурет):

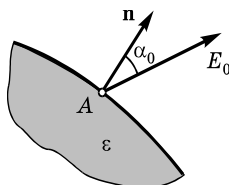
$$D_{2n} = D_{1n}, \quad E_{2n} = \epsilon E_{1n}$$

Немесе

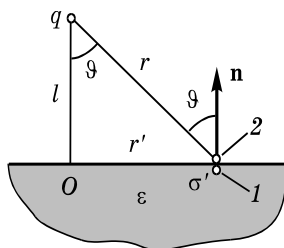
$$-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \cos \vartheta + \frac{\sigma'}{2\epsilon_0} = \epsilon \left(-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \cos \vartheta - \frac{\sigma'}{2\epsilon_0} \right),$$

мұндағы, $\sigma' / 2\epsilon_0$ қосылғыш – зарядының беттік тығыздығы σ' -қа тең болатын жазықтықтың қарастырылып отырған бөлігіне жақын жерде жасалатын өріс кернеулігінің құраушысы. Соңғы теңдеуден шығатыны:

$$\sigma' = -\frac{\epsilon-1}{\epsilon+1} \frac{ql}{2\pi r^3}. \quad (1)$$



3.16-сурет



3.17-сурет

Мұнда $\cos \vartheta = l/r$. екені ескерілген. $l \rightarrow 0$ болғанда $\sigma' \rightarrow 0$, яғни егер q заряд бөліп тұрған шекараның өзінде болса, онда жазықтықта беттік заряд болмайды.

2. Бөліп тұрған шекарадағы центрі O нүктесінде болатын жұқа сақинаны қарастырайық (3.17-сурет). Осы сақинаның ішкі және сыртқы радиустары r' және $r' + dr'$ болсын делік. Берілген сақинаның шектерінде беттік байланысқан заряд $dq' = \sigma' \cdot 2\pi r' dr'$. Суреттен $r^2 = l^2 + r'^2$ екені көрініп тұр, осыдан $rdr = r' dr'$ (1)-ді ескергенде, dq' үшін өрнек мына түрге келеді:

$$dq' = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} ql \frac{dr}{r^2}.$$

Осы өрнекті r бойынша l -ден ∞ -ке дейін интегралдап мынаны аламыз:

$$q' = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} q.$$

- 3.10. Вакуумды өтімділігі ε шексіз біртекті диэлектриктен бөліп тұрған жазықтықта нүктелік q заряд орналасқан. Барлық кеңістіктегі $\mathbf{D}$ және $\mathbf{E}$ векторларының модулін табу керек.

Шешімі. Берілген жағдайда $\mathbf{D}$ векторының нормаль құраушысының үздіксіздігі шартынан $E_{2n} = \varepsilon E_{1n}$ екендігі шығады. Тек қарастырып отырған нүктеге жақын жердегі σ' беттік зарядтың ғана $\mathbf{E}$ векторының нормаль құраушысына үлесі бар, сондықтан алдыңғы теңдікті былай жазуға болады:

$$\sigma' / 2\varepsilon_0 = \varepsilon(-\sigma' / 2\varepsilon_0).$$

Осыдан $\sigma' = 0$ екені бірден көрініп тұр.

Осылайша, берілген жағдайда беттік байланысқан заряд жоқ (нүктелік q бөгде зарядқа тікелей жанасқан нүктелерден басқа). Демек, қоршаған ортадағы электр өрісі – бұл $q + q'$ нүктелік зарядтың өрісі, E тек осы зарядқа дейінгі r қашықтыққа тәуелді. Бірақ бізге q' заряд белгісіз, сондықтан $\mathbf{D}$ векторы үшін Гаусс теоремасын пайдаланамыз. Центрі q заряд орналасқан нүктеде болатын радиусы r сфераны тұйықталған бет ретінде алып, мынаны жазамыз:

$$2\pi r^2 D_0 + 2\pi r^2 D = q,$$

мұндағы, D_0 және D – сәйкес вакуумдағы және диэлектриктегі q зарядтан r қашықтықтағы $\mathbf{D}$ векторының модульдері.

Бұдан басқа, **E** векторының тангенциал құраушысының үздіксіздік шартынан шығатыны:

$$D = \varepsilon D_0.$$

Соңғы екі шарттан мыналарды табамыз:

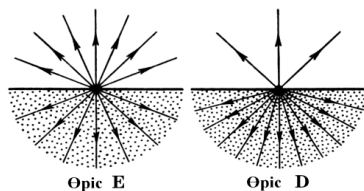
$$D_0 = \frac{q}{2\pi(1 + \varepsilon)r^2}, \quad D = \frac{\varepsilon q}{2\pi(1 + \varepsilon)r^2},$$

барлық кеңістіктегі электр өрісінің кернеулігі

$$E = \frac{D_0}{\varepsilon_0} = \frac{q}{2\pi(1 + \varepsilon)\varepsilon_0 r^2}.$$

$\varepsilon = 1$ болғанда бұл формулалар бізге белгілі вакуумдағы нүктелік зарядтың D және E -ге арналған формулаларына өтеді.

Алынған нәтижелер графиктік түрде 3.18-суретте берілген. Берілген жағдайда **D** өріс тек бөгде зарядтармен ғана анықталмайтынына көңіл аудару керек (әйтпесе оның түрі нүктелік заряд өрісіндей болған болар еді).



3.18-сурет

Электр өрісінің энергиясы



§ 4.1. Зарядтар жүйесінің электр энергиясы

Өзара әсерге энергетикалық көзқарас. Электр зарядтарының өзара әсеріне энергетикалық көзқарас, алда көретініміздей, өзінің практикалық қолданыстары жағынан нәтижелі болып табылады, бұдан басқа физикалық ақиқат ретінде электр өрісінің өзіне басқаша көзқараспен қарауға мүмкіндік ашады.

Бәрінен бұрын біз зарядтар жүйесінің өзара әсер энергиясы туралы ұғымға қалай келу керек екенін анықтаймыз.

1. Алдымен 1 және 2 екі нүктелік зарядтардан тұратын жүйені қарастырамыз. Осы зарядтардың $\mathbf{F}_1$ және $\mathbf{F}_2$ өзара әсер күштерінің элементар жұмыстарының қосындысын табамыз. Қайсыбір K санақ жүйесінде зарядтар dt уақыт ішінде $d\mathbf{l}_1$ және $d\mathbf{l}_2$ орын ауыстырулар жасаған болсын делік. Онда бұл күштердің жұмысы.

$$\delta A_{1,2} = \mathbf{F}_1 d\mathbf{l}_1 + \mathbf{F}_2 d\mathbf{l}_2.$$

$\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1$ екенін ескеріп (Ньютонның үшінші заңы бойынша), алдыңғы өрнекті қайтадан жазамыз:

$$\delta A_{1,2} = \mathbf{F}_1 (d\mathbf{l}_1 - d\mathbf{l}_2).$$

Жақша ішіндегі шама – 1-зарядтың 2-зарядқа қатысты орын ауыстыруы. Дәлірек, бұл 1-зарядтың 2-зарядпен қатаң байланысқан және онымен бірге бастапқы K – жүйеге қатысты ілгерілемелі орын ауыстыратын K' – жүйесіне қатысты орын ауыстыруы. Шынында да, 1-ші зарядтың K -жүйедегі $d\mathbf{l}_1$ орын ауыстыруын, K' – жүйенің $d\mathbf{l}_2$ орын ауыстыруы мен 1-зарядтың осы K' – жүйеге

катысты $d\mathbf{l}'_1$ орын ауыстыруының қосындысы ретінде беруге болады: $d\mathbf{l}_1 = d\mathbf{l}_2 + d\mathbf{l}'_1$. Осыдан $d\mathbf{l}_1 - d\mathbf{l}_2 = d\mathbf{l}'_1$ және

$$\delta A_{1,2} = \mathbf{F}_1 d\mathbf{l}'_1.$$

Сонымен, қалауымызша алынған K санақ жүйесінде элементар жұмыстардың қосындысы, екінші заряд тыныштықта болатын жүйеде бірінші зарядқа әсер ететін күштің элементар жұмысына тең екен. Басқаша айтқанда, $\delta A_{1,2}$ жұмыс бастапқы K – жүйесін таңдап алуға тәуелді емес.

2-ші заряд тарапынан 1 -зарядқа әсер ететін $\mathbf{F}_1$ күш консервативті (центрлік күш сияқты). Сондықтан $d\mathbf{l}_1$ орын ауыстырудағы берілген күштің жұмысын 2-заряд өрісінде 1 -зарядтың потенциалдық энергиясының кемуі ретінде немесе қарастырылып отырған зарядтар жұбының өзара әсерінің потенциалдық энергиясының кемуі ретінде беруге болады.

$$\delta A_{1,2} = -dW_{12},$$

мұндағы, W_{12} – берілген зарядтардың арақашықтығына тәуелді шама.

2. Енді **үш** нүктелік зарядтардан тұратын жүйеге көшеміз (бұл жағдай үшін алынған нәтижені зарядтардың қалауымызша алынған санынан тұратын жүйе үшін оңай жалпылауға болады). Барлық зарядтардың элементар орын ауыстырулары кезіндегі барлық өзара әсер күштерінің жасайтын жұмысын өзара әсерлердің барлық үш жұбының жұмыстарының қосындысы ретінде беруге болады, яғни $\delta A = \delta A_{1,2} + \delta A_{1,3} + \delta A_{2,3}$. Бірақ өзара әсердің әрбір жұбы үшін қазір ғана көрсетілгендей, $\delta A_{i,k} = -dW_{ik}$, сондықтан

$$\delta A = -d(W_{12} + W_{13} + W_{23}) = dW,$$

мұндағы, W – берілген зарядтар жүйесінің **өзара әсер энергиясы**,

$$W = W_{12} + W_{13} + W_{23}.$$

Осы қосындының әрбір қосылғышы сәйкес зарядтардың арақашықтығына тәуелді, сондықтан берілген зарядтар жүйесінің W энергиясы оның конфигурациясының функциясы.

Мұндай пайымдаулар зарядтардың кез келген санынан тұратын жүйе үшін дұрыс екендігі анық. Демек, зарядтардың қалауымызша алынған жүйесінің әрбір конфигурациясына W энергиясының өзіне тән мәні болады деп ұйғаруға болады, осы конфигурацияның өзгерісі кезінде барлық өзара әсер күштерінің жұмысы W энергияның кемуіне тең:

$$\delta A = -dW. \quad (4.1)$$

Өзара әсер энергиясы. W энергияның өрнегін табамыз. Алдымен тағы да үш нүктелік зарядтан тұратын жүйені қарастырамыз, біз ол үшін $W = W_{12} + W_{13} + W_{23}$ болатынын көрсеттік. Осы қосындыны төмендегідей түрлендіреміз. $W_{ik} = W_{ki}$ болғандықтан, әрбір W_{ik} қосылғышты симметриялы түрде береміз: $W_{ik} = (W_{ik} + W_{ki})/2$. Онда

$$W = (W_{12} + W_{21} + W_{13} + W_{31} + W_{23} + W_{32})/2.$$

Бірінші индекстері бірдей мүшелерді топтастырамыз:

$$W = [(W_{12} + W_{13}) + (W_{21} + W_{23}) + (W_{31} + W_{32})]/2.$$

Дөңгелек жақша ішіндегі әрбір қосынды – бұл i -ші зарядтың басқа зарядтармен өзара әсерінің энергиясы. Сондықтан соңғы өрнекті қайтадан былай жазуға болады

$$W = 1/2 (W_1 + W_2 + W_3) = 1/2 \sum_{i=1}^3 W_i.$$

Алынған өрнектің зарядтардың қалауымызша алынған санынан тұратын жүйесі үшін жалпылануы түсінікті, өйткені жүргізілген пайымдаулар жүйені құрайтын зарядтар санына тәуелді емес екені анық. Осылайша, нүктелік зарядтар жүйесінің энергиясы

$$W = 1/2 \sum W_i. \quad (4.2)$$

$W_i = q_i \phi_i$, мұндағы, q_i – жүйенің i -ші заряды; ϕ_i – i -ші заряд тұрған орында жүйенің **барлық қалған** зарядтарының жасаған

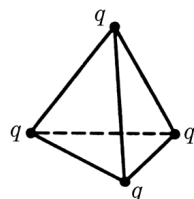
потенциалы екенін ескеріп, нүктелік зарядтар жүйесінің өзара әсер энергиясының ақырғы өрнегін аламыз:

$$W = 1/2 \sum q_i \varphi_i. \quad (4.3)$$

Мысал. Бірдей төрт нүктелік q заряд қабырғасы a тетраэдрдің төбелерінде орналасқан (4.1-сурет). Осы жүйе зарядтарының өзара әсерінің энергиясын табу керек.

Зарядтардың әрбір жұбының өзара әсер энергиясы бұл жерде бірдей және

$W_1 = q^2/4\pi\epsilon_0 a$. Суреттен көрініп тұрғандай, мұндай өзара әсерлеуші жұптар саны алтау, сондықтан берілген жүйенің барлық нүктелік зарядтарының өзара әсер энергиясы



$$W = 6W_1 = 6 q^2/4\pi\epsilon_0 a.$$

Бұл сұрақты шешудің басқаша тәсілі (4.3) **4.1-сурет** формуласын пайдалануға негізделген. Зарядтар-дың бірі тұрған орында қалған басқа зарядтардың өрісінен болатын потенциал $\varphi = 3 q/4\pi\epsilon_0 a$. Сондықтан

$$W = 1/2 \sum_{i=1}^4 q_i \varphi_i = 1/2 4q\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{6q^2}{a}.$$

Өзара әсердің толық энергиясы. Егер зарядтар үздіксіз таралса, онда зарядтар жүйесін $dq = \rho dV$ элементар зарядтар жиынтығына жіктеп, (4.3)-тегі қосындыдан интегралдауға өтіп, мынаны аламыз:

$$W = 1/2 \int \rho \varphi dV, \quad (4.4)$$

мұндағы, φ – көлемі dV элементте жүйенің барлық зарядтары туғызатын потенциал. Баламалы өрнекті зарядтардың мысалы, бет бойымен таралуы үшін жазуға болады; бұл үшін (4.4) формуладағы ρ -ны σ -ға және dV -ны dS -ке алмастырса жеткілікті.

(4.4) өрнек – бұл нүктелік заряд жөніндегі түсінікті үздіксіз таралған заряд туралы түсінікпен алмастыруға сәйкес келетін тек

түрі өзгерген (4.3) өрнегі деп қате ойлауға болады, бұл шын мәнісінде олай емес – екі өрнектің өзінің **мазмұны** жағынан айырмашылығы бар. Бұл айырмашылықтың болуы – екі өрнекке кіретін φ потенциалдың мағынасының әртүрлі болуы, оны бәрінен бұрын төмендегі мысалмен түсіндірген жақсы.

Жүйе зарядтары q_1 және q_2 екі шариктен тұратын болсын делік. Шариктердың арақашықтығы олардың өлшемдерінен едәуір үлкен, сондықтан q_1 және q_2 зарядтарды нүктелік деп есептеуге болады. Екі формуланың көмегімен берілген жүйенің W энергиясын табамыз.

(4.3) формулаға сәйкес

$$W = (q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2)/2 = q_1\varphi_1 = q_2\varphi_2.$$

мұндағы, φ_1 – q_1 заряд тұрған орында q_2 заряд тудыратын потенциал; φ_2 потенциалдың мағынасы да осыған баламалы.

(4.4) формулаға сәйкес біз әрбір шарик зарядын шексіз аз pdV элементтерге бөліп, оның әрқайсысын тек басқа шариктердің ғана заряды емес, **осы** шарик зарядының элементтері тудыратын потенциалға көбейтуіміз керек. Нәтиже мүлде басқаша болатыны анық, дәлірек:

$$W = W_1 + W_2 + W_{12}, \quad (4.5)$$

мұндағы, W_1 – бірінші шарик заряды элементтерінің бір-бірімен өзара әсер энергиясы; W_2 – сондай, бірақ екінші шарик үшін; W_{12} – бірінші заряд элементтерімен екінші заряд элементтерінің өзара әсер энергиясы. W_1 және W_2 энергиялары q_1 және q_2 зарядтардың **меншікті энергиялары**, ал W_{12} , q_1 зарядтың q_2 зарядпен **өзара әсерінің энергиясы** деп аталады.

Сонымен, W энергияны (4.3) формуламен есептеу тек W_{12} -ны, ал (4.4) формуласымен есептеу – W_{12} энергиядан басқа W_1 және W_2 меншікті энергиялары кіретін – **толық өзара әсер энергиясын** береді. Бұл жағдайды ескермеу көп жағдайда өрескел қатенің себебі болады.

Берілген сұраққа §4.4-те қайта ораламыз, ал қазір (4.4) формуласының көмегімен бірнеше маңызды нәтижелер аламыз.

§ 4.2. Зарядталған өткізгіш пен конденсатор энергиясы

Оқшауланған өткізгіш энергиясы. Өткізгіштің заряды q , потенциалы φ болсын делік. Заряд бар барлық нүктелерде φ -дің мәні бірдей болатындықтан, (4.4) формуласындағы φ -ді интеграл таңбасы астынан шығаруға болады. Онда қалған интеграл, басқа емес, өткізгіштегі q заряд болады да, және

$$W = \frac{q\varphi}{2} = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{q^2}{2C}. \quad (4.6)$$

Осы үш өрнек $C = q/\varphi$ -ді ескеріп, жазылған.

Конденсатор энергиясы. q және φ_+ – конденсатордың оң зарядталған астарының заряды мен потенциалы болсын делік. (4.4) формулаға сәйкес интегралды бірінші және екінші астарлар үшін, екі бөлікке бөлуге болады. Онда

$$W = (q_+\varphi_+ + q_-\varphi_-)/2.$$

$q_- = -q_+$ болғандықтан,

$$W = q_+(\varphi_+ - \varphi_-)/2 = qU/2,$$

мұндағы, $q = q_+$ – конденсатор заряды, U – оның астарларындағы потенциалдар айырымы. $C = q/U$ екенін ескеріп, конденсатор энергиясы үшін төмендегі өрнектерді аламыз:

$$W = \frac{qU}{2} = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C}. \quad (4.7)$$

Мұнда бұл формулалардың өзара әсердің **толық** энергиясын: тек бір астардың зарядтарының екінші астар зарядтарымен өзара әсер энергиясы емес, әрбір астар ішіндегі зарядтардың өзара энергиясын анықтайтындығын ескеру керек.

Ал егер диэлектрик болса ше? (4.6) және (4.7) формулалары диэлектрик бар кезде де дұрыс екендігіне біз қазір көз жеткіземіз. Осы мақсатта конденсатордың зарядталу процесін зарядтың dq' аз порциясын бір астардан екінші астарға тасымалдау ретінде қарастырамыз.

Осы кезде өріс күштеріне қарсы біз жасайтын элементар жұмыс былай жазылады:

$$\delta A = U' dq' = (q'/C) dq',$$

мұндағы, U' – dq' зарядтың кезектегі мөлшері тасымалданған мезеттегі астарлар арасындағы потенциалдар айырымы.

Осы өрнекті q' бойынша 0-ден q -ға дейін интегралдап мынаны аламыз

$$A = q^2/2C,$$

бұл конденсатордың толық энергиясының өрнегімен дәл келеді. Демек электр өрісіне қарсы біз жасаған жұмыс түгелімен зарядталған конденсатордың W энергиясын жасауға кетеді. Бұдан басқа, A жұмыс үшін алынған өрнек конденсатор астарлары арасында қалауымызша алынған диэлектрик болған жағдайда да дұрыс. Осылайша (4.7) формуланың диэлектрик бар жағдайда да дұрыс екенін дәлелдедік.

Барлық айтылғандар (4.6) формулаларға да қатысты екені анық.

§ 4.3. Электр өрісінің энергиясы

Энергияның локалденуі жөнінде. (4.4) формуласы кезкелген жүйенің W электр энергиясын зарядтар және потенциалдар арқылы анықтайды. W энергияны, сондай-ақ электр өрісінің өзін сипаттайтын шама – E кернеулік арқылы да өрнектеуге болады екен. Бұған алдымен пластина жиектерінде өрістің бұрмалануын (жиектік эффект) ескермей, жазық конденсатордың қарапайым мысалында көз жеткіземіз. $W = CU^2/2$ формуласына $C = \epsilon\epsilon_0 S/h$ өрнегін қойғанда төмендегідей болады:

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{\epsilon\epsilon_0 S U^2}{2h} = \frac{\epsilon\epsilon_0}{2} \left(\frac{U}{h}\right)^2 Sh$$

$U/h = E$ және $Sh = V$ (конденсатор астарлары арасындағы көлем) болғандықтан,

$$W = (\varepsilon\varepsilon_0 E^2/2)V = (ED/2)V. \quad (4.8)$$

Алынған формула V көлемді алып тұрған біртекті өріс үшін де дұрыс.

Біртекті емес өріс жағдайында **изотропты** диэлектриктер үшін W энергияны төмендегі формуламен өрнектеуге болатындығы жалпы теорияда дәлелденеді

$$W = \int \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} dV = \int \frac{\mathbf{E}\mathbf{D}}{2} dV. \quad (4.9)$$

Бұл теңдеудегі интеграл астындағы өрнек dV көлемдегі энергияның мағынасына ие. Бұл бізді **өрістің өзіндегі энергияның локалденуі** туралы аса маңызды және нәтижелі идеяға әкеледі. Бұл ұйғарым уақыт бойынша айнымалы өрістер аймағында тәжірибе жүзінде дәлелін тапты. Өрістегі энергия локалденуі туралы идея негізінде түсіндіруге болатын құбылыстар тек сонда ғана кездеседі. Дәл осы айнымалы өрістер өздерін қоздыратын электр зарядтарына тәуелсіз өмір сүре алады және кеңістікте электромагниттік толқындар түрінде таралады. Электромагниттік толқындардың энергия тасымалдайтынын тәжірибе де көрсетеді – осының өзі бізді **энергияны тасымалдаушы өрістің өзі** екенімен келісуге мәжбүрлейді.

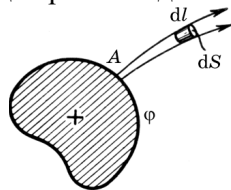
Соңғы екі формуладан электр энергиясының кеңістікте төмендігідей көлемдік тығыздықпен таралатындығы шығады.

$$w = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{\mathbf{E}\mathbf{D}}{2}. \quad (4.10)$$

Бұл формула тек $\mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \mathbf{E}$ қатысы орындалатын **изотропты** диэлектрик жағдайында дұрыс болатынын еске саламыз. Анизотропты диэлектриктер үшін, істің жайы күрделірек болады.

Тағы да (4.9) формуласын негіздеу жөнінде. Оқшауланған зарядталған өткізгіштің энергиясы $W = q\phi/2$ екені белгілі. Өрістегі энергияның локалденуі туралы идея арқылы осылай болатынын көрсетеміз.

Қалауымызша алынған оң зарядталған өткізгішті қарастырайық. Ойша $\mathbf{E}$ векторы сызықтарымен шектелген қимасы шексіз кішкентай түтікті бөліп



4.2-сурет

алайық та, оның ішінен элементар $dV = dSdl$ көлемді алайық (4.2-сурет). Бұл көлемде шоғырланған энергия

$$\frac{ED}{2} dS dl = \frac{DdS}{2} Edl.$$

Енді бөлініп алынған барлық түтік ішінде локалденген энергияны табайық. Бұл үшін соңғы өрнекті интегралдаймыз, DdS көбейтіндісінің түтіктің барлық қималарында бірдей екенін ескеріп, оны интеграл таңбасының алдына шығаруға болады:

$$dW = \frac{D dS}{2} \int_A^{\infty} Edl = \frac{D dS}{2} \varphi,$$

мұндағы, A – түтіктің басы.

Соңғы қадам жасау ғана қалды – алынған өрнекті барлық түтіктер бойынша интегралдап, біз барлық өрісте локалденген энергияны табамыз. Барлық түтіктердің шеттеріндегі φ потенциалдың бірдей екенін ескере отырып (олар өткізгіш беттерінде басталады), мынаны жазамыз:

$$W = \frac{\varphi}{2} \oint D dS,$$

мұнда, интегралдау эквипотенциал беттердің бірімен дәл келген тұйықталған бет бойынша жүргізіледі. Гаусс теоремасы бойынша бұл интеграл өткізгіштегі q зарядқа тең, ақырында мынаны аламыз:

$$W = q \varphi / 2,$$

дәлелдеу керегі де осы еді.

Өрістегі энергияның локалденуі туралы идеяны пайдаланудың беретін мүмкіндіктері мен артықшылықтарын көрсететін екі мысалды қарастырайық.

1-мысал. Нүктелік q заряд өтімділігі ϵ біртекті диэлектриктен жасалған шар қабаттың центрінде орналасқан. Қабаттың ішкі және сыртқы радиустары сәйкес a және b -ға тең. Берілген диэлектрик қабатта шоғырланған электр энергиясын табу керек. Диэлектрикте ойша радиусы r -ден $r + dr$ -ге дейін болатын жұқа концентрлі сфералық қабатты бөліп алайық. Осы қабатта локалденген энергия:

$$dW = \frac{\epsilon \epsilon_0 E^2}{2} 4\pi r^2 dr,$$

мұндағы, $E = q^2 / 4\pi\epsilon_0\epsilon r^2$. Алдыңғы өрнекті r бойынша a -дан b -ға дейін интегралдап, мынаны аламыз:

$$W = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0\epsilon} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right).$$

2-мысал. Диэлектрик пластинаны зарядталған жазық конденсатордан алып кету үшін, электрлік күштерге қарсы істелетін жұмысты табу керек. Конденсатордың q заряды тұрақты болып қалады және диэлектрик астарлар арасындағы барлық кеңістікті толтырып тұрады деп ұйғарылады. Диэлектрик болмағанда конденсатор сыйымдылығы C .

Бұл жүйеде электрлік күштерге қарсы істелетін жұмыс оның электрлік энергиясының өсімшесіне кетеді:

$$A = \Delta W = W_2 - W_1,$$

мұндағы, W_1 – диэлектрик болғандағы конденсатор астарлары арасындағы өріс энергиясы; W_2 – сол сияқты, бірақ диэлектрик жоқ кездегі. Пластинаның шығарылуының нәтижесінде $\mathbf{D}$ векторы модулінің өзгермейтіндігін, яғни $D_2 = D_1 = \sigma$ екенін ескеріп, мынаны жазамыз:

$$A = W_2 - W_1 = \left(\frac{D^2}{2\epsilon_0} - \frac{D^2}{2\epsilon\epsilon_0} \right) V = \frac{q^2}{2C} \left(1 - \frac{1}{\epsilon} \right),$$

мұндағы, $V = Sh$ және $C = \epsilon_0 S/h$; S және h – әрбір астардың ауданы және олардың арақашықтығы.

Диэлектриктің полярлануы кезіндегі жұмыс. Энергияның беттік тығыздығының (4.10) формуласын талдай отырып, біз E шамасының бірдей мәнінде w шамасы диэлектрик бар болғанда, диэлектрик болмағандығыдан ϵ есе үлкен болатын байқаймыз. Бір қарағанда бұл әдеттен тыс сияқты: екі жағдайда да біз өріс кернеулігін бірдей етіп ұстадық. Қазір көретініміздей, істің мәнісі сонда, диэлектрикте өріс туғызғанда, ол полярланумен байланысты қосымша жұмыс жасайды. Диэлектриктегі өріс энергиясы деп, электр өрісін қоздыруға жұмсалуға тиісті барлық энергияны түсінуіміз керек, ол меншікті электр энергиясы мен диэлектриктің полярлануы кезінде жасалатын қосымша жұмыстың қосындысынан тұрады.

Бұған көз жеткізу үшін, (4.10)-дағы **D**-ның орнына $\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ -ны қоямыз, онда

$$w = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mathbf{E} \mathbf{P}}{2}. \quad (4.11)$$

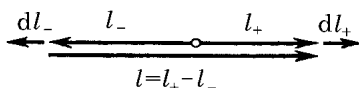
Бірінші қосылғыш **E** өрістің вакуумдағы энергия тығыздығымен дәл келеді. «Қосымша энергия» $\mathbf{E} \mathbf{P}/2$ диэлектриктің полярлануымен байланысты екенін тексеру қалды.

Диэлектриктің бірлік көлемін полярлау үшін, яғни кернеулік **E**-ден $\mathbf{E} + d\mathbf{E}$ -ге дейін артқан кезде, ρ'_+ және ρ'_- зарядтарды сәйкес өріс бағытында және оған қарсы қозғаудағы электр өрісінің жасайтын жұмысын есептеп табайық. Екінші ретті аз мүшелерді ескермей, былай жазамыз:

$$\delta A = \rho'_+ \mathbf{E} d\mathbf{l}_+ + \rho'_- \mathbf{E} d\mathbf{l}_-,$$

мұндағы, $d\mathbf{l}_+$ және $d\mathbf{l}_-$ – өріс $d\mathbf{E}$ -ге артқан кездегі қосымша ығысулар (4.3-сурет). $\rho'_- = -\rho'_+$ екенін ескеріп, мынаны аламыз:

$$\delta A = \rho'_+ (d\mathbf{l}_+ - d\mathbf{l}_-) \mathbf{E} = \rho'_+ d\mathbf{l} \cdot \mathbf{E},$$



4.3-сурет

Мұндағы, $d\mathbf{l} = d\mathbf{l}_+ - d\mathbf{l}_-$ – оң зарядтардың теріс зарядтарға қатысты қосымша ығысуы. (3.4)-ке сәйкес $\rho'_+ d\mathbf{l} = \mathbf{E} d\mathbf{P}$, және

$$\delta A = \mathbf{E} d\mathbf{P}. \quad (4.12)$$

$\mathbf{P} = \kappa \epsilon_0 \mathbf{E}$ болғандықтан,

$$\delta A = \mathbf{E} \cdot \kappa \epsilon_0 d\mathbf{E} = d \left(\frac{\kappa \epsilon_0 E^2}{2} \right) = d \left(\frac{\mathbf{E} \mathbf{P}}{2} \right).$$

Осыдан диэлектриктің бірлік көлемін полярлауға кететін жұмыс

$$A = \mathbf{EP}/2, \quad (4.13)$$

бұл (4.11) формуладағы екінші қосылғышпен дәл келеді.

Сөйтіп энергияның $w = \mathbf{ED}/2$ көлемдік тығыздығына өрістің $\varepsilon_0 E^2/2$ меншікті энергиясы және заттың полярлануына байланысты $\mathbf{EP}/2$ энергия кіреді.

§ 4.4. Екі зарядталған денелер жүйесі

Вакуумда екі зарядталған денелер жүйесі берілген. Бірінші дене қоршаған кеңістікте $\mathbf{E}_1$ өрісті, ал екіншісі $\mathbf{E}_2$ өрісті жасайтын болсын. Қорытқы өріс $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$ және осы шаманың квадраты

$$E^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2.$$

Сондықтан (4.9)-ға сәйкес берілген жүйенің толық энергиясы үш интегралдың қосындысынан тұрады:

$$W = \int \frac{\varepsilon_0 E_1^2}{2} dV + \int \frac{\varepsilon_0 E_2^2}{2} dV + \int \varepsilon_0 \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 dV, \quad (4.14)$$

бұл (4.5) формуласымен дәл келеді және оған кіретін қосылғыштардың өрістік мағынасын ашады. 4.14-тегі алдыңғы екі интеграл бірінші және екінші зарядталған денелердің меншікті энергиясы (W_1 және W_2), соңғы интеграл олардың өзара әсер энергиясы (W_{12}) болып табылады.

(4.14)-формулаға байланысты төмендегі маңызды жағдайларды атап өтеміз.

1. Әрбір зарядталған дененің меншікті энергиясы – оң шама. Толық энергия да әрқашан оң (4.9) – бұл интеграл астында оң шамалардың тұрғандығынан бірден көрініп тұр. Өзара әсер энергиясы оң да, теріс те бола алады.

2. Әрбір денедегі зарядтардың конфигурациясын өзгертпейтін зарядталған денелердің барлық болуы мүмкін орын ауыстыруларында денелердің меншікті энергиясы тұрақты болып қалады,

сондықтан да W толық энергияның өрнегінде оны аддитивті тұрақты деп есептеуге болады. Мұндай жағдайларда W -ның өзгерістері түгелімен тек W_{12} өзара энергиясының өзгерістерімен анықталады. Дербес жағдайда, арақашықтығы өзгергенде, екі нүктелік зарядтар жүйесінің энергиясы өзін дәл осылай ұстайды.

3. E векторынан өзгешелігі, электр өрісінің энергиясы аддитивті емес шама, яғни E_1 және E_2 өрістердің қосындысы болып саналатын E өрісінің энергиясы, жалпы айтқанда, W_{12} өзара энергияның болуынан екі өрістің энергияларының қосындысына тең емес. Дербес жағдайда, барлық жерде E n есе артқанда, өріс энергиясы n^2 есе артады.

§ 4.5. Диэлектрик бар кездегі күштер

Электрострикция. Электр өрісін диэлектрикке күштер әсер ететіндігін тәжірибе көрсетеді (оларды кейде *пондеромоторлық* деп атайды). Бұл күштер диэлектрик тұтас алғанда, зарядталмаған жағдайда да пайда болады. Олардың пайда болуына ақыр соңында біртекті емес электр өрісінің полярланған диэлектриктің дипольдық молекулаларына әсер етуі себеп болады (белгілі болғандай, біртекті емес электр өрісінде дипольдарға берілген өрістің арту жағына қарай бағытталған күш әсер етеді). Сонымен бірге бұл күштер тек макроөрістің емес, негізінен полярланған диэлектриктің жақын жатқан молекулалары туғызатын микроөрістің де біртекті еместігінен болады.

Көрсетілген электрлік күштердің әсерінен полярланған диэлектрик деформацияланады. Бұл құбылыс *электрострикция* деп аталады. Электрострикция салдарынан диэлектрикте механикалық кернеулер пайда болады.

Мұның бәрі полярланған диэлектрикте тұрған өткізгішке тек өткізгіш зарядтарына тәуелді электрлік күштер ғана емес, диэлектрик тарапынан қосымша механикалық күштің әсер етуіне әкеліп соғады. Жалпы жағдайда өткізгішке әсер ететін қорытқы күшке диэлектриктің ықпалы ешқандай қарапайым қатыстармен есепке алына алмайды да, күштерді олардың пайда болу механизмін зерттеумен бір мезгілде есептеп табу мәселесі өте күрделі болады. Алайда көп жағдайларда бұл күштерді олардың

пайда болуын жете талдамай-ақ, энергияның сақталу заңын пайдаланып, жеткілікті оңай есептеп табуға болады.

Күштерді анықтаудың энергетикалық әдісі. Бұл анағұрлым жалпы әдіс болып табылады. Ол күштердің пайда болу себептеріне көңіл аудармай, автоматты түрде барлық күштік өзара әсерлерді (электрлік және механикалық) есепке алуға мүмкіндік береді, сондықтан да дұрыс нәтиже береді.

Күштерді есептеудің энергетикалық әдісінің мәнісі неде екенін көрсетеміз. Зарядталған бөлшектер кернеу көзінен ажыратылған жағдайда істің жайы анағұрлым қарапайым болады. Бұл жағдайда өткізгіштердегі зарядтар тұрақты болып қалады да, біз өткізгіштердің және диэлектриктердің баяу орын ауыстырулары кезінде жүйенің барлық ішкі күштерінің A жұмысы түгелімен жүйенің (немесе оның өрісінің) W электр энергиясының кемуі есебінен істеледі деп ұйғара аламыз. Бұл жерде, көрсетілген орын ауыстыруларда электр энергиясы энергияның басқа түрлерге түрленуі болмайды, немесе дәлірек, бұл түрленулер ескеруге болмайтында аз деп ұйғарылады. Сөйтіп, шексіз аз орын ауыстырулар үшін мынаны жазуға болады:

$$\delta A = -dW|_q, \quad (4.15)$$

мұнда, q символы жүйе энергиясының кемуі, өткізгіштердегі зарядтар тұрақты болғанда есептелуі керек екенін көрсетеді.

(4.15) теңдеуі электр өрісінде өткізгіштерге және диэлектриктерге әсер ететін күштерді анықтау үшін негіз болады. Мысалы, бұл былай істеледі. Бізге берілген денеге (өткізгіш, не диэлектрик) әсер ететін күш қажет болсын делік. Осы дененің біз қажете ткен X бағытындағы шексіз аз ілгерілмелі орын ауыстыруын жасаймыз. Онда ізделініп отырған F күштің dx орын ауыстыру кезіндегі жұмысы $dA = F_x dx$ болады, мұндағы F_x – F күшінің X осінің оң бағытындағы проекциясы. dA үшін арналған өрнекті (4.15)-ке қойып; dx -ке бөлгеннен кейін мынаны аламыз:

$$\boxed{F_x = -\partial W / \partial x|_q}. \quad (4.16)$$

Мынаған көңіл аудару керек. Күш, белгілі болғандай, тек дененің орнына және берілген мезеттегі зарядтардың таралуына

тәуелді. Ол жүйе күш әсерінен қозғалысқа келетін жағдайда энергетикалық процестің *қалай* дамитынына тәуелді бола алмайды. Демек, F_x -ті (4.16) формуласымен есептеу үшін, міндетті түрде өткізгіштердегі барлық зарядтар тұрақты ($q = \text{const}$) болып қалатындай режимді тандап алу қажеттілігі жоқ. Тек $q = \text{const}$ шартында dW өсімшені табу керек, бұл – таза математикалық операция.

Егер орын ауыстыруларды өткізгіштердегі потенциал тұрақты болғанда жүргізсе, онда сәйкес есептеу күшке арналған басқа формулаға әкеледі: $F_x = + \partial W / \partial x \big|_{\varphi}$. Алайда, бұл да маңызды, бұл формула бойынша, немесе (4.16) бойынша F_x -ті есептеу нәтижесі **бірдей** болады, солай болуы керек еді. Сондықтан біз әрі қарай тек (4.16) формуласын қолданумен шектелеміз және оны аз орын ауыстыруларда $q \neq \text{const}$ болатын шарттар да кіретін кезкелген жағдайларда қолданатын боламыз. Бұл бізді абыржытпау керек: мұндай жағдайларда біз $\partial W / \partial x$ туындысын $q = \text{const}$ болғанда есептеп табамыз.

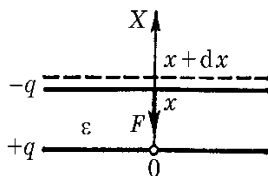
Мысал. Егер сұйық диэлектриктегі жазық конденсатордың астарларының арақашықтығы h , осы шарттарда конденсатор сыйымдылығы C және онда U кернеу ұсталып тұрса, онда оның астарларының біріне әсер ететін күшті табу керек.

Берілген жағдайда астарларды ойша жылжытқанда. U кернеу тұрақты болады, ал конденсатор заряды өзгереді (бұл $C = q/U$ қатысынан көрініп тұр). Бұған қарамастан, күшті есептеуді біз $q = \text{const}$ деп ұйғарып, яғни (4.16) формуласы бойынша жүргіземіз. Бұл жерде конденсатор энергиясы үшін төмендегі өрнек анағұрлым қолайлы болып табылады:

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2}{2\epsilon\epsilon_0 S} x,$$

мұндағы, ϵ – диэлектриктің өтімділігі, S – әрбір астардың ауданы, x – олардың арақашықтығы ($x = h$).

Әрі қарай (4.4)-суретте көрсетілгендей етіп, X осінің оң бағытын тандап аламыз. (4.16)-ға сәйкес, конденсатордың жоғарғы астарына әсер ететін күш:



4.4-сурет

$$F_x = - \frac{\partial W}{\partial x} \bigg|_q = - \frac{q^2}{2\epsilon\epsilon_0 S}. \quad (1)$$

Бұл жерде минус таңбасы F векторының X осінің теріс жағына қарай бағытталғандығын, яғни күштің тартылу сипатта екенін көрсетеді. $q = \sigma S = DS = \varepsilon \varepsilon_0 ES$ және $E = U/h$ екенін ескеріп, (1)-ді мына түрге келтіреміз:

$$F_x = -CU^2/2h.$$

Сұйық диэлектриктегі күштер. Жазық конденсатор астарларының өзара әсер күші вакуумдағыға (онда $\varepsilon = 1$) қарағанда сұйық диэлектрикте ε есе аз екенін алдыңғы мысалдағы (1) формуладан көрініп тұр. Тәжірибе көрсеткендей, бұл нәтижені жалпылауға болады: электр өрісі бар барлық кеңістікті сұйық, не газ тәрізді диэлектрикпен толтырғанда, зарядталған өткізгіштердің арасындағы өзара әсер күштері (олардағы зарядтар өзгермегенде) ε есе азаяды:

$$F = F_0/\varepsilon. \quad (4.17)$$

Осыдан, шексіз сұйық, не газ тәрізді диэлектрик ішінде бір-бірінен r қашықтықта тұрған q_1 және q_2 екі нүктелік зарядтың өзара әсер күші:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{|q_1 q_2|}{\varepsilon r^2}, \quad (4.18)$$

яғни, ол да вакуумдағыға қарағанда ε есе аз. Бұл формула шексіз диэлектриктегі нүктелік зарядтар үшін Кулон заңын өрнектейді.

Соңғы заңда нүктелік зарядтар дегеніміз, өлшемдері арақашықтықтарымен салыстырған да аз **макроскопиялық** денелерде жинақталған бөгде зарядтар екеніне ерекше көңіл аудару керек. Сөйтіп, (4.18) заңының вакуумдағы Кулон заңынан айырмашылығы, оның қолданылу аймағы өте шектеулі: диэлектрик біртекті, шексіз, міндетті түрде сұйық, не газ тәріздес, ал өзара әсерлесуші денелер – макроскопиялық мағынада нүктелік болуы керек.

Өріс тұрған барлық кеңістікте толтырып тұрған біртекті сұйық, не газ тәрізді диэлектрикте **E** кернеулікте, сол сияқты q нүктелік зарядқа әсер ететін күш те диэлектрик жоқ кездегі E_0 -мен F_0 -ден ε есе аз болады. Ал бұл дегеніміз, q нүктелік зарядқа әсер

ететіндігі $\mathbf{F}$ күш бұл жағдайда вакуумдағыдай формуламен анықталады:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}, \quad (4.19)$$

мұндағы, $\mathbf{E}$ – q бөгде заряд орналастырылған орындағы *диэлектриктегі* электр өрісі. Тек осы жағдайда (4.19) формуласы $\mathbf{F}$ күш бойынша диэлектриктегі $\mathbf{E}$ өрісті анықтауға мүмкіндік береді. Бөгде зарядтың өзіне – ол қандай да бір кішкентай денеде жинақталған – диэлектриктің өзіндегі емес – *басқа* өріс әсер ететіндігіне көңіл аудару керек. Дегенмен, таңқаларлығы сол, (4.19) формула дұрыс нәтиже береді.

Күштің беттік тығыздығы. Әңгіме сұйық, не газ тәрізді диэлектриктегі зарядталған өткізгіштің бірлік бетіне әсер ететін күш туралы болады. Осы мақсатта сұйық диэлектриктегі жазық конденсаторды қарастырамыз. Конденсатор заряды және оның ішіндегі $\mathbf{E}$ өріс астарларды ажыратқанда өзгермеуі үшін, конденсатор зарядталған және кернеу көзінен ажыратылған болсын делік.

4.4-суретке оралайық. Конденсатор энергиясы – оның ішіндегі өріс энергиясы. (4.9)-ға сәйкес ол $W = (ED/2)Sx$, мұндағы, S – әрбір астардың ауданы, x – олардың арақашықтығы (Sx – өріс алып тұрған көлем). (4.16)-ға сәйкес жоғарғы астарға әсер ететін күш

$$F_x = -\partial W / \partial x \big|_q = -EDS/2,$$

осыдан күштің беттік тығыздығы:

$$F_{\text{бірл}} = \frac{ED}{2}. \quad (4.20)$$

Біз жалпы сипаттағы қызықты және маңызды нәтиже алдық (сұйық, не газ тәрізді диэлектрикте). Өткізгішке әсер ететін күштің беттік тығыздығы бетке жақын жердегі электр энергиясының көлемдік тығыздығына тең екен. Бұл күш әрқашан бетке нормаль бойымен, сонымен бірге беттік заряд таңбасына тәуелсіз, өткізгіштен сыртқа бағытталған (оны созуға тырысып).

Есептер

4.1. Өзара әсер энергиясы. Нүктелік q заряд шексіз өткізгіш жазықтықтан l қашықтықта орналасқан. Осы зарядтың жазықтықта индукцияланған зарядтармен W өзара әсерлесу энергиясын табу керек.

Шешімі. Жазықтықта таралған зарядты ойша «токтатамыз», осы шарттарда q нүктелік зарядты шексіздікке көшіреміз. q заряд жазықтықтың екінші жағында өзгермейтін l қашықтықта орналасқан қозғалмайтын жалған $-q$ нүктелік заряд өрісіне эквивалентті потенциалдық өрісте орын ауыстырады. Бірден мынаны жаза аламыз:

$$W = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{2l}.$$

4.2. Меншікті, өзара және толық энергия. Жүйе зарядтары сәйкес q_1 және q_2 , радиустары R_1 және R_2 екі концентрлі металл қабықшалардан тұрады. $R_2 > R_1$ болғанда әрбір қабықшаның W_1 және W_2 меншікті энергиясын, қабықшалардың $W_{өз}$ өзара әсерлесу энергиясын және берілген жүйенің W толық электрлік энергиясын табу керек.

Шешімі. (4.6)-ға сәйкес әрбір қабықшаның меншікті энергиясы $q\phi/2$ -ге тең, мұндағы, ϕ – қабықшаның тек ондағы q заряд туғызатын потенциалы, яғни $\phi = q/4\pi\epsilon_0 R$, мұндағы, R – қабықшаның радиусы. Сөйтіп, әрбір қабықшаның меншікті энергиясы

$$W_{1,2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_{1,2}}{2 R_{1,2}}.$$

Зарядталған қабықшалардың өзара әсер энергиясы, оның біреуінің q зарядын q заряд тұрған орында екінші қабықшаның заряды туғызатын ϕ потенциалға көбейткенге тең: $W_{өз} = q\phi$. Біздің жағдайымызда ($R_2 > R_1$)

$$W_{өз} = q_1 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{R_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{R_2}.$$

Жүйенің толық энергиясы

$$W = W_1 + W_2 + W_{өз} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1^2}{2R_1} + \frac{q_2^2}{2R_2} + \frac{q_1 q_2}{R_2} \right).$$

4.3. Радиустары R_1 және R_2 екі кішкентай металл шариктер вакуумда олардың өлшемдерінен едәуір үлкен қашықтықта орналасқан және белгілібір қосынды зарядқа ие. Шариктердегі зарядтардың q_1/q_2

қатынасы қандай болғанда, жүйенің электр энергиясы минимал болады. Бұл кезде шариктер арасындағы потенциалдар айырымы қандай?

Шешімі. Берілген жүйенің электр энергиясы:

$$W = W_1 + W_2 + W_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1^2}{2R_1} + \frac{q_2^2}{2R_2} + \frac{q_1 q_2}{l} \right).$$

Мұндағы, W_1 және W_2 – шариктердің меншікті электр энергиясы ($q\phi/2$); W_{12} – олардың өзара әсерлесу энергиясы ($q_1\phi_2$, немесе $q_2\phi_1$); l – шариктердің арақашықтығы. $q_2 = q - q_1$, мұндағы, q – жүйенің қосынды заряды, онда

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_1}{2R_1} + \frac{(q_1 - q_2)^2}{2R_2} + \frac{q_1(q - q_1)}{l} \right].$$

$\partial W / \partial q_1 = 0$ болғанда W энергия минимал болады. Осыдан

$$q_1 \approx q \frac{R_1}{R_1 + R_2} \text{ және } q_2 \approx q \frac{R_2}{R_1 + R_2},$$

мұнда, R_1 және R_2 -нің l -ден едәуір кіші екені ескерілген. Сөйтіп,

$$q_1/q_2 = R_1/R_2.$$

Әрбір шариктің потенциалы (оларды окшауланған деп қарастыруға болады) $\phi \propto q/R$, сондықтан алдыңғы теңдеуден $\phi_1 = \phi_2$ екені шығады, яғни бұлай таралу кезінде потенциалдар айырымы нөлге тең.

4.4. Өрістегі энергияның локалденуі. q заряд радиусы R шар көлемінде біркелкі таралған. Барлық жерде диэлектрик өтімділік бірге тең деп ұйғарып, шардың меншікті энергиясын және шар ішінде локалденген W_1 энергияның қоршаған ортадағы W_2 энергияға қатынасын табу керек.

Шешімі. Ең алдымен Гаусс теоремасының көмегімен шардың ішіндегі және сыртындағы өрісті табамыз:

$$E_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r \quad (r \leq R); \quad E_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \quad (r \geq R).$$

Енді шардың меншікті электр энергиясын табамыз:

$$W = W_1 + W_2 = \int_0^R \frac{\epsilon_0 E_1^2}{2} 4\pi r^2 dr + \int_R^\infty \frac{\epsilon_0 E_2^2}{2} 4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R} \left(\frac{1}{5} + 1 \right).$$

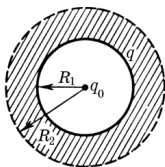
Осыдан шығатыны:

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3q^2}{5R}, \quad \frac{W_1}{W_2} = 5.$$

W_1 / W_2 қатынасының шар радиусына тәуелді болмайтындығы қызықты.

- 4.5. q зарядпен біркелкі зарядталған сфералық қабықша берілген. Оның центрінде q_0 нүктелік заряд орналасқан. Қабықшаның кеңейген кездегі – радиусы R_1 -ден R_2 -ге дейін артқандағы осы жүйенің электрлік күштерінің жұмысын табу керек.

Шешімі. Электрлік күштердің жұмысы жүйенің электрлік энергиясының кемуіне тең:



$$A = W_1 - W_2.$$

$W_1 - W_2$ айырымын табу үшін, қабықша кеңейгенде электр өрісі, демек, онда локалденген энергия тек штрихталған қабатта өзгергенін еске саламыз. Демек,

4.5-сурет

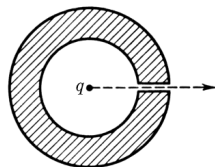
$$W_1 - W_2 = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\epsilon_0}{2} (E_1^2 - E_2^2) 4\pi r^2 dr,$$

мұндағы, E_1 және E_2 – қабықша кеңейгенге дейінгі және кейінгі өріс кернеулігі (жүйе центрінен r қашықтықта штрихталған қабатта). Гаусс теоремасының көмегімен мынаны табамыз:

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q + q_0}{r^2}, \quad E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0}{r^2}.$$

Интегралдау нәтижесінде мынаны аламыз:

$$A = \frac{q(q_0 + q/2)}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$



4.6-сурет

Ескерту. Егер осы жұмысты потенциал арқылы іздесек, жауап басқаша – дұрыс емес болады, мұндағы, ϕ – q заряд тұрған жерде q_0 зарядтың жасайтын потенциалы. Бұл **кеңейетін** қабықшада q зарядтың конфигурациясы өзгерген кезде, электр күштері жасайтын қосымша жұмыстың бұл тәсілде ескерілмейтіндігімен байланысты.

- 4.6. Ішкі және сыртқы радиустары сәйкес a және b болатын зарядталмаған сфералық өткізгіш қабаттың центрінде q нүктелік заряд орналасқан. Егер q зарядты бастапқы қалпынан кішкентай саңылау арқылы (4.6-сурет) сфералық қабаттан өте үлкен қашықтыққа көшірсе, онда берілген жүйеде электрлік күштер қандай жұмыс жасайды?

Шешімі. Электрлік күштердің жұмысы жүйе энергиясының кемуіне тең екеніне сүйенетін боламыз. Соңғысы, белгілі болғандай, өрістің өзінде локалденген. Сондықтан сұрақтың мәнісі, осы процестің нәтижесінде өрістің өзінің қалай өзгеретінін анықтауға келіп тіреледі.

q зарядтың айналасындағы өріс тек ішкі және сыртқы радиустары a және b болатын сфералық қабатта өзгеретіндігін пайымдау қиын емес. Шынында да, зарядтың бастапқы қалпында бұл жерде өріс болған жоқ, ал соңғы қалпында бұл қабатта өріс бар (өйткені сфералық өткізгіш қабаттың өзі q зарядтан алыс орналасады)

$$A = 0 - W_{\text{каб}} = - \int_a^b \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} dV,$$

мұндағы, $W_{\text{каб}}$ – сфералық қабатта локальденген энергия. $E = q/4\pi\varepsilon_0 r^2$ және $dV = 4\pi r^2 dr$ екенін ескеріп, интегралдаудан кейін мынаны аламыз:

$$A = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0} \frac{a-b}{ab} < 0.$$

- 4.7. Конденсатор пластиналарын ажырату кезінде істелетін жұмыс. Әрбір астарының ауданы S -ке тең жазық ауа конденсаторы берілген. Егер: 1) q -ға тең конденсатор зарядын; 2) U -ға тең конденсатор кернеуін өзгертпей ұстаса, астарлар арақашықтығын x_1 -ден x_2 -ге дейін арттыру үшін, электрлік күштерге қарсы қандай A' жұмыс жасау керек? Екі жағдайда конденсатордағы электр энергиясының өсімшесі неге тең?

Шешімі. 1. Изделініп отырған жұмыс

$$A' = qE_1(x_2 - x_1) = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 S}(x_2 - x_1),$$

мұндағы, E_1 – бір астардың жасайтын өріс кернеулігі ($E = \sigma/2\varepsilon_0$). Екінші астардағы заряд дәл осы өрісте орын ауыстырады. Осы жұмыс түгелімен электр энергиясының өсімшесіне кетеді: $\Delta W = A'$.

2. Бұл жағдайда конденсатордың әрбір астарына әсер ететін күш олардың арақашықтығына тәуелді болады. Екінші астарға қатысты dx -ке

орын ауыстырғанда бірінші астарға әсер ететін күштің элементар жұмысын былай жазамыз:

$$\delta A' = qE_1 dx = \frac{\varepsilon_0 S U^2}{2} \frac{dx}{x^2},$$

мұнда, $q = CU$, $E_1 = U/2x$ және $C = \varepsilon_0 S/x$ екендігі ескерілген. Интегралдаудан кейін мынаны аламыз:

$$A' = \frac{\varepsilon_0 S U^2}{2} \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right) > 0.$$

Конденсатордың электрлік энергиясының өсімшесі

$$\Delta W = \frac{(C_2 - C_1)U^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 S U^2}{2} \left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \right) < 0.$$

$\Delta W = -A'$ екенін еске саламыз.

Осылайша, астарларды ажырата отырып, біз оң жұмыс жасаймыз (электр күштеріне қарсы), конденсатор энергиясы бұл кезде кемиді. Істің мәнісі неде екенін түсіну үшін, конденсатордағы потенциалдар айырымын өзгертпей ұстап тұратын ток көзіне назар аудару керек. Бұл ток көзі де $A_{\text{көз}}$ жұмыс жасайды, сонымен бірге энергияның сақталу заңына сәйкес $A_{\text{көз}} + A' = \Delta W$, бұдан $A_{\text{көз}} = \Delta W - A' = -2A' < 0$.

4.8. Диэлектриктегі өткізгіштер арасында әсер ететін күштер. Жазық конденсатор горизонталь қалыпта өтімділігі ε сұйық диэлектрикке батырылған, ол пластиналар арасындағы саңылауды толтырып тұр. Саңылаудың ені h . Содан кейін конденсатор U тұрақты кернеуге қосылған. Пластинаың бірлік бетіне диэлектрик тарапынан әсер ететін f' күшті табу керек.

Шешімі. Әрбір пластинаың бірлік бетіне әсер ететін f қорытқы күшті мына түрде беруге болады:

$$f = f_0 - f', \quad (1)$$

мұндағы, f_0 – екінші пластина тарапынан бірлік ауданға әсер ететін күш (ол басқа емес, диэлектрик жоқ кезде бірлік ауданға әсер ететін күш). Біздің жағдайымызда

$$f = f_0/\varepsilon, \quad f_0 = \sigma E = \sigma^2/2\varepsilon_0, \quad (2)$$

мұндағы, E – пластинаның біреуі тұрған орында **екінші** пластинаның зарядтары жасаған өріс кернеулігі. $\sigma = D = \varepsilon \varepsilon_0 U/h$ екенін ескеріп, (2)-ні (1)-ге қойғаннан кейін, мынаны аламыз:

$$f' = f_0(1 - 1/\varepsilon) = \varepsilon(\varepsilon - 1)\varepsilon_0 U^2/2h^2.$$

Мысалы, $U = 500$ В, $h = 1,0$ мм және $\varepsilon = 81$ (су) болғанда, $f' = 7$ кПа (0,07 атм).

- 4.9. Диэлектрикке әсер ететін күш.** Цилиндрлік конденсаторға өтімділігі ε біртекті диэлектриктің цилиндрлік қабаты енгізіледі, ол іс жүзінде астарлар арасындағы барлық кеңістікті толтырады. Астарлардың орташа радиусы R , олардың арасындағы саңылау d , сонымен бірге $d \ll R$. Конденсатор U тұрақты кернеу көзіне қосылған. Диэлектрикті конденсаторға тартатын күшті табу керек.

Шешімі. Конденсатор энергиясына арналған $W = q^2/2C$ формуланы пайдаланып, (4.16)-ға сәйкес ізделініп отырған күшті табамыз:

$$F_x = - \left. \frac{\partial W}{\partial x} \right|_q = \frac{q^2}{2} \frac{\partial C / \partial x}{C^2} = \frac{U^2}{2} \frac{\partial C}{\partial x}. \quad (1)$$

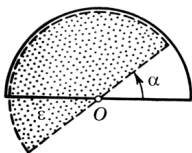
$d \ll R$ шартында берілген конденсатордың сыйымдылығы жазық конденсаторға арналған формуламен анықталады, сондықтан егер диэлектрик x тереңдікке енгізілсе, ал конденсатор ұзындығы l болса, онда

$$C = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 x \cdot 2\pi R}{d} + \frac{\varepsilon_0 (l-x) \cdot 2\pi R}{d} = \frac{\varepsilon_0 \cdot 2\pi R}{d} (\varepsilon x + l - x). \quad (2)$$

(2)-ні (1)-ге қойғаннан кейін мынаны аламыз:

$$F_x = \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) \pi R U^2 / d.$$

- 4.10.** Конденсатор радиусы R жарты дөңгелек пішіндегі екі қозғалмайтын пластинадан және олардың арасында орналасқан өтімділігі ε диэлектриктен жасалған қозғалатын пластинадан тұрады. Пластина O осінің айналасында еркін бұрыла алады (4.7-сурет), оның қалыңдығы h , іс жүзінде қозғалмайтын пластиналардың арақашықтығына тең. Конденсатор пластиналары арасында U тұрақты кернеу ұсталып тұрады. Суретте көрсетілген қалыпта қозғалыстағы пластинаға әсер ететін күштің O осіне қатысты N моментін табу керек.



4.7-сурет

Шешімі. Пластинаны да элементар бұрышқа бұруда

N күш моментінің жасайтын жұмысы $q = \text{const}$ болғанда, жүйенің электр энергиясының кемуіне тең [(4.16)-ға қараңыз]:

$$N_z d\alpha = -dW \Big|_q,$$

мұндағы, $W = q^2 / 2C$. Сондықтан

$$N_z = - \frac{dW}{d\alpha} \Big|_q = \frac{q^2}{2} \frac{\partial C / \partial \alpha}{C^2}. \quad (1)$$

Берілген жағдайда $C = C_1 + C_\varepsilon$, мұнда C_1 және C_ε – диэлектрик бар кездегі және диэлектрик жоқ кездегі конденсатор бөліктерінің сыйымдылығы. Бұрышы α сектордың ауданы $S = \alpha R^2 / 2$ түрінде анықталады, сондықтан

$$C = \varepsilon_0 \alpha R^2 / 2h + \varepsilon \varepsilon_0 (\pi - \alpha) R^2 / 2h.$$

Осыдан $\frac{\partial C}{\partial \alpha} = \frac{\varepsilon_0 R^2}{2h} (1 - \varepsilon)$. Осы өрнекті (1) формулаға қоямыз және $C = q/U$ екенін ескереміз, онда

$$N_z = \frac{U^2}{2} \frac{\varepsilon_0 R^2}{2h} (1 - \varepsilon) = -(\varepsilon - 1) \frac{\varepsilon_0 R^2 U^2}{4h} < 0.$$

N_z -тің теріс мәні, бұл күштердің моменті сағат тілшесі бағытында әсер ететін көрсетеді (α бұрышты есептеудің оң бағытына қарсы; 4.7-суретке қараңыз). Бұл момент диэлектрикті конденсатор ішіне тартуға тырысады.

N_z -тің α бұрышқа тәуелді емес екенін еске саламыз. Алайда тепе теңдік жағдайында, $\alpha = 0$ болғанда момент $N_z = 0$. Бұл қайшылық осы есепті шығару кезінде істегеніміздей, аз α бұрыштарда жиектік эффектілерді ескермеуге болмайтындығымен байланысты.

Тұрақты электр тогы**§ 5.1. Ток тығыздығы. Үздіксіздік теңдеуі**

Электр тогы. Бұл тарауда өткізетін ортадағы өткізгіштік тогын, яғни металдардағы токты қарастырумен шектелеміз. Белгілі болғандай, электр тогы қандай да бір S бет арқылы (мысалы, өткізгіштің көлденең қимасы арқылы) заряд тасымалы екендігі белгілі. Өткізетін ортада ток тасушылар электрондар (металдарда), иондар (электролиттерде), не басқа бөлшектер болуы мүмкін.

Электр өрісі болмаса, ток тасушылар хаосты қозғалыс жасайды және кез келген ойша алынған S бет арқылы екі бағытта оң және теріс тасушылардың орташа есеппен бірдей саны өтеді, сондықтан S бет арқылы өтетін нөлге тең. Электр өрісін қосқан кезде тасушылардың хаосты қозғалысына қандай да **бірі** орташа жылдамдықпен реттелген қозғалыс қосылады және S бет арқылы ток пайда болады. Сөйтіп, электр тогы – бұл шын мәнісінде электрзарядтарының реттелген тасымалдануы.

Электр тогының сандық өлшемі **I ток күші**, яғни, қарастырып отырған S бет арқылы уақыт бірлігінде тасымалданатын заряд болып табылады:

$$I = dq/dt.$$

Ток күшінің өлшем бірлігі ***ампер***(А) болып табылады.

Ток тығыздығы. Электр тогы өзі өтетін бет бойында бір қалыпты таралмауы мүмкін. Сондықтан токты дәлірек сипаттау үшін **$\mathbf{j}$** – ток тығыздығының векторын енгізеді. Осы вектордың модулі сан жағынан берілген нүктедегі ток тасушылардың қозғалыс бағытына перпендикуляр орналасқан элементар аудан арқылы өтетін dI ток күшінің $dS_{\perp}$ – сол ауданға қатынасынатең: $j =$

$dI/dS_{\perp}$. $\mathbf{j}$ – векторының бағыты ретінде оң тасушылардың реттелген қозғалысының $\mathbf{u}$ – жылдамдық векторының бағыты алынады (немесе теріс тасушылардың реттелген қозғалысының жылдамдық векторына қарама-қарсы бағыты). Егер тасушылар оң және сондай-ақ, теріс зарядтар болса, онда ток тығыздығы төмендегі формуламен анықталады:

$$\mathbf{j} = \rho_+ \mathbf{u}_+ + \rho_- \mathbf{u}_-, \quad (5.1)$$

мұндағы, ρ_+ және ρ_- – оң және теріс зарядтың тасушылардың көлемдік тығыздықтары; $\mathbf{u}_+$ және $\mathbf{u}_-$ – олардың реттелген қозғалысының жылдамдықтары. Тасушылар тек электрондар болып табылатын ($\rho_- < 0$, $\mathbf{u}_+ = 0$) өткізгіштерде ток тығыздығы

$$\mathbf{j} = \rho_- \mathbf{u}_-. \quad (5.2)$$

$\mathbf{j}$ векторының өрісін графиктік түрде ток сызығының көмегімен $\mathbf{E}$ векторының сызықтары сияқты ($\mathbf{j}$ векторының сызығы) кескіндеуге болады. Біз қарастырып отырған S беттің әрбір нүктесіндегі ток тығыздығының векторын біле отырып, $\mathbf{j}$ векторының ағыны ретінде осы бет арқылы өтетін ток күшін табуға болады:

$$I = \int \mathbf{j} d\mathbf{S}. \quad (5.3)$$

I ток күші скаляр және алгебралық шама болып табылады. Оның таңбасы (5.3.) формуладан көрініп тұрғандай, бәрінен бұрын S беттің әрбір нүктесіне тұрғызылған нормаль бағытын таңдаумен, яғни $d\mathbf{S}$ векторларының бағытын таңдаумен анықталады. Барлық $d\mathbf{S}$ векторлардың бағытын қарама-қарсы бағытқа өзгерту кезінде I шамасының таңбасы өзгереді.

Үздіксіздік теңдеуі. Ток өтетін қайсыбір өткізетін ортадағы S тұйық бетті қарастырайық. Тұйық беттер үшін нормал векторларды, демек, $d\mathbf{S}$ векторын сыртқа қарай алу қабылданған, сондықтан $\oint \mathbf{j} d\mathbf{S}$ интеграл S бетпен шектелген V көлемнен уақыт бірлігінде сыртқа шығатын зарядты береді. Зарядтардың сақталу заңы бойынша, бұл интеграл уақыт бірлігінде V көлемі ішіндегі зарядтың азаюына тең:

$$\oint \mathbf{j} d\mathbf{S} = -\frac{dq}{dt}. \quad (5.4)$$

Бұл қатынас **үздіксіздік теңдеуі** деп аталады. Ол шын мәнісінде электр зарядының сақталу заңы болып табылады.

Стационар (тұрақты) ток жағдайында зарядтардың кеңістікте таралуы өзгермей қалуға тиіс, яғни (5.4.)-тің оң жағында $dq/dt = 0$. Демек, тұрақты ток үшін:

$$\oint \mathbf{j} d\mathbf{S} = 0, \quad (5.5)$$

басқаша айтқанда, $\mathbf{j}$ векторының сызықтары бұл жағдайда ешбір жерде басталмайды және еш бір жерде аяқталмайды. Тұрақты ток жағдайында $\mathbf{j}$ векторы өрісінің көздері болмайды.

Үздіксіздік теңдеуінің дифференциалдық түрі. Сонғы екі теңдеуді дифференциалдық түрге келтіреміз. Ол үшін q зарядты $\int \rho dV$ және (5.4.)-тің оң жағын былай деп аламыз:

$$-\frac{d}{dt} \int \rho dV = - \int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV.$$

Мұнда, ρ -ның уақыт бойынша дербес туындысы алынған, өйткені q тек уақытқа ғана емес, координатаға да тәуелді бола алады. Сонымен,

$$\oint \mathbf{j} d\mathbf{S} = - \int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV.$$

Одан әрі қарай §1.4-тегі $\mathbf{E}$ - вектор ағыны үшін көрсетілгендей жасау керек. Нәтижесінде, қандай да бір нүктеде $\mathbf{j}$ векторының дивергенциясы осы нүктедегі уақыт бірлігінде заряд тығыздығының азаюына тең:

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\partial \rho / \partial t. \quad (5.6)$$

Осыдан **стационарлық шарты** шығады ($\partial \rho / \partial t = 0$ болғанда):

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0. \quad (5.7)$$

Бұл тұрақты ток жағдайында $\mathbf{j}$ векторы өрісінің көздері болмайтынын білдіреді.

§ 5.2. Біртекті өткізгіш үшін Ом заңы

Эксперимент жүзінде ашылған **Ом заңы**: *біртекті өткізгіштің бойымен ағатын ток күші оның ұштарындағы потенциалдар айырымына (U кернеуге) пропорционал*

$$I = U/R, \quad (5.8)$$

мұндағы, R – өткізгіштің *электрлік кедергісі*.

Кедергінің өлшем бірлігі **ом** (Ом).

R кедергі өткізгіштің пішіні мен өлшемдеріне, оның материалына және температураға, сондай-ақ, мұны есте сақтау керек – өткізгіш бойымен өтетін токтың конфигурациясына (таралуына) тәуелді болады. Сым өткізгіш жағдайында кедергінің мағынасы күмән келтірмейді. Токтың көлемдік таралуының жалпы жағдайында қарастырылып отырған өткізгішке қосылған сымдардың орналасуы немесе токтың конфигурациясы көрсетілмейінше кедергі туралы сөз етуге болмайды.

Қарапайым жағдайда біртекті цилиндрлік өткізгіштің кедергісі

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (5.9.)$$

мұндағы, l – өткізгіштің ұзындығы; S – оның көлденең қимасының ауданы; ρ – *меншікті электрлік кедергісі*. Соңғысы өткізгіштің материалына және оның температурасына тәуелді. ρ – **ом·метрмен**(Ом·м) өрнектеледі.

Ең жақсы өткізгіштер (мысалы, алюминий) үшін меншікті электрлік кедергісінің мәні бөлме температурасында 10^{-8} Ом·м-ге көбейтілген бірнеше бірліктерді құрайды.

Локалдық формадағы Ом заңы. $\mathbf{j}$ ток тығыздығы мен өткізетін ортаның сол нүктесіндегі $\mathbf{E}$ өрісі арасындағы байланысты табамыз. $\mathbf{j}$ және $\mathbf{E}$ векторлары бағыттас болатын изотропты өткізгіш жағдайымен шектелеміз. Өткізетін ортадағы қандай да бір нүктенің маңайында ойша жасаушысы $\mathbf{j}$ векторына, демек, $\mathbf{E}$ векторына да параллель болатын элементар цилиндрлік көлемді бөліп аламыз. Егер цилиндрдің көлденең қимасы dS , ал оның ұзындығы dl болса, онда (5.8) бен (5.9)-ға сүйене отырып, осы элементар цилиндр үшін мынаны жазуға болады:

$$jdS = \frac{Edl}{\rho dl/dS'}$$

сәйкес қысқартулардан соң, векторлық түрде мынаны аламыз:

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\rho} \mathbf{E} = \sigma \mathbf{E}, \quad (5.10)$$

мұндағы, $\sigma = 1/\rho$ – ортаның *меншікті электр өткізгіштігі*.

Омға кері бірлікті *сименс* (См) деп атайды, сондықтан σ – бірлігі *сименстің метрге қатынасы* (См/м) болып табылады. Сөйтіп, (5.10) қатынасы өткізетін ортаның бір нүктесіне қатысты шамалардың арасындағы байланысты тағайындайды. Сондықтан (5.10) қатынасы *локалдық Ом заңы* деп аталады.

R кедергісін есептеу әдістері. Есептеудің бірнеше әдістері бар, барлығы да (5.8) – (5.10) қатынастарын пайдалануға негізделген. Әр түрлі жағдайда осы әдісті қолданудың тиімділігі есептің нақты шартына, оның симметриясының сипатына байланысты. Мұның іс жүзінде қалай істелінетіні 5.1 – 5.3 және 5.6 есептердің мысалдарында көрсетілген.

Тоғы бар өткізгіштің ішіндегі заряд туралы. Егер тұрақты ток болса, онда біртекті өткізгіш ішінде артық заряд барлық жерде нөлге тең. Шынында тұрақты ток үшін (5.5) теңдеу дұрыс. Оны (5.10) заңын ескере отырып былай жазамыз:

$$\oint \sigma \mathbf{E} d\mathbf{S} = 0,$$

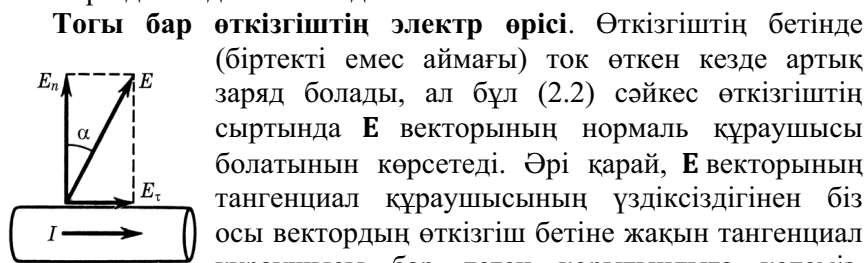
мұндағы, интеграл өткізгіш *ішіндегі* S кез келген тұйық бет бойынша алынған. Біртекті өткізгіш үшін σ шамасын интегралдың алдына шығаруға болады:

$$\sigma \oint \mathbf{E} d\mathbf{S} = 0.$$

Қалған интеграл Гаусс теоремасына сәйкес S тұйық бет ішіндегі зарядтардың алгебралық қосындысына пропорционал, яғни, осы бет ішіндегі артық зарядқа пропорционал. Бірақ соңғы теңдіктен бұл интегралдың нөлге тең екені көрініп тұр (өйткені

$\sigma \neq 0$), демек, артық заряд та нөлге тең. S кез келген бет болғандықтан, бұл жағдайда өткізгіш ішінің барлық жерінде артық заряд нөлге тең деп қорытамыз.

Артық заряд тек біртекті өткізгіш бетінің басқа өткізгіштермен жанасқан жерінде, сондай-ақ, өткізгіштің біртекті емес жерінде пайда бола алады.



5.1-сурет

Және тағы. Егер токтар стационар болса, онда өткізгіш ортада (жалпы айтқанда, біртекті емес) электр зарядтарының таралуы уақыт бойынша өзгермейді, дегенмен, зарядтардың қозғалысы болады: әрбір нүктеде өткен зарядтардың орнына үздіксіз жаңа зарядтар келіп жатады. Осы қозғалатын зарядтар осындай конфигурациядағы қозғалмайтын зарядтар сияқты кулондық өріс тудырады. Олай болса, стационар токтардың электр өрісі потенциалдық өріс болғаны.

Сонымен бірге, стационар токтар жағдайында электр өрісінің қозғалмайтын зарядтардың электростатикалық – кулондық өрісінен мәнді айырмашылығы бар. Өткізгіш ішіндегі қозғалмайтын зарядтардың кулондық өрісі зарядтардың тепе-теңдігі кезінде нөлге тең. Стационар токтардың электр өрісі де сол сияқты кулондық өріс, бірақ, оны тудыратын зарядтар қозғалыста болады. Сондықтан стационар токтардың $\mathbf{E}$ өрісі тоғы бар өткізгіштің ішінде де болады.

§ 5.3. Жалпыланған Ом заңы

Бөгде күштер. Егер ток тасушыларға әсер ететін барлық күштер электростатикалық өріс күштеріне біріктірілсе, онда осы күштердің әсерінен оң тасушылар потенциалы үлкен орыннан

потенциалы кіші орынға, ал теріс тасушылар керісінше бағытта қозғалған болар еді. Бұл потенциалдардың теңесуіне әкелер еді. Және нәтижесінде өзара бір-бірімен жалғанған өткізгіштер бірдей потенциалға ие болар еді – ток тоқталады. Басқаша айтқанда, кулондық өріс бар кезде ғана **стационарлық** өріс **статикалық** өріс болуы тиіс. Бұлай болмас үшін, тұрақты ток тізбегінде токтың оң тасушылары ϕ потенциалдың азаю жағына қарай қозғалатын бөліктерімен қатар, оң тасушыларды ϕ потенциалдың артатын жағына қарай таситын, яғни, электр өрісі күшітеріне қарсы бөліктері болуы керек. Осы бөліктердегі заряд тасымалы тек электрстатикалық емес күштер көмегімен ғана болуы мүмкін. Бұл **бөгде күштер** деп аталады. Сөйтіп, тұрақты токты ұстап тұру үшін тізбектің не жеке бөліктеріне, не барлық бөліктеріне әсер ететін бөгде күштер болуы керек. Бөгде күштердің физикалық табиғаты әр түрлі. Олар, мысалы, өткізгіштің химиялық және физикалық бір текті еместігінен болуы мүмкін – мұндай күштер әр түрлі текті өткізгіштерді (гальваникалық элементтер, аккумулятор) немесе температурасы әр түрлі өткізгіштерді (термоэлементтер), және т.б. түйістірген кезде пайда болады.

Жалпыланған Ом заңы. Бөгде күштерді сандық сипаттау үшін бөгде күштер өрісі және оның E^* кернеулігі ұғымдарын енгізеді. Бұл вектор сан жағынан бірлік оң зарядқа әсер ететін бөгде күшке тең.

Енді ток тығыздығын ескетүсірейік. Егер E электр өрісі әсерінен өткізгіште тығыздығы $j = \sigma E$ ток пайда болса, онда анығында E өрісі мен E^* бөгде күштер өрісі бірге әсер еткенде ток тығыздығы

$$j = \sigma(E + E^*). \quad (5.11)$$

Бұл теңдеу өткізетін ортаның біртекті емес бөліктері жағдайында (5.10) – заңды жалпылап көрсетеді. Бұл локалдық түрдегі **жалпыланған Ом заңын** береді.

Тізбектің біртекті емес бөлігі үшін Ом заңы. Бөгде күштер әсер ететін тізбек бөлігі біртекті емес деп аталады.

Жеке, бірақ практикалық маңызы бар, электр тогы **жіңішке сымдар** бойымен өтетін жағдайды қарастырамыз. Бұл жағдайда ток бағыты сымның осінің бағытымен дәл келеді және j ток тығыздығын сымның көлденең қимасының барлық нүктелерінде

бірдей деп есептеуге болады. Сымның көлденең қимасының ауданы S болсын және оған қоса S өткізгіштің барлық ұзындығында бірдей болмауы мүмкін.

(5.11) теңдеуді σ -ға бөлеміз, алынған өрнекті сым осінің 1 қимадан бастап 2 қимаға қарай бағытпен алынған $d\mathbf{l}$ элементіне скаляр көбейтеміз (біз оны оң деп аламыз), және 1 қимадан 2 қимаға дейін сымның ұзындығы бойымен интегралдаймыз:

$$\int_1^2 \frac{j d\mathbf{l}}{\sigma} = \int_1^2 \mathbf{E} d\mathbf{l} + \int_1^2 \mathbf{E}^* d\mathbf{l}. \quad (5.12)$$

Бірінші интегралдың астындағы өрнекті түрлендіреміз: σ -ны $1/\rho$ -мен және $j d\mathbf{l}$ -ді $j_i d\mathbf{l}$ -мен алмастырамыз, мұндағы, j_i — $\mathbf{j}$ векторының $d\mathbf{l}$ векторы бағытындағы проекциясы. Әрі қарай j_i — алгебралық шама екенін ескереміз; ол $\mathbf{j}$ векторының $d\mathbf{l}$ -ға қатысты қалай бағытталғанына байланысты: егер $\mathbf{j} \uparrow \uparrow d\mathbf{l}$, онда $j_i > 0$, егер $\mathbf{j} \downarrow \uparrow d\mathbf{l}$, онда $j_i < 0$. Ең соңында j_i -ді I/S -пен алмастырамыз, мұндағы, I — ток күші, ол да (j_i сияқты) алгебралық шама. Тұрақты ток үшін I тізбектің барлық қимасында бірдей болғандықтан бұл шаманы интеграл таңбасының алдына шығаруға болады. Нәтижесінде мынаны аламыз.

$$\int_1^2 \frac{j d\mathbf{l}}{\sigma} = I \int_1^2 \rho \frac{d\mathbf{l}}{S}. \quad (5.13)$$

$\rho d\mathbf{l}/S$ өрнегі ұзындығы $d\mathbf{l}$ тізбек бөлігіндегі кедергіні, ал бұл өрнектің интегралы 1 мен 2 қима аралығындағы тізбек бөлігінің R толық кедергісін анықтайды.

Енді (5.12)-нің оң жағына көңіл аударамыз. Мұнда бірінші интеграл $\varphi_1 - \varphi_2$ — потенциалдар айырымы, ал екінші интеграл тізбектің берілген бөліндегі $\mathcal{E}$ *электр қозғаушы күші* (э.к.к.):

$$\mathcal{E}_{12} = \int_1^2 \mathbf{E}^* d\mathbf{l}, \quad (5.14)$$

Бұл I ток күші сияқты алгебралық шама: егер э.к.к.-і таңдап алған бағытта оң заряд тасушылардың қозғалысына ықпал етсе, онда $\mathcal{E}_{12} > 0$, егер кедергі келтірсе, онда $\mathcal{E}_{12} < 0$.

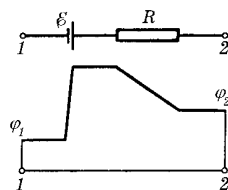
Барлық көрсетілген түрлендірулерден соң (5.12)-теңдеуі төмендегі түрге келеді:

$$RI = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}. \quad (5.15)$$

мұнда оң деп 1-нүктеден 2-нүктеге қарай бағыт алынатынын ескерте кетеміз.

(5.11) локалдық формадағы заңды көрсететін теңдеуден айырмашылығы бұл теңдеу *тізбектің біртекті емес бөлігі үшін Ом заңының* интегралдық түрін өрнектейді.

Мысал. 5.2-суретте көрсетілген тізбек бөлігін қарастырамыз. Тек R кесіндісінде ғана кедергі нолден өзгеше. Суреттің төменгі жағында берілген бөлік бойымен φ потенциалдың өзгерісі суреттелген. Мұнда не болатынын анықтап түсіндірейік. R кесіндіде потенциалдың солдан оңға қарай азаятындығынан, $I > 0$ екендігі шығады,



5.2-сурет

яғни ток оң бағытта жүреді (1-ден 2-ге). Берілген жағдайда $\varphi_1 < \varphi_2$, бірақ ток 1 нүктеден 2 нүктеге потенциалдың үлкен мәніне қарай ағады. Бұл берілген бөлікте оң бағытта әсер ететін (1-ден 2-ге) э.к.к -і $\mathcal{E}$ болса ғана мүмкін.

(5.15)-ке оралайық. Бұл теңдеуден тұйық тізбек үшін 1- және 2-нүктелердің дәл келетіндігі шығады, $\varphi_1 = \varphi_2$, және ол анағұрлым қарапайым түрге ие болады:

$$RI = \mathcal{E}, \quad (5.16)$$

мұндағы, R – тұйық тізбектің толық кедергісі, ал $\mathcal{E}$ – берілген тізбектегі жеке э.к.к.-тердің алгебралық қосындысы болады.

Бұдан әрі 1 және 2 қысқыштар арасында э.к.к.-інің көзі бар тізбек бөлігін қарастырайық. Онда біз тандап алған бөлік үшін (5.15.) теңдеудегі R – бұл ток көзінің ішкі кедергісі, ал $\varphi_1 - \varphi_2$ – оның қысқыштарындағы потенциалдар айырымы. Егер ток көзі ажыратылған болса, онда $I=0$ және $\mathcal{E} = \varphi_1 - \varphi_2$, яғни, ток көзінің э.к.к.-ін ажыратылған күйдегі оның қысқыштарындағы потенциалдар айырымы ретінде анықтауға болады.

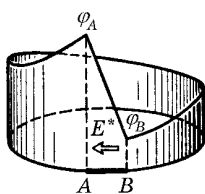
Сыртқы кедергімен тұйықталған берілген э.к.к көзінің қысқыштарындағы потенциалдар айырымы оның э.к.к.-інен әрдайым аз. Ол сыртқы жүктемеге байланысты.

Мысал. Тізбектің сыртқы кедергісі ток көзінің ішкі кедергісінен η есе көп. Ток көзінің қысқыштарындағы потенциалдар айырымының оның Э.Қ.К.-іне қатынасын табу керек. R_i – ток көзінің ішкі кедергісі, ал R_n – тізбектегі сыртқы кедергісі болсын. (5.15)-ке сәйкес $\varphi_2 - \varphi_1 = \mathcal{E} - R_i I$, (5.15.)-ға сәйкес $(R_i + R_a)I = \mathcal{E}$. Осы теңдеулерден төмендегіні аламыз:

$$\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\mathcal{E}} = 1 - \frac{R_i I}{\mathcal{E}} = 1 - \frac{R_i}{R_i + R_a} = \frac{R_a}{R_i + R_a} = \frac{\eta}{1 + \eta}.$$

Бұдан η неғұрлым көп болса, ток көзінің қысқыштарындағы потенциалдар айырымы оның Э.Қ.К.-іне соғұрлым жақындайды және керісінше болатындығы көрініп тұр.

Соңында тұрақты токтың тұйық тізбегінде не болатынын анықтап алуға мүмкіндік беретін көрнекті бейнені келтірген пайдалы.



5.3-сурет

5.3-суретте АВ бөлігінде э.қ.к-нің көзі бар тұйық тізбек бойымен φ потенциалдың таралуы көрсетілген. Көрнекілік үшін φ потенциал тогы бар контурға тірелетін цилиндрлік бет жасаушысының бойына салынған. А және В нүктелері ток көзінің оң және теріс қысқыштарына сәйкес келеді. Суреттен токтың өту процесін былай көрсетуге болады: оң зарядтар-тасушылар φ_A нүктеден φ_B нүктеге көлбеу «науа» бойымен тізбектің сыртқы бөлігімен сырғанайды, ток көзінің ішінде φ_B нүктеден φ_A нүктеге «көтерілуге» оларға бөгде күштер көмектеседі, ол тілшемен белгіленген.

§ 5.4. Тармақталған тізбектер. Кирхгоф ережелері

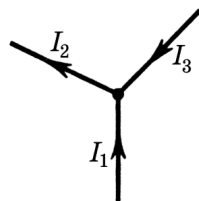
Тармақталған тізбектерді есептеу, мысалы тізбектің жеке тармақтарындағы токтарды табу екі **Кирхгоф ережелерін** қолдансақ, оңай орындалады.

Кирхгофтың бірінші ережесі – ол тізбектің түйіндеріне, яғни, оның тармақталу нүктелеріне қатысты: **түйінде қосылатын токтардың алгебралық қосындысы нөлге тең**:

$$\sum I_k = 0. \quad (5.17)$$

Бұл кезде түйіндерге келетін токтар мен түйіндерден шығатын токтар әр таңбалы шамалар деп есептеледі, мысалы: біріншілері – оң, екіншілері – теріс (немесе керісінше – бұл маңызды емес). 5.4-суретке қолданғанда, (5.17) теңдеу былай жазылады:

$$I_1 - I_2 + I_3 = 0.$$



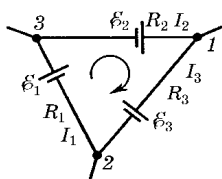
5.4-сурет

(5.17) теңдеуі (5.5) стационарлық шартының салдары болып табылады: егер бұл осылай болмаса, түйінде заряд өзгерген болар еді және ток стационар болмас еді.

Кирхгофтың екінші ережесі – ол тармақталған тізбектен бөліп алынған кез келген контурға қатысты: *кез келген тұйық контурдың жеке бөліктеріндегі ток күштерінің олардың кедергісіне көбейтіндісінің алгебралық қосындысы осы контурдағы э.қ.к.-терінің алгебралық қосындысына тең:*

$$\sum I_k R_k = \sum \mathcal{E}_k. \quad (5.18)$$

Бұл ережені дәлелдеу үшін бөліп алынған контур үш бөліктен тұратын жағдайды қарастырсақ жеткілікті (5.5-сурет). Суретте көрсетілгендей айналу бағытын, мысалы, сағат тілінің бағыты бойынша аламыз. Сонан соң әрбір үш бөлікке Ом заңын қолданамыз (5.15):



5.5-сурет

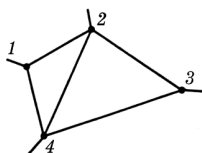
$$I_1 R_1 = \varphi_2 - \varphi_3 + \mathcal{E}_1,$$

$$I_2 R_2 = \varphi_3 - \varphi_1 + \mathcal{E}_2,$$

$$I_3 R_3 = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_3.$$

Бұл теңдіктерді қосып, потенциалдарды қысқартқан соң (5.18) формулаға, яғни, Кирхгофтың екінші заңына келеміз. Сөйтіп, (5.18) теңдеуі тізбектің біртекті емес бөліктері үшін Ом заңының салдары болып табылады.

Теңдеулер жүйесін құру. Киргроф ережелері әрбір нақты жағдайда алгебралық теңдеулердің толық жүйесін жазуға мүмкіндік береді, одан белгісіз шаманы, мысалы, токтарды табуға болады. (5.17) мен (5.18) теңдеулердің саны ізделініп отырған шамалардың санына тең болуы керек. Бұл кезде бір теңдеулер басқаларының салдары болмауы тиіс екенін қадағалау қажет:

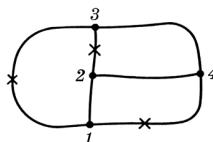


5.6-сурет

1) егер тармақталған тізбекте N түйін болса, онда (5.17.) типтегі тәуелсіз теңдеулерді $N - 1$ түйіндер үшін ғана құруға болады;

2) егер тармақталған тізбекте бірнеше тұйық контурды бөліп алуға болатын болса, онда (5.18.) типті тәуелсіз теңдеулерді қарастырылғандардың (теңдеудің) қосу нәтижесі болмайтын контурлар үшін ғана құруға болады. Мысалы, 5.6-суреттегі тізбек үшін 124 және 234 контурлар үшін мұндай теңдеулер тәуелсіз болады. 1234 контур үшін теңдеу алдыңғы екеуінің салдары болып табылады. Тәуелсіз теңдеулерді басқа контурлар үшін, мысалы, 124 және 1234 контурлар үшін құруға болады, бірақ онда 234 контуры үшін жазылатын теңдеу алғашқы екеуінің салдары болып табылады. (5.18) типті тәуелсіз теңдеулер саны барлық контурды бұзу үшін тізбекте жасауға болатын ең аз үзілу санына тең. Егер сұлбаны қиылыспайтын жазықтықта кескіндеуге болатын болса, бұл сан өткізгіштермен шектелген аймақтар санына тең.

Мысалы, 4 түйіні бар (5.7-сурет) тізбек үшін, (5.17) типті үш теңдеу және (5.18) типті үш теңдеу құру керек, өйткені, барлық контурларды бұзатын ең аз үзілу саны (олар крестиктермен белгіленген) үшке тең (аймақ саны да үшке тең).



5.7-сурет

Егер токтар белгісіз болса, онда олардың саны – түйіндер арасындағы жеке бөліктер саны бойынша тәуелсіз теңдеулер санына сәйкес алтыға тең.

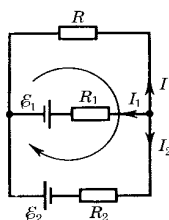
(5.17) және (5.18) типті теңдеулерді құру кезінде былай жасау керек:

1. Қайда бағытталғанын ойланбастан шамамен алып, токтар бағытын тілшелермен белгілеу керек. Егер есептеу нәтижесінде, осындай ток оң болса, демек оның бағыты дұрыс таңдалған. Егер ток теріс болса, онда оның шын мәніндегі бағыты тілшелерге қарама-қарсы бағытталған.

2. Кез келген тұйық контурды таңдап алып, оның барлық бөліктерін бір бағытта мысалы, сағат тілінің бағытында айналып шығу керек.

Егер қандай да бір токтың жобалап алынған бағыты таңдап алған айналу бағытымен сәйкес келсе, онда (5.18) теңдеудегі сәйкес IR қосылғышын оң таңбамен, егер бұл бағыттар қарама-қарсы болса, минус таңбасымен алу керек. $\mathcal{E}$ шамасын да осыған ұқсас қарау керек: егер қандайда бір $\mathcal{E}$ – $\mathcal{E}$.қ.к.-і айналу бағытында потенциалды арттырса, онда оны плюс таңбамен, қарама-қарсы жағдайда – минус таңбасымен алу керек.

Мысал. Сұлбадағы (5.8-сурет) R кедергі арқылы өтетін ток күшін және оның бағытын табу керек. Барлық кедергілер мен $\mathcal{E}$.қ.к.-і белгілі деп есептелінеді. Мұнда үш бөлік бар, демек I белгісіз токтар үшеу – I , I_1 және I_2 . Олардың бағытын жобалап стрелкамен белгілейміз (оң түйіннен). Тізбекте $N = 2$ түйін бар. Демек, (5.17) типті тәуелсіз теңдеулер саны тек біреу:



5.8-сурет

$$I + I_1 + I_2 = 0.$$

Енді (5.18) типті теңдеулер құрамыз – олар екеу болуы тиіс (аймақ саны бойынша). R мен R_1 кіретін контурды және R мен R_2 бар контурды аламыз. Әрбір контурдың айналу бағытын сағат тілі бағыты бойынша таңдап теңдеулерді жазамыз:

$$-IR + I_1 R_1 = -\mathcal{E}_1, \quad IR + I_2 R_2 = \mathcal{E}_2.$$

R_1 мен R_2 кіретін контур үшін сәйкес теңдеулер осы екі теңдеудің салдары екеніне көз жеткізген пайдалы. Жазылған үш теңдеулер жүйесін шешек, токты табамыз:

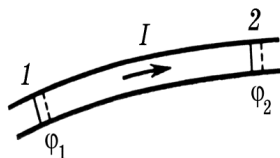
$$I = \frac{-R_1 \mathcal{E}_2 + R_2 \mathcal{E}_1}{R_1 R_2 + R R_1 + R R_2}.$$

Егер сан мәндерін қойғаннан кейін $I > 0$ болса, онда ток шынында 5.8-суреттегі біз жобалағандай ағады, егер $I < 0$ болса, онда қарама-қарсы бағытта ағады.

§ 5.5. Джоуль-Ленц заңы

Кедергісі бар өткізгіш арқылы токтың өтуі мен жылудың бөлінуі тығыз байланысты (өткізгіштердің қызуы). Біздің міндетіміз тізбектің белгілі бір бөлігіндегі уақыт бірлігінде бөлінетін жылу мөлшерін табу. Мұнда, біз біртіндеп қарастыратын мүмкін екі жағдай бар – тізбектің біртекті және біртекті емес бөліктері. Бұл сұрақты шешудің негізіне біз энергияның сақталу заңы мен Ом заңын аламыз.

Тізбектің біртекті бөлігі. Тізбектің біз қарастыратын бөлігі өткізгіштің 1 және 2 қималарының арасында болсын (5.9-сурет). dt уақытта 12 бөліктегі ток тасымалдайтын өріс күштерінің жұмысын табамыз.



5.8-сурет

Егер өткізгіштегі ток күші I болса, онда dt уақытта өткізгіштің әрбір қимасы арқылы $dq = Idt$ заряд өтеді. Дәлірек айтқанда, осындай dq заряд бөлік ішіндегі 1 қима арқылы кіреді және сондай заряд осы бөліктің 2 қимасы арқылы шығады. Өткізгіштегі зарядтардың таралуы бұл кезде өзгермей қалатындықтан (ток тұрақты), барлық процесс dq зарядтың потенциалдары φ_1 және φ_2 болатын 1 қимадан 2 қимаға тікелей тасымалдануына эквивалентті.

Сондықтан осы тасымал кезіндегі өріс күштерінің жұмысы

$$\delta A = dq(\varphi_1 - \varphi_2) = I(\varphi_1 - \varphi_2)dt.$$

Энергияның сақталу заңына сәйкес осы жұмысқа эквивалентті болатын энергия басқа түрде бөлінуі керек. Егер өткізгіш қозғалмайтын және онда химиялық түрленулер болмайтын болса, онда бұл энергия ішкі (жылулық) энергия түрінде бөлінуі тиіс, нәтижесінде өткізгіш қызады. Бұл түрленудің механизмі өте қарапайым: ток тасушылар (мысалы, металдарда электрондар) өріс күштерінің жұмысы нәтижесінде қосымша кинетикалық энергия алады және содан соң оны тор түйіндерімен – атомдармен соқтығысу кезінде тор тербелістерінің қозуына жұмсайды.

Сөйтіп, энергияның сақталу заңына сәйкес элементар жұмыс: $\delta A = \dot{Q}dt$, мұндағы $\dot{Q}$ —уақыт бірлігінде бөлінетін жылу (жылулық

қуат). Соңғы теңдікті алдыңғымен салыстыру арқылы мынаны аламыз:

$$\dot{Q} = I(\varphi_1 - \varphi_2) ;$$

Ом заңы бойынша $\varphi_1 - \varphi_2 = RI$ болғандықтан,

$$\dot{Q} = RI^2. \quad (5.19)$$

Бұл формула белгілі *Джоуль-Ленц заңының* өрнегі.

Осы заңның өткізгіш ортаның әр түрлі жеріндегі жылу бөлінуді сипаттайтын локальдық түрдегі өрнегін аламыз.

Осы мақсат үшін берілген ортада жасаушысы берілген орында $\mathbf{j}$ –ток тығыздығының векторына параллель болатын цилиндр түріндегі элементар көлемді бөліп аламыз. Цилиндрдің көлденең қимасы dS , ал ұзындығы dl болсын. Онда Джоуль-Ленц заңының негізінде бұл көлемде dt уақытта бөлінетін жылу мөлшері:

$$\delta Q = RI^2 dt = \frac{\rho dl}{dS} (jdS)^2 dt = \rho j^2 dV dt .$$

Мұндағы, $dV = dS dl$ – цилиндрдің көлемі. Соңғы теңдеуді $dV dt$ -ға бөліп, өткізгіш ортаның бірлік көлемінде бірлік уақытта бөлінетін жылу мөлшерін – *меншікті жылулық қуатты* анықтайтын формуланы аламыз:

$$\dot{Q}_{\text{мен}} = \rho j^2. \quad (5.20)$$

Бұл формула *локальдық түрдегі Джоуль-Ленц заңын* өрнектейді: *тоқтың меншікті жылулық қуаты берілген нүктедегі электр тогы тығыздығының квадратына және ортаның меншікті кедергісіне пропорционал.*

(5.20) теңдеуі өткізгіштің формасына, біртектілігіне және электр тогын тудыратын күштердің табиғатына тәуелсіз кез келген өткізгішке қолданылатын Джоуль-Ленц заңының жалпы түрін береді. Егер ток тасушыларға тек электр тогы әсер етсе, онда Ом заңының (5.10) негізінде

$$\dot{Q}_{\text{мен}} = \mathbf{jE} = \sigma E^2, \quad (5.21)$$

Сөйтіп, соңғы теңдеудің (5.20)-ға қарағанда жалпылық сипаты аздау.

Тізбектің біртекті емес бөлігі. Егер тізбек бөлігінде э.қ.к. көзі болса, онда ток тасушыларға электр күштерін ғана емес, бөгде күштер де әсер етеді. Бұл жағдайда қозғалмайтын өткізгіште бөлінетін жылу энергияның сақталу заңы бойынша электр және бөгде күштер жұмыстарының алгебралық қосындысына тең. Бұл сәйкес қуаттарға да қатысты: жылулық қуат электр және бөгде күштер қуаттарының алгебралық қосындысына тең болуы тиіс. Бұған (5.15) өрнегін I -ге көбейтіп көз жеткізген оңайырақ:

$$RI^2 = (\varphi_1 - \varphi_2)I + \mathcal{E}I. \quad (5.22)$$

Мұнда сол жақта бөлінетін $\dot{Q}$ жылулық қуат тұр; $\dot{Q}$ шамасы бөгде күштер бар кезде де тізбектің біртекті бөлігі үшін (5.19) формуласымен анықталады. Оң жақтағы соңғы қосылғыш берілген бөлікте бөгде күштер өндіретін қуатты береді. Соңғы ($\mathcal{E}I$) алгебралық шама: RI^2 -тан айырмашылығы I токтың бағыты өзгерген кезде ол таңбасын өзгертетіндігін ескереміз.

Сөйтіп, (5.22) теңдеуі 1 және 2 нүктелер арасындағы тізбек бөлігінде бөлінетін жылулық қуат электр және бөгде күштер қуаттарының алгебралық қосындысына тең екенін білдіреді.

Осы қуаттардың қосындысын, яғни, (5.22)-ның оң жағын тізбектің қарастыралатын бөлігіндегі **ток қуаты** деп атайды. Сонда тізбектің қозғалмайтын бөлігі жағдайында осы бөлікте бөлінетін қуат ток қуатына тең деп айтуға болады. (5.22)-ны барлық тармақталмаған тізбекке қолданып (онда $\varphi_1 = \varphi_2$), мынаны аламыз:

$$\dot{Q} = \mathcal{E}I, \quad (5.23)$$

яғни, Джоульдық жылудың тізбекте бірлік уақытта бөлінетін жалпы мөлшері тек бөгде күштердің қуатына тең. Демек, жылу тек бөгде күштермен өндіріледі. Электр өрісінің ролі осы жылуды тізбектің әр түрлі бөліктері бойымен қайта үлестіреді.

Енді (5.22) теңдеуін локальдық түрде аламыз. Ол үшін (5.11) теңдеуінің екі жағын j -ге көбейтеміз, сондай-ақ, $\sigma = 1/\rho$ және

$\rho j^2 = Q_{\text{мен}}[(5.20)\text{-ны кара}]$ екенін ескереміз. Сонда біртекті емес өткізетін ортадағы токтың меншікті жылулық қуаты

$$\dot{Q}_{\text{мен}} = \rho j^2 = \mathbf{j}(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*). \quad (5.24)$$

§ 5.6. Конденсаторы бар тізбектегі өтпелі процестер

Өтпелі процестер туралы. Тізбектегі бір орныққан режимнен басқасына өту кезіндегі процестерді солай атайды. Конденсатордың зарядталуы және разрядталуы сондай процестердің мысалы болып табылады, Осы параграфта біз оларға толығырақ тоқталамыз.

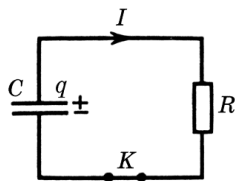
Осы уақытқа дейін біз тек тұрақты токтарды қарастырдық. Бірақ, алынған заңдарды көп жағдайларда өзгертін токтарға да қолдануға болады. Бұл токтың өзгеруі өте шапшаң болмайтын барлық жағдайларға қатысты. Бұл жағдайларда токтың лездік мәні іс жүзінде тізбектің барлық көлденең қималарында бірдей болады. Мұндай токтарды және оларға сәйкес өрістерді **квазистационарлық** деп атайды (квазистационарлықтың ең дәл критеріі §11.1-де берілген).

Атап айтқанда, егер квазистационарлық токтарды тек шамалардың лездік мәніне ғана қолдансақ, оларды тұрақты токтар заңдарымен сипаттауға болады.

Ал енді, конденсатордың разрядталу және зарядталу процестерін қарастырайық, бұл процестерде токтарды квазистационарлық деп ұйғарамыз.

Конденсатордың разрядталуы. Егер сыйымдылығы C зарядталған конденсатор астарлары R кедергі арқылы тұйықталған болса, онда ол арқылы ток өтеді.

I, q, U – токтың лездік, оң астардың зарядының және астарлар арасындағы потенциалдар айырымының (кернеудің) лездік мәндері болсын. Ток оң астардан теріске (5.10-сурет) қарай ағатын I токты оң деп есептеп жазсақ: $I = -dq/dt$. R кедергісі бар тізбектің сыртқы бөлігі үшін Ом заңына сәйкес



$$RI = U.$$

5.10-сурет

$I = -dq/dt$ және $U = q/C$ екенін ескеріп алдыңғы теңдеуді мына түрге түрлендіреміз:

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = 0. \quad (5.25)$$

Бұл дифференциалдық теңдеуде айнымалылар бөлінеді және интегралдаудан кейін мынаны аламыз:

$$q = q_0 e^{-t/\tau}, \quad (5.26),$$

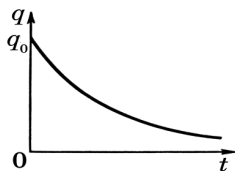
мұндағы, q_0 – конденсатордың бастапқы заряды, ал τ – уақыт өлшемділігіне ие тұрақты:

$$\tau = RC. \quad (5.27)$$

Бұл тұрақтыны **релаксация уақыты** деп атайды. (5.26)-дан τ конденсатор заряды e есе азаятын уақыт екені көрініп тұр.

(5.26)-ны уақыт бойынша дифференциалдап токтың өзгеру заңын табамыз.

$$I = -\frac{dq}{dt} = I_0 e^{-t/\tau}, \quad (5.28)$$



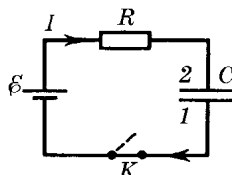
5.11-сурет

мұндағы, $I_0 = q_0/\tau$ – $t = 0$ мезетіндегі ток күші.

5.11-суретте конденсатордағы $q(t)$ – зарядтың уақытқа тәуелділік графигі көрсетілген. $I(t)$ тәуелділік графигінің түрі де осындай.

Конденсатордың зарядталуы. Тізбектей жалғанған C конденсатор, R кедергі және E э.к.к. көзінен тұратын тізбекті қарастырамыз (5.12-сурет). Алғашқы кезде конденсатор зарядталмаған (K кілт ажыратылған). $t = 0$ мезетте кілтті қосады және тізбекте конденсаторды зарядтайтын ток жүреді. Конденсатор астарларында зарядтардың көбеюі токты біртеңдеп кеміте отырып, оның өтуіне барынша кедергі жасайтын болады.

Енді тізбектегі ток конденсатордың оң зарядталған астары бағытында жүретін болса,



5.12-сурет

оны оң деп есептейміз: $I = dq/dt$. $l \in R2$ бөлігіне тізбектің біртекті емес бөлігі үшін Ом заңын қолданамыз:

$$RI = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E},$$

мұндағы, R деп осы бөліктің экк. көзінің ішкі кедергісін қоса алғандағы толық кедергісін түсінуге болады. $I = dq/dt$ және $\varphi_1 - \varphi_2 = U = q/C$ екенін ескеріп, алдыңғы теңдеуді мына түрде қайта жазамыз:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E} - q/C}{R}.$$

Айнымалыларды бөлу мынаны береді:

$$\frac{Rdq}{\mathcal{E} - q/C} = dt.$$

Бастапқы шарттарды ($t = 0$ кезде $q = 0$) ескеріп, осы теңдеуді интегралдап, мынаны аламыз:

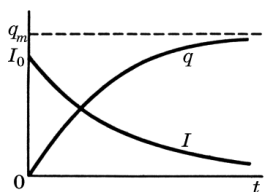
$$RC \ln \left(1 - \frac{q}{\mathcal{E}C} \right) = -t,$$

Бұдан

$$q = q_m (1 - e^{-t/\tau}). \quad (5.29)$$

Мұнда, $q_m = \mathcal{E}C$ – конденсатордағы зарядтың шекті мәні ($t \rightarrow \infty$ кездегі) $\tau = RC$. Уақыт бойынша токтың өзгеру заңы

$$I = \frac{dq}{dt} = I_0 e^{-t/\tau}, \quad (5.30)$$



мұндағы, $I_0 = \mathcal{E}/R$. $q(t)$ және $I(t)$ тәуелділіктердің графиктері 5.13-суретте көрсетілген.

5.13-сурет

Есептер

5.1. Өткізетін ортаның кедергісі.

Радиусы a метал шар радиусы b концентрлі жұқа метал қабықпен қоршалған. Бұл электродтар арасындағы кеңістік меншікті кедергісі ρ біртекті нашар өткізетін ортамен толтырылған. Электродтар арасындағы кедергіні табу керек.

Шешімі. Ойша r және $r + dr$ радиустары арасында жұқа сфералық қабатты бөліп аламыз. Осы қабаттың барлық нүктелерінде ток сызықтары оған перпендикуляр болып келеді, сондықтан осындай қабатты ұзындығы dr , көлденең қимасының ауданы $4\pi r^2$ цилиндр өткізгіш деп қарастыруға болады. (5.9) формуланы пайдаланып жазсақ:

$$dR = \rho \frac{dr}{4\pi r^2}.$$

Осы өрнекті r бойынша a -дан b -ға дейін интегралдап, мынадай формула аламыз:

$$R = \frac{\rho}{4\pi} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right).$$

5.2. Радиустары бірдей a екі метал шарик меншікті кедергісі ρ біртекті нашар өткізетін ортада орналасқан. Шариктердің ара қашықтығы олардың өлшемінен өте үлкен болған кездегі шариктердің арасындағы ортаның кедергісін табу керек.

Шешімі. Шариктерді ойша $+q$ және $-q$ зарядтаймыз. Шариктер бір-бірінен қашық болғандықтан, олардың әр қайсының бетіне жақын электр өрісі іс жүзінде тек іргелес шариктің өзінің зарядымен анықталады, әрі оның зарядын бет бойымен бірқалыпты таралған деп есептеуге болады. Оң зарядталған шарикті оның бетінде жатқан концентрлі сферамен қоршап, осы сфера арқылы өтетін ток үшін өрнек жазамыз:

$$I = 4\pi a^2 j,$$

мұндағы, j – ток тығыздығы. Ом заңын ($j = E/\rho$) және $E = q/4\pi\epsilon_0 a^2$ – формуласын пайдаланып мынаны аламыз:

$$I = q/\epsilon_0 \rho.$$

Енді шариктер арасындағы потенциалдар айырымын табамыз:

$$U = \varphi_+ - \varphi_- = 2q / (4\pi\epsilon_0 a).$$

Ізделіп отырған кедергі

$$R = U/I = \rho/2\pi a.$$

Бұл ортаның диэлектрлік өтімділігінің мәніне тәуелсіз дұрыс нәтиже.

- 5.3.** Меншікті кедергісі ρ және диэлектрлік өтімділігі ϵ шекарасыз біртекті нашар өткізгіш ортада кез келген пішіндегі екі өткізгіш орналасқан. Берілген жүйе үшін RC көбейтіндісінің мәнін тап, мұндағы R – өткізгіштер арасындағы ортаның кедергісі, C – орта бар кездегі өткізгіштердің өзара сыйымдылығы.

Шешімі. Өткізгіштерді $+q$ және $-q$ зарядтармен ойша зарядтаймыз. Олардың арасындағы орта нашар өткізетін болса, онда өткізгіштер беттері эквипотенциалды және өріс конфигурациясы орта жок кездегідей.

Мысалы, оң зарядталған өткізгішті тікелей өткізгіштің бетінде жатқан S тұйық бетпен қоршаймыз және R мен C -ны бөлек есептейміз

$$R = \frac{U}{I} = \frac{U}{\oint j_n dS} = \frac{U}{\sigma \oint E_n dS},$$

$$C = \frac{q}{U} = \frac{\oint D_n dS}{U} = \frac{\epsilon \epsilon_0 \oint E_n dS}{U},$$

мұндағы интегралдар берілген S бет бойынша алынған. R -ді есептеу кезінде Ом заңы $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$, ал C -ны есептеу кезінде Гаусс теоремасы пайдаланылды.

Алынған өрнектердің көбейтіндісі

$$RC = \epsilon_0 \epsilon / \sigma = \epsilon_0 \epsilon \rho.$$

5.4. Өткізгіштің шекарасындағы шарттар.

Меншікті кедергісі ρ өткізгіш өтімділігі ϵ диэлектрикпен шектеседі. Өткізгіштің бетіндегі қандай да бір A нүктесінде электр индукциясы D , әрі $\mathbf{D}$ векторы өткізгіштен бастап және бет нормалымен α бұрыш жасайтындай бағытталған. Өткізгіштегі зарядтардың беттік тығыздығын және A нүктесі маңындағы ток тығыздығын тап.

Шешімі. Өткізгіштегі зарядтардың беттік тығыздығы

$$\sigma = D_n = D \cos \alpha.$$

Ток тығыздығын Ом заңы бойынша табамыз: $\mathbf{j} = \mathbf{E}/\rho$. Үздіксіздік теңдеуінен (5.5) $\mathbf{j}$ векторының нормаль құраушылары тең екендігі шығады, ал диэлектрикте $j_n = 0$ (ток жоқ), онда өткізгіште $de j_n = 0$. Олай болса, өткізгіште $\mathbf{j}$ векторы оның бетіне жанасады. Бұл өткізгіштің ішіндегі $\mathbf{E}$ векторына да қатысты. Екіншіден, $\mathbf{E}$ векторының циркуляциясы туралы теоремадан оның бөліну шекарасының әр түрлі жақтарындағы тангенциаль құраушылары бірдей, демек, $E = E_\tau = (D/\varepsilon_0) \sin \alpha$, мұндағы E_τ – диэлектриктегі $\mathbf{E}$ өрісінің тангенциаль құраушысы.

Осының барлығын ескеріп, формула қорытамыз:

$$j = \frac{E}{\rho} = \frac{D \sin \alpha}{\varepsilon_0 \varepsilon \rho}.$$

- 5.5.** Жазық конденсатор астарларының арасындағы саңылау өтімділіктері ε_1 және ε_2 , меншікті кедергілері ρ_1 және ρ_2 болатын, қалыңдықтары l_1 және l_2 екі 1 және 2 диэлектрлік қабаттармен тізбектей толтырылған. Конденсаторда U тұрақты кернеу бар, бұл жерде электр өрісі 1-қабаттан 2-қабатқа бағытталған. Диэлектрлік қабаттардың бөліну шекарасындағы бөгде зарядтардың беттік тығыздығын тап.

Шешімі. Ізделіп отырған зарядтардың беттік тығыздығы

$$\sigma = D_{2n} - D_{1n} = \varepsilon_0 \varepsilon_2 E_2 - \varepsilon_0 \varepsilon_1 E_1. \quad (1)$$

E_1 мен E_2 – анықтау үшін екі шартты пайдаланамыз: $j_1 = j_2$ екендігі фактысынан $E_1/\rho_1 = E_2/\rho_2$ екені шығады, одан басқа $E_1 l_1 + E_2 l_2 = U$. Соңғы екі теңдеуді шешіп, E_1 мен E_2 -ні табамыз. Оларды (1)-ге қойсақ, келесі нәтижеге қол жеткіземіз:

$$\sigma = \frac{\varepsilon_2 \rho_2 - \varepsilon_1 \rho_1}{\rho_1 l_1 + \rho_2 l_2} \cdot \varepsilon_0 U.$$

Бұдан $\varepsilon_1 \rho_1 = \varepsilon_2 \rho_2$ болғанда, $\sigma = 0$ екені көрініп тұр.

- 5.6. Біртекті емес өткізгіш.** Дөңгелек қимасының ауданы S ұзын өткізгіш меншікті кедергісі тек қана өткізгіштің осіне дейінгі r қашықтыққа $\rho = \alpha/r^2$ түрінде тәуелді болатын материалдан жасалған, мұндағы, α – тұрақты. Өткізгіш бойымен I ток өтеді. 1) өткізгіштегі өрістің E кернеулігін; 2) өткізгіштің бірлік ұзындығының кедергісін табу керек.

Шешімі. 1) Ом заңы бойынша E кернеулік j ток тығыздығымен, ал j шамасы I токпен байланысты, сондықтан былай жазуға болады:

$$I = \int j 2\pi r dr = \int (E/\rho) 2\pi r dr.$$

Берілген өткізгіштің қимасының барлық нүктелерінде E кернеулік бірдей, яғни, r -ге тәуелсіз. Өткізгіш ішінен бір жағы, мысалы, өткізгіш осімен дәл келетіндей тік бұрышты контур алып, одан соң осы контурға $\mathbf{E}$ векторының циркуляциясы туралы теореманы қолданып, бұған оңай көз жеткізуге болады.

Сөйтіп, E - ні интеграл астынан шығаруға болады және интегралдау нәтижесінде мынаны аламыз:

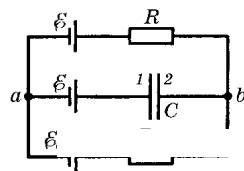
$$E = 2\pi\alpha / S^2 .$$

2) Өткізгіштің бірлік ұзындығының кедергісін $R = U/I$ формуласының көмегімен анықтауға болады. Осы теңдіктің екі жағын R мен U -ға қатысты болатын өткізгіш бөлігінің l ұзындығына бөліп, мынаны табамыз:

$$R_{\text{бір}} = E/I = 2\pi\alpha / S^2 .$$

5.7. Тізбектің біртекті емес бөлігі үшін Ом заңы.

Сызбада (5.14-сурет) ток көздерінің $\mathcal{E}$ және $\mathcal{E}_0$ э.к.к., R және R_0 кедергілері, сондай-ақ, конденсатордың C сыйымдылығы белгілі. Ток көздерінің ішкі кедергілері ескермеуге болатындай аз. Конденсатордың 1-астарындағы зарядты тап.



5.14-сурет

Шешімі. R және R_0 кедергілері бар тұйық тізбек үшін Ом заңын жазсақ:

$$(R + R_0)I = \mathcal{E} - \mathcal{E}_0 ,$$

мұндағы оң бағыт сағат тілінің бағыты бойынша алынған. Екіншіден, тізбектің aRb біртекті емес бөлігі үшін

$$RI = \varphi_a - \varphi_b + \mathcal{E} ,$$

ал aCb бөлігі үшін

$$\mathcal{E} + \varphi_2 - \varphi_1 = \varphi_b - \varphi_a .$$

Осы үшін теңдеуді бірге шешіп, мынаны аламыз:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{R}{R+R_0} (\mathcal{E} - \mathcal{E}_0) .$$

1-астардағы заряд $q_1 = C(\varphi_1 - \varphi_2)$ формуласымен анықталады. Сондықтан соңғы нәтижесі

$$q_1 = \frac{R}{R+R_0}(\mathcal{E} - \mathcal{E}_0),$$

$\mathcal{E} > \mathcal{E}_0$ болған кезде $q_1 > 0$, және керісінше екені көрініп тұр.

5.8. Э.қ.к. көзінің жұмысы. Шыны пластинка сыйымдылығы C_0 жазық конденсатор астарларының арасындағы саңылауды толтырып тұр. Конденсатор U тұрақты кернеуге қосылған. Пластинаны конденсатордан суырып алу үшін, электр күштеріне қарсы жұмсалуда тиіс механикалық жұмысты тап.

Шешімі. Энергияның сақталу заңына сәйкес

$$A_{\text{мех}} + A_{\text{ток көзі}} = \Delta W, \quad (1)$$

мұндағы, $A_{\text{мех}}$ – электр күштеріне қарсы сыртқы күштердің жасайтын жұмысы; $A_{\text{ток көзі}}$ – осы процестегі ток көзінің жұмысы; ΔW – конденсатордың энергиясының сәйкес өсімшесі (энергияның басқа түрлерінің жүйе энергиясының өзгеруіне қатысы ескермеуге болатындай аз деп есептейміз).

ΔW мен $A_{\text{ток көзі}}$ -ны табамыз. Конденсатор энергиясы үшін формуладан ($W = CU^2/2 = qU/2$) $U = \text{const}$ болған кезде

$$\Delta W = \Delta CU^2/2 = \Delta qU/2. \quad (2)$$

Пластинаны суырып алған кезде конденсатор сыйымдылығы азаяды ($\Delta C < 0$), онда конденсатордың заряды да азаяды ($\Delta q < 0$). Соңғы теңсіздік заряд ток көзі арқылы бөгде күштер әсерінің бағытына қарама-қарсы өткенін және ток көзі теріс жұмыс жасағанын көрсетеді:

$$A_{\text{ток көзі}} = \Delta qU. \quad (3)$$

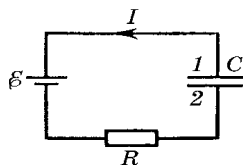
(3) және (2) формулаларды салыстырудан шығатыны:

$$A_{\text{ток көзі}} = 2\Delta W.$$

Бұл өрнекті (1)-ге қойып мынаны аламыз:

$$A_{\text{мех}} = -\Delta W, \text{ немесе } A_{\text{мех}} = (\varepsilon - 1) C_0 U^2 / 2.$$

Сөйтіп, пластинаны конденсатордан суырып ала отырып, біз (сыртқы күштер) оң жұмыс



5.15-сурет

жасаймыз, бұл кезде э.қ.к. көзі теріс жұмыс жасайды және конденсатор энергиясы азаяды:

$$A_{\text{мех}} > 0, A_{\text{ток көзі}} < 0, \Delta W < 0.$$

5.9. Өтпелі процестер. Тізбек э.қ.к. $\mathcal{E}$ тұрақты ток көзінен және оған тізбектей жалғанған R кедергі мен C конденсатордан тұрады. Ток көзінің ішкі кедергісі ескермеуге болатындай аз. $t = 0$ мезетте конденсатордың сыйымдылығы тез (секірмелі) η есе азаяды. Тізбектегі токты уақыт функциясы ретінде тап.

Шешімі. Тізбектің $1\text{ER}2$ біртекті емес бөлігі үшін Ом заңын жазамыз (5.15-сурет):

$$RI = \varphi_1 - \varphi_2 - \mathcal{E} = U - \mathcal{E}.$$

$U = q/C'$, екенін ескерсек, мұндағы, $C' = C/\eta$, онда

$$RI = \eta q/C - \mathcal{E}. \quad (1)$$

Біздің жағдайымызда (q азаяды) $dq/dt = -I$ екенін ескере отырып, осы теңдікті уақыт бойынша дифференциалдаймыз:

$$R \cdot \frac{dI}{dt} = -\frac{\eta}{C} I, \quad \frac{dI}{I} = -\frac{\eta}{RC} dt.$$

Соңғы теңдеуді интегралдау мынаны береді:

$$\ln \frac{I}{I_0} = -\frac{\eta t}{RC}, \quad I = I_0 e^{-\eta t/RC},$$

мұндағы, I_0 (1)-шартпен анықталады. Шынында,

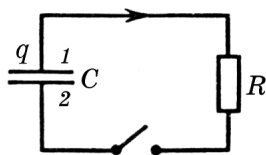
$$RI_0 = \eta q_0/C - \mathcal{E},$$

бұл жерде $q_0 = \mathcal{E}C$ – сыйымдылық өзгергенге дейінгі конденсатордың заряды. Сондықтан

$$I_0 = (\eta - 1) \mathcal{E}/R.$$

5.10. Сыйымдылығы C конденсаторға q_0 заряд береді және одан соң $t = 0$ мезетте оны R кедергімен тұйықтайды. Кедергіде бөлінетін жылу мөлшерінің t уақытқа тәуелділігін табу керек.

Шешімі. Ізделіп отырған жылу мөлшері



5.16-сурет

$$Q = \int_0^t RI^2 dt, \quad (1)$$

бұдан алдымен $I(t)$ тәуелділігін табу қажеттігі көрініп тұр. Осы мақсатпен тізбектің $1R2$ бөлігі үшін Ом заңын пайдаланамыз (5.16-сурет):

$$RI = \varphi_1 - \varphi_2 = U,$$

немесе

$$RI = q/C. \quad (2)$$

(2)-ні уақыт бойынша дифференциалдаймыз:

$$R \frac{dI}{dt} = \frac{1}{C} I, \quad \frac{dI}{I} = \frac{dt}{RC}.$$

Соңғы теңдеуді интегралдасақ:

$$\ln \frac{I}{I_0} = \frac{t}{RC}, \quad I = I_0 e^{-t/RC}, \quad (3)$$

мұндағы, I_0 , $q = q_0$, яғни $I_0 = q_0 / RC$ болғанда (2) шартпен анықталады.

(3)-ті (1)-ге қойсақ және сәйкес интегралдасақ мынаны аламыз:

$$Q = \frac{q_0^2}{2C} (1 - e^{-2t/RC}).$$

Вакуумдағы магнит өрісі



§ 6.1. Лоренц күші. В өрісі

Лоренц күші. Тәжірибе нүктелік зарядқа әсер ететін $\mathbf{F}$ күш жалпы жағдайда тек осы зарядтың орнына ғана емес, оның $\mathbf{v}$ жылдамдығына да тәуелді екенін көрсетеді. Осыған сәйкес $\mathbf{F}$ күшті екі құраушыға бөледі – $\mathbf{F}_э$ электрлік (бұл зарядтың қозғалысына тәуелді емес) және $\mathbf{F}_м$ магниттік (бұл зарядтың жылдамдығына тәуелді). Кеңістіктің кез келген нүктесінде магниттік күштің бағыты мен модулі зарядтың $\mathbf{v}$ жылдамдығына тәуелді және бұл күш әрқашанда $\mathbf{v}$ векторына перпендикуляр; бұдан басқа кез келген жерде магниттік күш берілген орында анықталған бағытқа перпендикуляр және соңында оның модулі осы бөліп алынған бағытқа перпендикуляр болатын жылдамдық құраушысына пропорционал.

Егер **магнит өрісі** ұғымын ендірсек, магниттік күштердің барлық осы қасиеттерін сипаттауға болады. Осы өрісті кеңістіктің әрбір нүктесінде бөлінген бағытты анықтайтын $\mathbf{B}$ векторымен сипаттап, магнит өрісі үшін өрнекті мына түрде жазамыз:

$$\mathbf{F}_м = q[\mathbf{vB}]. \quad (6.1)$$

Сонда q зарядқа әсер ететін толық элетрмагниттік күш:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q[\mathbf{vF}]. \quad (6.2)$$

Мұны **Лоренц күші** деп атайды. Соңғы өрнек **амбебан** болып табылады, бұл тек тұрақты ғана емес, айнымалы электр және магнит өрістері үшін де, тіпті зарядтың $\mathbf{v}$ жылдамдығының кез

келген мәндерінде дұрыс. Мұнда $\mathbf{v}$ – біз қарастырып отырған санақ жүйесімен салыстырғандағы заряд жылдамдығы екенін ескереміз.

Лоренц күшінің зарядқа әсері бойынша $\mathbf{E}$ және $\mathbf{B}$ векторларының модулдері мен бағытын анықтауға болады. Сондықтан Лоренц күші үшін өрнекті электр және магнит өрістерінің анықтамасы ретінде қарастыруға болады (электр өрісі жағдайында солай қарастырдық)¹.

Тыныштықтағы электр зарядына магнит өрісі әсер етпейтінін айта кету қажет. Магнит өрісінің электр өрісінен мәнді айырмашылығы осы. Магнит өрісі тек қозғалатын зарядқа әсер етеді.

$\mathbf{B}$ векторы магнит өрісінің қозғалатын зарядқа күштік әсерін сипаттайды және бұл жағынан ол электр өрісінің күштік әсерін сипаттайтын $\mathbf{E}$ векторына ұқсас болып келеді.

Магниттік күштің маңызды ерекшелігі – ол әрқашан зарядтың жылдамдық векторына перпендикуляр болып келеді, сондықтан **зарядқа жұмыс жасалмайды**. Бұл – бөлшек қалай қозғалса да, тұрақты магнит өрісінде қозғалатын зарядталған бөлшек энергиясы әрқашанда өзгермей қалатынын көрсетеді.

Релятивистік емес жуықтауда Лоренц күші (6.2), кез келген басқа күштер сияқты санақ жүйесін таңдауға тәуелді емес (инерциялық).

Сонымен қатар Лоренц күшінің магниттік құраушысы бір санақ жүйесінен екіншіге өткенде өзгереді (себебі $\mathbf{v}$ -дан).

Сондықтан $q\mathbf{E}$ электрлік құраушысы да өзгеруі тиіс. Бұдан $\mathbf{F}$ толық күштің – Лоренц күшінің электрлік және магниттік күштерге бөлінуі санақ жүйесін таңдап алуға тәуелді екені шығады. Санақ жүйесін көрсетпей бұлай бөлудің мағынасы жоқ.

Бірқалыпты қозғалатын зарядың магнит өрісі. Тәжірибе магнит өрісін қозғалатын зарядтар (токтар) тудыратынын көрсетеді. Эксперименттік мәліметтерді жалпылау нәтижесінде $\mathbf{v}$ релятивтік емес тұрақты жылдамдықпен қозғалатын q нүктелік зарядтың **Вөрісін** анықтайтын элементар заң алынды. Бұл заң мына түрде жазылады:

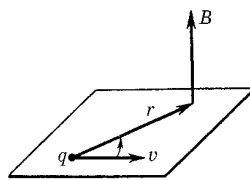
$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{q[\mathbf{vr}]}{r^3}, \quad (6.3)$$

¹ $\mathbf{B}$ өрісті өлшейтін әдістер қатары жасалды, бірақ оның барлығы сайып келгенде негізінде (6.2)-тендеуі бар құбылыстарға негізделген.

мұндағы, μ_0 – **магниттік тұрақты**; коэффициент

$$\mu_0/4\pi = 10^{-7} \text{ Гн/м};$$

$\mathbf{r}$ – q зарядтан бақылау нүктесіне жүргізілген радиус- вектор. $\mathbf{r}$ радиус-вектордың ұшы берілген санақ жүйесінде қозғалмайды, ал оның басы $\mathbf{v}$ жылдамдықпен қозғалады (6.1-сурет), сондықтан $\mathbf{B}$ векторы берілген санақ жүйесінде тек бақылау нүктесінің орнына ғана емес, уақытқа да тәуелді.



6.1-сурет

(6.3) формулаға сәйкес $\mathbf{B}$ векторы $\mathbf{v}$ және $\mathbf{r}$ векторлары орналасқан жазықтыққа перпендикуляр бағытталған, бұл жерде $\mathbf{B}$ векторының бағытында $\mathbf{v}$ векторын айналу $\mathbf{v}$ бағытымен оң винттік жүйені құрайды. (6.1-сурет) $\mathbf{B}$ векторының аксиал (псевдовектор) екенін айта кеткен жөн. $\mathbf{B}$ шамасын **магнит индукциясы** деп атайды.

Магнит индукциясының өлшем бірлігі тесла (Тл).

Релятивистік емес жылдамдықпен қозғалатын q нүктелік зарядтың электр өрісі сол (1.2) заңымен сипатталады. Сондықтан (6.3) өрнегін былай көрсетуге болады:

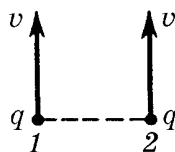
$$\mathbf{B} = \epsilon_0 \mu_0 [\mathbf{vE}] = [\mathbf{vE}]/c^2, \quad (6.4)$$

мұндағы, c – электродинамикалық тұрақты ($c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$), ол вакуумдағы жарық жылдамдығына тең (сәйкестік, кейін белгілі болғандай, кездейсоқ емес).

Мысал. Қозғалатын зарядтардың магниттік және электрлік өзара әсер күштерін салыстыру.

Жеткілікті үлкен екі q нүктелік заряд бір-біріне параллель, релятивистік емес бірдей $\mathbf{v}$ жылдамдықпен 6.2-суретте көрсетілгендей қозғалатын болсын. Мысалы 1-заряд тарапынан 2-зарядқа әсер ететін F_m магниттік және F_e электрлік күштердің қатынасын табамыз.

(6.2) -ге сәйкес $F_m = qvB$ және $F_e = qE$, мұндағы v – 2-зарядтың жылдамдығы, ал B және E – 1-зарядтың 2-заряд тұрған орында тудыратын өрісінің магнит индукциясы мен электр кернеулігі, күштердің қатынасы: $F_m/F_e = vB/E$. Біздің



6.2-сурет

жағдайымызда (6.4)-ке сәйкес $B = vE/c^2$, сондықтан

$$F_M/F_3 = (v/c)^2. \quad (6.5)$$

Тіпті өте үлкен жылдамдықтар үшін, мысалы $v = 300 \text{ км/с}$, бұл қатынас 10^{-6} -не тең, яғни күштің магниттік бөлігі электрлік бөлігінен миллион есе аз, және электрлік күштегі өте аз түзетуді құрайды.

Карастырылған мысал әдетте сұрақ тудыруы мүмкін – мұндай күштер оқып-зерттеуге тұра ма? Әлбетте, тұрады және бұған екі нақты себеп бар.

Біріншіден, бізге жарық жылдамдығына жуық жылдамдықпен қозғалатын бөлшектер шоқтары кездеседі және онда осы электр күштеріне «түзету» соңғымен салыстыруға тұрады. ((6.5) қатынас релятивті жылдамдықтар кезінде де орындалады).

Екіншіден, мысалы, электрондардың өткізгіш бойымен қозғалысында олардың бағытталған жылдамдығы әдеттегі тығыздықтарда кезінде секундына бірнеше ондаған миллиметрді құрайды және бұл қатынас: $(v/c)^2 \approx 10^{-24}$. Электрлік күшке түзету жоқтың қасы! Бірақ былай, бұл жағдайда магниттік күш – бұл іс жүзінде барлық әсер ететін күш, өйткені, электрлік күштер өткізгіштегі теріс және оң зарядтардың балансы нәтижесінде жоғалып кетті. Бұл баланс 10^{-24} -нен гөрі дәлірек және «өте аз», магниттік күш әдетте жалғыз ғана. Ал токтың пайда болуына зарядтардың орасан зор санының қатысуы бұл мүшенің аздығын компенсациялайды.

Басқаша сөзбен айтқанда, өткізгіштегі артық зарядтар ток тасушы қосынды зарядтармен салыстырғанда өте аз. Сондықтан бұл жағдайда магниттік күштер өткізгіштегі артық зарядтарға әсер ететін электрлік күштерден көбірек.

§ 6.2. Био–Савар заңы

Суперпозиция принципі. Тәжірибе магнит өрісі үшін, электр өрісі сияқты суперпозиция принципі орындалатынын көрсетеді: қозғалыстағы бірнеше зарядтардың немесе токтардың тудыратын

магнит өрісі әрбір зарядтың не тоқтың тудыратын жеке магнит өрістерінің векторлық қосындысына тең:

$$\boxed{B = \sum B_i.} \quad (6.6).$$

Био–Савар заңы. *Тұрақты* электр токтары тудыратын магнит өрісін табу туралы сұрақты қарастырамыз. Бұл сұрақты бірқалыпты қозғалатын нүктелік зарядтың **B** өріс индукциясын анықтайтын (6.3) заңынан шешуге болады. (6.3)-тегі q заряд орнына ρdV -ны қоямыз, мұндағы, dV – элементар көлем, ρ – ток тасушы болып табылатын зарядтың көлемдік тығыздығы, және де (5.2)-ге сәйкес $\rho \mathbf{v} = \mathbf{j}$ екенін ескереміз. Сонда (6.3) формула мына түрге келеді:

$$\boxed{d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\mathbf{j} \mathbf{r}] dV}{r^3}.} \quad (6.7)$$

Егер I ток көлденең қимасының ауданы ΔS жіңішке сым бойымен өтсе, онда

$$j dV = j \Delta S dl = I dl,$$

мұндағы, dl – сым ұзындығының элементі. I тогы бағытында $d\mathbf{l}$ векторды енгізіп, алдыңғы теңдікті қайта жазамыз:

$$\mathbf{j} dV = I d\mathbf{l}. \quad (6.8)$$

$\mathbf{j} dV$ және $I d\mathbf{l}$ – векторларын токтың сәйкес көлемдік және сызықтық элементтері деп атайды. (6.7) формуласындағы токтың көлемдік элементін сызықтыққа алмасытырып енгізіп, мынаны аламыз:

$$\boxed{d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I[d\mathbf{l}, \mathbf{r}]}{r^3}.} \quad (6.9)$$

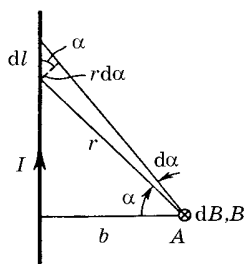
(6.7) және (6.9) формулалары **Био–Савар заңын** өрнектейді.

Суперпозиция принципіне сәйкес **B** толық өрісі (6.7) не (6.9) өрнектерін токтың барлық элементтері бойынша интегралдау нәтижесінде анықталады:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{[\mathbf{j}\mathbf{r}]}{r^3} dV, \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{[[d\mathbf{l}, \mathbf{r}]]}{r^3} \quad (6.10)$$

Кез келген конфигурациялы токтың магнит өрісі индукциясын осы формулалар бойынша есептеу, жалпы айтқанда, күрделі. Бірақ, егер токтың таралуы белгілі бір симметриялы болса, есептеу біраз қысқарады. Токтың магнит өрісі индукциясын табуға бірнеше қарапайым мысалдар келтіреміз.

1-мысал. Түзу токтың, яғни ұзындығы шексіз, жіңішке түзу сым бойымен өтетін токтың **магнит өрісі** (6.3-сурет).



6.1-сурет

(6.9) формулаға сәйкес кез келген A нүктесінде токтың барлық элементтерінің $d\mathbf{B}$ векторлары сурет жазықтығынан сыртына қарай бірдей бағытталған. Сондықтан $d\mathbf{B}$ векторларын қосуды олардың $d\mathbf{B}$ модулдерін қосумен ауыстыруға болады және де :

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dl \cos \alpha}{r^2}.$$

Суреттен $dl \cos \alpha = r d\alpha$ және $r = b / \cos \alpha$ екені көрініп тұр. Демек,

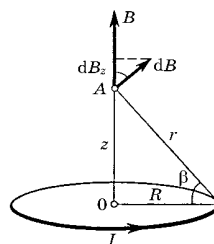
$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \cos \alpha \cdot d\alpha}{b}.$$

Соңғы өрнекті α бойынша $-\pi/2$ -ден $+\pi/2$ -ге дейін интегралдауға эквивалентті болатын токтың барлық элементтері бойынша интегралдап, мынаны табамыз:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{b}. \quad (6.11)$$

2-мысал. Дөңгелек токтың өсіндегі магнит өрісі.

(6.4)-суретте оң жақта орналасқан $I dl$ ток элементінің $d\mathbf{B}$ векторы көрсетілген. Токтың барлық элементтері $d\mathbf{B}$ векторларының конусын құрайды және A нүктесіндегі $\mathbf{B}$ қорытқы вектор Z осі бойымен жоғары бағытталған. Демек, бұл $\mathbf{B}$ векторының модулін табу үшін, $d\mathbf{B}$ векторларының Z осіндегі проекцияларын қоссақ жеткілікті деген сөз. Осындай әрбір проекция



6.4-сурет

$$dB_z = dB \cos \beta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \cos \beta}{r^2},$$

мұнда dl элементі мен r радиус-вектор арасындағы бұрыш $\pi/2$ -ге тең екені ескерілген, сондықтан синус бірге тең. Осы өрнекті барлық dl бойынша интегралдап (бұл $2\pi R$ -ге тең), $\cos \beta = R/r$ және $r^2 = z^2 + R^2$ екенін ескеріп, мынаны аламыз:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi R^2 I}{(z^2 + R^2)^{3/2}}. \quad (6.12)$$

Бұдан тоғы бар орамның центрінде ($z = 0$) және $z \gg R$ қашықтықта B векторының модулі сәйкес мынаған тең екені шығады:

$$B_{z=0} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi I}{R}, \quad B_{z \gg R} \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2\pi R^2 I}{z^3}. \quad (6.13)$$

§ 6.3. Магнит өрісінің негізгі заңдары

Магнит өрісінің электр өрісі сияқты екі маңызды қасиеті бар. Векторлық өрістің ағынымен және циркуляциясымен байланысқан бұл қасиеттері магнит өрісінің негізгі заңдарын өрнектейді.

Бұларды оқып-үйренуге кіріспес бұрын, B өрісті *графикпен кескіндеу* туралы бірер сөз айтайық. Басқа да векторлық өріс сияқты B өрісі B векторы сызықтарының көмегімен көрнекі түрде кескінделуі мүмкін. Оларды кәдімгі әдіспен – әрбір нүктедегі осы сызықтарға жанама B векторының бағытымен сәйкес келетіндей, ал сызық қоюлығы берілген нүктедегі B векторының модуліне пропорционал болатындай етіп жүргізеді.

Осылай алынған геометриялық бейне берілген магнит өрісінің конфигурациясы туралы айтуға мүмкіндік береді және кейбір жағдайларды талдауды өте жеңілдетеді.

Ал енді магнит өрісінің негізгі заңдарына – Гаусс теоремасы мен циркуляция туралы теоремаға көңіл аударайық.

B өрісі үшін Гаусс теоремасы. *Кез келген тұйық бет арқылы өтетін B векторының ағыны нөлге тең:*

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0. \quad (6.14)$$

Бұл теорема мағынасы бойынша тәжірибе қорытындысы болып табылады. Ол $\mathbf{B}$ векторы сызықтарының не басы, не соңы болмайды дейтін эксперименттік айғақтың постулаттық түрін өрнектейді. Сондықтан S тұйық бетпен шектелген кез келген көлемнен шығатын $\mathbf{B}$ векторының сызықтар саны әрқашанда осы көлемге енетін сызықтар санына тең.

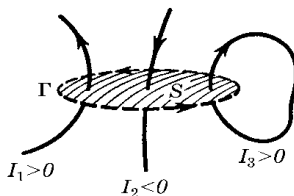
Бұдан біз әрі қарай бірнеше рет пайдаланатындай *маңызды салдар* шығады. Атап айтқанда: *қандай да бір тұйық контурмен шектелген S бет арқылы өтетін $\mathbf{B}$ векторының ағыны S беттің пішініне тәуелді емес*. Мұны $\mathbf{B}$ векторы сызықтары туралы түсінік көмегімен түсіну оңай: олар еш жерде үзілмейтіндіктен берілген контурмен шектелген S бет арқылы олардың саны (яғни, $\mathbf{B}$ векторының ағыны) шынында да S беттің пішініне тәуелді болмауы тиіс.

(6.14) заңы $\mathbf{B}$ векторының сызықтары басталатын не аяқталатын магнит зарядтарының табиғатта жоқ екенін көрсететін өрнек. Басқаша айтқанда, электр өрісіне қарама-қайшылығы *магнит өрісінің көзі* болмайды.

В векторының циркуляциясы туралы теорема (вакуумдағы тұрақты токтардың магнит өрісі үшін). *Кез келген Γ контур бойынша $\mathbf{B}$ векторының циркуляциясы μ_0 -ді Γ контурымен қоршалған токтардың алгебралық қосындысына көбейткенге тең:*

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 I_s \quad (6.15)$$

мұндағы, $I = \sum I_k$, бұл жерде де I_k – алгебралық шама. Егер токтың бағыты оң винт ережесімен контур бойымен айналып өту бағытымен байланысты болса, онда ток оң деп есептеледі. Қарсы бағыттағы ток теріс деп есептеледі. Бұл ереже 6.5-суретте кескінделген: мұнда I_1 және I_3 токтар оң, өйткені олардың бағыты оң винт ережесімен контурды айналып өту бағытымен байланысты, ал I_2 ток – теріс.



6.5-сурет

Циркуляция туралы теореманы (6.15) Био–Савар заңынан дәлелдеуге болады. Кез келген токтардың жалпы жағдайында бұл дәлелдеу өте қиын және біз оны мұнда

қарастырмаймыз. Біз (6.15) пайымдауын экспериментпен дәлелденген постулат ретінде қарастырамыз.

Енді бір ескерту. Егер (6.15)-тегі I ток Γ контуры орналасқан көлем бойынша таралса, онда оны былай көрсетуге болады:

$$I = \int \mathbf{j} d\mathbf{S}. \quad (6.16)$$

Интеграл мұнда Γ контурына керілген S қалауымызша алынған бет бойынша алынады. Интеграл астындағы $\mathbf{j}$ ток тығыздығы $d\mathbf{S}$ ауданша орналасқан нүктеге сәйкес, бұл жерде $d\mathbf{S}$ векторы контур бойынша айналу бағытымен оң винттік жүйені құрайды.

Демек, (6.15) теңдеуін жалпы жағдайды былай жазуға болады:

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 \int \mathbf{j} d\mathbf{S} = \mu_0 \int j_n dS. \quad (6.17)$$

Ввекторының циркуляциясы жалпы айтқанда нөлге тең емес екендігі, **В** өрісінің потенциалдық еместігін білдіреді (электр-статикалық өрістен айырмашылығы). Мұндай өрісті *құйынды* не *соленоидтық* деп атайды. **В**векторының циркуляциясы контурмен қоршалған I токқа пропорционал болғандықтан, жалпы жағдайда магнит өрісіне **В** вектормен $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ -ге ұқсас қатынаспен байланысқан скаляр потенциал жазуға болмайды. Бұл потенциал бір мәнді емес болар еді: контур бойынша әрбір айналу және бастапқы нүктеге қайта келу кезінде ол $\mu_0 I$ -ге тең өсімше алған болар еді. Дегенмен, кеңістіктің токтар жоқ аймағында φ_m магниттік потенциалды енгізеді және жеткілікті түрде тиімді пайдаланады.

В векторының циркуляциясы туралы теореманың рөлі. Бұл теорема шамамен **Е** және **Д** векторлары үшін Гаусс теоремасы сияқты роль атқарады. Біз **В**өрісі барлық токтармен, **В** векторының циркуляциясы берілген контур қоршаған токтармен анықталатынын білеміз. Бұған қарамастан, кейбір жағдайларда арнаулы симметрия бар кезде циркуляция туралы теорема **В**-ны өте қарапайым табуға мүмкіндік береді.

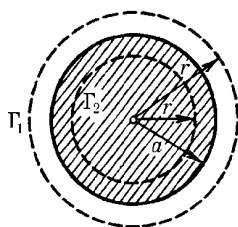
Бұл **В** векторының циркуляциясын есептеуді контурды дұрыс тандап алып, B (не B_l)-ны контурдың ұзындығына не оның бөлігіне көбейтуге келтіретіндей жағдайларда болады. Егер бұлай болмаса,

онда **B** өрісін есептеуді басқа әдістермен, мысалы, Био–Савар заңының көмегімен немесе сәйкес дифференциал тендеулерді шешу жолымен жүргізуге болады және де есептеу өте күрделі болады.

§ 6.4. В векторының циркуляциясы туралы теореманың қолданылулары

B өрісін есептеу кезінде циркуляция туралы теореманы пайдалану тиімділігін кескіндейтін бірнеше іс жүзінде маңызды мысалдарды қарастырамыз, ал одан соң осы есептеу әдісінің қаншалықты жан-жақтылығын талдаймыз.

1-мысал. Түзу токтың магнит өрісі. Тұрақты ток I радиусы a дөңгелек қимасы бар шексіз ұзын түзу сым бойымен жүреді дейік. Сым сыртындағы және ішіндегі өрістің **B** индукциясын табамыз.



6.6-сурет

екендігі шығады

Есептің симметриясынан осы берілген жағдайда **B** векторының сызықтары центрі сым осінде центріден шеңберлер түрінде болуы тиіс екендігі шығады. Сондай-ақ, **B** векторының модулі сым өсінен r қашықтықтағы барлық нүктелерде бірдей болуы тиіс. Сондықтан **B** векторының циркуляциясы туралы теорема бойынша Γ_1 дөңгелек контур үшін (6.6-сурет) $B \cdot 2\pi r = \mu_0 I$, бұдан шығатыны, сым сыртында

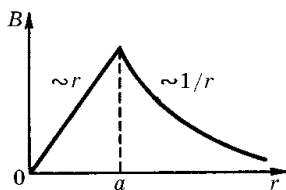
$$B = (\mu_0/2\pi) I/r \quad (r \geq a). \quad (6.18)$$

Осы сұрақты тікелей шешу (Био–Савар заңының көмегімен) анағұрлым күрделі екенін ескертеміз.

Сымның ішінде сол симметрия тұрғысынан **B** векторының сызықтары да шеңберлер болатындығы шығады.

B векторының циркуляциясы туралы теорема бойынша Γ_2 дөңгелек контур үшін (6.6-сурет) $B \cdot 2\pi r = \mu_0 I_r$, мұндағы, $I_r = I(r/a)^2$ – берілген контурмен қоршалған ток. Бұдан біздің табатынымыз, сым ішінде

$$B = (\mu_0/2\pi) I r/a^2 \quad (r \leq a). \quad (6.19)$$



6.7-сурет

$B(r)$ тәуелділігі 6.7-суретте график түріндегі көрсетілген.

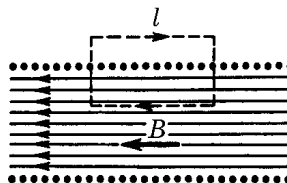
Егер сым қимасы дөңгелек түтік түрінде болса, онда сыртындағы B индукция (6.18) формуламен анықталады, ал ішінде магнит өрісі болмайды. Мұны $\mathbf{B}$ векторының циркуляциясы туралы теорема көмегімен көрсету оңай.

2-мысал. Соленоидтың магнит өрісі. Цилиндр бетіне винттік сызық бойымен оралған өткізгіш бойымен I ток өтеді делік. Осындай ток орап ағатын цилиндр *соленоид* деп аталады. Соленоидтың ұзындық бірлігіне өткізгіштің n орамы келетін болсын. Егер винттік сызық қадамы өте аз болса, онда соленоидтың әрбір орамын жуықтап тұйық ораммен ауыстыруға болады. Сондай-ақ, өткізгіштің қимасын соленоидтағы ток оның бетімен ағатындай өте аз деп есептейміз.

Тәжірибе мен есептеу соленоид неғұрлым ұзын болса, оның сыртындағы магнит өрісінің индукциясы соғұрлым аз екенін көрсетеді. Шексіз ұзын соленоид үшін сыртында магнит өрісі мүлде болмайды.

Симметриялық тұрғыдан соленоид ішіндегі $\mathbf{B}$ векторының сызығы оның осі бойымен бағытталғаны белгілі, бұл жерде $\mathbf{B}$ векторы соленоидтағы ток бағытымен оң винттік жүйені құрайды.

Соленоидтың магнит өрісінің конфигурациясына қатысты анықтағандарымыздың өзі тік бұрышты контурды 6.8-суретте көрсетілгендей етіп тандап алу керектігін ойға салады. Берілген контур бойынша $\mathbf{B}$ векторының циркуляциясы Bl -ға тең және контур nI токты қамтиды. Циркуляция туралы теоремаға сәйкес $Bl = \mu_0 nI$, бұдан ұзын соленоид ішінде



6.8-сурет

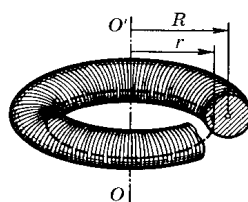
$$B = \mu_0 nI, \quad (6.20)$$

яғни, ұзын соленоид ішіндегі өріс біртекті (соленоидтың шетіне жақын аймақтарды есептемегенде, бірақ мұны есептеу барысында көбінесе ескермейді). nI көбейтідісін *ампер орам саны* деп атайды. $n = 2000$ орам/м және $I = 2A$ кезінде соленоид ішіндегі магнит өрісі $B = 5mT$.

3-мысал. Тороидтың магнит өрісі. Тороид дегеніміз тор пішінді каркасқа оралған сым (6.9-сурет).

Симметриялық пайымдаулардан $\mathbf{B}$ векторының сызықтары центрі OO' тороид осінде жатқан шеңберлер болуы тиіс екенін түсіну қиын емес. Сондықтан контур ретінде осындай шеңберлердің бірін алу керектігі анық.

Егер контур тороид ішінде орналасса, ол NI токты қамтиды, мұндағы N – тороидтық катушкадағы орамдар саны, I – сымдағы ток. Контурдың радиусы r болсын, сонда циркуляция туралы теорема бойынша $B \cdot 2\pi r = \mu_0 NI$, бұдан шығатыны тороид ішінде



6.9-сурет

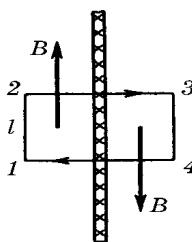
$$B = (\mu_0 / 2\pi) NI / r. \quad (6.21)$$

(6.21)-ді (6.18)-бен салыстырудан тороид ішіндегі магнит өрісі OO' осі бойымен ағатын NI тұзу ток өрісімен дәл келетіні көрініп тұр. N мен R тороид радиусын шексіздікке ұмтылдырып (тороидтың кимасы өзгермеген кезде) соңында шексіз ұзын соленоидтың магнит өрісі үшін, (6.20) өрнекті аламыз.

Егер біз таңдаған дөңгелек контур тороидтан тыс өтсе, онда ол токтарды қамтымайды, сондықтан мұндай контур үшін $B \cdot 2\pi r = 0$. Бұл тороидтан тыс магнит өрісі болмайды деген сөз.

Алдыңғы пайымдауларымызда ток сызықтары меридиандық жазықтықтарда, яғни тороидтың OO' осі арқылы өтетін жазықтықтарда жатады. деп ұйғарылған болсын. Нақты тороидта ток сызықтары (орамдар) қатаң түрде бұл жазықтықтарда жатпайды, сондықтан OO' осі айналасында ток құраушысы болады. Бұл құраушы дөңгелек ток өрісіне ұқсас қосымша өріс тудырады.

4-мысал. Тоғы бар жазықтықтың магнит өрісі. Бірқалыпты таралған ток



6.10-сурет

бір бағыт бойынша өтетін шексіз өткізгіш жазықтықты қарастырамыз. 6.10-суретте тоғы сурет жазықтығынан әрі қарай ағатын осындай жазықтықтың ізі көрсетілген (крестиктермен белгіленген). Ток сызығы бойымен бағытталған $\mathbf{i}$ векторы түріндегі **тоқтың сызықтық тығыздығы** деген ұғымды ендіреміз. Осы вектордың модулі «көлденең киманың» ролін атқаратын ұзындық бірлігіне келетін токты береді.

Тоғы бар жазықтықты тоғы бар жіңішке жіптерге ойша бөліп, **B** қорытқы өріс жазықтыққа параллель бағытталатынын пайымдау қиын емес, және де жазықтықтың оң жағында — төмен, сол жағында — жоғары (6.10-суретті қараңыздар). Бұл бағыттарды оң винт ережесі бойынша анықтау оңай. **B** өріс индукциясын анықтау үшін **B** векторының циркуляциясы туралы теореманы пайдаланамыз. Бұл жағдайда **B** векторының сызықтары қалай орналасқанын біле отырып, 1234 тікбұрыш түріндегі контурды тандап аламыз. Сонда циркуляция туралы теорема бойынша $2Bl = \mu_0 i l$, мұндағы l - контурдың тоғы бар жазықтыққа параллель жағының ұзындығы. Соңғы теңдіктен мынаны табамыз:

$$B = (\mu_0 i) / 2. \quad (6.22)$$

Алынған формуладан көрініп тұрғандай, магнит өрісі жазықтықтың бірінші жағындағы сияқты, екінші жағында да біртекті. Бұл нәтиже тоғы бар шектелген пластина үшін де, бірақ пластинаға жақын және оның шетінен алыс нүктелер үшін дұрыс.

Жалпы пайымдаулар. Қарастырылған мысалдарда алынған нәтижелерді Био–Савар заңының көмегімен тікелей табуға болар еді. Бірақ циркуляция туралы теорема бұл нәтижелерді едәуір қарапайым және тез алуға мүмкіндік береді.

Сонымен бірге бұл мысалдардағы өрісті есептеуді жүргізудегі жеңілдік оқырмандарда циркуляция туралы теореманы қолдануға негізделген әдістің күші туралы қате пікір туғызбауы тиіс. Электр өрісі үшін Гаусс теоремасы жағдайындағыдай, **B** векторының циркуляциясы туралы теорема көмегімен оңай шығарылатын есептер саны да өкінішке орай, шектеулі ғана. Токтың осындай, дөңгелек орам сияқты симметриялық конфигурациясы үшін циркуляция туралы теореманың әлсіз екенін айтсақ жеткілікті. Бірақ, мұнда жақсы симметрияға қарамастан, магнит өрісінің конфигурациясы есептеу үшін қажетті қарапайым контурды табуға мүмкіндік бермейді және есепті анағұрлым қиындау басқа әдістермен шығаруға тура келеді.

§ 6.5. Магнит өрісінің негізгі заңдарының дифференциалдық түрі

В өрісінің дивергенциясы. В өрісі үшін (6.14) Гаусс теоремасының дифференциалдық түрі мынадай:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (6.23)$$

яғни, **В өрістің дивергенциясы барлық жерде нөлге тең.** Бұл қайталап айтсақ, магнит өрісінің көзі болмайды деген сөз (магнит зарядтары). Магнит өрісін магнит зарядтары (табиғатта жоқ) емес, электр токтары тудырады.

(6.23) **іргелі заң** болып табылады: ол тек қана тұрақты емес, айнымалы магнит өрістері үшін де дұрыс.

В өрісінің роторы. В векторының циркуляциясы туралы теорема өрнектейтін магнит өрісінің маңызды қасиеті бұл теореманы оның зерттеу және есептеу құралдары ретіндегі мүмкіндіктерін кеңейтетіндей дифференциалдық түрде көрсетуге түрткі болады.

Осы мақсатпен В векторының циркуляциясының контурмен шектелген S ауданға қатынасын қарастырамыз. Айтқандай, бұл қатынас $S \rightarrow 0$ кезде қандай да бір шекке ұмтылады, және де бұл шек кеңістіктің берілген нүктесінде контурдың бағдарына байланысты. Контурдың бағдары контур жазықтығына нормаль **n** векторымен беріледі, және **n**-нің бағыты оң винт ережесі бойынша контурды айналу бағытымен байланысты.

Көрсетілген амал кезінде алынған шек циркуляция алынатын контур жазықтығына **n** нормаль бағытына қандай да бір вектордың проекциясы ретінде көрінетін скаляр шаманы береді. Бұл вектор **В өрістің роторы** деп аталады және $\text{rot } \mathbf{B}$ символымен белгіленеді. Сөйтіп,

$$\lim_{S \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{l}}{S} = (\text{rot } \mathbf{B})_n, \quad (6.24)$$

мұнда оң жақта $\text{rot } \mathbf{B}$ векторының **n** нормальға проекциясы тұр.

Сонымен, В векторлық өрістің әрбір нүктесінде бағыты мен модулі сол нүктедегі өрістің өзінің қасиеттерімен байланысқан $\text{rot } \mathbf{B}$ векторы бар. $\text{rot } \mathbf{B}$ векторының бағыты бір мезгілде $\text{rot } \mathbf{B}$

векторының модулі болып табылатын (6.24) шамасының максимум мәніне жеткен кездегі S ауданға $\mathbf{n}$ нормаль бағытымен анықталады.

Математикада $\text{rot } \mathbf{B}$ үшін координаталық түрдегі өрнек алады. Біздің мақсатымыз үшін маңыздысы: формальды түрде $\text{rot } \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{B}$ операторының $\mathbf{B}$ векторына векторлық көбейтіндісі ретінде, яғни $\nabla \times \mathbf{B}$ ретінде қарастырылады. Біз соңғысын, ең тиімді белгіленуін пайдаланамыз: ол бірден анықтауыш көмегімен $\nabla \times \mathbf{B}$ – векторлық көбейтіндісін жазуға мүмкіндік береді:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}, \quad (6.25)$$

мұндағы, $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ – декарттық координата осьтерінің бірлік векторлары. Берілген өрнек тек $\mathbf{B}$ өрісінің роторы үшін ғана емес, кез келген векторлық өріс үшін, дербес жағдайда $\mathbf{E}$ өрісі үшін де дұрыс.

Енді $\mathbf{B}$ векторы циркуляциясы туралы теореманы қолданайық. (6.24)-ке сәйкес (6.14) – теңдеуді мына түрде қарастырайық:

$$\lim_{S \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{B} d\mathbf{l}}{S} = \mu_0 j_n,$$

Немесе $(\nabla \times \mathbf{B})_n = \mu_0 j_n$. Бұдан

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}}. \quad (6.26)$$

Бұл $\mathbf{B}$ векторының циркуляциясы туралы теореманың дифференциалдық формасы болып табылады. $\mathbf{B}$ өрісі роторының бағыты бойынша берілген нүктедегі ток тығыздығы $\mathbf{j}$ векторымен дәл келеді, ал $\nabla \times \mathbf{B}$ модулі $\mu_0 j$ -ге тең.

Электростатикалық өрісте $\mathbf{E}$ векторының циркуляциясы нөлге тең, сондықтан

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{E} = 0}. \quad (6.27)$$

Барлық жерде роторы нөлге тең векторлық өріс потенциалдық болып табылады, олай болмаса өріс *соленоидтық* болады. Демек,

электрстатикалық өріс потенциалдық, магниттік өріс-соленоидтық өріс болып табылады.

§ 6.6. Ампер күші

Ампер күші. Әрбір ток тасушыға магниттік күш әсер етеді. Бұл күштің әсері бойымен зарядтар қозғалатын өткізгішке беріледі. Нәтижесінде магнит өрісі тогы бар өткізгіштің өзіне белгілі бір күшпен әсер етеді. Осы күшті табамыз.

Ток тасушы болып табылатын (мысалы, металдарда электрондар) зарядтың көлемдік тығыздығы ρ -ға тең болсын. Өткізгіш көлемінің dV элементін ойша бөліп аламыз. Онда ρdV -ға тең ток тасушы заряд бар. Сонда өткізгіштің dV элементіне әсер ететін күшті (6.1) формуласы бойынша мына түрде жазуға болады:

$$d\mathbf{F} = \rho[\mathbf{u}\mathbf{B}]dV,$$

мұндағы, $\mathbf{u}$ – зарядтардың реттелген қозғалысының жылдамдығы.

$\mathbf{j} = \rho\mathbf{u}$ болғандықтан:

$$\boxed{d\mathbf{F} = [\mathbf{j}\mathbf{B}]dV.} \quad (6.28)$$

Егер ток жіңішке өткізгіш бойымен өтетін болса, онда (6.8)-ге сәйкес $\mathbf{j}dV = I d\mathbf{l}$ және

$$\boxed{d\mathbf{F} = I[d\mathbf{l}, \mathbf{B}].} \quad (6.29)$$

мұндағы, $d\mathbf{l}$ – токтың бағытымен дәл келетін және жіңішке өткізгіш ұзындығының элементін сипаттайтын вектор.

(6.28) және (6.29) – формулалары *Ампер заңын* өрнектейді. Осы өрнектерді ток элементтері бойынша (көлемдік немесе сызықтық) интегралдап, өткізгіштің осы не басқа көлеміне немесе оның сызықтық бөлігіне әсер ететін магниттік күшті табуға болады.

Магнит өрісінде токтарға әсер ететін күштерді амперлік немесе Ампер күштері деп атайды.

Мысал. Параллель токтардың өзара әсер күштері. Егер сымдардың ара қашықтығы b -ға тең болса, вакуумда өзара әсерлесетін I_1 және I_2

токтары бар екі параллель шексіз ұзын сымдардың амперлік күшін табамыз. Күшті есептеуді осы жүйенің ұзындық бірлігінде жүргіземіз. I_2 тогының әрбір элементі I_1 тогының магнит өрісінде, атап айтқанда, (6.18) – ге сәйкес $B_1 = (\mu_0/4\pi)2I_1/b$ өрісінде болады. I_2 тогының элементі мен $\mathbf{B}_1$ векторының арасындағы бұрыш тік, сондықтан (6.29) формуладан I_2 тогы бар өткізгіштің ұзындық бірлігіне

$F_{\text{бір}} = I_2 B_1$ күш әсер етеді, немесе

$$F_{\text{бір}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{b}. \quad (6.30)$$

I_1 тогы бар өткізгіштің ұзындық бірлігіне әсер ететін күш үшін әлбетте осы өрнек шығады.

Және соңғысы. Бірдей бағытталған токтар тартылады, ал карама-қарсы бағытталғандар – тебіледі, бұған көз жеткізу қиын емес. Мұнда тек магниттік күш туралы сөз болады. Бірақ, магниттік күштен басқа өткізгіштердің бетіндегі артық зарядтардың себебінен болатын электрлік күштің бар екендігін ұмытуға болмайды. Сондықтан, егер сымдар арасындағы толық әсер күші туралы айтсақ, онда ол тартылыс күші де, тебілу күші де болуы мүмкін-бәрі де толық күштің магниттік және электрлік құраушыларының ара қатынасына байланысты (6.7.-есепті қараңыздар).

Тогы бар контурға әсер ететін күш. Тогы бар контурға магнит өрісінде әсер ететін қорытқы амперлік күш (6.29)-ға сәйкес былай анықталады:

$$\mathbf{F} = I \oint [d\mathbf{l}, \mathbf{B}], \quad (6.31)$$

мұндағы интегралдау I тогы бар берілген контур бойынша жүргізіледі.

Егер осы магнит өрісі біртекті болса, онда $\mathbf{B}$ векторын интеграл астынан шығаруға болады және есеп $\oint d\mathbf{l}$ векторлық интегралды есептеуге алып келеді. Бұл интеграл $d\mathbf{l}$ элементар векторлардың тұйық тізбегін береді, сондықтан ол нөлге тең. Демек, және $\mathbf{F} = 0$, яғни біртекті магнит өрісінде қорытқы амперлік күш нөлге тең.

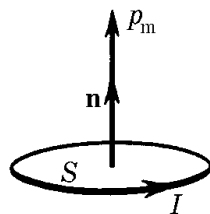
Егер магнит өрісі біртекті емес болса, онда (6.31) қорытқы күш жалпы айтқанда, нөлден өзгеше және әрбір нақты жағдайда ол

(6.31) өрнегінің көмегімен анықталады. Әрі қарай тогы бар контур жазық және оның өлшемі өте кішкентай болатын жағдай ерекше көңіл аударады. Мұндай тогы бар контур **элементар** контур деп аталады.

Тогы бар элементар контур $\mathbf{p}_m$ – **магнит моментінің** көмегімен тиімді сипатталады. Анықтама бойынша

$$\mathbf{p}_m = IS\mathbf{n}, \quad (6.32)$$

мұндағы, I – ток; S – контурмен шектелген аудан; $\mathbf{n}$ – контурға тұрғызылған нормаль, оның бағыты контурдағы ток бағытымен оң винт ережесінің байланысты (6.11-сурет). Магниттік тұрғыда тогы бар элементар контур оның $\mathbf{p}_m$ магниттік моментімен толық сипатталады.



6.11-сурет

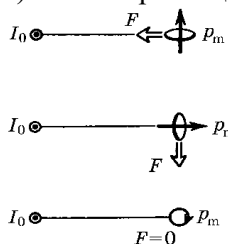
Контурдың кішкентайлығын ескеріп, (6.31) – формула бойынша әжептәуір қиын есептеу біртекті емес магнит өрісінде тогы бар элементар контурға әсер ететін күш үшін мына өрнекке алып келеді:

$$\mathbf{F} = \mathbf{p}_m \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial n}, \quad (6.33)$$

мұндағы, p_m – контурдың магнит моментінің модулі; $\partial \mathbf{B} / \partial n$ – $\mathbf{B}$ векторының $\mathbf{n}$ нормаль бағыты бойынша немесе $\mathbf{p}_m$ векторының бағыты бойынша бағыты туындысы. Соңғы өрнек электр өрісінде электрлік дипольға әсер ететін күш үшін өрнекке (1.39) ұқсас.

(6.33) формуладан электрлік диполь жағдайындағы сияқты көрініп тұр:

- 1) біртекті магнит өрісінде $\mathbf{F} = 0$, өйткені $\mathbf{B} \partial \mathbf{B} / \partial n = 0$;
- 2) $\mathbf{F}$ векторының бағыты, жалпы айтқанда не $\mathbf{B}$ векторымен, не $\mathbf{p}_m$ векторымен дәл келмейді; $\mathbf{F}$ векторы контурдың орналасқан жердегі **$\mathbf{p}_m$ векторының бағытында** алынған $\mathbf{B}$ векторының **элементар өсімішесінің** бағытымен ғана дәл келеді. Айтылғанды 6.12-сурет иллюстрациялайды, мұнда I_0 түзу токтың магнит өрісіндегі контурдың үш орны көрсетілген. Бұл жерде әрбір жайғайдағы контурға әсер ететін $\mathbf{F}$



6.12-сурет

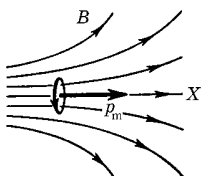
қорытқы күш векторы да көрсетілген (бұл шынында осылай екенін өз бетімен көз жеткізген пайдалы).

Егер біз $\mathbf{F}$ күшінің қандай да X бағытына проекциясын қарайтын болсақ, онда (6.33) өрнегін осы бағыттағы проекцияда жазсақ жеткілікті, және мынаны аламыз:

$$F_x = p_m \frac{\partial B_x}{\partial n}, \quad (6.34)$$

мұндағы, $\partial B_x / \partial n$ – $\mathbf{B}$ векторының контурға $\mathbf{n}$ - нормаль бағыты бойынша (немесе p_m бойынша) сәйкес проекциясының туындысы.

Мысал. Магниттік моменті p_m болатын, тогы бар элементар контур біртекті емес магнит өрісінің симметрия осіне перпендикуляр, сонымен бірге (оған коса) p_m векторы $\mathbf{B}$ векторының бағытында орналасқан болсын. 6.13-суретте көрсетілгендей X осінің оң бағытын таңдап аламыз. Сондай-ақ, p_m векторы бағытында B_x проекциясының өсімшесі теріс болса, онда $F_x < 0$. Демек, $\mathbf{F}$ векторы солға қарай – $\mathbf{B}$ үлкен болатын жаққа бағытталған.



6.13-сурет

Егер тогы бар контурды (және p_m векторды) 90° -ка контурдың центрі $\mathbf{B}$ өрісінің симметрия осімен дәл келетіндей бұрсақ, онда бұл жағдайда $F_x = 0$, ал $\mathbf{F}$ векторы X осіне перпендикуляр бағытталған, әрі p_m -нің бағытталған жағына қарай бағытталған болады.

§ 6.7. Тогы бар контурға әсер ететін күштердің моменті

В бір текті магнит өрісінде I тогы бар жазық контурды қарастырамыз. Жоғарыда (161 бетті қараңыздар) біз біртекті магнит өрісінде тогы бар контурға әсер ететін қорытқы күш (6.31) нөлге тең екендігін анықтадық. Ал механикадан белгілі, егер кез келген жүйеге әсер ететін қорытқы күш нөлге тең болса, онда осы күштердің қосынды моменті оған қатысты осы күштердің моментін анықтайтын O нүктесіне тәуелді болмайды. Олай болса, біздің жағдайымызда амперлік күштердің қорытқы моменті туралы ғана айтуға болады.

Анықтама бойынша, амперлік күштердің қорытқы моменті

$$\mathbf{N} = \oint [\mathbf{r}, d\mathbf{F}], \quad (6.35)$$

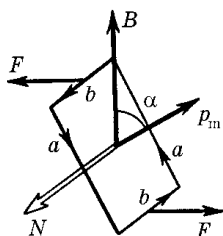
мұндағы, $d\mathbf{F}$ (6.29) формуламен беріледі. Егер (6.35) формула бойынша есептеу жүргізсек, ол біршама қолайсыз және қызығушылықты тудырмайды, сондықтан біз оны келтірмейміз, сонда тогы бар қалауымызша алынған контур үшін бұл күш моментін былай көрсетуге болады:

$$\mathbf{N} = [\mathbf{p}_m \mathbf{B}], \quad (6.36)$$

мұндағы, $\mathbf{p}_m$ – тогы бар контурдың магнит моменті (жазық контур үшін $\mathbf{p}_m = I\mathbf{S}\mathbf{n}$)*.

(6.36)-дан біртекті магнит өрісінде тогы бар контурға әсер ететін $\mathbf{N}$ амперлік күштердің моменті $\mathbf{p}_m$ векторына да, сондай-ақ, $\mathbf{B}$ векторына да перпендикуляр екені көрініп тұр. $\mathbf{N}$ векторының модулі $N = p_m B \sin \alpha$, мұндағы α – $\mathbf{p}_m$ және $\mathbf{B}$ векторлары арасындағы бұрыш. $\mathbf{p}_m \uparrow \uparrow \mathbf{B}$ болатын жағдайларда күш моменті $\mathbf{N} = 0$, және контурдың қалпы орнықты болатынына оңай көз жеткізуге болады. Егер $\mathbf{p}_m \downarrow \downarrow \mathbf{B}$ болса, онда $N = 0$, бірақ контурдың мұндай қалпы орнықсыз болып табылады: осы қалпытан сәл ғана ауытқу контурды бастапқы қалпынан бұдан да ауытқуға көбірек тырысатын күш моменттерінің пайда болуына әкеледі.

Мысал. (6.36) формуланың дұрыстығына тогы бар тікбұрышты контурдың қарапайым жағдайында көз жеткіземіз.



6.14-сурет

Суреттен көрініп тұрғандай, a жақтарына әсер етуші күштер оларға және $\mathbf{B}$ векторына перпендикуляр, сондықтан бұл күштер горизонталь бағытталған (суретте олар көрсетілмеген) және контурды тек созуға (не сығуға) тырысады.

Ал b жақтары $\mathbf{B}$ -ға перпендикуляр, сондықтан олардың әрқайсысына әсер ететін күш

$$F = IlB.$$

*Егер орам жазық болмаса, онда оның магнит моменті $\mathbf{p}_m = I \int d\mathbf{S}$, мұнда интеграл тогы бар контурға тартылған S бет бойынша алынады. Бұл интеграл S бетті таңдауға тәуелді емес, ол тек тартылған контурға ғана тәуелді.

Бұл күштер контурды оның $\mathbf{p}_m$ векторы $\mathbf{B}$ вектормен бағыттас болатындай етіп бұруға ұмтылады. Ендеше, контурға күш моменті $a \sin \alpha$ – жұптар иінінің F -ке көбейтіндісіне тең болатын күштер жұбы әсер етеді, яғни

$$N = I b B a \sin \alpha.$$

ab – контурмен шектелген аудан және $Iba = p_m$ екенін ескеріп, мынаны аламыз:

$$N = p_m B \sin \alpha,$$

Бұл векторлық түрде (6.36) тәрізді жазылады.

Қорыта келе (6.36) өрнегі біртекті емес магнит өрістер үшін де дұрыс екенін атап кеткен жөн. Тек тогы бар контурдың өлшемі айтарлықтай аз болу керек. Сонда біртекті емес өрістің $\mathbf{N}$ – айналу моментіне әсерін ескермеуге болады. Дәл осы жағдай тогы бар элементар контурға қатысты.

Сыртқы біртекті емес магнит өрісіндегі тогы бар элементар контур сыртқы біртекті емес электр өрісіндегі электрлік диполь тәрізді: ол орнықты тепе-теңдік жағдайына бұрылатын болады ($\mathbf{p}_m \uparrow \uparrow \mathbf{B}$ кезінде) және бұдан басқа $\mathbf{F}$ – қорықты күштің әсерінен $\mathbf{B}$ – индукция үлкен жаққа қарай тартылады.

§ 6.8. Тогы бар контур орын ауыстырған кездегі жұмыс

Тогы бар контур сыртқы магнит өрісінде орналасса, біз оны тұрақты деп аламыз, – контурдың жеке элементеріне амперлік күштер әсер етеді, сондықтан контур орын ауыстырғанда бұл күштер жұмыс жасайды. Бұл параграфта біз I тогы бар контур элементар орын ауыстырған кезде амперлік күштердің жасайтын жұмысы былай анықталатынын көрсетеміз:

$$\delta A = I d\Phi, \quad (6.37)$$

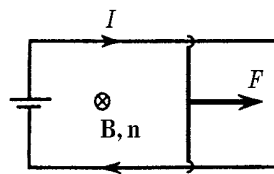
мұндағы, $d\Phi$ – осы орын ауыстыру кезіндегі контур арқылы өтетін магнит ағынының өсімшесі.

Бұл формуланың дәлелдеуін үш кезеңмен жүргіземіз.

1. Алдымен жеке жағдайды қарастырамыз: ұзындығы l қозғалмалы қосқышы бар контур оның жазықтығына перпендикуляр және сурет жазықтығының сырт жағына бағытылған біртекті магнит өрісінде орналасқан. (6.29)–ға сәйкес қосқышқа амперлік күш әсер етеді: $F = IlB$. Қосқыш оңға қарай dx орын ауыстырғанда бұл күш оң жұмыс жасайды.

$$\delta A = Fdx = IBldx = IBdS, \quad (6.38)$$

мұндағы, dS – контурмен шектелген ауданның өсімшесі. Φ – магнит ағынының таңбасын анықтау үшін, контурмен шектелген бетке $\mathbf{n}$ нормальды әрдайым ол контурдағы ток бағытымен оң винт жүйесін жасайтындай етіп алуға *келісеміз* (6.15 – суретті қара). Бұл кезде I ток әрқашан оң болады. Φ ағын оң болуы да, теріс болуы да мүмкін. Бірақ біздің жағдайымызда Φ тәрізді, $d\Phi = BdS$ – те оң шамалар болып табылады (егер $\mathbf{B}$ – өріс бізге қарай бағытылса немесе қосқыш солға қарай орын ауыстырса, онда екі жағдайда да $d\Phi < 0$). Қалай болғанмен, осы жағдайлардың кез келгенінде (6.38) өрнекті (6.37) түрінде көрсетуге болады.



6.15 сурет

2. Алынған нәтиже $\mathbf{B}$ өрістің кез келген бағыты үшін дұрыс. Бұған көз жеткізу үшін $\mathbf{B}$ векторды үш құраушыға жіктейміз: $\mathbf{B} = \mathbf{B}_n + \mathbf{B}_l + \mathbf{B}_x$. $\mathbf{B}_l$ құраушысы – қосқыш боймен – ондағы токқа параллель және сондықтан қосқышқа қысым күшін түсірмейді. $\mathbf{B}_x$ құраушысы – орын ауыстыру бойымен – орын ауыстыруға перпендикуляр күшті береді, ол жұмыс жасамайды. Тек $\mathbf{B}_n$ – қосқыш орын ауыстыратын жазықтыққа перпендикуляр құраушысы қалады. Сондықтан (6.38) формуладағы B -ның орнына тек B_n – ді алу керек. Бірақ $B_n dS = d\Phi$, және біз тағы да (6.37) формулаға қайтып ораламыз.

3. Енді тұрақты біртекті емес магнит өрісіндегі еркін орын ауыстыратын кез келген контурды қарастыруға көшеміз (контур бұл кезде де еркін түрде өзгеруі мүмкін). Берілген контурды тоқтың шексіз аз элементеріне ойша бөлеміз және олардың шексіз аз орын ауыстыруын қарастырамыз. Бұл жағдайда токтың әрбір

элементі орын ауыстыратын магнит өрісін біртекті деп есептеуге болады. Осындай орын ауыстыру үшін токтың әрбір элементтерінің жұмысына $dA = Id'\Phi$ өрнекті қолдануға болады, мұнда $d'\Phi$ – ді контурдың осы берілген элементінен контур арқылы өтетін ағынның өсімшесіне үлес деп түсінуге болады. Контурдың барлық элементтері үшін осындай элементар жұмыстарды қосып, қайтадан (6.37) өрнекті аламыз, мұнда $d\Phi$ – барлық контур арқылы өтетін магнит ағынының өсімшесі.

Тоғы бар контурдың 1-бастапқы орынынан 2-соңғы орынға дейін толық орын ауыстырған кездегі амперлік күштің жұмысын табу үшін (6.37) – өрнегін интегралдау жеткілікті:

$$A = \int_1^2 I d\Phi. \quad (6.39)$$

Егер осы орын ауыстыру кезінде I токты тұрақты етіп ұстаса, онда

$$A = I(\Phi_2 - \Phi_1), \quad (6.40)$$

мұндағы, Φ_1 мен Φ_2 – бастапқы және соңғы орындардағы контур арқылы өтетін магнит ағындары. Сөйтіп, бұл жағдайдағы амперлік күштердің жұмысы ток күші мен контур арқылы өтетін магнит ағынының өсімшесінің көбейтіндісіне тең. (6.40) – өрнегі тек шаманығана емес, жасалған жұмыстың таңбасын да береді.

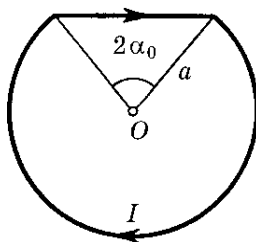
Мысал. I тоғы бер жазық контур $\mathbf{B}$ магнит өрісінде нормальдың контурға $\mathbf{n} \downarrow \mathbf{B}$ орнынан $\mathbf{n} \uparrow \mathbf{B}$ кезіндегі орынға бұрылады ($\mathbf{n}$ нормальдың бағыты ток бағытымен оң винт ережесімен байланысқанын еске саламыз). Контурмен шектелген аудан S -ке тең. I токты тұрақты ұстай отырып, көрсетілген орын ауыстыру кезіндегі амперлік күштің жұмысын табамыз.
(6.40) – қа сәйкес

$$A = I[BS - (-BS)] = 2IBS,$$

бұл осы жағдайда жұмыс $A > 0$, кері бұрылу кезінде $A < 0$. Жұмыс (6.40) сыртқы магнит өрісінің энергиясы есебінен емес (ол өзгермейді), контурда токты сүйемелдейтін э.к.к. көзінің есебінен жасалатынын айта кету керек. (Бірақ бұл туралы 9-тарауда толық айтылады).

Есептер

6.1. В индукцияны тікелей есептеу. I ток 6.16-суретте көрсетілген иілген жіңішке өткізгіш бойымен өтеді. O нүктесіндегі B магнит индукциясын табу керек. Керекті шамалар суретте көрсетілген.



6.16-сурет

Шешімі. Ізделінген шама $B = B_- + B_+$, мұндағы B_- – контурдың түзу сызықты бөлігінің магнит өрісі. B_+ – қисық сызықты бөлігінің магнит өрісі. «Био–Савар заңына сәйкес» (150 беттегі 1-мысалды қара):

$$B_- = 2 \int_0^{\alpha_0} \frac{\mu_0 I \cos \alpha \, d\alpha}{4\pi a \cos \alpha_0} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \operatorname{tg} \alpha_0,$$

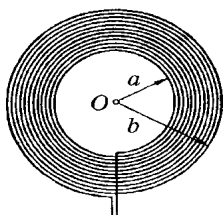
$$B_+ = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I(2\pi - 2\alpha_0)a}{a^2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} (\pi - \alpha_0)$$

Нәтижесінде

$$B = (\pi - \alpha_0 + \operatorname{tg} \alpha_0)(\mu_0 I) / 2\pi a.$$

$\alpha_0 \rightarrow 0$ кезінде бізге белгілі (6.13) өрнекке келетінімізге көз жеткізген пайдалы.

6.2. Изоляциясы бар жіңішке сым I тұрақты ток өтетін тығыз орналасқан орамдардың N көп санынан жазық спираль жасайды. Ішкі және сыртқы орамдардың радиустары a және b -ға тең. (6.17-сурет.) 1) Спиральдың центрі – O нүктесіндегі B магнит индукциясын; 2) осы берілген ток кезіндегі спиральдың магнит моментін табу керек.



6.17-сурет

Шешімі: 1) Радиусы r бір орамның магнит индукциясына үлесі (6.13) – ке сәйкес мынаған тең:

$$B_1 = \mu_0 I / 2r, \quad (1)$$

ал барлық орамдардан

$$B = \int B_1 \, dN, \quad (2)$$

мұндағы, $dN - (r, r + dr)$ – интервалдағы орамдар саны.

$$dN = \frac{N}{b-a} dr. \quad (3)$$

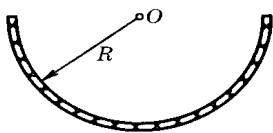
(1) мен (3)-ті (2)-ге қойған соң және одан әрі r бойынша a -дан b -ға дейін интегралдай отырып, мынаны аламыз:

$$B = \frac{\mu_0 I N}{2(b-a)} \ln \frac{b}{a}.$$

2) Радиусы r бір орамның магнит моменті $\rho_{m1} = I\pi r^2$, ал барлық орамдар үшін $\rho_m = \int \rho_{m1} dN$, мұндағы, dN (3) – формуламен анықталады. Интегралдау мынаны береді:

$$B = \frac{\pi I N}{b-a} \frac{b^3 - a^3}{3} = \frac{\pi I N}{3} (a^2 + ab + b^2).$$

- 6.3. Радиусы R , жіңішке жартылай сақина түріндегі көлденең қимасы бар науа пішінді, ұзын түзу өткізгіш бойымен I ток өтеді (6.18-сурет). O осіндегі B магнит индукциясын табу керек.

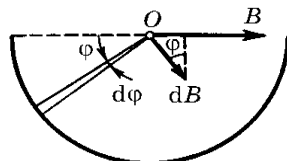


6.18-сурет

Шешімі: Алдымен O нүктесінде $\mathbf{B}$ векторы қайда бағытталғанын анықтаймыз. Ол үшін бүтін өткізгішті dI тогы бар элементар

тізбекке ойша бөлеміз. Сонда кез келген екі симметриялық тізбек қосындысында оңға бағытталған $d\mathbf{B}$ векторды беретіні анық (6.19-сурет). Демек, $\mathbf{B}$ векторы да солай қарай бағытталған.

Сондықтан O нүктесіндегі $\mathbf{B}$ өрісті табу үшін $\mathbf{B}$ векторы бағытында әрбір ток тізбегінен $d\mathbf{B}$ элементар векторлардың проекциясының қосындысын табу жеткілікті:



6.19-сурет

$$B = \int dB \sin \varphi. \quad (1)$$

(6.11) – ге сәйкес

$$dB = \mu_0 dI / 2\pi R, \quad (2)$$

мұндағы, $dI = (I/\pi)d\varphi$ (6.19-суретті кара). (2)-ні (1)-ге қойған соң, мынаны аламыз:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R} \int_0^\pi \sin\varphi d\varphi = \frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}.$$

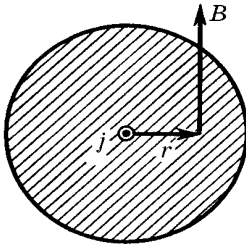
6.4. В циркуляциясы туралы теорема және суперпозиция принципі. Қимасы дөңгелек, біртекті ұзын тұзу сымның ішінде осі сымның осіне параллель және оған қатысты $\mathbf{l}$ қашықтыққа ығысқан дөңгелек цилиндрлік қуыс бар. Сым бағытымен тығыздығы j тұрақты ток өтеді. Қуыстың ішіндегі $\mathbf{B}$ магнит индукциясын табу керек.

Шешімі. Ізделініп отырған шаманы суперпозиция принципіне сәйкес былай көрсетуге болады:

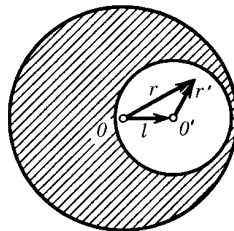
$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 - \mathbf{B}', \quad (1)$$

мұндағы, $\mathbf{B}_0$ – егер сым тұтас (қуысы жоқ) болған жағдайдағы магнит индукциясы, ал $\mathbf{B}'$ – дөңгелек кимадан қуыс жасап алып тастаған сым бөлігі бойымен ағатын токтың тудыратын магнит өрісінің индукциясы. Сөйтіп, есеп ең алдымен тұтас сым ішіндегі оның осінен $\mathbf{r}$ қашықтағы $\mathbf{B}$ магнит индукциясын есептеуді қарастырады. Циркуляция туралы теореманы қолдана отырып, $2\pi r B = \mu \pi r^2 j$ екенін жазамыз, бұдан $B = \mu_0 r j / 2$. Соңғы теңдікті 6.20-сурет көмегімен векторлық түрде көрсетуге болады:

$$\mathbf{B} = \mu_0 [\mathbf{j}\mathbf{r}] / 2.$$



6.20-сурет



6.21-сурет

Енді осы формула бойынша $\mathbf{B}_0$ мен $\mathbf{B}'$ – біле отырып, (1) өрнектен олардың айырымын табамыз:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{2} [\mathbf{j}\mathbf{r}] - \frac{\mu_0}{2} [\mathbf{j}\mathbf{r}'] = \frac{\mu_0}{2} [\mathbf{j}, \mathbf{r} - \mathbf{r}'].$$

(6.21)-суреттен $\mathbf{r} = \mathbf{l} + \mathbf{r}'$ екені көрініп тұр. $\mathbf{r} - \mathbf{r}' = \mathbf{l}$ және

$$\mathbf{B} = \mu_0 [\mathbf{j}l]/2.$$

Сөйтіп, біздің жағдайымызда қуыстағы $\mathbf{B}$ магнит өрісі біртекті, және егер ток бізге қарай ақса (6.21-сурет), онда $\mathbf{B}$ өрісі осы сурет жазықтығында жоғары бағытылған.

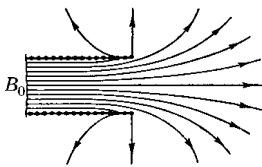
- 6.5. Суперпозиция принципі.** l тогы бар ұзын соленоид берілген. Соленоидтың көлденең қимасының ауданы S , ұзындық бірлігіндегі орам саны n . Осы соленоидтың бүйір жағы арқылы өтетін магнит ағынын табу керек.

Шешімі. Соленоид бүйірі арқылы өтетін $\mathbf{B}$ векторының ағыны Φ . Егер берілген соленоидқа тағы осындай соленоид тақап қойсақ, онда түйіскен бүйірлері арқылы өтетін ағын $\Phi + \Phi = \Phi_0$ болады, мұндағы Φ_0 – соленоидтың көлденең қимасы арқылы өтетін, оның бүйірінен қашықтағы ағын. Сонда

$$\Phi = \Phi_0/2 = \mu_0 n l S/2.$$

Соған қоса, ұзын соленоидтың бүйіріндегі $\mathbf{B}$ өрістің төмендегі ерекшеліктеріне көңіл аудару керек.

1. $\mathbf{B}$ векторының сызықтары 6.22-суретте көрсетілгендей орналасқан.

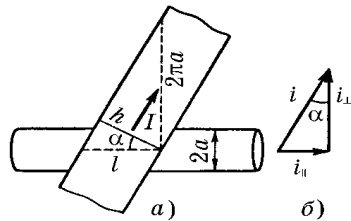


6.22 сурет

Мұны суперпозиция принципінің көмегімен түсіну қиын емес: егер оң жағынан тағы осындай соленоидты тақап қойсақ, осылай жасалған құрама соленоид сыртындағы $\mathbf{B}$ өріс нөлге айналады, ал бұл өріс конфигурациясының суретте көрсетілген жағдайы үшін ғана мүмкін.

2. Осы суперпозиция принципінен B_n – нормаль құраушысы бүйір жағының ауданы бойынша бірдей болады, өйткені құрама соленоид жасаған кезде $B_n + B_n = B_0$, мұндағы, B_0 – соленоид ішіндегі оның бүйір жағынан алыстағы өріс. Бүйір жағының центрінде $B = B_n$, және біз мынаны аламыз: $B = B_0/2$.

- 6.6. Соленоид өрісі.** Іс жүзінде тығыз бір қабат оралған, ені h жіңішке таспа – өткізгіш қима радиусы a ұзын соленоидтың орамы ретінде пайдаланады. Таспа бойымен I тұрақты ток өтеді. Соленоидтің ішіндегі және сыртындағы B магнит өрісін оның осінен r қашықтық функциясы ретінде табу керек.



6.23-сурет

Шешімі. $\mathbf{i}$ токтың сызықтық тығыздығының векторын екі құраушының қосындысы түрінде көрсетуге болады:

$$\mathbf{i} = \mathbf{i}_{\perp} + \mathbf{i}_{\parallel},$$

$\mathbf{i}_{\perp}$ және $\mathbf{i}_{\parallel}$ векторлардың мағынасы 6.23, б - суретте анық. Біздің жағдайымызда осы векторлардың модулдерін 6.23 а-сурет көмегімен мына формулалар бойынша табу болады:

$$i_{\perp} = i \cos \alpha = i \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = (I/h) \sqrt{1 - (h/2\pi a)^2},$$

$$i_{\parallel} = i \sin \alpha = I/2\pi a.$$

Соленоид ішіндегі $\mathbf{B}$ магнит индукциясы (6.20)-ға сәйкес $i_{\perp}$ шамасымен, ал соленоидтан тыс $-i_{\parallel}$ шамасымен анықталады:

$$B_i = \mu_0 i_{\perp} = (\mu_0 I/h) \sqrt{1 - (h/2\pi a)^2} \quad (r < a),$$

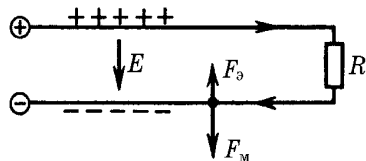
$$B_a = \mu_0 i_{\parallel} a/r = \mu_0 I/2\pi^2 r \quad (r > a),$$

мұндағы, соленоидтан тыс B_a -ны есептеу кезінде циркуляция туралы теорема қолданылды: $2\pi r B_a = \mu_0 2\pi a i_{\parallel}$.

Сөйтіп, соленоидтағы токты «көлденен» және «бойлық» құраушылардың суперпозициясы түрінде қарастырып, біз осындай соленоидтың ішінде тек қана $\mathbf{B}$ өрістің бойлық құрашысы, ал соленоидтан тыс тек көлденең (түзу ток сияқты) құраушысы болады деген қорытындыға келдік.

Бұдан басқа, егер ток тығыздығын өзгертей қалдырып, таспаның енін кішірейтсек, онда $h \rightarrow 0$ кезде ток күші $I \rightarrow 0$, бірақ $I/h = \text{const}$. Бұл жағдайда өріс тек соленоид ішінде қалады – соленоид «идеал» болады.

- 6.7. Параллель өткізгіштердің өзара әсері.** Ескермеуге болатындай кедергісі аз екі ұзын сым-өткізгіш бір жағынан R кедергімен тұйықталған, ал екінші жағы тұрақты кернеу көзіне қосылған. Әрбір сымның қима радиусы сымдардың осьтерінің арақашықтығынан $\eta = 20$ есе аз. R кедергінің мәні қандай болған кезде сымдардың өзара әсерінің қорытқы күші нөлге айналады?



6.24-сурет

Шешімі. Сымдардың әрқайсында (олардан ток өтсе де, өтпесе де) артық

беттік зарядтар бар (6.24-сурет). Сондықтан F_M магниттік күштен басқа, F_3 электрлік күшті ескеру қажет. Сымның ұзындық бірлігіне λ артық заряд келетін болсын. Сонда сымның ұзындық бірлігіне келесі сымның тарапынан әсер етуші электрлік күшті Гаусс теоремасының көмегімен табуға болады:

$$F_3 = \lambda E = \lambda \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda}{l} = \frac{2\lambda^2}{4\pi\epsilon_0 l},$$

мұндағы, l – сым осьтерінің ара қашықтығы. Сымның ұзындық бірлігіне әсер ететін магниттік күшті $\mathbf{B}$ векторының циркуляциясы туралы теореманың көмегімен табуға болады:

$$F_M = (\mu_0/4\pi)2I^2/l,$$

мұндағы, I – сымдағы ток күші.

Екі күштің – электрлік және магниттік – қарама-қарсы жаққа бағытталғанын байқауға болады. Электрлік күш сымдардың тартылысына, ал магниттік – олардың тебілуіне себепші болады. Осы күштердің қатынасын табамыз:

$$F_M/F_3 = \epsilon_0\mu_0 I^2/\lambda^2. \quad (1)$$

I және λ шамалардың арасында белгілі бір байланыс бар (2.8 – есепті қара):

$$\lambda = C_1 U = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln \eta} U, \quad (2)$$

мұндағы, $U = RI$. Сондықтан (2) қатынастан шығатыны

$$I/\lambda = \ln \eta / \pi\epsilon_0 R \quad (3)$$

(3) - ті (1) – ге қойып, мынаны аламыз:

$$\frac{F_M}{F_3} = \frac{\mu_0}{\epsilon_0} \frac{\ln^2 \eta}{\pi^2 R^2}. \quad (4)$$

Соңғы қатынас бірге тең болса, өзара әсердің қорытқы күші нөлге айналады. Бұл $R = R_0$ кезде болады, мұнда

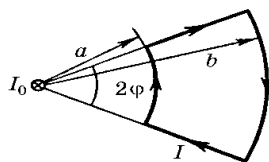
$$R_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0} \frac{\ln \eta}{\pi}} = 360 \text{ Ом}.$$

Егер $R < R_0$ болса, онда $F_M > F_3$ – сымдар тебіледі, егер де $R > R_0$ болса, онда $F_M < F_3$ – сымдар тартылады. Мұны тәжірибеден бақылауға болады.

Сөйтіп, қарама-қарсы бағытта ток өтетін өткізгіштер тебіледі деген ұйғарым өзара әсердің электрлік бөлімін ескермеген кезде, яғни (6.24) сызбадағы R кедергі өте аз болған кезде дұрыс.

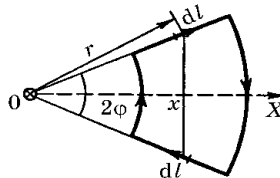
Бұдан басқа, тогы бар сымдар арасындағы өзара әсе күшін өлшеп (ал күш әрқашан да қорытқы күш ретінде өлшенеді), біз жалпы айтқанда, I ток күшін анықтай аламыз. Бұл түсініспеушілікті болдырмау үшін қажет.

- 6.8. Ампер күшінің моменті.** I_0 тогы бар ұзын түзу сымның өрісінде I тогы бар контур орналасқан (6.25 - сурет). Контурдың жазықтығы түзу сымға перпендикуляр. Осы контурға әсер ететін Ампер күшінің моментін табу керек. Жүйенің керекті өлшемдері суретте көрсетілген.



6.25 сурет

Шешімі. Контурдың қисық сызықты бөлігіне әсер ететін Ампер күштері нөлге тең. Түзу сызықты бөлікке әсер ететін күштер жұп күштерді тудырады. Бізге осы жұп күштер моментін есептеу қажет. Контурдың екі кішкентай элементін бөліп аламыз (6.26- сурет). Суреттен оларға сәйкес күш жұбының моменті



6.26-сурет

$$dN = 2x \operatorname{tg} \varphi dF, \quad (1)$$

мұндағы элементар Ампер күші

$$dF = IdlB, \quad (2)$$

B магнит индукциясының түзу сымға дейінгі r қашықтыққа тәуелділігін циркуляция туралы теорема көмегімен табамыз.

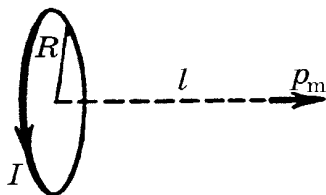
$$B = \mu_0 I / 2\pi r. \quad (3)$$

Енді (3)-ті (2)-ге, одан соң (2)-ні (1)-ге қойып, және $dl = dr$ және $x = r \cos \varphi$ екенін ескеріп, алынған өрнекті r бойынша a -дан b -ға дейін интегралдаймыз. Нәтежесінде алатынымыз:

$$N = (\mu_0 / \pi) I I_0 (b - a) \sin \varphi,$$

мұндағы, $\mathbf{N}$ вектор солға бағытталған (6.26-суретте қараңыз).

- 6.9. Магнит моменті $\mathbf{p}_m$ болатын тогы бар шағын катушка I ток ағып жатқан радиусы R дөңгелек орамның осінде орналасқан. Егер оның орам центрінен қашықтығы l болса, ал $\mathbf{p}_m$ векторы 6.27-суретте көрсетілгендей бағытталса, катушкаға әсер ететін $\mathbf{F}$ күшті табу керек.



6.27-сурет

Шешімі. Ізделініп отырған күш (6.33)-ке сәйкес былай анықталады:

$$\mathbf{F} = p_m \partial \mathbf{B} / \partial n, \quad (1)$$

мұндағы, $\mathbf{B}$ – орамның катушка орналасқан жерде тудыратын өрісінің магнит индукциясы. Z осін $\mathbf{p}_m$ векторының бағытында таңдаймыз, сонда (1)-дің проекциясы былай болады:

$$F_z = p_m \partial B_z / \partial z = p_m \partial B / \partial z,$$

мұнда тоқтың берілген бағыты кезіндегі орамдағы $B_z = B$ ескерілген. Магнит индукциясы B (6.12) формуламен анықталады, бұдан

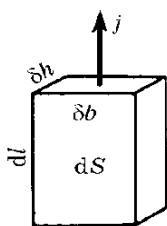
$$\frac{\partial B}{\partial z} = -\frac{3}{2} \frac{\mu_0 R^2 I l}{2(l^2 + R^2)^{5/2}}.$$

$\partial B / \partial z < 0$, болғандықтан, күш проекциясы $F_z < 0$, яғни $\mathbf{F}$ векторы I тогы бар орам жағына бағытталған. Алынған нәтижені векторлық түрде былай көрсетуге болады:

$$\mathbf{F} = -\frac{3}{2} \frac{\mu_0 B^2 I l}{2(l^2 + R^2)^{5/2}} \mathbf{p}_m.$$

Егер $\mathbf{p}_m$ вектор (демек, Z ось те) қарама-қарсы жаққа бағытталған болса, онда $B_z = -B$ және $\partial B_z / \partial z > 0$ екенін аңғарамыз, демек, $F_z > 0$ және $\mathbf{F}$ вектор оңға қарай бағытталған болар еді, яғни тағы да $\mathbf{p}_m$ векторына қарама-қарсы. Сонымен, $\mathbf{F}$ үшін алынған өрнек $\mathbf{p}_m$ векторының екі бағдары үшін де дұрыс.

- 6.10. Радиусы R ұзын жұқа қабырғалы дөңгелек цилиндр бойымен I ток ағады. Цилиндрдің қабырғалары қандай қысымға шыдайды?



6.28-сурет

Шешімі. Токтың idS беттік элементін қарастырамыз, мұндағы, $\mathbf{i}$ – токтың сызықтық тығыздығы, dS – бет элементі. Токтың беттік және көлемдік элементтері арасындағы байланысты табамыз:

$$jdV = j\delta h \cdot \delta b dl = idS.$$

Мұнда енетін шамалардың мағынасы 6.28-суретте түсіндірілген. Векторлық түрде

$$jdV = idS. \quad (1)$$

Токтың беттік элементіне әсер ететін Ампер күші бұл жағдайда (1)-ді ауыстыру жолымен (6.28)-ден алынған формуламен анықталады:

$$d\mathbf{F} = [\mathbf{iB}']dS, \quad (2)$$

мұндағы, $\mathbf{B}'$ – токтың барлық басқа элементтерінен оның берілген осы элементін шығарып тастап, табуға болатын жердегі өрістің магнит индукциясы.

$\mathbf{B}'$ -ты табу үшін электрлік күштерге ұқсас іздейміз (§2.3). B_i – токтың беттік элементінің оның өзінің бетіне жақын нүктеде тудырған өрісінің магнит индукциясы болсын (6.29-сурет, мұнда ток бізден әрі қарай ағады деп ұйғарылған). (6.22)-ге сәйкес $B_i = \mu_0 i/2$.

Әрі қарай $\mathbf{B}$ векторының циркуляциясы туралы теореманы және симметрия пайымдауын пайдаланып, цилиндрдің сыртынан оның бетіндегі магнит өрісінің идукциясы:

$$B = \mu_0 I / 2\pi r, \quad (3)$$

ал цилиндрдің ішінде өріс жок.

Соңғысы цилиндрдің бетіне жақын 1 және 2 нүктелердегі токтың барлық қалған элементтерінің $\mathbf{B}'$ өрісі (6.29-суретті кара) бірдей болуы тиіс және цилиндрдің ішкі және сыртқы бетінде мына шарттарды қанағаттандыратынын білдіреді:

$$B' = B_i \quad \text{және} \quad B = B' + B_i = 2B'.$$

Бұдан шығатыны

$$B' = B/2. \quad (4)$$

Осы нәтижені (2)-ге қойып, ізделінген қысым үшін мына өрнекті табамыз:

$$p = \frac{dF}{dS} = iB' = \frac{2B'}{\mu_0} B' = \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

(3)-ті ескертіп, нақты табатынымыз:

$$p = \mu_0 I^2 / 8\pi^2 R^2.$$

(2)- формуладан цилиндрге бүйірлік қысым түсетіні көрініп тұр.

Заттағы магнит өрісі



§ 7.1. Заттардың магниттелуі. J магниттелгендік

Магнетиктегі өріс. Егер сымдағы токтардың пайда болған магнит өрісіне бір зат ендірсек, өріс өзгереді. Бұл әрбір зат *магнетик* болып табылатындығымен, яғни, магнит өрісі әсерінен магниттелуге қабілетті – магнит моментіне ие болатындығымен түсіндіріледі. Магниттелген зат өзінің $\mathbf{B}'$ магнит өрісін тудырады, ол өткізгіштік токтарының $\mathbf{B}_0$ алғашқы өрісімен бірге қорытқы өрісті құрайды:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}'. \quad (7.1)$$

Мұнда $\mathbf{B}'$ және $\mathbf{B}_0$ деп физикалық шексіз аз көлем бойынша орташаланған өрістер деп түсінуге болады.

Өткізгіштік токтарының $\mathbf{B}$ өрісі тәрізді $\mathbf{B}'$ өрісінің де көзі болмайды (магниттік зарядтар), сондықтан $\mathbf{B}$ қорытқы өріс үшін магнетик бар кезде *Гаусс теоремасы* орындалады:

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0. \quad (7.2)$$

Бұл $\mathbf{B}$ векторының сызықтары зат болған кезде де барлық жерде үздіксіз болатынын білдіреді.

Магниттелу механизмі. Қазіргі кезде көптеген заттар молекуларының зарядтардың ішкі қозғалыстары себебінен болатын меншікті магнит моментіне ие болатындығы белгілі. Әрбір магнит моментіне қоршаған ортада магнит өрісін тудыратын элементар дөңгелек ток сәйкес келеді. Сыртқы магнит өрісі жоқ кезде молекулалардың магнит моменті ретсіз бағдарланған, сондықтан

олардың қорытқы магнит өрісі нөлге тең. Заттық қосынды магнит өрісінде нөлге тең. Соңғысы сыртқы өріс жоқ кезде молекулаларының магнит моменттері болмайтын заттарға қатысты.

Егер затты сыртқы магнит өрісіне орналастырса, онда осы өрістің әсерінен молекулалардың магнит моменті бір бағытқа қарай көбірек бағдар алады және зат магниттеледі – оның қосынды магнит моменті нөлден өзгеше болады. Бұл кезде жеке молекулалардың магнит моменті бірін-бірі компенсацияламайды, нәтижесінде $\mathbf{B}'$ өріс пайда болады.

Сыртқы өріс жоқ кезде молекулаларының магнит моменті болмайтын заттардың магниттелуі басқаша болады. Мұндай заттарды сыртқы өріске енгізгенде молекулаларда элементар дөңгелек токтар өндіреді, және молекулалар, ал онымен бірге барлық зат магнит моментіне ие болады, ол да $\mathbf{B}'$ өрістің пайда болуына алып келеді. Көпшілік заттар магнит өрісіне енгізгенде әлсіз магниттеледі. Күшті магниттік қасиеттер тек ферромагниттік заттарда болады: темір, никель, кобальт, көптеген олардың қорытпалары және басқалар.

Магниттелгендік. Магнетиктің магниттелу дәрежесі көлем бірлігіндегі магнит моментін сипаттайды. Осы шаманы *магниттелгендік* деп айтады және $\mathbf{J}$ -мен белгілілейді. Анықтама бойынша

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\Delta V} \sum \mathbf{p}_m, \quad (7.3)$$

мұндағы, ΔV – берілген нүкте аймағындағы физикалық шексіз аз көлем. $\mathbf{p}_m$ – жеке молекуланың магнит моменті. Қосынды ΔV көлемдегі барлық молекула бойынша жүргізіледі.

$\mathbf{P}$ поляризациялану үшін жазғанға ұқсас [(3.3)-ті қара], магниттелгендікті былай көрсетуге болады:

$$\mathbf{J} = n \langle \mathbf{p}_m \rangle, \quad (7.4)$$

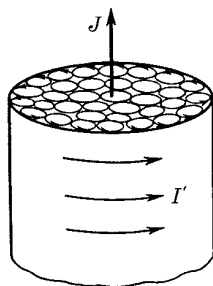
мұндағы n – молекулалар концентрациясы; $\langle \mathbf{p}_m \rangle$ – бір молекуланың орташа магнит моменті. Соңғы формуладан $\mathbf{J}$ векторы $\langle \mathbf{p}_m \rangle$ орташа векторымен бағыттас екені көрініп тұр, сондықтан әрі қарай $\langle \mathbf{p}_m \rangle$ векторының қасиетін білсе жеткілікті және ΔV көлем шегіндегі барлық молекулалар $\langle \mathbf{p}_m \rangle$ бірдей магнит моментіне ие де

есептейміз. Бұл магниттелу құбылысымен байланысты сұрақтарды түсінуді анағұрым жеңілдетеді. Мысалы, заттың $\mathbf{J}$ магниттелгендігінің артуы соған сәйкес $\langle \mathbf{p}_m \rangle$ векторының артуын білдіреді: егер $\mathbf{J} = 0$, болса онда $\langle \mathbf{p}_m \rangle = 0$.

Егер $\mathbf{J}$ вектор заттың барлық нүктелерінде бірдей болса, онда зат біртекті магниттелген деп айтады.

I' магниттелу тогы. Жоғарыда айтқандай, заттардың магниттелуі жеке молекулалардың магнит моменттерінің бір бағытқа көбірек бағдарлануынан немесе индукциялануынан болады. Мұны әрбір молекуламен байланысты элементар дөңгелек токтарға айтуға болады, оларды **молекулалық токтар** деп атайды. Молекулалық токтардың мұндай қасиеті қазір біз қарастыратын **магниттелу тогы** деп аталатын I' макроскопиялық токтардың пайда болуына әкеледі. Өткізгіш бойымен өтетін кәдімгі токтар заттағы ток тасушылардың орын ауыстыруымен байланысты, оларды **өткізгіштік токтары** деп атайды.

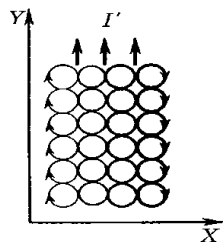
Магниттелу тогының пайда болуын түсінуге алдымен $\mathbf{J}$ магниттелуі **біртекті** және ось бойымен бағытталған біртекті магнетик цилиндр бар делік. Магниттелген магнетиктегі молекулалық токтар 7.1-суретте көрсетілгендей бағдарланған. Көрші молекулаларда молекулалық токтар олардың түйіскен жерлерінде қарама-қарсы бағытта ағады және макроскопиялық бірін-бірі өзара компенсациялайды.



7.1-сурет

Компенсацияланбаған тек цилиндрдің бүйір бетіне шығатын молекулалық токтар қалады. Осы токтар цилиндрдің бүйір беті бойынша циркуляция жасайтын I' макроскопиялық **беттік** магниттелу тогын құрайды.

I' ток барлық молекулалық токтарды бірге алғандағыдай макроскопиялық магнит өрісін туғызады.



7.2-сурет

Енді басқа жағдайды қарастырайық: магниттелген магнетик **біртекті емес** дейік. Мысалы, молекулалық токтар 7.2-суреттегідей орналасқан болсын, мұнда сызық ені молекулалық токтар күшіне сәйкес келеді. Бұл бейне $\mathbf{J}$ векторы сурет жазықтығынан әрі қарай бағытталған және x координатаның артуы кезінде модулі бойынша өсетінін білдіреді.

Мұнда біртекті емес магнетик ішінде молекулалық токтардың компенсациясы жоқ екені және нәтижесінде Y осінің оң бағытымен ағатын I' макроскопиялық **көлемдік** магниттелу тогы пайда болатыны көрініп тұр. Соған сәйкес i' сызықтық және j' көлемдік ток тығыздықтары туралы айтылады, i' (А/м) және j' (А/м²).

Магнетиктегі B өрісті есептеу туралы. Магниттелген магнетиктің B өріске қосқан үлесі вакуумда I' токтардың таралуымен болған өріс үлесіне тең. Басқаша айтқанда, I' магниттелу токтарының таралуын белгілеп, Био–Савар заңының көмегімен оларға сәйкес B' өрісті және (7.1) формула бойынша B қорытқы өрісті табуға болады.

Бірақ, қолайсыздық I' токтар таралуы тек магнетиктің конфигурациясы мен қасиетіне ғана емес, іздеп отырған B өріске тәуелділігінен де тұрады. Сондықтан магнетиктегі B өрісті табу туралы есеп жалпы жағдайда тікелей шешілуі мүмкін емес. Бұл сұрақты шешудің басқа жолын табуға тырысу ғана қалады. Осы жолдағы алғашқы қадам I' магниттелу тогы мен J векторы өрісінің белгілі бір қасиеті, атап айтқанда, оның циркуляциясымен маңызды байланысты табу болып табылады.

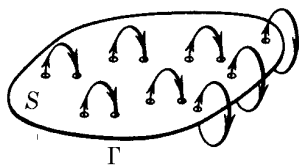
§ 7.2. J векторының циркуляциясы

Қазір біз көз жеткізетіміздей, стационар жағдай үшін Γ еркін контур бойынша J магниттелгендік циркуляциясы Γ контурмен қоршалған I' магниттелу токтарының алгебралық қосындысына тең:

$$\oint_{\Gamma} J dl = I', \quad (7.5)$$

мұндағы, $I' = \int j' dS$, және интегралдау Γ контурға таратып керілген еркін бет бойынша жүргізіледі.

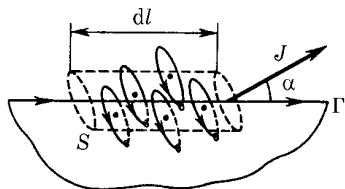
Бұл теореманы дәлелдеу үшін Γ контурмен қоршалған молекулалық токтардың алгебралық қосындысын есептейміз. Γ контурға қалауымызша S бетті керіп аламыз (7.3-сурет). Бұл суреттен бір молекулалық ток S бетті екі рет кесіп



7.3-сурет

өтетіні көрініп тұр – бір рет бір бағытта, екінші рет басқа бағытта. Сондықтан мұндай токтар S бет арқылы өтетін қорытқы магниттелу тогына ешқандай үлес қоспайды.

Бірақ, Γ контурының айналасында оратылған молекулалық токтар S бетті тек бір рет кесіп өтеді. Осындай молекулалық токтар S бетті тесіп өтетін I' макроскопиялық магниттелу тогын тудырады. Әрбір молекулалық ток I_m -ға және олар қоршаған аудан S_m -ға тең болсын. Сонда 7.4-суретте көрініп тұрғандай, Γ контурының dl элементі центрі $dV = S_m \cos \alpha dl$ көлемдегі қысқь цилиндр ішінде болатын молекулалық токтарды орайды, мұндағы α – контурдың dl элементі мен осы жердегі $\mathbf{J}$ векторы бағытының арасындағы бұрыш. Барлық осы молекулалық токтар S бетті бір рет кесіп өтеді және магниттелу тогына олардың үлесі $dI' = I_m n dV$, мұндағы n -молекулалар концентрациясы. Бұған dV үшін өрнекті қойып мынаны аламыз:



7.4-сурет

$$dI' = I_m S_m n \cos \alpha dl = J \cos \alpha dl = J dl;$$

мұнда $I_m S_m = p_m$ – жеке молекулалық токтың магнит моменті екені ескерілген, ал $I_m S_m n$ – заттың көлем бірлігіндегі магнит моменті.

Алынған өрнекті Γ барлық контур бойынша интегралдап (7.5)-ті аламыз. Теорема дәлелденді.

Егер магнетик біртекті емес болса, онда I' магниттелу тогы, жалпы айтқанда, Γ контурға жақын шекараны ғана емес, барлық бетті тесіп өтетінін (7.3-суретті қара) байқау ғана қалады. Сондықтан оны $I' = \int \mathbf{j}' d\mathbf{S}$ деп көрсетуге болады, мұндағы интегралдау Γ контурмен шектелген S барлық бет бойынша жүргізіледі. Келтірілген дәлелдеуде біз барлық I' токты S беттің шекарасын «қисайта» отырып алдық – әдістің жалғыз мақсаты осы токты есептеуді қысқарту болып табылады.

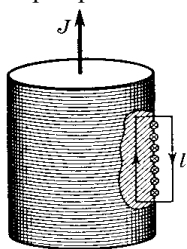
(7.5) теңдеуінің дифференциалдық түрі:

$$\nabla \times \mathbf{J} = \mathbf{j}', \quad (7.6)$$

яғни, $\mathbf{J}$ магниттелгендік роторы кеңістіктің сол нүктесіндегі магниттелу тогының тығыздығына тең.

J векторының өрісі туралы ескерту. (7.5) және (7.6) теңдеулерімен өрнектелген J векторы өрісінің қасиеттері, әрине, J өзінің өрісі тек I' токтармен анықталатынын білдірмейді. J векторының өрісі (ол кеңістіктің магнетикпен толтырылған аймағында ғана шектелген) барлық токтарға – I' магниттелу тогы сияқты, I өткізгіштік тогына да тәуелді. Бірақ, белгілі бір симметриялы болатын жағдайларда J векторының өрісі тек I' токтарымен анықталатын сияқты болып көрінеді.

Мысал. Егер біртекті магнетиктен тұратын цилиндрдің магнеттелгендігі J, сондай-ақ, J векторы барлық жерде цилиндр осі бойымен бағытталса, оның ұзындық бірлігіне келетін беттік магниттелу тогын табамыз.



7.5-сурет

(7.5) теңдеуін 7.5-суретте көрсетілгендей таңдап алынған контурға қолданамыз. Осы контур бойынша J векторының циркуляциясы Jl көбейтіндісіне тең екенін байқау қиын емес. Мұнда магниттелу тогы беттік ток. Егер оның сызықтық тығыздығын i' әрпімен белгілесек, онда қарастырылатын контур $i'l$ магниттелу тогын қамтиды. $Jl = i'l$ теңдеуінен

$$i' = J. \quad (7.7)$$

i' және J векторы өзара перпендикуляр екенін атап кету керек: $i' \perp J$.

§ 7.3. H векторы

H векторының циркуляциясы туралы теорема (тұрақты токтардың магнит өрісі үшін). Сыртқы магнит өрісіне орналасқан магнетиктерде магниттелу токтары пайда болады, сондықтан B векторының циркуляциясы енді тек өткізгіштік токтарымен ғана емес, магниттелу токтарымен де анықталатын болады, атап айтқанда:

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 (I + I'), \quad (7.8)$$

мұндағы, I және I' – берілген Γ контурмен қамтылған – өткізгіштік және магниттелу токтары.

I' токтарды анықтау жалпы жағдайда қиын есеп болғандықтан, (7.8) формула практикалық тұрғыдан жарамдылығы аз болып қалады. Бірақ циркуляциясы Γ контурмен қоршалған өткізгіштік токтарымен анықталатын қандай да қосымша вектор табуға болады екен. Шынында, біз білетініміздей, магниттелгендік циркуляциясы I' токпен байланысты:

$$\oint \mathbf{J} d\mathbf{l} = I'. \quad (7.9)$$

$\mathbf{B}$ және $\mathbf{J}$ векторының циркуляциясы бір ғана Γ контуры бойынша алынады деп есептеп, (7.8)-дегі I' -ді (7.9) формула бойынша өрнектейміз, сонда:

$$\oint \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{J} \right) d\mathbf{l} = I. \quad (7.10)$$

Жақшада интеграл астында тұрған шаманы $\mathbf{H}$ әрпімен белгілейді.

Сонымен, біз қандай да қосымша $\mathbf{H}$ векторды таптық:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{J}, \quad (7.11)$$

Қалауымызша алынған Γ контур бойынша циркуляция осы контурмен қоршалған I өткізгіштік токтарының алгебралық қосындысына тең.

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = I. \quad (7.12)$$

Бұл формула $\mathbf{H}$ векторының циркуляциясы туралы теореманы өрнектейді: *қалауымызша алынған тұйық контур бойынша циркуляция векторы $\mathbf{H}$ осы контурмен қоршалған өткізгіштік токтарының алгебралық қосындысына тең.*

Токтар үшін таңбалар ережесі $\mathbf{B}$ векторының циркуляциясы жағдайындағыдай (152-бетті қараңыз).

$\mathbf{H}$ векторы $\mathbf{B}/\mu_0$ және $\mathbf{J}$ екі әр түрлі шамалардың комбинациясы екенін көреміз. Сондықтан $\mathbf{H}$ векторы – бұл шын мәнінде қандай да бір терең физикалық мағынасы жоқ қосымша вектор*. Бірақ циркуляция туралы теоремада өрнектелген $\mathbf{H}$ векторының маңызды

* $\mathbf{H}$ шамасын *магнит өрісінің кернеулігі* деп жиі айтады, бірақ біз $\mathbf{H}$ векторының қосымша сипатын атап көрсету үшін бұл терминді қолданбайтын боламыз.

қасиеті осы вектордың енгізілуін түсіндіреді: көп жағдайларда ол магниттердегі өрісті оқып-зерттеуді көп жеңілдетеді.

Және тағы, (7.11) және (7.12) қатынастар кез келген, оның ішінде анизотропты магнетиктер үшін де дұрыс.

(7.12) формуладан $\mathbf{H}$ векторының модулі ток күшін ұзындыққа бөлгендегі өлшемге тең. Соған байланысты $\mathbf{H}$ шамасының бірлігі *ампер бөлінген метр* (А/м) болып табылады.

$\mathbf{H}$ векторының циркуляциясы туралы теореманың дифференциалдық түрі:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}, \quad (7.13)$$

яғни, $\mathbf{H}$ векторының роторы заттың сол нүктесіндегі өткізгіштік тогының тығыздығына тең.

$\mathbf{J}$ және $\mathbf{H}$ векторлары арасындағы байланыс. Біз $\mathbf{J}$ магниттеліну заттың берілген нүктесіндегі $\mathbf{B}$ магнит индукциясына тәуелді екенін білеміз. Бірақ $\mathbf{J}$ -ді $\mathbf{B}$ -мен емес $\mathbf{H}$ векторымен байланыстыру қабылданған. Біз әзірге $\mathbf{J}$ мен $\mathbf{H}$ арасындағы байланыс сызықтық сипатқа ие болатын магнетиктерді қарастырумен шектелеміз, атап айтқанда:

$$\mathbf{J} = \chi \mathbf{H}, \quad (7.14)$$

мұндағы, χ – *магниттік қабылдағыштық*, әрбір берілген магнетиктерге тән өлшемсіз шама (χ -өлшемсіздігі (7.11)-ге сәйкес $\mathbf{H}$ пен $\mathbf{J}$ -дің өлшемдерінің бірдей болуынан шығады).

Әрқашанда оң болатын χ -диэлектрлік қабылдағыштықтан айырмашылығы магниттік қабылдағыштық χ оң да, теріс те болады. Соған сәйкес (7.14) тәуелділікке бағынатын магнетиктерді *парамагнетиктер* ($\chi > 0$) және *диамагнетиктер* ($\chi < 0$) деп бөледі. Парамагнетиктер $\mathbf{J} \uparrow \uparrow \mathbf{H}$, диамагнетиктерде $\mathbf{J} \uparrow \downarrow \mathbf{H}$.

Бұл магнетиктерден басқа $\mathbf{J}(\mathbf{H})$ тәуелділігі өте күрделі сипатқа ие болатын *ферромагнетиктер* бар: ол сызықтық емес, және одан да басқа гистерезис, яғни, $\mathbf{J}$ -дің магнетиктің алғашқы жағдайына тәуелділігі байқалады (Ферромагнетиктер туралы 7.6-да толығырақ айтылады).

В мен Н арасындағы байланыс. (7.14) тәуелділігіне бағынатын магнетиктер үшін (7.11) өрнегі $(1 + \chi) \mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0$ түрді қабылдайды. Бұдан

$$\mathbf{B} = \mu\mu_0 \mathbf{H}, \quad (7.15)$$

мұндағы, μ – ортаның *магниттік өтімділігі*.

$$\mu = 1 + \chi. \quad (7.16)$$

Парамагнетиктерде $\mu > 1$, диамагнетиктерде $\mu < 1$, және де алғашқысында да, келесісінде де μ -дің бірден айырмашылығы өте аз, яғни бұл магнетиктердің магниттік қасиеттері өте аз көрінеді.

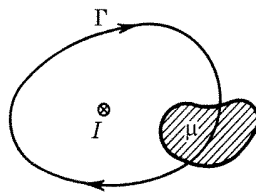
Н векторының өрісі туралы ескерту. Өте жиі қателікке соқтыратын мәселеге көңіл аударайық: **Н** векторының өрісі қандай токтарға тәуелді? Жалпы айтқанда, **Н**-тың өрісі *барлық* токтарға – өткізгіштік токтарына да, магниттелу токтарына да тәуелді (**В** векторының өрісі сияқты). Бұл туралы (7.15) формулада айтылады. Бірақ, кейбір жағдайларда **Н**-тың өрісі тек өткізгіштік токтарымен анықталады – дәл осы жағдайлар үшін **Н** векторы өте пайдалы болып табылады.

Сонымен қатар, бұл **Н** векторы әрқашанда тек өткізгіштік токтарына тәуелді деп ойлауға және **Н** векторының циркуляциясы туралы теорема мен (7.13) теңдеуді қате тұжырымдауға негіз болады. Қарастырылған теорема **Н** векторы өрісінің тек белгілі бір қасиетін білдіреді, ол осы вектордың өзінің өрісін анықтамайды.

Мысал. Жүйе I тогы бар ұзын түзу өткізгіштен және қалауымызша алынған парамагнетик бөлшегінен тұрады (7.6-сурет).

Егер магнетикті алып тастасақ, **В** және **Н** векторларының өрістеріне, сондай-ақ, қандай да бір белгіленген Γ контур бойынша **Н** векторының циркуляциясына қалай болатынын анықтайық.

Кеңістіктің әрбір нүктесіндегі **В** өрісі I өткізгіштік тогынан, сонымен бірге парамагнетиктегі магниттелу токтарынан пайда болады. Ал біздің жағдайымызда (7.15)-ке сәйкес $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu\mu_0$, сонда жоғарыда айтылған **Н** векторына қатысты – ол да I өткізгіштік тогына және магниттелу токтарына тәуелді.



7.6-сурет

Парамагнетик бөлшегін алып тастау $\mathbf{B}$ өрісінің, демек, $\mathbf{H}$ өрісінің де өзгеруіне әкеледі. Γ контуры бойынша $\mathbf{B}$ векторының циркуляциясы өзгереді, себебі Γ контурына керілген бетті магниттелу токтары тесіп өтпейтін болады, тек өткізгіштік тогы қалады. Γ контуры бойынша $\mathbf{H}$ векторының циркуляциясы $\mathbf{H}$ өрісінің өзінің өзгеруіне қарамастан бұрынғыша қалады.

Магнетик ішінде $\mathbf{j}' = 0$ болса? Біз қазір мына жағдайларда егер: 1) магнетик біртекті және 2) оның ішінде өткізгіштік токтары жоқ ($\mathbf{j} = 0$) болса, магнетик ішінде магниттелу токтары болмайтындығын көрсетеміз. Бұл жағдайда магнетиктің кез келген пішіні кезінде және магнит өрісінің кез келген конфигурациясы кезінде көлемдік магниттелу токтары нөлге тең және тек беттік магниттелу токтары қалады, бұған сенімді болуға болады.

Мұны дәлелдеу үшін магнетик ішін тұтас алатын қалауымызша алынған Γ контуры бойымен $\mathbf{J}$ векторының циркуляциясы туралы теореманы пайдаланамыз. Біртекті магнетик жағдайында $\mathbf{J}$ –ді $\chi \mathbf{H}$ –қа алмастырып, (7.5) теңдеуден χ –ді интеграл алдына шығарып, мынаны жазуға болады:

$$I' = \chi \oint \mathbf{H} d\mathbf{l}.$$

Қалған интеграл (7.12)–ге сәйкес Γ контурымен қоршалған I өткізгіштік токтарының алгебралық қосындысына тең, сондықтан біртекті магнетик үшін

$$I' = \chi I. \quad (7.17)$$

I' және I токтар арасындағы бұл қатынас магнетик ішіндегі кез келген контур үшін дұрыс, дербес жағдайда және өте кішкентай контур үшін $I' \rightarrow dI' = j'_n dS$ және $I \rightarrow dI = j_n dS$. Сонда $j'_n dS = \chi j_n dS$ және dS –ке қысқартқан соң $j'_n = \chi j_n$ –ді аламыз. Соңғы теңдік кішкентай контурдың кез-келген бағдары кезінде, яғни оған қарай нормальдың кез келген бағыты кезінде орындалады. Ал бұл дегеніміз, $\mathbf{j}'$ және $\mathbf{j}$ векторларының өздері де осындай теңдікпен байланысқан:

$$\mathbf{j}' = \chi \mathbf{j}. \quad (7.18)$$

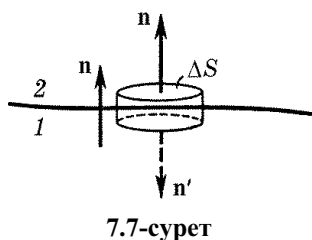
Бұдан, егер $\mathbf{j} = 0$ болса, біртекті магнетикте $\mathbf{j}' = 0$ екендігі шығады. Дәлелдейтініміз де осы еді.

§ 7.4. В және Н үшін шектік шарттар

Екі біртекті магнетиктерді бөлетін шекарадағы **В** және **Н** векторлары үшін шарттар туралы сөз болады. Бұл шарттарды диэлектрик жағдайындағы сияқты біз Гаусс теоремасы мен циркуляция туралы теорема көмегімен аламыз. **В** және **Н** векторлары үшін бұл теоремалар, еске түсірсек, былай болады:

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0, \quad \oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = I. \quad (7.19)$$

В векторы үшін шарт. Магнетиктерді бөліп тұрған шекарада орналасқан 7.7-суретте көрсетілгендей биіктігі өте кішкентай, цилиндрді алайық. Сонда бұл цилиндрден сыртқа қарай **В** векторының ағынын (бүйір беттер арқылы өтетін ағынды ескермейміз) былай жазуға болады:



$$B_{2n} \Delta S + B_{2n'} \Delta S = 0.$$

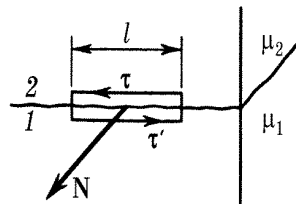
n ортақ нормальға **В** векторының екі проекциясын алып, $B_{1n'} = -B_{1n}$ екенін көреміз, және алдыңғы теңдеуді ΔS -ке қысқартқан соң, мына түрге келеді:

$$B_{2n} = B_{1n}, \quad (7.20)$$

яғни, бөлетін шекараның екі жағында **В** векторының нормаль құраушысы бірдей болады. Бұл шама секірмелі өзгеріске ұшырамайды.

Н векторы үшін шарт. Кеңірек жалпы қарастыру үшін магнетиктер шекарасының бетімен сызықтық тығыздығы **i** беттік өткізгіштік тогы ағады деп алайық. Биіктігі оның l ұзындығымен салыстырғанда ескермеуге болатындай аз, өте кішкентай

тікбұрышты контурға $\mathbf{H}$ векторының циркуляциясы туралы теореманы қолданамыз, бұл контурды 7.8-суретте көрсетілгендей орналастырамыз. Контурдың бүйір жақтарына циркуляция үлесін ескермей, барлық контур үшін жазамыз:



7.8-сурет

$$H_{2\tau}l - H_{1\tau'}l = i_N l,$$

мұндағы, i_N – $\mathbf{i}$ векторының контурдағы $\mathbf{N}$ нормальға проекциясы ($\mathbf{N}$ векторы контур бойымен айналу бағытында оң винт жүйесін құрайды). τ жанамаасының жалпы ортына $\mathbf{H}$ векторының екі проекциясын салып (2 ортада), $H_{1\tau'} = -H_{1\tau}$ екенін аламыз, алдыңғы теңдеуде l -ді қысқартқан соң, ол мына түрге келеді:

$$\boxed{H_{2\tau} - H_{1\tau} = i_N}, \quad (7.21)$$

яғни, $\mathbf{H}$ векторының тангенциаль құраушысы жалпы айтқанда, магнетиктердің бөлінген шекарасынан ауысу кезінде беттік өткізгіштік тогының болуына байланысты секірмелі өзгереді.

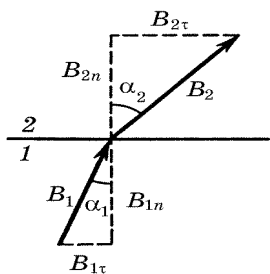
Бірақ, егер магнетиктерді бөліп тұрған шекарада өткізгіштік тогы жоқ болса ($\mathbf{i} = 0$), онда $\mathbf{H}$ векторының тангенциаль құраушысы бөлетін шекараның екі жағында бірдей болады:

$$\boxed{H_{2\tau} = H_{1\tau}}. \quad (7.22)$$

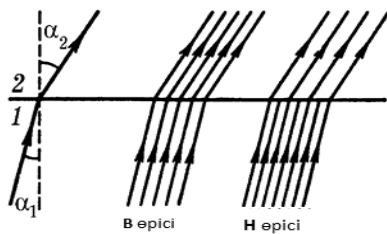
Сонымен, егер екі біртекті магнетиктерді бөліп тұрған шекарада өткізгіштік тогы жоқ болса, онда осы шекарада ауысу кезінде B_n және H_τ құраушылары секірмей, үздіксіз өзгереді. B_τ және H_n құраушылары бұл кезде секірмелі өзгереді.

Бөлетін шекарада $\mathbf{B}$ векторы $\mathbf{D}$ векторына, ал $\mathbf{H}$ векторы – $\mathbf{E}$ векторына ұқсас болатынын байқаймыз.

В векторы сызықтарының сынуы. Екі магнетикті бөліп шекарада $\mathbf{B}$ векторы сынады (7.9-сурет). Диэлектриктер жағдайындағы тәрізді α_1 және α_2 бұрыштары тангенстерінің қатынасын табамыз:



7.9-сурет



7.10-сурет

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{B_{2\tau}/B_{2n}}{B_{1\tau}/B_{1n}}.$$

Бөліну шекарасында өткізгіштік тогы жоқ жағдайды қарастырумен шектелеміз. Бұл жағдайда (7.22) мен (7.20)-ға сәйкес:

$$B_{2\tau}/\mu_2 = B_{1\tau}/\mu_1, \quad B_{2n} = B_{1n}.$$

Соңғы қатынасты ескеріп, (3.25) сияқты **В** сызықтарының сыну заңын аламыз (демек, **Н** сызықтарының да):

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1}. \quad (7.23)$$

7.10-суретте екі магнетиктің бөліну шекарасына жақын **В** және **Н** векторларының өрісі кескінделген (өткізгіштік тогы жоқ кезде). Мұнда $\mu_2 > \mu_1$; Сызықтардың қоюлануын салыстырсақ, $B_2 > B_1$ ал $H_2 < H_1$ екені көрініп тұр. **В** сызықтары шекарадан өту кезінде үзілуге ұшырамайды, **Н** сызықтары үзіліске ұшырайды (беттік магниттелу тогының себебінен). Магниттік қорғану – магниттік сызықтардың сынуына негізделген. Мысалы, тұйық темір қабықшаны(қабатты) сыртқы магнит өрісіне енгізу кезінде осы өріс сызықтары негізінен қабықшаның өзінде концентрацияланады (қоюланады). Осы қабықша ішінде – қуыста-магнит өрісі сыртқы өріспен салыстырғанда өте әлсіз болады. Басқаша айтқанда, темір қабықшаның экрандайтын әсері болады. Бұл сезімтал приборларды сыртқы магнит өрісінен алдын-ала сақтау үшін қолданылады.

§ 7.5. Біртекті магниттегі өріс

§ 7.1.-та айтып кеткендей еркін магнетиктер болған кездегі **B** қорытқы магнит өрісін табу, жалпы айтқанда, өте күрделі есеп. Шынында, бұл үшін (7.1.-ге) сәйкес өткізгіштік тогының **B**₀ өрісіне магниттелу тогының жасайтын **B'** макроөрісін қосу қажет. Қолайсыздығы сонда, бізге магниттелу токтарының конфигурациясы алдын-ала белгісіз. Біз тек осы токтардың бөлініп таралуы магнетик табиғатына және конфигурациясына, сондай ақ, өткізгіштік токтарының өрісі **B**₀ – сыртқы өріс конфигурациясына тәуелді екенін тұжырымдаймыз. Ал біз магниттелу токтарының таралуын білмейтін болғандықтан, **B'** өрісті де есептей алмаймыз.

Барлық кеңістігі біртекті изотропты магнетикпен толтырылған **B** өрісі болатын жағдай басқаша. Бұл жағдайды толық қарастырамыз. Бірақ, біз бәрінен бұрын вакуумда біртекті өткізгіш бойымен өткізгіштік тогы өтетін кездегі пайда болатын құбылысқа көңіл аударайық. Әрбір өткізгіш магнетик болып табылатындықтан, сонда онымен магниттелу – (7.18)-ге сәйкес көлемдік және беттік токтар да өтетін болады. Біздің тогы бар өткізгішімізді қамтитын контурды аламыз. (7.5) – **J** векторының циркуляциясы туралы теорема бойынша, контурдың барлық нүктелерінде **J** = 0 болғандықтан, магниттелу токтарының алгебралық қосындысы (көлемдік және беттік) нөлге тең: $I' = I'_{\text{көлем}} + I'_{\text{бет}} = 0$. Бұдан $I'_{\text{көлем}} = -I'_{\text{бет}}$, яғни, көлемдік және беттік магниттелу токтары тең және бағыттары бойынша қарама-қарсы.

Сөйтіп, әдеттегі жағдайларда, токтар өте жіңішке сым бойымен өтетін болса, қоршаған ортадағы магнит өрісі (вакуумда) тек өткізгіштік токтарына тәуелді, өйткені магниттелу токтарының өрісі бір-бірін компенсациялайды деп тұжырымдауға болады.

Енді қоршаған өткізгіш ортаны біртекті өткізбейтін магнетикпен толтырамыз. (нақты мақсат үшін бұл парамагнетик болсын, $\chi > 0$). Осы магнетиктің сыммен шекарасында I' беттік магниттелу тогы пайда болады, бағыты өткізгіштік тогының бағытымен болатынын аңғару қиын емес (бұл $\chi > 0$ кезінде).

Нәтижесінде біз I өткізгіштік тогын, өткізгіштегі көлемдік және беттік магниттелу токтарын (бұл токтардың магнит өрісі бірін-бірі компенсациялайды, сондықтан әрі қарай оларды ескермеуге болады) және өткізбейтін магнетиктегі I' беттік

магниттелу тоғын аламыз. Жеткілікті жіңішке сымдарда магнетиктегі $\mathbf{B}$ магнит өрісі $I + I'$ ток өрісі ретінде анықталады. Сонымен, есеп I' токты табуға келіп тіреледі. Осы мақсатпен өткізгішті өткізбейтін магнетиктің беттік қабатында орналасқан контурмен қоршаймыз. Контур жазықтығы сым осіне, яғни, магниттелу тоғына перпендикуляр болсын. Сонда (7.7) және (7.14)-ті есепке ала отырып, былай жазуға болады:

$$I' = \oint i' dl = \oint J dl = \chi \oint H dl.$$

Бұдан (7.12) сәйкес $I' = \chi I$ екендігі шығады.

I' магниттелу тоғының конфигурациясы мен I өткізгіштік тоғы іс жүзінде дәл келеді (сымдар жіңішке), сондықтан магниттелу токтарының $\mathbf{B}'$ өріс индукциясының өткізгіштік токтарының $\mathbf{B}_0$ өріс индукциясынан тек модулі бойынша барлық нүктелерде айырмашылығы бар және бұл векторлар бір-бірімен сәйкес токтар сияқты байланысқан, атап айтқанда:

$$\mathbf{B}' = \chi \mathbf{B}_0. \quad (7.24)$$

Сонда қорытқы өріс $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}' = (1 + \chi)\mathbf{B}_0$, немесе

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{B}_0. \quad (7.25)$$

Демек, бұл кеңістікті біртекті магнетикпен толтыру кезінде $\mathbf{B}$ шамасы μ есе артатынын білдіреді. Басқаша айтқанда, μ шамасы өріс алып тұрған барлық кеңістікті магнетикпен толтыру кезінде $\mathbf{B}$ магнит индукциясы неше есе артатынын көрсетеді.

Егер (7.25) теңдігінің екі жағын μ_0 –ге бөлсек, онда мынаны аламыз:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0$$

(қарастырылып отырған жағдайда $\mathbf{H}$ өріс вакуумдағы сияқты болады).

(7.24)–(7.26) формулалары $\mathbf{B}_0$ (өткізгіштік тоғының өрісі) векторларының қызықтарынан пайда болған бетпен шектелген барлық көлемді біртекті магнетикпен толтырған жағдайлар үшін

де дұрыс. Және бұл жағдайларда да магнетик ішіндегі $\mathbf{B}$ магнит индукциясы $\mathbf{B}_0$ -ден μ есе көп.

Көрсетілген жағдайларда магниттелу токтары өрісінің $\mathbf{B}'$ магнит индукциясы магнетиктің $\mathbf{J}$ магниттелінуімен қарапайым қатынаспен байланысқан:

$$\mathbf{B}' = \mu_0 \mathbf{J}. \quad (7.27)$$

Бұл өрнекті егер $\mathbf{B}' = \chi \mathbf{B}_0$ және $\mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H}$, мұндағы, $\mathbf{H} = \mathbf{J}/\chi$, екенін ескерсек, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}'$ формуласынан оңай алуға болады.

Басқа жағдайларда, жоғарыда айтқанымыздай, мәселе едәуір күрделірек және (7.24)–(7.27) формулалар дұрыс болмай шығады. Соңында екі қарапайым мысал келтіреміз.

1-мысал. Соленоидтағы $\mathbf{B}$ өрісі. Ұзындық бірлігіне nl ампер-орам келетін соленоид магнит өтімділігі $\mu > 1$ біртекті магнетикпен толтырылған болсын. Магнетик өрісінің B магнит индукциясын табамыз.

Магнетик жоқ кезде (6.20)-ға сәйкес соленоид ішіндегі магнит индукциясы $B_0 = \mu_0 nl$ болсын. Магнетик өрісі нөлден өзгеше барлық кеңістікті толтыратындықтан (жиектегі эффектілерді ескермейміз), B магнит индукциясы μ есе көп болуы тиіс:

$$B_0 = \mu \mu_0 nl. \quad (7.28)$$

Бұл жағдайда $\mathbf{B}$ векторының өрісі, магнетик жоқ кездегідей қалады, яғни, $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0$.

$\mathbf{B}$ өрісінің өзгеруі соленоид орамындағы өткізгіштік тогының бағытымен бағыттас магнетик бетін айнала ағатын магниттелу тогының пайда болуынан туады, бұл $\mu > 1$ кезде. Егер $\mu < 1$ болса, онда аталған токтардың бағыты қарама-қарсы болады.

Алынған нәтижелер соленоид ішінде оның осіне параллель орналасқан өте ұзын өзек түріндегі магнетик болған жағдай үшін де дұрыс.

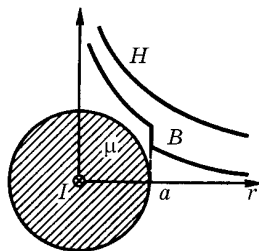
2-мысал. Магнетик бар кездегі түзу ток өрісі. Магнетик осінің бойымен берілген I ток өтетін, радиусы a ұзын цилиндрді толтырып тұр деп алайық. Магнетиктің өтімділігі $\mu > 1$. B магнит индукциясының цилиндр осіне дейінгі r қашықтыққа тәуелділігін табамыз. Магниттелу тогы белгісіз болғандықтан, $\mathbf{B}$ векторының циркуляциясы туралы теореманы тікелей пайдалануға болмайды. Жағдайды $\mathbf{H}$ векторымен шешуге болады: оның циркуляциясы тек

өткізгіштік токтарымен анықталады. Радиусы r шеңбер үшін $2\pi r H = I$ болады, бұдан

$$B = \mu_0 H = \mu_0 I / 2\pi r$$

H -тан өзгешелігі, магнетик – вакуум шекарасынан өту кезінде B магнит индукциясы секіріске ұшырайды (7.11 сурет).

Магнетик ішінде B -ның күшеюі беттік магниттелу тогының пайда болуынан: жүйе осіндегі сымда бұл токтар I ток бағытымен дәл келеді, демек, I токты «күшейтеді», цилиндрдің сыртында беттік магниттелу тогы қарама-қарсы бағытталған, бірақ ол магнетиктегі B өріске әсер етпейді. Магнетиктен тыс екі магниттелу токтарының да магнит өрістері бірін-бірі компенсациялайды.



7.11-сурет

§ 7.6. Ферромагнетизм

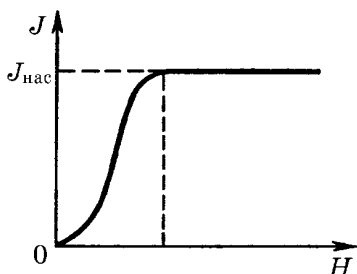
Ферромагнетиктер. Магниттік жағынан барлық заттарды әлсіз магнитті (парамагнетиктер мен диамагнетиктер) және күшті магнитті (ферромагнетиктер) деп бөлуге болады.

Пара-және диамагнетиктер магнит өрісі жоқ кезде, біз білетініміздей, магниттелмеген және J магниттелудің H -қа бірмәнді тәуелділігімен сипатталады.

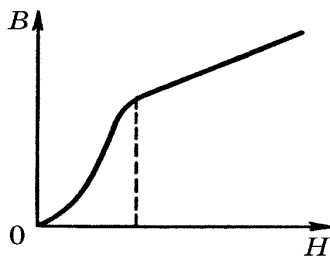
Ферромагнетиктер деп өздігінен магниттеле алатын, яғни, тіпті сыртқы магнит өрісі жоқ кезде магниттелген заттарды (қатты) айтады. Әдеттегі ферромагнетиктер түрлері – темір, кобальт және көптеген олардың қорытпалары.

Магниттелудің негізгі қисығы. Ферромагнетиктерге тән ерекшелік – $J(H)$ немесе $B(H)$ – күрделі бейсызықтық тәуелділігі болып табылады. 7.12-суретте $H = 0$ кезде де магниттелінуі нөлге тең ферромагнетиктің магниттелу қисығы берілген, оны **магниттелудің негізгі қисығы** деп атайды. Енді H -тың салыстымалы түрде үлкен емес мәндері кезінде J магниттелу $J_{\text{қан}}$ қанығу мәніне жетеді. H -тың артуымен $B = \mu_0(H + J)$ магнит индукциясы да артады, ал қанығу мәніне жеткен соң сызықтық заң

бойынша H -тың артуымен B артуын жалғастыра береді: $B = \mu_0 H + \text{const}B$, мұндағы, $\text{const} = \mu_0 J_{\text{қан}}$. 7.13-суретте $B - H$ диаграмма-сында магниттелудің негізгі қиысығы келтірілген.



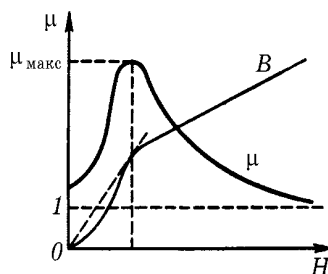
7.12-сурет



7.13-сурет

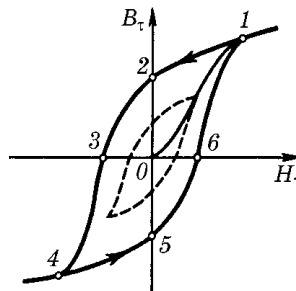
Ферромагнетиктер үшін $B(H)$ бейсызықтық болғандықтан, әрбір берілген ферромагнетиктің магниттік қасиетін сипаттайтын белгілі бір тұрақты шама ретінде μ магнит өтімділігін енгізуге болмайды. Бірақ, бұрынғыша $\mu = B/\mu_0 H$ деп есептейді, μ бұл кезде H -тың функциясы болып табылады (7.14-сурет). Ферромагнетиктер үшін $\mu_{\text{ман}}$ магнит өтімділігі өте үлкен мәндерге жетуі мүмкін. Мысалы, таза темір үшін 5000, супермалла қорытпасы үшін 800 000.

Магнит өтімділігі ұғымын тек магниттелудің негізгі қиысығына қолданатынын байқаймыз, өйткені біз қазір көз жеткізетіміздей, $B(H)$ тәуелділігі бір мәнді емес.



7.14 сурет

Магниттік гистерезис. Ферромагнетиктер үшін $B(H)$ немесе $J(H)$ бейсызықтық тәуелділігінен басқа магниттік гистерезис құбылыс да тән: B және H немесе J және H арасындағы байланыс бірімәнді емес, ол ферромагнетик магниттелуінің бұдан бұрынғы жағдайымен анықталады. Егер бастапқыда магниттелмеген ферромагнетикті H_{τ} -ды арттыра отырып, нөлден қанығу пайда болғанша,



7.15-сурет

(7.15-те суретте 1-нүкте), ал сосын H_τ -ды кеміте отырып, H_1 -ден – H_1 -ге дейін магниттесе, онда $B_\tau(H_\tau)$ магниттелу қисығы 10 бастапқы жол бойымен емес, одан жоғары – 1234 жолымен өтеді. Егер одан әрі H_τ -ды кері бағытта $-H_1$ -ден $+H_1$ -ге дейін өзгертсе, онда магниттелу қисығы – 4561 жолымен төмен өтеді.

Мұнда τ индексі τ ортымен сипатталатын таңдап алған магниттелу бағытындағы $\mathbf{H}$ және $\mathbf{B}$ векторларының проекциясын білдіреді.

Алынған тұйық қисықты *гистерезис тұзағы* деп атайды. 1 және 4 нүктелерінде қанығу жеткен жағдайларда *максимум гистерезис тұзағы* алынады. Шеткі нүктелерінде қанығу жоқ болса, соған ұқсас гистерезис тұзағы алынады, бірақ өлшемі кішкентай максимум гистерезис тұзағымен қоршалған сияқты көрінеді.

7.15-суреттен $H_\tau = 0$ кезінде магниттелу жоғалмайтыны (2-нүкте) және *қалдық индукция* деп аталатын B_r шамасымен сипатталатыны көрініп тұр. Оған J_r *қалдық магниттелу* сәйкес келеді. Тұрақты магниттердің болуы осындай қалдық магниттелудің болуымен байланысты. B_r шамасы бағыты магниттелуді тудыратын өріске қарама-қарсы болатын H_c өріс әсерінен ғана нөлге айналады (3 нүкте). H_c шамасын *коэрцитивтік күш* деп атайды.

Әр түрлі ферромагнетиктер үшін B_r және H_c мәндері кең аралықта өзгереді. Трансформатор темірі үшін гистерезис тұзағы еңсіз (H_c аз), тұрақты магниттерді дайындайтын ферромагнетиктер үшін – жалпақ (H_c үлкен, мысалы, аллико қорытпасы үшін $H_c = 50\,000$ А/М, $B_r = 0,9$ Тл).

Ферромагнетикті магнитсіздендіру үшін іс жүзіндегі тиімді әдіс магниттелу қиысығының осы ерекшелігіне негізделген. Магниттелген үлгіні айнымалы ток өтетін катушкаға орналас-тырады және оның амплитудасын біртіндеп нөлге дейін азайтады. Бұл кезде ферромагнетик бірнеше дүркін циклдік түрде қайта магниттеледі, сол себепті гистерезис тұзағы магниттелу нөлге тең болатын O нүктесіне тартылып, біртіндеп кішірейеді.

Тәжірибе қайта магниттеу кезінде ферромагнетиктің қызатынын көрсетеді. Ферромагнетиктің көлем бірлігінде бұл кезде сан жағынан гистерезис тұзағының $S_{\text{ауд}}$ «ауданына» тең $Q_{\text{бір}}$ жылу бөлінетінін көрсетуге болады:

$$Q_{\text{бip}} = \oint H_{\tau} dB_{\tau} = S_{\text{ауд}} \cdot (7.29)$$

Кюри температурасы. Температураны арттыру кезінде ферромагнетиктердің магниттелу қабілеті кемиді, нақты айтқанда, қанығу магниттелінуі азаяды. **Кюри температурасы** немесе **нүктесі** деп аталатын қандай да бір температура кезінде ферромагниттік қасиеттері жойылады.

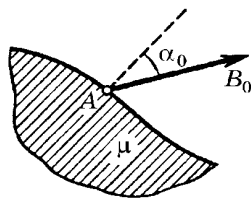
Кюри температурасынан жоғарырақ температура кезінде ферромагниттік парамагнетикке айналады.

Ферромагнетизм теориясы туралы. Ферромагнетизмнің физикалық мағынасын тек кванттық физика көмегімен түсіну мүмкін болды. Белгілі бір жағдайларда кристалдарда электрондардың магнит моменттерін бір-біріне параллель орналасуға мәжбүрлейтін **алмастыру күштері** пайда болуы мүмкін. Нәтижесінде спонтанды, яғни, өздігінен магниттелу аймағы (өлшемі 1-10 мкм) пайда болады, бұл аймақты **домендер** деп атайды. Әрбір домен айналасында ферромагнетик қанығуға дейін магниттелген және белгілі бір магнит моменті бар. Әртүрлі домендер үшін осы моменттердің бағыты да әртүрлі, сондықтан сыртқы өріс жоқ кезде үлгінің қосынды моменті нөлге тең және үлгі тұтас алғанда макроскопиялық магниттелмеген болып көрінеді.

Сыртқы магнит өрісін қосқан кезде өріс бойынша бағдарланған домендер өріске қарсы бағдарланған домендер есебінен өседі. Әлсіз өрістерде мұндай өсу қайтымды сипатқа ие. Күштірек өрістерде барлық домендер айналасында бірдей уақытта магнит моменттерінің қайта бағдарлануы болады. Бұл процесс қайтымсыз және де сол гистерезис пен қалдық магниттелудің себебі болып табылады.

Есептер

7.1. Бөлетін шекарадағы шарттар. Магнетик – вакуумды бөлетін шекарадағы А нүктесіне жақын магнит индукциясы вакуумде B_0 -ге тең, және де B_0 векторы берілген нүктедегі бөлетін шекараға нормальмен α_0 бұрыш жасайды. Магнетиктің магнит өтімділігі μ -ге тең. А нүктесіне жақын магнетиктегі B



7.16-сурет

магнит индукциясын табу керек.

Шешімі. Ізделіп отырған шама

$$B = \sqrt{B_n^2 + B_\tau^2}. \quad (1)$$

Бөліп тұрған шекарадағы 7(20) және (7.22) шарттардан мынаны табамыз:

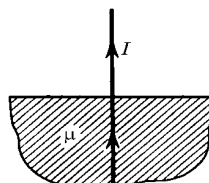
$$B_n = B_0 \cos \alpha_0,$$

$$B_\tau = \mu \mu_0 H_\tau = \mu \mu_0 H_{0\tau} = \mu B_{0\tau} = \mu B_0 \sin \alpha_0,$$

мұндағы, $H_{0\tau}$ – вакуумдағы $\mathbf{H}_0$ - векторының тангенциаль құраушысы. Осы өрнекті (1)-ге қойып алатынымыз:

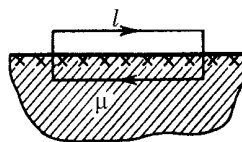
$$B = B_0 \sqrt{\cos^2 \alpha_0 + \mu^2 \sin^2 \alpha_0}.$$

7.2. Беттік магниттелу тогы. Тогы I болатын ұзын жіңішке өткізгіш вакуум – магнетикті бөлетін жазық шекарада перпендикуляр орналасқан (7.17-сурет). Магнетиктің өтімділігі μ . Бөліп тұрған осы шекарадағы беттік i' магниттелу тогының сызықтық тығыздығының өткізгішке дейінгі r қашықтыққа тәуелділігін табу керек.



7.17-сурет

Шешімі. Алдымен беттік магниттелу тогының конфигурациясы туралы айтайық. 7.17-суреттен бұл тек радиуспен бағытталғанын байқау қиын емес. Контур ретінде жазықтығы берілген нүктедегі магниттелу тогына перпендикуляр болатын шағын тік төртбұрышты алып, $\mathbf{J}$ магниттелу циркуляциясы туралы теореманы қолданамыз. Бұл контурдың орналасуы 7.18.-суретте көрсетілген, мұндағы беттік магниттелу тогының бағыты крестиктермен белгіленген. $Jl = i'l$ теңдігінен $i' = J$ -ді аламыз.



7.18-сурет

Одан әрі $J = \chi H$, мұндағы H -ты центрі өткізгіштің осінде жатқан радиусы r шеңбер бойымен $\mathbf{H}$ векторының циркуляциясынан табамыз: $2\pi r H = I$ (симметриялық пайымдаудан $\mathbf{H}$ векторының сызықтары I тогы бар өткізгішке перпендикуляр жазықтықтарда жататын шеңберлер болатыны түсінікті). Нәтижесінде мынаны табамыз:

$$i' = (\mu - 1)I/2\pi r.$$

7.3. Н векторының циркуляциясы. I тогы бар түзу ұзын жіңішке өткізгіш өтімділігі μ өткізбейтін магнетик толтырылған кеңістікті вакуумнан бөлінетін жазықтықта жатыр. Барлық кеңістіктегі B магнит индукциясын өткізгішке дейінгі қашықтықтың функциясы ретінде табу керек. B векторының сызықтары центрі өткізгіштің осындағы шеңберлер екені есімізде.

Шешімі. H векторының сызықтары да шеңберлер болатыны анық, және де вакуум-магнетик шекарасында H векторы кенет үзіліске ұшырайды. (B векторынан айырмашылығы). Магнетиктегі және вакуумдағы магнит өрістерін сәйкес H және H_0 деп белгілейміз. Сонда центрі өткізгіш осында жатқан радиусы r шеңбер түрінде болатын контур бойымен H векторының циркуляциясы туралы теорема бойынша:

$$\pi r H + \pi r H_0 = I \quad (1)$$

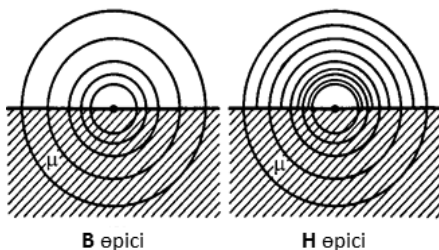
Бұдан басқа, бөлетін шекарада $B = B_0$ немесе

$$\mu H = H_0 \quad (2)$$

(1) және (2) теңдеулерді бірге шеше отырып, мынаны аламыз:

$$H = \frac{I}{(1+\mu)\pi r}, \quad B = \mu\mu_0 H = \frac{\mu\mu_0 I}{(1+\mu)\pi r}$$

B және H өрістерінің берілген жағдайдағы конфигурациясы 7.19-суретте көрсетілген. Вакуумда B мен H үшін $\mu = 1$ болғанда бізге белгілі формулаларды алатынымызға көз жеткізген пайдалы.



7.19-сурет

7.4. H және J векторларының циркуляциясы. I тұрақты ток дөңгелек кимасының радиусы R ұзын біртекті цилиндр сым бойымен ағады. Сым

материалы қабылдағыштығы χ парамагнетик болып табылады. Табу керек: 1) B индукцияның сым осыне дейінгі r қашықтыққа тәуелділігін; 2) өткізгіш ішіндегі j' магниттелу тогының тығыздығын.

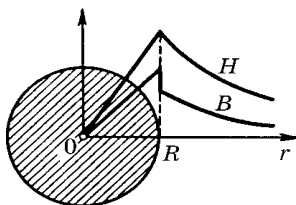
Шешімі. 1. Центрі сым осындай жатқан радиусы r шеңбер бойымен $\mathbf{H}$ векторының циркуляциясынан мынау шығады:

$$r < R, \quad 2\pi r H = I(r/R)^2, \quad B \propto (1 + \chi) r / R^2,$$

$$r > R, \quad 2\pi r H = I, \quad B \propto 1/r$$

7.20-суретте $H(r)$ және $B(r)$ тәуелділік графиктері көрсетілген.

2. Радиусы r шеңбер бойымен $\mathbf{J}$ магниттелу циркуляциясы туралы теореманы қолданамыз (7.20-суретті қараңыз): $2\pi r J = I'$, мұндағы I' – осы контурмен қамтылған магниттелу тогы. Осы өрнектің дифференциалын табамыз. (r дан $r + dr$ -ға өту кезіндегі):



7.20-сурет

$$2\pi d(rJ) = dI'$$

$dI' = j' 2\pi r dr$ болса, онда алдыңғы теңдеуді түрлендіруге болады:

$$j' = \frac{J}{r} + \frac{dJ}{dr}.$$

Енді $J = \chi H = (\chi I / 2\pi R^2) r$ екенін ескереміз. Сонда мынаны аламыз:

$$j' = \chi I / \pi R^2.$$

Бұл ток өткізгіштік тогы ағатын жаққа бағытталғанын (қарама-қарсы жаққа ағатын беттік магниттелу тогынан айырмашылығы) түсіну қиын емес.

Ұзын соленоид қабылдағыштығы $\chi = a r^2$ тек соленоид осыне дейінгі r қашықтыққа тәуелді болатын біртекті емес, изотропты магнетикпен толтырылған, мұндағы a – тұрақты, соленоид осындай магнит индукциясы B_0 -ге тең. 1) магниттелудің, $J(r)$; 2) магниттелу тогының тығыздығының $j'(r)$ қашықтыққа тәуелділігін табу керек.

Шешімі: 1. Магниттелу $J = \chi H$. Біздің жағдайымызда H шамасы r -ға тәуелді емес (бұл тікелей 7.21 суреттің сол жағында көрсетілген контур

бойымен $\mathbf{H}$ векторының циркуляциясынан шығады). Сондықтан $H = H_0$ соленоид осінде, және біз мынаны аламыз:

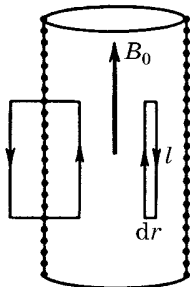
$$J = ar^2 H_0 = ar^2 B_0 / \mu_0$$

2. 7.21-суреттің оң жағында көрсетілген шексіз жіңішке контур бойымен $\mathbf{J}$ магниттелу циркуляциясы туралы теоремадан шығады:

$$Jl - (J + dJ)l = j'_n l dr,$$

Мұндағы l – контурдың биіктігі, dr – оның ені. Бұдан:

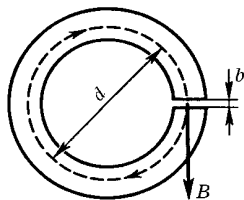
$$j'_n = -\frac{dJ}{dr} = \frac{2aB_0}{\mu_0} r.$$



7.27-сурет

Минус таңбасы $\mathbf{j}'$ векторының контурды айналу бағытымен оң винт жүйесін құрайтын $\mathbf{n}$ нормалға қарсы бағытталғанын көрсетеді. Басқаша сөзбен айтқанда, $\mathbf{j}'$ векторы оң контурдың орналасқан жерінде бізге қарай бағытталған, яғни көлемдік магниттелу токтары $\mathbf{B}_0$ векторымен сол винт жүйесін құрайды.

- 7.6. Тұрақты магнит полюстері арасында жіңішке саңылауы бар сақина тәрізді дейік. Сақинаның орташа диаметрі d . Саңылау ені b , саңылаудағы өрістің магнит индукциясы $\mathbf{B}$. Саңылау шеттеріндегі өрістің шашырауын ескермей, зат ішіндегі $\mathbf{H}$ және $\mathbf{J}$ векторларының модулдерін табу керек.



7.22-сурет

Шешімі. Диаметрі d үзік сызықты шеңбер бойымен (7.22-сурет) $\mathbf{H}$ векторының циркуляциясы туралы теореманы пайдаланып, және өткізгіштік тогының жоқ екенін ескеріп, мынаны жазамыз:

$$(\pi d - b)H_\tau + bB/\mu_0 = 0,$$

мұндағы H_τ – контурды айналу бағытындағы $\mathbf{H}$ векторының проекциясы (ол саңылаудағы $\mathbf{B}$ векторының бағытымен сәйкес алынған). Бұдан

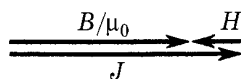
$$H_\tau = -\frac{bB}{\mu_0(\pi d - b)} \approx -\frac{bB}{\mu_0 \pi d} \quad (1)$$

Минус таңбасы магнит затының ішіндегі $\mathbf{H}$ векторының бағыты сол нүктедегі $\mathbf{B}$ векторына қарама-қарсы екенін көрсетеді. $b \rightarrow 0$ кезінде $H \rightarrow 0$ екенін байқаймыз.

$\mathbf{J}$ магниттелу модулін (7.11) формула бойынша (1-ді) пайдаланып табамыз:

$$\mathbf{J} = \frac{B/\mu_0}{1-b/\pi d} \approx \frac{B}{\mu_0}$$

B/μ_0 , $\mathbf{H}$ және $\mathbf{J}$ векторларының арасындағы қатынас 7.23-суретте көрсетілген.



7.23-сурет

- 7.7. Орташа диаметрі d тор түріндегі темір өзекшеде жалпы саны N орам бар. Өзекшеде ені b жіңішке көлденең кесік жасалған (7.22-сурет). Орам арқылы I ток өткен кезде кесіктегі магнит индукциясын B . Кесіктің шетіндегі өрістің шашырауын ескермей, осы жағдайдағы темірдің магнит өтімділігін табу керек.

Шешімі. Диаметрі d шеңбер бойынан $\mathbf{H}$ векторының циркуляциясы туралы теоремаға сәйкес (7.22-суретті қара)

$$(\pi d - b)H + bH_0 = NI,$$

мұндағы, H және H_0 – темірдегі және кесіктегі сәйкес $\mathbf{H}$ векторының модульдері. Бұдан басқа, кесік шетерінде өріс шашырауының болмауы

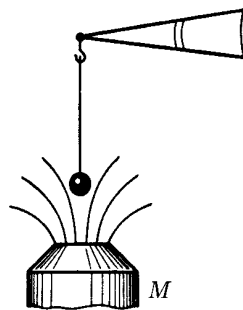
$$B = B_0$$

екенін білдіреді.

Осы екі теңдеуден, $B = \mu_0 H$ және $b \ll d$ екенін ескеріп, мынаны аламыз.

$$\mu = \frac{\pi d B}{\mu_0 N I - b B}.$$

- 7.8. **Магнетикке әсер ететін күш.** Қондырғыда (7.24-сурет) таразы көмегімен көлемі V шағын парамагнетик шариктің M магнит полюсына тартылу күшін өлшейді. Полюс ұшының осінде магнит индукциясының x биіктікке тәуелділігі $B = B_0 \exp(-ax^2)$, мұндағы B_0 және a – тұрақтылар. Табу керек: 1) Тартылыс күші максимум болу үшін шарикті x_m – қандай биіктікке орналастыру қажет; 2) Егер максимум тартылыс күші F_m -ге тең болса, парамагнетиктің



7.24-сурет

магниттік қабылдағыштығын;

Шешімі. 1. Анықтылық үшін $\mathbf{B}$ векторы осте жоғары бағытталған, X осін де солай бағыттаймыз. Сонда (6.34)-ке сәйкес $F_x = p_m \partial B / \partial x$, мұндағы p_m магнит моменті. $\mathbf{B}$ векторы (парамагнетик үшін) қайда бағытталса, солай қарай бағытталғаны ескерілген, сондықтан ∂n -ді ∂x -пен алмастырады.

Әрі қарай $p_m = -JV = \chi HV$ және $\partial B / \partial x = -2AB_0 x \exp(-ax^2)$ болғандықтан,

$$F_x = -Ax \exp(-2ax^2) \quad (1)$$

мұндағы $A = 2aB_0^2 \chi V / \mu_0$.

dF_x / dx туындысын есептеп және оны нолге теңестіріп, x_m -ді анықтау үшін төмендегі теңдеуді аламыз: $1 - 4ax^2 = 0$, бұдан

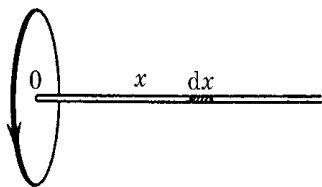
$$x_m = 1/\sqrt{4a} \quad (2)$$

2. (2)-ні (1)-ге қойған соң, мынаны табамыз:

$$\chi = \frac{\mu_0 F_m}{B_0^2 V} \sqrt{\frac{e}{a}},$$

парамагнетик үшін $\mu \approx 1$ екені ескерілген.

- 7.9. Магнит қабылдағыштығы χ және көлденең қимасының ауданы S парамагнетиктен жасалған ұзын жіңішке цилиндр өзек тогы бар катушканың осі бойымен орналасқан. өзектің бір ұшы катушка центрінде онда магнит өрісі B -ға тең, ал екінші ұшы іс жүзінде магнит өрісі жоқ аймақта орналасқан. Катушка өзекке қандай күшпен әсер етеді?



7.25-сурет

Шешімі. Ұзындығы dx өзек элементін ойша бөліп аламыз (7.25-сурет). Оған

әсер ететін күш:

$$dF_x = dp_m \frac{\partial B_x}{\partial n}.$$

$\mathbf{B}$ векторы катушка осінде оңға бағытталған болсын суретте. Сонда $B_x = B$, $\partial n = \partial x$, және де $dp_m = JSdx = \chi HSdx$, бұдан

$$dF_x = \chi H S dx \frac{\partial B}{\partial x} = \frac{\chi S}{\mu \mu_0} B dB.$$

Осы өрнекте интегралдап, мынаны аламыз:

$$F_x = \frac{\chi S}{\mu \mu_0} \int_B^0 B dB = -\frac{\chi S B^2}{2 \mu \mu_0}$$

Минус таңбасы **F** векторы солға, бағытталғанын, яғни өзек тогы бар катушкаға тартылатынын көрсетеді.

- 7.10.** Магнит қабылдағыштығы χ парамагнетиктен жасалған көлемі V шағын шарикті тогы бар катушка осінің бойымен магнит индукциясы B -ға тең нүктеден іс жүзінде өріс болмайтын аймаққа ауыстырады. Бұл кезде магнит күштеріне қарсы қандай жұмыс жасайды?

Шешімі. X осін катушка осі бойымен бағыттаймыз. Сонда шарикті dx -ке орын ауыстыру кезіндегі магнит күштеріне қарсы элементар жұмыс мынадай болады:

$$\delta A = -F_x dx = p_m \frac{\partial B_x}{\partial n} dx, \quad (1)$$

мұндағы, F_x – магнит күштерінің x осіндегі проекциясы (6.34), ал минус таңбасы жұмыс сол күшке қарсы жасалатынын білдіреді.

Осте **B** векторы x -тың оң бағытқа қарай бағытталған болсын, сонда $B_x = B$ және $\partial n = \partial x$ (қарама-қарсы жағдайда $B_x = -B$, $\partial n = -\partial x$, яғни $\partial B_x / \partial n$ туындысы **B** векторының қайда бағытталғанына тәуелді емес). $p_m = JV = \chi H V$ екенін ескеріп, (1)-теңдеуді мына түрде қайта жазамыз.

$$\delta A = -\chi N V \frac{\partial B}{\partial x} dx = -\frac{\chi V}{\mu \mu_0} B dB.$$

Осы өрнекті B -дан 0-ге дейін интегралдап, мынаны аламыз:

$$A = -\frac{\chi V}{\mu \mu_0} \int_B^0 B dB = \frac{\chi B^2 V}{2 \mu \mu_0}.$$

Мына дерекке көңіл аударған дұрыс: алынған нәтиже – A жұмысы – $B(x)$ тәуелділігінің сипатына тәуелді емес.

Электр және магнит өрістерінің салыстырмалылығы



§ 8.1. Электромагниттік өріс. Зарядтың инварианттылығы

Осы уақытқа дейін біз электр және магнит өрістерін *бөлек* қарастырдық, олардың арасында көрінерлік байланыс байқамадық. Бұл екі өріс те статикалық болып табылатындықтан ғана мүмкін болатын, басқа жағдайларда бұлай етуге болмайды.

Біз біртұтас толық электромагниттік өріс ретінде электр және магнит өрістері әрқашан *бірге* деп қарастырылуға тиісті екенін көреміз. Басқа сөзбен айтқанда, электр және магнит өрістері қайсы бір мағынада **электромагниттік өріс** деп аталатын тұтас физикалық нысанның әртүрлі компоненттері болып табылады.

Электромагниттік өрісті электр және магнит өрістеріне бөлудің салыстырмалы сипаты болады: мұндай бөлу шешуші кезеңде құбылыс қарастырылып отырған санақ жүйесіне тәуелді болады. Бұл кезде бір санақ жүйесінде тұрақты болатын өріс, жалпы жағдайда басқа санақ жүйесінде айнымалы болады. Біраз мысалдар келтірейік.

Заряд инерциялық K -санақ жүйесінде u тұрақты жылдамдықпен қозғалады. Бұл санақ жүйесінде біз осы зарядтың электр өрісімен қатар, магнит өрісін де бақылайтын боламыз, және де екі өріс те уақыт бойынша айнымалы. Егер зарядпен бірге орын ауыстыратын инерциялық K' -жүйесіне өтетін болсақ, онда бұл жүйеде заряд тыныштықта болады және біз тек электр өрісін бақылайтын боламыз.

Екі бірдей заряд K -санақ жүйесінде бір-біріне қарама-қарсы бірдей u жылдамдықпен қозғалады. Бұл санақ жүйесінде біз электр

өрісін де, магнит өрісін де бақылайтын боламыз, екеуі де айнымалы. Бұл жағдайда өрістердің тек біреуін ғана бақылайтын осындай K' -жүйесін табуға болмайды.

K -санақ жүйесінде тұрақты біртекті емес магнит өрісі болады (мысалы, қозғалмайтын тұрақты магниттің өрісі). Сонда K -жүйесіне салыстырмалы түрде қозғалатын K' -жүйесінде біз айнымалы магнит өрісін бақылайтын боламыз және де одан әрі электр өрісін де көреміз.

Сөйтіп, электр және магнит өрістерінің арасындағы қатынастар әртүрлі санақ жүйесінде бірдей емес екені анық болып шығады.

Осы тараудың негізгі мазмұнына – бір санақ жүйесінен басқа жүйеге ауысу кезіндегі өрістерді түрлендіру заңына – көңіл аудармас бұрын, мұнан былайғы маңызды сұрақ: осындай ауысуларда q электр заряды және $\mathbf{E}$ векторы үшін Гаусс теоремасы қалай болатынын анықтаймыз.

Зарядтың инварианттылығы. Қазіргі кезде заряд тасушылардың қозғалысы өзгерген кезде оңашаланған жүйенің толық зарядының өзгермей қалатындығына толық дәлел бар.

Дәлел ретінде сутегі молекулаларынан тұратын газдың бейтараптығына сүйенуге болады. Бұл молекулаларда электрондар протондарға қарағанда, едәуір үлкен жылдамдықпен қозғалады. Сондықтан егер заряд жылдамдыққа тәуелді болса, онда электрондар мен протондар зарядтары компенсацияланбаған болады – газ зарядталған болар еді. Бақылау ешқандай зарядты таба алмады. (10^{-20} дейінгі дәлдікпен).

Немесе, мысалы, зат бөлшегінің қызуы. Электронның массасы ядро массасынан едәуір аз болғандықтан, қызған кезде электрондар жылдамдығы ядроға қарағанда көп артуы тиіс. Және егер заряд жылдамдыққа тәуелді болса, онда қызған кезде зат зарядталған болып шығады. Еш уақытта мұндай нәрсе бақылған емес.

Әрі қарай, егер электрон заряды жылдамдыққа тәуелді болса, онда заттағы электрондардың орташа жылдамдығы оның химиялық құрамына тәуелді болғандықтан, химиялық реакция барысында заттың қосынды заряды өзгерген болар еді. Есептеу тіпті зарядтың жылдамдыққа аз ғана тәуелділігінің өзі қарапайым химиялық реакциялардың өзінде де күшті электр өрісінің болуына алып келетінін көрсетеді. Бірақ, мұнда да бұған ұқсас нәрсе бақылған емес.

Және ең соңында, барлық қазіргі заманғы зарядталған бөлшектер үдеткіштерінің есептеуі мен жұмысы бөлшектердің заряды олардың жылдамдығы өзгерген кезде өзгермейді деген болжамға негізделген. Сонымен, біз кез келген бөлшектің заряды – бөлшек жылдамдығына, санақ жүйесін тандап алуға тәуелсіз, релятивистік инвариантты шама деген қорытындыға келеміз.

Е өрісі үшін Гаусс теоремасының инварианттылығы. Бұл эксперименттік деректерді жалпылаудан шығады екен, себебі $\oint \mathbf{E} d\mathbf{S} = q/\varepsilon_0$ – Гаусс теоремасы тек қана тыныштықтағы емес, қозғалатын зарядтар үшін де дұрыс. Бұл кезде беттік интеграл берілген санақ жүйесінде уақыттың бір және де сол мезегі үшін есептелуі тиіс.

Бұдан басқа, әртүрлі инерциялық санақ жүйесі бір-біріне физикалық эквивалентті болғандықтан (салыстырмалылық принципіне сәйкес), біз Гаусс теоремасы барлық инерциялық санақ жүйесінде орындалады деп тұжырымдаймыз.

§ 8.2. Е және В өрістерін түрлендіру заңдары

Бір санақ жүйесінен басқа жүйеге өткен кезде **Е** және **В** өрістері белгілі бір түрде түрленеді. Бұл түрлену заңдары арнайы салыстырмалылық теориясында, және де өте күрделі түрде қарастырылады. Осы себептен біз мұнда сәйкес қорытындылар жасамаймыз, тек заңдардың мазмұнына, олардан шығатын салдарларға, сондай-ақ, қандай да бір нақты есепті шығару барысында бұл заңдарды қалай пайдалануға болатындығына назар аударамыз.

Мәселенің қойылуы. Екі инерциялық санақ жүйесі: **К** жүйесі және онымен салыстырғанда v_0 жылдамдықпен қозғалатын K' жүйесі бар болсын дейік. **К**-санақ жүйесінің қандай да бір кеңістікті – уақыттық нүктесінде **Е** және **В** өрістерінің мәндері белгілі. K' -санақ жүйесінің сол кеңістікті уақыттық нүктесінде **Е'** және **В'** өрістерінің мәндері қандай болады? Сол бір ғана кеңістікті – уақыттық нүкте деп екі санақ жүйесіндегі координаталар мен уақыт өзара Лоренц түрлендірулері* арқылы байланысқан нүктені айтатынын еске саламыз.

* Яғни: $x' = \frac{x-v_0t}{\sqrt{1-(v_0/c)^2}}, y' = y, z' = z, t' = \frac{t-xv_0/c^2}{\sqrt{1-(v_0/c)^2}}.$

Бұл сұраққа жоғарыда айтып кеткеніміздей, **өрістерді түрлендіру заңдары** төмендегі формулалармен өрнектелетінін көрсететін салыстырмалылық теориясы жауап береді:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_{\parallel} &= \mathbf{E}_{\parallel}, & \mathbf{B}'_{\parallel} &= \mathbf{B}_{\parallel}, \\ \mathbf{E}'_{\perp} &= \frac{\mathbf{E}_{\perp} + [\mathbf{v}_0 \mathbf{B}]}{\sqrt{1 - \beta^2}}, & \mathbf{B}'_{\perp} &= \frac{\mathbf{B}_{\perp} - [\mathbf{v}_0 \mathbf{E}]}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \end{aligned} \quad (8.1)$$

Мұнда $\parallel$ және $\perp$ белгілерімен электр және магнит өрістерінің **бойлық** және **көлденең** ($\mathbf{v}_0$ векторына қатысты) құраушылары белгіленген, $\beta = v_0/c$, c – вакуумдағы жарық жылдамдығы ($c^2 = 1/\epsilon_0 \mu_0$).

Проекцияларымен жазылған осы формулалардың түрі былай болады:

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x, & B'_x &= B_x, \\ E'_y &= \frac{E_y - v_0 B_z}{\sqrt{1 - \beta^2}}, & B'_y &= \frac{B_y + v_0 E_z / c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ E'_z &= \frac{E_z + v_0 B_y}{\sqrt{1 - \beta^2}}, & B'_z &= \frac{B_z - v_0 E_y / c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \end{aligned} \quad (8.2)$$

мұнда X және X' координаталар осері $\mathbf{v}_0$ векторы бойымен, Y' осі Y осіне, $Z' - Z$ осіне параллель бағытталған.

(8.1) және (8.2) теңдеулерінен әрбір $\mathbf{E}'$ және $\mathbf{B}'$ векторлары $\mathbf{E}'$ арқылы да, сол сияқты $\mathbf{B}'$ арқылы да өрнектеледі. Бұл электр және магнит өрістерінің **біртұтас** табиғатын растайды. Олардың әрқайсысының жеке алғанда абсолют мағынасы жоқ: электр және магнит өрістері туралы тек міндетті түрде осы өрістер қарастырылатын санақ жүйесін көрсетіп қана сөз етуге болады.

Электромагниттік өрістің түрлендіру заңдарымен өрнектелген қасиеттері локальды болатынын атап айту керек: K' -санақ жүйесінің қандай да бір кеңістікті – уақыттық нүктесінде $\mathbf{E}'$ және $\mathbf{B}'$ -тың мәндері тек қана K -санақ жүйесінің сол кеңістікті –

уақыттық нүктесіндегі **E** және **B**-ның мәндері арқылы ғана бір мәнді анықталады.

Өрістерді түрлендіру заңдарының төмендегі ерекшеліктеріне көңіл аудару қажет:

1. **E** мен **B**-ның басқа санақ жүйесіне өткенде өзгеретін көлденең құраушыларынан айырмашылығы, бойлық құраушылары өзгермейді – барлық санақ жүйелерінде олар бірдей болады.

2. **E** және **B** векторлары әр түрлі санақ жүйелерінде бір-бірімен симметриялық түрде жоғары деңгейде байланысқан. Бұл әсіресе, түрлендіру заңдарының өріс проекциялары арқылы жазылу түрінде толық көрінеді.

3. Егер кері түрлендіру формулаларын алу қажет болса (K' -тан K -ға), онда (8.1) және (8.2) формулалардағы барлық штрихталған шамаларды штрихталмағандарға (және керісінше), ал сондай-ақ u_0 -дің алдындағы таңбаны ауыстырса жеткілікті.

Өрістерді түрлендірудің жеке жағдайы ($v_0 \ll c$). Егер K' -жүйесі K -жүйесімен салыстырғанда $v_0 \ll c$ жылдамдықпен қозғалса, онда (8.1) формулаларының бөліміндегі түбірді бірмен ауыстыруға болады, және біз мынаны аламыз:

$$\begin{aligned} E'_{\parallel} &= E_{\parallel}, & B'_{\parallel} &= B_{\parallel} \\ E'_{\perp} &= E_{\perp} + [\mathbf{v}_0 \mathbf{B}], & B'_{\perp} &= B_{\perp} - [\mathbf{v}_0 \mathbf{E}]/c^2. \end{aligned} \quad (8.3)$$

Бұдан

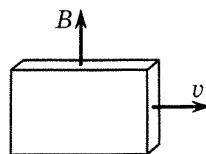
$$\boxed{\mathbf{E}' = \mathbf{E} + [\mathbf{v}_0 \mathbf{B}],} \quad \boxed{\mathbf{B}' = \mathbf{B} - [\mathbf{v}_0 \mathbf{E}]/c^2.} \quad (8/4)$$

(8.4) формулаларының бірінішісін тікелей және өте қарапайым алуға болатынын байқаймыз. K -жүйесінде қандай да бір t уақытта q зарядтың $\mathbf{v}_0$ жылдамдығы болсын. Оған әсер ететін Лоренц күші $\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q[\mathbf{v}_0 \mathbf{B}]$. K -жүйесімен салыстырғанда сол q зарядтың t уақыттағы жылдамдығымен, яғни, $\mathbf{v}_0$ жылдамдықпен қозғалатын инерциялық K' -жүйесіне ауысамыз. Бұл мезетте q заряды K' -жүйесінде қозғалмайды және тыныштықтағы зарядқа әсер ететін күш, тек электр күші болып табылады: $\mathbf{F}' = q\mathbf{E}'$. Біздің жағдайымыздағыдай, $v_0 \ll c$ кезде, күш инвариантты ($\mathbf{F}' = \mathbf{F}$), бұдан (8.4) формуласының біріншісі шығады.

Магнит өрісін түрлендіру үшін қажет формуланы тек салыстырмалылық теориясының көмегімен өте көп есептеулер нәтижесінде алуға болады.

(8.4) формуласының қолданылуына қарапайым мысал қарастырамыз.

Мысал. Үлкен метал пластинка B біртекті магнит өрісінде тұрақты релятивистік емес v жылдамдықпен қозғалады (8.1-сурет). Пластинка қозғалған кезде оның жазықтығында пайда болатын зарядтардың беттік тығыздығын табамыз.



8.1-сурет

Пластинкамен байланысқан санақ жүйесіне өтеміз. Бұл санақ жүйесінде (8.4) формулаларының біріншісіне сәйкес тұрақты біртекті электр өрісін бақылауға болады:

$$\mathbf{E}' = [\mathbf{vB}].$$

Ол бізге қарай бағытталған болады. Осы сыртқы өрістің әсерінен пластинка бетінің бізге қараған бетінде оң зарядтар, ал қарсы бетінде – теріс зарядтар шығатындай зарядтардың ығысуы болады. Осы зарядтардың σ беттік тығыздығы олардың пластинка ішіндегі тудырған өрісі сыртқы $\mathbf{E}'$ өріспен толық компенсацияланатындай болады, өйткені тепе-теңдік кезінде пластинка ішіндегі қорытқы электр өрісі нөлге тең болуы тиіс. (1.11) қатынасты ескеріп, мынаны аламыз:

$$\sigma = \epsilon_0 E' = \epsilon_0 v B.$$

Бұл сұрақты шешу кезінде басқаша – пластинка $\mathbf{v}$ жылдамдықпен қозғалатын санақ жүйесі тұрғысынан талдауға болатынын байқаймыз. Бұл санақ жүйесінде пластинка ішінде электр өрісі болады. Ол 8.1-суреттегі пластинкадағы барлық электрондардың жазықтық сыртына қарай ығысуын тудыратын Лоренц күшінің магниттік бөлігінің әсері салдарынан пайда болады. Нәтижесінде пластинканың алдыңғы беті оң, артқы жағы – теріс зарядталған, және пластинка ішінде электр өрісі пайда болады, және де электр өрісі $q\mathbf{E}$ Лоренц күшінің $q[\mathbf{vB}]$ магниттік бөлігін компенсациялайды, бұдан $\mathbf{E} = -[\mathbf{vB}]$. Бұл өріс σ – мен сол $\sigma = \epsilon_0 v B$ формуласымен байланысқан.

Осы сұрақты шешудегі екі жолы да бірдей заңды.

Магнетизмнің релятивистік табиғаты. (8.1) және (8.2) өрістерді түрлендіру формулаларынан өте тамаша қорытынды шығады: магнит өрісінің пайда болуы табиғатта вакуумдағы жарық жылдамдығына тең шекті c жылдамдықтың бар болу салдарынан шығатын таза релятивистік эффект болып табылады. Егер бұл жылдамдық шексіз болса (сәйкес өзара әсердің таралу жылдамдығы да), ешқандай магнетизм жалпы болмаған болар еді. Шын мәнінде, еркін электр зарядын қарастырамыз. Ол тыныштықта болатын K - санақ системасында тек электр өрісі болады. Ал бұл (8.1)-ге сәйкес, кез келген басқа K' -санақ жүйесінде, *егерде* $c \rightarrow \infty$ болса, ешқандай $\mathbf{B}'$ магнит өрісі пайда болмайтынын білдіреді. Ол тек c -ның шекті екендігінен, яғни, ең соңында релятивистік эффектінің салдарынан шығады.

Магнетизмнің релятивистік табиғаты әмбебап физикалық факт, және оның шығу тегі магнит зарядтарының болмауымен түсіндіріледі.

Көптеген релятивистік құбылыстардан магнетизмнің айырмашылығы көп жағдайларда салыстармалы түрде тез байқалады, мысалы, тогы бар өткізгіштің магнит өрісі. Осындай қолайлы жағдайлардың болу себебі, өткізгіштердегі электрондар мен протондар санының іс жүзінде идеал балансынан электр өрісінің түгел дерлік толық жоғалатындығынан, магнит өрісі қозғалатын зарядтардың өте үлкен санымен пайда болуы мүмкін екендігімен түсіндіріледі. Бұл жағдайларда магниттік өзара әсер басым болады.

Электр зарядтарының толық дерлік компенсациясы физиктердің релятивистік эффектіні зерттеуіне (яғни, магнетизмді) және *дұрыс* заңдар ашуына мүмкіндік берді. Осы себептен электромагнетизм заңдарының Ньютон заңдарынан айырмашылығы, салыстырмалылық теориясы құрылған соң, қайта қарауды керек етпеді.

Өріс қозғалмайды, бірақ өзгереді. Электр және магнит өрістері санақ жүйесі өзгерген кезде әртүрлі қатынастарда пайда болады, бұдан $\mathbf{E}$ және $\mathbf{B}$ өрістерін қарастырғанда белгілі бір сақтық керек. Айталық, қозғалатын магнит өрісі тарапынан зарядқа әсер ететін күш туралы сұрақтың қандай да бір дәл мазмұны жоқ дейік. Күш зарядтар тұрған нүктедегі $\mathbf{E}$ және $\mathbf{B}$ шамаларының мәндерімен анықталады. Егер $\mathbf{E}$ және $\mathbf{B}$ өрістер көздерінің қозғалуы нәтижесінде олардың осы нүктедегі мәндері өзгертін болса, күш те

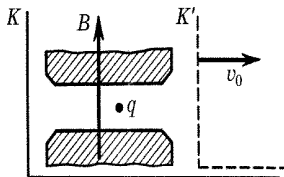
өзгереді, керісінше жағдайда, өріс көздерінің қозғалысы күш мәніне әсер етпейді.

Сөйтіп, зарядқа әсер ететін күш туралы мәселені шешу кезінде заряд орналасқан нүктедегі **E**-мен **B**-ны және оның **v** жылдамдығын білу қажет, әрі барлық осы шамалар біз қарастыратын инерциялық санақ жүйесіне қатысты алынған болуы тиіс.

Егер қашанда «қозғалатын» өріс туралы айтса, онда мұны жай ғана белгілі бір жағдайларда өзгертін өрісті сөзбен сипаттаудың қысқа және тиімді әдісі ретінде түсіну қажет және басқа ештеңе емес.

Бір санақ жүйесінен басқаға өту барысында өрісті қарастырғанда қаншалықты сақтық көрсету қажет, ол мынадай қарапайым мысалдан да анық көрінеді.

Мысал. Зарядталған бөлшек қозғалмайтын *K*-санақ жүйесінде магнит полюстері арасында тыныштықта тұр. *K*-жүйесімен салыстырғанда v_0 релятивистік емес жылдамдықпен оңға қарай қозғалатын (8.2-сурет) *K'* жүйесіне көшеміз. 1. Біз *K'*-жүйесінде зарядталған бөлшек магнит өрісінде қозғалады деп тұжырымдай аламыз ба? 2. *K'*-жүйесінде осы бөлшекке әсер ететін күшті табамыз.



8.2-сурет

1. Иә, бөлшек **магнит өрісінде қозғалады**. Бірақ, ескертеміз, магнит өрісімен салыстырғанда емес, магнит өрісінде. Бөлшек қозғалысы туралы санақ жүйесімен, магнитпен және басқа денелермен салыстырғанда сөз етудің мағынасы бар, бірақ тек магнит өрісімен салыстырғанда емес. Соңғысының физикалық мағынасы жоқ. Бұл барлығы тек магнит емес, электр өрісіне де қатысты болады.

2. Күшті табу үшін *K'*-жүйесінде $\mathbf{E}' = [\mathbf{v}_0 \mathbf{B}]$ электр өрісі де пайда болатынын ескеру керек, ол бізге қарай бағытталған (8.2-сурет). *K'*-жүйесінде заряд солға қарай - $\mathbf{v}_0$ жылдамдықпен қозғалатын болады, өйткені бұл қозғалыс қиылысқан электр және магнит өрістерінде болады. Анықтық үшін бөлшек заряды $q > 0$ болсын, сонда *K'*-жүйесіндегі Лоренц күші.

$$\mathbf{F}' = q\mathbf{E}' + q[-\mathbf{v}_0 \mathbf{B}] = q([\mathbf{v}_0 \mathbf{B}] - [\mathbf{v}_0 \mathbf{B}]) = 0,$$

алайда, бір санақ жүйесінен басқаға релятивистік емес түрлендірулер кезіндегі күштердің инварианттығынан шығарып, бірден айтуға да болар еді.

§ 8.3. Өрістерді түрлендірулер заңдарының салдарлары

Кейбір қарапайым салдар. (8.1) түрлендірулер формуласынан қарапайым және сонымен бірге пайдалы қатынастар қатары шығады.

1. егер K -жүйесінде тек $\mathbf{E}$ электр өрісі болса (ал магнит өрісі $\mathbf{B} = 0$) онда K' -жүйесінде $\mathbf{E}$ және $\mathbf{B}$ өрістері арасында мынадай байланыс бар:

$$\mathbf{B}' = -[\mathbf{v}_0 \mathbf{E}]/c^2. \quad (8.5)$$

Шынында, егер $\mathbf{B} = 0$ болса, онда $\mathbf{E}'_{\perp} = \mathbf{E}_{\perp}/1 - \beta^2$, және $\mathbf{B}'_{\parallel} = 0$, $\mathbf{B}'_{\perp} = -[\mathbf{v}_0 \mathbf{E}/c^2 \sqrt{1 - \beta^2}]$, мұнда векторлық көбейтіндідегі $\mathbf{E}$ -ні қалай жазса, $\mathbf{E}_{\perp}$ -ні де солай жазуға болады (бұл штрихталған шамаларға да қатысты). $\mathbf{B}' = \mathbf{B}'_{\parallel} + \mathbf{B}'_{\perp} = \mathbf{B}'_{\perp}$ екенін ескеріп, (8.5) формулаға келеміз.

2. Егер K -жүйесінде тек магнит өрісі $\mathbf{B}$ болса, (ал электр өрісі $\mathbf{E} = 0$), онда K' -жүйеде:

$$\mathbf{E}' = [\mathbf{v}_0 \mathbf{B}']. \quad (8.6)$$

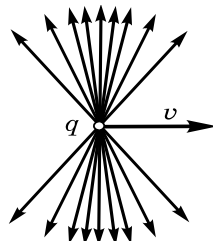
Шын мәнінде, егер $\mathbf{E} = 0$ болса, онда $\mathbf{B}'_{\perp} = \mathbf{B}_{\perp}/\sqrt{1 - \beta^2}$ және $\mathbf{E}'_{\parallel} = 0$, $\mathbf{E}'_{\perp} = [\mathbf{v}_0 \mathbf{B}]/\sqrt{1 - \beta^2}$. Соңғы векторлық көбейтіндідегі $\mathbf{B}$ -ны $\mathbf{B}_{\perp}$ -ға, және сосын $\mathbf{B}_{\perp}$ -ты $\mathbf{B}'$ -қа алмастырып (8.6.) формуласына келеміз.

(8.5) және (8.6) формулаларынан мынадай маңызды қорытынды шығады: *егер K -жүйесінде өрістердің біреуі ғана болса ($\mathbf{E}$ немесе $\mathbf{B}$), онда K' -жүйесінде электр және магнит өрістері өзара перпендикуляр болады ($\mathbf{E}' \perp \mathbf{B}'$).* Кері тұжырым барлық кезде емес, тек $\mathbf{E}$ және $\mathbf{B}$ векторларының модульдеріне қойылатын белгілі бір қосымша шектеулер кезінде ғана дұрыс екенін байқаймыз.

Және соңғы ескерту. (8.5) және (8.6) теңдеулеріне тек бір ғана санақ жүйесіне қатысты шамалар кіретін болғандықтан, бұл теңдеулерді кеңістікте және уақыт бойынша өзгертін өрістерге қолдану оңай. Бірқалыпты қозғалатын нүктелік зарядтың өрісі жақсы мысал бола алады.

Еркін қозғалатын релятивистік зарядтың өрісі. Өрістерді түрлендіру формулалары ең алдымен, электромагниттік өрістің тамаша қасиеттерін көрсететін болғандықтан үлкен қызығушылық туғызады. Бірақ, бұдан басқа, олар кейде қандай да бір мәселелерді оңайырақ шешетіндіктен іс жүзінде маңызды.

Мысалы, бірқалыпты қозғалатын нүктелік зарядтың өрісін табу туралы есеп зарядтың өзімен байланысқан санақ жүйесінде бақыланатын тек қана кулондық өрісті түрлендіру жолымен шешілуі мүмкін. Есептеу *еркін* қозғалатын q нүктелік зарядтың $\mathbf{E}$ өрісінің сызықтары 8.3-суреттегідей түрде болатынын көрсетеді (8.10 есепті қара), мұндағы, $\mathbf{v}$ – зарядтың жылдамдығы. Мұнда кескінделген бейне электр өрісінің конфигурациясының лездік «фотографиясына» сәйкес. Санақ жүйесінің P еркін нүктесіндегі $\mathbf{E}$ векторы берілген мезеттегі заряд орналасқан нүктеден P нүктесіне дейін жүргізілген $\mathbf{r}$ радиус-вектор бойымен бағытталған.



8.3-сурет

$\mathbf{E}$ векторының модулі мына формуламен анықталады:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2 \sin^2 \vartheta)^{3/2}}, \quad (8.7)$$

мұндағы, $\beta = v/c$; ϑ – $\mathbf{r}$ радиус-вектор мен $\mathbf{v}$ векторы арасындағы бұрыш.

Электр өрісі зарядтың қозғалысы бағытында (8.3 суретті қара), және де v заряд жылдамдығы c жылдамдыққа неғұрлым жақын болса, соғұрлым көбірек дәрежеде «қабысады».

Осы суретте көрсетілген өріс зарядпен бірге «орын ауыстырғанын» білетін болсақ, соның салдарынан заряд салыстырмалы түрде қозғалатын санақ жүйесіндегі $\mathbf{E}$ өрісі уақыт бойынша өзгереді.

$\mathbf{E}$ өрісті біле отырып, осы санақ жүйесіндегі $\mathbf{B}$ өрісті табуға болады:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c^2} [\mathbf{vE}] = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q[\mathbf{vr}]}{r^3} \frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2 \sin^2 \vartheta)^{3/2}}. \quad (8.8)$$

Бұл формула (8.5) қатынасының салдары болып табылады, штрихталған шамаларды штрихталмаған шамаларға және бір уақытта $\mathbf{v}$ -ны $-\mathbf{v}$ -ға алмастыру жүргізілген.

$v \ll c$ ($\beta \ll 1$) кезде (8.7) және (8.8) өрнектері сәйкес (1.2) мен (6.3)-ке ауысады.

§ 8.4. Электромагниттік өріс инварианттары

Электромагниттік өрісті сипаттайтын $\mathbf{E}$ және $\mathbf{B}$ векторлары санақ жүйесіне тәуелді болғандықтан (сол кеңістікті-уақыттық нүктеде), инварианттар, яғни, электромагниттік өрістің санақ жүйесіне тәуелсіз сандық сипаттамалары жөнінде табиғи сұрақ туады.

$\mathbf{E}$ және $\mathbf{B}$ векторларының комбинациясы болатын екі осындай инвариант бар екенін көрсетуге болады, бұл

$$\boxed{\mathbf{E}\mathbf{B} = \text{inv}}, \quad \boxed{E^2 - c^2 B^2 = \text{inv}}. \quad (8.9)$$

Бұл шамалардың инварианттылығы (Лоренц түрлендірумен салыстырмалы түрде) (8.1) және (8.2) өрістерді түрлендіру формулаларының салдары болып табылады. Бұл сұрақ толығырақ 8.9-есепте қарастырылады.

Берілген инварианттарды қолдану кей жағдайларға тез және қарапайым шешім табуға және сәйкес қорытындылар мен болжамдар жасауға мүмкіндік береді. Олардың ең маңыздыларын келтірейік.

1. $\mathbf{E}\mathbf{B}$ инварианттылығынан, қандай да бір санақ жүйесінде $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$, яғни, $\mathbf{E}\mathbf{B} = 0$ болса, онда барлық басқа инерциялық санақ жүйесінде $\mathbf{E}' \perp \mathbf{B}'$.

2. $E^2 - c^2 B^2$ инварианттылығынан, $E = cB$ (яғни $E^2 - c^2 B^2 = 0$) болған жағдайда, кез келген басқа инерциялық санақ жүйесінде $E' = cB'$.

3. Егер қандай да бір санақ жүйесінде $\mathbf{E}$ және $\mathbf{B}$ векторлары арасындағы бұрыш сүйір (немесе доғал) болса, – демек, бұл $\mathbf{E}\mathbf{B}$ нөлден үлкен (немесе кіші), – онда кез келген басқа санақ жүйесінде $\mathbf{E}'$ және $\mathbf{B}'$ векторлары арасындағы бұрыш та сүйір (немесе доғал) болады.

4. Егер қандай да бір санақ жүйесінде $E > cB$ (немесе $E < cB$) – демек, бұл $E^2 - c^2 B^2$ нөлден үлкен (немесе кіші), – онда кез келген басқа санақ жүйесінде де осылай $E' > cB'$ (немесе $E' < cB'$) болады.

5. Егер екі инвариант та нөлге тең болса, онда барлық санақ жүйесінде $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$ және $E = cB$. Біз дәл осыны электромагниттік толқында бақылауға болатынын көреміз.

6. Егер $\mathbf{E}\mathbf{B}$ инвариант қана нөлге тең болса, онда немесе $\mathbf{E}' = 0$, немесе $\mathbf{B} = 0'$ болатын санақ жүйесін табуға болады; дәл қайсысы екені басқа инварианттың таңбасымен анықталады. Кері тұжырым да дұрыс: егер қандай да бір санақ жүйесінде $\mathbf{E} = 0$, немесе $\mathbf{B} = 0$ болса, онда кез келген басқа санақ жүйесінде $\mathbf{E}' \perp \mathbf{B}'$. (Бұл қорытынды 8.3-те болған).

Және соңғысы. $\mathbf{E}$ және $\mathbf{B}$ өрістері, жалпы айтқанда, координаталарға және уақытқа тәуелді екенін есте ұстау керек. Сондықтан (8.9)-дағы әрбір инварианттар координаталары мен уақыты әртүрлі санақ жүйесінде Лоренц түрлендірулерімен байланысқан өрістің бір ғана кеңістікті – уақыттық нүктесіне қатысты болады.

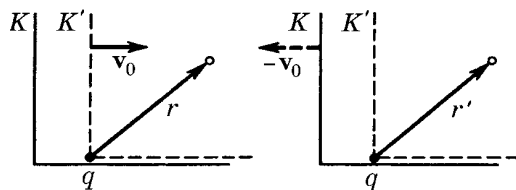
Есептер

8.1. Өрістерді түрлендірудің дербес жағдайы. Релятивистік емес нүктелік заряд q тұрақты $\mathbf{v}$ жылдамдықпен қозғалады. Өрістерді түрлендірулер формулаларының көмегімен зарядқа қатысты орны $\mathbf{r}$ радиус-векторымен анықталатын нүктедегі осы зарядтың $\mathbf{B}$ магнит өрісін табу керек.

Шешімі. Зарядпен байланысқан K' -санақ жүйесіне көшеміз. Бұл жүйеде кернеулігі

$$\mathbf{E}' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \mathbf{r}$$

тек кулондық өріс болады. Мұнда K' -жүйеде радиус-вектор $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$ екені ескерілген (релятивистік емес жағдай). Енді кері K' -жүйеден осы жүйемен салыстырғанда $-\mathbf{v}$ жылдамдықпен қозғалатын K -жүйеге өтеміз. Бұл үшін (8.4)-тен $\mathbf{B}$ өріс үшін штрихталған шама ролінде штрихталмаған шамалар болатын формуланы қолданамыз (және керісінше), ал $\mathbf{v}_0$ жылдамдықты $-\mathbf{v}_0$ -ге алмастырамыз (8.4-сурет). Біздің жағдайымызда $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}$, сондықтан $\mathbf{B} = \mathbf{B}' + [\mathbf{v}\mathbf{E}]/c^2$. K' -жүйеде $\mathbf{B}' = 0$ және $c^2 = 1/\epsilon_0\mu_0$ екенін ескеріп, мынаны табамыз:

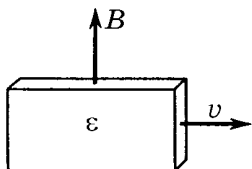


8.4-сурет

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 q [\mathbf{v}\mathbf{r}]}{4\pi r^3}.$$

Біз бұрын тәжірибелер фактілерінің жалпы нәтижесі ретінде постулат болған (6.3) формуланы алдық.

- 8.2. Өтімділігі ϵ біртекті диэлектриктен жасалған үлкен пластинка 8.5-суретте көрсетілгендей, $\mathbf{B}$ біртекті магнит өрісінде тұрақты релятивистік емес $\mathbf{v}$ жылдамдықпен қозғалады. Диэлектриктің $\mathbf{P}$ поляризациялануы және байланысқан зарядтардың σ' беттік тығыздығын табу керек.



8.5-сурет

Шешімі. Пластинкамен байланысқан санақ жүйесінде магнит өрісінде басқа электр өрісін бақылауға болады, оны $\mathbf{E}'_0$ деп белгілейміз, (8.4)

өрісті түрлендіру формулаларына сәйкес:

$$\mathbf{E}'_0 = [\mathbf{v}\mathbf{B}].$$

Диэлектрик поляризациялануы

$$\mathbf{P} = \kappa\epsilon_0\mathbf{E}' = \epsilon_0 \frac{\epsilon-1}{\epsilon} [\mathbf{v}\mathbf{B}],$$

мұнда диэлектрик ішінде (3.29)-ға сәйкес $\mathbf{E}' = \mathbf{E}'_0/\epsilon$ екендігі ескерілген. Байланысқан зарядтардың беттік тығыздығы

$$|\sigma'| = P = \epsilon_0 \frac{\epsilon-1}{\epsilon} vB,$$

және де пластинканың бізге қараған бетінде (8.5-суретті қара) $\sigma' > 0$, қарама-қарсы бетінде $\sigma' < 0$.

- 8.3. I тогы бар зарядталмаған ұзын түзу сым берілген. I ток бағытында өткізгіш бойымен v_0 релятивистік емес жылдамдықпен ілгерілемелі

қозғалатын санақ жүйесіндегі осы өткізгіштің ұзындық бірлігіне келетін зарядты табу керек.

Шешімі. Қозғалатын санақ жүйесінде (8.4)-түрлендірулер формулаларына сәйкес электр өрісі пайда болады $\mathbf{E}' = [\mathbf{v}_0 \mathbf{B}]$, немесе

$$E'_r = -v_0 \mu_0 I / 2\pi r. \quad (1)$$

Мұнда B -ға арналған өрнек циркуляция туралы теорема көмегімен алынған. Екінші жағынан Гаусс теоремасы бойынша (қозғалатын санақ жүйесінде):

$$E'_r = \lambda' / 2\pi \epsilon_0 r, \quad (2)$$

мұндағы, λ' – сымның ұзындық бірлігіндегі заряд. (1)-мен (2)-ні салыстырып, мынаны табамыз:

$$\lambda' = -v_0 I / c^2,$$

мұндағы, $c^2 = 1/\epsilon_0 \mu_0$. Осы зарядтың шығу тегі оң және теріс зарядтардың «тізбектерін» «жасайтын» әртүрлі Лоренцтік қысқартулармен байланысты (өйткені олардың жылдамдығы әртүрлі).

- 8.4.** K -санақ жүйесінде v релятивистік жылдамдықпен қозғалатын жіңішке протондар шоғы бар. Протондар шоғынан қандай да бір қашықтықта электр өрісінің кернеулігі E -ге тең. Шоқтан сондай қашықтықтағы, протондар қозғалысы бағытында, K -жүйемен салыстырғанда v_0 жылдамдықпен орын ауыстыратын K' -санақ жүйесіндегі магнит өрісінің B' индукциясын табу керек.

Шешімі. Бұл есепті (8.1) формуласының көмегімен шешу оңайырақ. Бірақ алдын ала шоқтан E кернеулік берілген нүктеге дейінгі қашықтықтағы K -жүйесіндегі B индукцияны табу керек.

$\mathbf{B}$ векторының циркуляциясы туралы теореманы және $\mathbf{E}$ векторы үшін Гаусс теоремасын пайдаланып, мынаны табамыз:

$$B = \mu_0 I / 2\pi r, \quad E = \lambda / 2\pi \epsilon_0 r,$$

мұндағы, r – шоқтан E -ге дейінгі қашықтық, $I = \lambda v$ – ток күші, λ – шоқтың ұзындық бірлігіндегі заряд. Осы формулалардан мынау шығады:

$$B/E = \epsilon_0 \mu_0 I / \lambda = v / c^2,$$

мұнда, $c^2 = 1/\epsilon_0\mu_0$. Осы теңдеуден B үшін өрнекті (8.1)-дің түрлендіру формулаларының соңғысына қойып, мынаны аламыз:

$$B' = \frac{E|v-v_0|}{c^2\sqrt{1-(v_0/c)^2}}.$$

Бұл кезде, егер $v_0 < v$ болса, онда B' векторының сызықтары v_0 векторымен оң винт бағытында, егер $v_0 > v$ болса, онда – сол винт бағытында болады (өйткені бұл жағдайда I' ток K' -жүйеде кері бағытта ағатын болады).

8.5. Қиылысқан E және B өрістеріндегі заряд қозғалысы. Релятивистік зарядталған бөлшек біртекті, өзара перпендикуляр E және B электр және магнит өрістері болатын кеңістікте қозғалады. Бөлшек E және B векторларына перпендикуляр бағыт бойымен түзу сызықты қозғалады. Бөлшекпен бірге ілгерілемелі орын ауыстыратын санақ жүйесіндегі E' пен B' -ты табу керек.

Шешімі. Бөлшек қозғалысының сипатынан оның жылдамдығы мына шартты қанағаттандыратыны шығады:

$$vB = E. \quad (1)$$

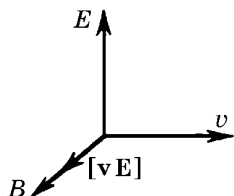
(8.1) түрлендіру формулаларына сәйкес:

$$E' = \frac{E + [vB]}{\sqrt{1-\beta^2}} = 0,$$

өйткені, біздің жағдайымызда Лоренц күші, демек, $E + [vB]$ шамасы нөлге тең.

Магнит өрісі үшін сол түрлендіру формулаларына сәйкес:

$$B' = \frac{B - [vE]/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$



8.6-сурет

Векторлардың орналасуы 8.6-суретте көрсетілген, бұдан $[vE] \uparrow B$ екені көрініп тұр. Сондықтан (1)-ге сәйкес $v = E/B$ екенін ескеріп, былай жазуға болады:

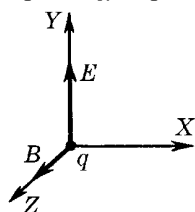
$$B' = \frac{B - E^2/Bc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{B(1-\beta^2)}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

немесе векторлық түрде

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B} \sqrt{1 - (E/cB)^2}.$$

Алынған өрнектер өрістің екі инвариантын да қанағаттандыратындығына көз жеткізген пайдалы.

8.6. Қиылысқан $\mathbf{E}$ және $\mathbf{B}$ өрістеріндегі заряд қозғалысы. Меншікті заряды q/m релятивистік емес бөлшек біртекті өзара перпендикуляр $\mathbf{E}$



8.7-сурет

және $\mathbf{B}$ өрістері тудырылған аймақта қозғалады (8.7-сурет). $t = 0$ мезетте бөлшек O нүктесінде және нөлдік жылдамдыққа ие болады. Бөлшектің $x(t)$ және $y(t)$ қозғалыс теңдеуін табу керек.

Шешімі. Бөлшектің қозғалысы Лоренц күшінің әсерінен болады, және де барлық уақытта XU жазықтығында екенін байқау қиын емес. Бәрінен оңайы, оның қозғалысы тек қана магнит өрісі

бақыланатын K' -санақ жүйесінде осылай болып көрінеді. Осы санақ жүйесін табамыз.

(8.4) түрлендіруден $\mathbf{E} = -[\mathbf{v}_0 \mathbf{B}]$ қатынасын қанағаттандыратын $\mathbf{v}_0$ жылдамдықпен қозғалатын санақ жүйесінде $\mathbf{E}' = 0$ екендігі шығады. Ең дұрысы $\mathbf{v}_0$ жылдамдық X осінің оң жағына бағытталған K' -жүйені алған дұрыс (8.7-сурет), өйткені мұндай санақ жүйесінде бөлшек $\mathbf{B}'$ векторына перпендикуляр қозғалады және оның қозғалысы өте қарапайым болады.

Сонымен, $v_0 = E/B$ жылдамдықпен оңға қарай қозғалатын K' -санақ жүйесінде, $\mathbf{E}' = 0$ және тек $\mathbf{B}$ өрісі ғана бақыланатын болады. (8.4)-ке және 8.7-суретке сәйкес

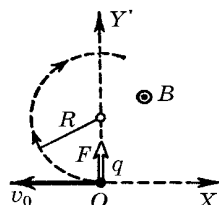
$$\mathbf{B}' = \mathbf{B} - [\mathbf{v}_0 \mathbf{E}]/c^2 = \mathbf{B}(1 - v_0^2/c^2).$$

Релятивистік емес бөлшек $v_0 \ll c$ үшін және де $\mathbf{B}' = \mathbf{B}$ деп есептеуге болады.

Берілген K' -санақ жүйесінде бөлшек тек магнит өрісінде қозғалады, және де оның бағытына перпендикуляр. Осы санақ жүйесінде бөлшектің қозғалыс теңдеуінің түрі:

$$mv_0^2/R = qv_0 B. \quad (1)$$

Бұл теңдеу бөлшек K' -жүйесінде 8.8-суретте көрсетілгендей қозғалған кездегі, $t = 0$ мезет үшін жазылған. Лоренц күші $\mathbf{F}$ барлық кезде бөлшек қозғалысына перпендикуляр бағытталғандықтан, $v_0 = \text{const}$ және (1)-ден бөлшек K' -жүйесінде

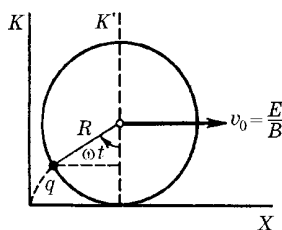


8.8-сурет

шеңбер бойымен қозғалады, оның радиусы:

$$R = mv_0/qB.$$

Сөйтіп, бөлшек K' -жүйесінде шеңбер бойымен v_0 жылдамдықпен бірқалыпты қозғалады, ал ол өз кезегінде $v_0 = E/B$ жылдамдықпен оңға қарай бірқалыпты орын ауыстырады. Бұрыштық жылдамдығы $\omega = v_0/R = qB/m$ – мен домалайтын дөңгелек құрсауындағы q нүкте осылай қозғалады. 8.9-суреттен t мезеттегі q бөлшек координаталары бірден көрініп тұр:



8.9-сурет

$$x = v_0 t - R \sin \omega t = a(\omega t - \sin \omega t),$$

$$y = R - R \cos \omega t = a(1 - \cos \omega t),$$

мұндағы: $a = mE/qB^2$, $\omega = qB/m$.

- 8.7. K -санақ жүйесінде тек $\mathbf{E}$ біртекті электр өрісі бар. K -жүйесіне қатысты $\mathbf{v}_0$ тұрақты релятивистік жылдамдықпен $\mathbf{E}$ векторына α бұрыш жасап қозғалатын K' -санақ жүйесіндегі $\mathbf{E}'$ және $\mathbf{B}'$ векторларының модульдері мен бағыттарын табу керек.

Шешімі. (8.1) түрлендіру формулаларына сәйкес, K -жүйесінде $\mathbf{B} = 0$ екенін ескеріп, мынаны аламыз:

$$E'_{\parallel} = E \cos \alpha, E'_{\perp} = E \sin \alpha / \sqrt{1 - \beta^2}, \beta = v_0/c.$$

Бұдан $\mathbf{E}'$ векторының модулін табамыз:

$$E' = \sqrt{E'^2_{\parallel} + E'^2_{\perp}} = E \sqrt{(1 - \beta^2 \cos^2 \alpha) / (1 - \beta^2)},$$

ал $\mathbf{E}'$ және $\mathbf{v}_0$ векторларының арасындағы α' бұрышы мына формула бойынша

$$\operatorname{tg} \alpha' = E'_{\perp} / E'_{\parallel} = \operatorname{tg} \alpha / \sqrt{1 - \beta^2}.$$

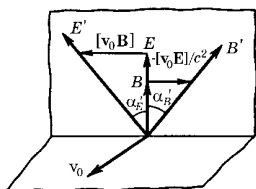
Осыған ұқсас $\mathbf{B}'$ векторының да модулі мен бағытын табамыз:

$$\mathbf{B}'_{\parallel} = 0, \quad \mathbf{B}'_{\perp} = - \frac{[v_0 \mathbf{E}]}{c^2 \sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \mathbf{B}' = \mathbf{B}'_{\perp}.$$

Демек, бұл вектор $\mathbf{B}' \perp \mathbf{v}_0$ және оның модулі

$$B' = \frac{v_0 E \sin \alpha}{c^2 \sqrt{1-\beta^2}}.$$

- 8.8.** K -санақ жүйесінде бір бағыттағы біртекті электр $\mathbf{E}$ және магнит $\mathbf{B}$ өрістері бар. $\mathbf{E}$ және $\mathbf{B}$ векторларына перпендикуляр бағытта $\mathbf{v}_0$ тұрақты релятивтік жылдамдықпен қозғалатын K' -санақ жүйесіндегі $\mathbf{E}'$ мен $\mathbf{B}'$ векторларының модульдері мен олардың арасындағы бұрышты табу керек.



8.10-сурет

Шешімі. (8.1) формуласына сәйкес K' -санақ жүйесінде $\mathbf{E}'$ және $\mathbf{B}'$ екі вектор да $\mathbf{v}_0$ векторына перпендикуляр орналасқан (8.10 - сурет). $\mathbf{E}'$ және $\mathbf{B}'$ векторларының модульдерін

мына формулалар бойынша табамыз:

$$E' = \sqrt{\frac{E^2 + (v_0 B)^2}{1 - (v_0/c)^2}}, \quad B' = \sqrt{\frac{B^2 + (v_0 E/c^2)^2}{1 - (v_0/c)^2}}.$$

$\mathbf{E}'$ және $\mathbf{B}'$ векторлары арасындағы бұрышты тангенс арқылы мына формула бойынша анықтаймыз:

$$\operatorname{tg} \alpha' = \operatorname{tg}(\alpha'_E + \alpha'_B) = (\operatorname{tg} \alpha'_E + \operatorname{tg} \alpha'_B) / (1 - \operatorname{tg} \alpha'_E \operatorname{tg} \alpha'_B).$$

$\operatorname{tg} \alpha'_E = v_0 B/E$ және $\operatorname{tg} \alpha'_B = v_0 E/c^2 B$ болғандықтан (8.10-сурет):

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{v_0 (B^2 + E^2/c^2)}{(1 - \beta^2) E B}.$$

Бұдан осы $v_0 \rightarrow 0$ ($\beta \rightarrow 1$) кезінде $\alpha' \rightarrow \pi/2$ екені көрініп тұр. Және кері қорытынды жасауға болады: егер бір санақ жүйесінде $\mathbf{E}$ және $\mathbf{B}$ белгілі, және де осы векторлар арасындағы бұрыш 90° -тан кіші болса, онда екі вектор $\mathbf{E}'$ және $\mathbf{B}'$ өзара параллель болатын санақ жүйесі бар болғаны.

- 8.9.** $\mathbf{E}\mathbf{B}$ инварианты. (8.1) түрлендіру формулалары көмегімен $\mathbf{E}\mathbf{B}$ шамасы инвариант екенін көрсету қажет.

Шешімі. K' -санақ жүйесінде бұл көбейтінді

$$\mathbf{E}'\mathbf{B}' = (\mathbf{E}'_{\parallel} + \mathbf{E}'_{\perp})(\mathbf{B}'_{\parallel} + \mathbf{B}'_{\perp}) = \mathbf{E}'_{\parallel}\mathbf{B}'_{\parallel} + \mathbf{E}'_{\perp}\mathbf{B}'_{\perp}. \quad (1)$$

Соңғы қосындыны (8.1) формула көмегімен қайта жазамыз:

$$\mathbf{E}'_{\perp} \mathbf{B}'_{\perp} = \frac{(\mathbf{E}_{\perp} + [\mathbf{v}_0 \mathbf{B}'_{\perp}])(\mathbf{B}_{\perp} + [\mathbf{v}_0 \mathbf{E}'_{\perp}]/c^2)}{(1 - \beta^2)}. \quad (2)$$

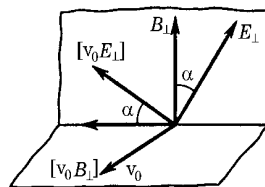
$\mathbf{E}'_{\perp}$ және $\mathbf{B}'_{\perp}$ векторлары $\mathbf{v}_0$ векторына перпендикуляр екенін ескеріп, (2)-өрнектің алымын мына түрге түрлендіреміз:

$$\mathbf{E}_{\perp} \mathbf{B}_{\perp} - (v_0/c)^2 \mathbf{E}_{\perp} \mathbf{B}_{\perp} = \mathbf{E}_{\perp} \mathbf{B}_{\perp} ((1 - \beta^2)), \quad (3)$$

мұнда қолданғанылған факт:

$[\mathbf{v}_0 \mathbf{B}'_{\perp}] \cdot [\mathbf{v}_0 \mathbf{E}'_{\perp}] = v_0^2 B_{\perp} E_{\perp} \cos \alpha = v_0^2 \mathbf{B}_{\perp} \mathbf{E}_{\perp}$
(8.11-сурет). (2)-дегі қалған екі скаляр көбейтінді векторлар өзара перпендикуляр болғандықтан нөлге тең.

Сонымен, (1)-дің оң жағы төмендегі түрге ие болады:



8.11-сурет

$$\mathbf{E}'_{\parallel} \mathbf{B}'_{\parallel} + \mathbf{E}'_{\perp} \mathbf{B}'_{\perp} = \mathbf{E}_{\parallel} \mathbf{B}_{\parallel} + \mathbf{E}_{\perp} \mathbf{B}_{\perp} = \mathbf{E} \mathbf{B},$$

дәлелдейтініміз де осы еді.

8.10. Бірқалыпты қозғалатын зарядтың $\mathbf{E}$ өрісі. Нүктелік q заряд, релятивистік $\mathbf{v}$ жылдамдықпен бірқалыпты және түзу сияқты қозғалады. Зарядқа қатысты радиус-векторы $\mathbf{r}$ -ге тең және ол $\mathbf{v}$ векторымен ϑ бұрыш жасайтын нүктедегі осы зарядтың өрісінің $\mathbf{E}$ кернеулігін табу керек.

Шешімі. Заряд K -санақ жүйесінде X осінің оң бағытында қозғалатын болсын. Координата басында бұл заряд тыныштықта болатын K' -жүйесіне өтеміз. (екі жүйенің X' және X осьтері дәл келеді, Y' және Y осьтері параллель). K' -жүйеде зарядтың $\mathbf{E}'$ өрісі ең қарапайым түрде болады:

$$\mathbf{E}' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r'^3} \mathbf{r}'.$$

және $X'Y'$ жазықтықта

$$E'_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r'^3} x', \quad E'_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r'^3} y'. \quad (1)$$

Енді K' -жүйесімен салыстырғанда $-\mathbf{v}$ жылдамдықпен қозғалатын бастапқы K -жүйесіне кері өтеміз. Заряд K -жүйесінің координата басы арқылы өткен мезетте $\mathbf{r}$ векторының x және y проекциялары $\mathbf{r}'$ векторының x' және y' проекцияларымен төмендегі қатынастарымен байланысқан:

$$x = r \cos \vartheta = x' \sqrt{1 - \beta^2}, \quad y = r \sin \vartheta = y'. \quad (2)$$

Мұндағы, $\beta = v/c$. Мұнда бойлық өлшемдері лоренцтік қысқаруға ұшырайтындығы ескерілген, көлденең өлшемдері өзгермейді. Бұдан басқа, (8.2)-ге кері түрлендіруге сәйкес,

$$E_x = E'_x, \quad E_y = E'_y / \sqrt{1 - \beta^2}.$$

Бұған (1) өрнекті, ал ондағы x' пен y' -қа (2) формуладан сәйкес өрнектерді қойып мынаны аламыз:

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r'^3} \frac{x}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r'^3} \frac{y}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

$E_x/E_y = x/y$, яғни, **E** векторы **r** векторы бойымен радиустық бағытталғанын ескертеміз. Жағдай егер де кешігу эффектiсi жалпы алғанда жоқ сияқты болып тұр. Бірақ бұл егер заряд үдеумен қозғалса, **E** өріс радиустық болмаса, тек $\mathbf{v} = \text{const}$ жағдайында ғана орын алады. **E** векторының модулін табу ғана қалды:

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r'^3} \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{1 - \beta^2}}.$$

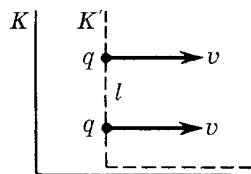
$x^2 + y^2 = r^2$ болғандықтан және (2)-ге сәйкес

$$r'^3 = (x'^3 + y'^3)^{3/2} = r^3 \left(\sqrt{\frac{1 - \beta^2 \sin^2 \vartheta}{1 - \beta^2}} \right)^{3/2},$$

онда кернеулік

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2 \sin^2 \vartheta)^{3/2}}.$$

8.11. Қозғалатын екі зарядтың өзара әсерлесуі. q зарядтары бірдей болатын екі релятивистік бөлшек 8.12-суретте көрсетілгендей, бір-біріне параллель, бірдей v жылдамдықпен қозғалады. Бөлшектердің ара қашықтығы l . (8.7)-өрнекті пайдаланып, бөлшектердің арасындағы өзара әсер күшін табу керек.



Шешімі. Бұл жағдайда бөлшектердің біреуінің **v** векторы мен келесі бөлшекке бағытының

8.12-сурет

арасындағы бұрыш $\vartheta = 90^\circ$, сондықтан Лоренц күшінің электрлік бөлігі (8.7)-формуласына сәйкес:

$$F_3 = qE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{l^2\sqrt{1-\beta^2}} \quad (1)$$

және Лоренц күшінің магниттік бөлігі

$$F_M = qvB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q^2 v^2}{l^2 \sqrt{(1-\beta^2)}}, \quad (2)$$

мұндағы, **B** біздің жағдайымызда **E**-мен (8.5) формуласы арқылы, одан $B = vE/c^2$, $c^2 = 1/\epsilon_0\mu_0$ байланысқаныны есепке алынған. Мына қатынас:

$$F_M/F_3 = \epsilon_0\mu_0 v^2 = (v/c)^2,$$

релятивистік емес (6.5) жағдайдағыдай екенін байқаймыз. Көріп отырғанымыздай, $v \rightarrow c$ кезінде күштің магниттік бөлігі $F_M \rightarrow F_3$. Өзара әсердің (тебілудің) қорытқы күші:

$$F = F_3 - F_M = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{l^2} \sqrt{1-\beta^2}.$$

Электромагниттік индукция



§ 9.1. Электромагниттік индукция заңы. Ленц ережесі

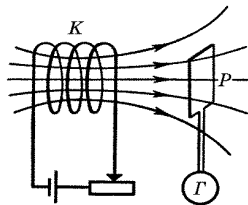
Өткен тарауда «құраушылары» – электр және магнит өрістерінің арақатынасы санақ жүйесін тандап алуға тәуелді болатын электромагниттік өрістің болатынын тағайындаған болатынбыз. Басқаша айтқанда, электромагниттік өрістің екі «құраушылары» бір-бірімен байланысты. Осы тарауда біз **E-** және **B-** өрістер арасында бұдан да терең байланыс бар екенін және оның электромагниттік индукция құбылыстарында білінетінін көреміз.

Фарадейдің ашқан жаңалық. 1831 жылы Фарадей электродинамиканың негізгі заңдылықтардың бірі болып табылатын **электромагниттік индукция** құбылысын ашты. Оның мәнісі сол, *тұйықталған өткізгіш контурда, осы контур қамтитын магнит ағыны* (яғни **B** векторының ағыны) *өзгергенде, индукциялық ток* деп аталатын **электр тогы пайда болады**.

Индукциялық токтың пайда болуы, магнит ағының өзгерісі кезінде контурда $\mathcal{E}_i$ **индукциялық э.қ.к.** пайда болатынын білдіреді. $\mathcal{E}_i$ -дің Φ магнит ағыны өзгерісінің қалай жүзеге асатынына тәуелді еместігі және тек оның өзгеріс жылдамдығымен, яғни $d\Phi/dt$ шамамен анықталғандығы фактысы тіптен ғажап.

Оған қоса, $d\Phi/dt$ туындысының таңбасының өзгерісі $\mathcal{E}_i$ -дің таңбасының немесе «бағытының» өзгеруіне әкеледі.

Фарадей индукциялық токты әртүрлі екі тәсілмен шығарып алуға болатынын тапты. Одан арғысын 9.1-сурет айқындайды, онда I тогы бар K катушка (ол магнит өрісін тудырады) және индукциялық токтың



9.1-сурет

индикаторы – Γ гальванометрге жалғанған P рамка кескінделген.

1-ші әдіс – қозғалмайтын K катушканың өрісінде P рамканы (немесе оның жеке бөліктерін) қозғау.

2-ші әдіс – P рамка қозғалмайды, бірақ K катушканың қозғалысы есебінен, не ондағы I токтың өзгерісі салдарынан, не екеуінің бірге әсер етуінің нәтижесінде магнит өрісі өзгереді.

Барлық осы жағдайларда Γ гальванометр P рамкада индукциялық токтың бар екенін білдіреді.

Ленц ережесі. Индукциялық токтың бағыты (яғни индукциялық э.қ.к. таңбасы) **Ленц ережесімен** анықталады: ***индукциялық ток әрқашан өзін тудыратын себептерге қарама-қарсы әсер ететіндей болып бағытталған.*** Басқаша айтқанда, индукциялық ток индукция э.қ.к.-ін тудыратын магнит ағынының өзгерісіне кедергі жасайтын магнит ағынын туғызады.

Мысалы, P рамканы K катушкаға (9.1-сурет) жақындатсақ, рамка арқылы өтетін магнит ағыны артады. Сол кезде рамканың ішінде сағат тілі бойымен бағытталған (рамкаға оң жақтан қарағанда) индукциялық ток пайда болады. Бұл ток солға қарай «бағытталған» магнит ағынын туғызады, ол осы токты туғызған магнит ағынының артуына кедергі жасайды.

Егер катушка мен P рамканы қозғалыссыз қалдырып, K катушкадағы токты арттырса да, осы жағдай орын алады. K катушкадағы ток күші азаятын болса, P рамкадағы индукциялық ток бағытын қарама-қарсыға өзгертеді (оң жақтан қарағанда сағат тіліне қарсы).

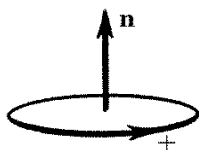
Индукциялық токтар тұтас шомбал өткізгіштерде де қозады. Олар құйынды сипатқа ие және **Фуко токтары** деп аталады. Токтардың үлкен күші пайдаланылады (мысалы, кейбір тежеуіш жүйелерде және т.б.).

Ленц ережесі мәнді физикалық фактыны – жүйенің өз күйінің өзгеруіне қарсы әсер етуге ұмтылатынын білдіреді (**электромагниттік инерция**).

Электромагниттік индукция заңы. Осы заңға сәйкес тұйықталған өткізгіш контур қамтитын магнит ағыны өзгерісінің себебі қандай болса да, контурда пайда болатын индукциялық э.қ.к. мына формуламен анықталады:

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi}{dt}. \quad (9.1)$$

Осы теңдеуде минус таңбасы белгілі бір таңбалар ережесімен байланысты. Φ магнит ағынның таңбасы қарастырылып отырған контурмен шектелген S бетке нормальды таңдаумен, ал $\mathcal{E}_i$ индукциялық э.к.к.-тің таңбасы контур бойымен айналып өтудің оң бағытымен байланысты.



9.2-сурет

Мұнда S бетке $\mathbf{n}$ нормальдың бағыты және контур бойымен айналып өтудің оң бағыты бір-бірімен **оң** бұранда¹ ережесімен байланысты болады деп ұйғарылады (9.2-сурет). Сондықтан нормаль бағытын қалауымызша тандай отырып, біз Φ ағынның таңбасын, сол сияқты $\mathcal{E}_i$ индукция э.к.к.-інің таңбасын (немесе «бағытын»

анықтаймыз).

Біз таңдап алған оң бағыттарда оң бұранда ережесіне сәйкес – $\mathcal{E}_i$ және $d\Phi/dt$ шамаларының таңбалары қарама-қарсы болады.

Магнит ағынының бірлігі **вебер** (Вб) болып табылады. Магнит ағыны өзгерісінің жылдамдығы 1 Вб/с болғанда, контурда 1 В-қа тең э.к.к. индукцияланады [(9.1) қараңыз].

Толық магнит ағыны (ағын ілінісі). Егер э.к.к. индукцияланатын тұйық контур бір орамнан емес, N орамнан тұратын болса (мысалы, катушка), онда $\mathcal{E}_i$ әрбір орамда индукцияланатын э.к.к.-дің қосындысына тең болады. Егер әрбір орамды қиып өтетін магнит ағыны бірдей және ол Φ_1 -ге тең десек, онда осындай күрделі контурға керілген бет арқылы өтетін қосынды Φ ағынды мына түрде өрнектеуге болады:

$$\Phi = N\Phi_1. \quad (9.2)$$

Бұл шама **толық магнит ағыны** немесе **ағын ілінісі** деп аталады. Бұл жағдайда контурдағы индукция э.к.к.-і (9.1) формулаға сәйкес мына түрде анықталады:

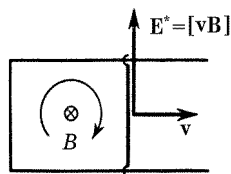
$$\mathcal{E}_i = -N \frac{d\Phi_1}{dt}. \quad (9.3)$$

¹ Егер осы екі бағыт сол қол ережесімен байланысты болған болса, (9.1) теңдеудегі минус таңбасы болмаған болар еді.

§ 9.2 Электромагниттік индукцияның табиғаты

Енді біз индукция э.қ.к.-і пайда болатын физикалық себептерді ұғынуымыз және бізге белгілі болғандардан (9.1) индукция заңын қорытып шығаруға әрекет жасауымыз керек. Ол үшін екі жағдайды қарастырамыз.

Контур тұрақты магнит өрісінде қозғалады. Ең алдымен ұзындығы l жылжымалы қосқышы бар контурды (9.3-сурет) алайық. Ол контур жазықтығына перпендикуляр және сурет жазықтығынан сыртқа бағытталған біртекті магнит өрісінде орналасқан болсын. Қосқышты $\mathbf{v}$ жылдамдықпен оң жаққа қарай қозғалайық. Қосқыштағы ток тасымалдаушылар – электрондар сондай жылдамдықпен қозғала бастайды.



9.3-сурет

Соның нәтижесінде әрбір электронға қосқыш бойымен бағытталған $\mathbf{F} = -e[\mathbf{vB}]$ магниттік күш әсер ете бастайды және электрондар қосқыш бойымен төмен қарай орын ауыстыра бастайды – жоғары қарай бағытталған ток ағады. Индукциялық ток дегеніміз осы. Қайда таралған (өткізгіштердің бетінде) зарядтар контурдың басқа бөліктерінде де тоқты қоздыратын электр өрісін туғызады.

$\mathbf{F}$ магниттік күш бөгде күштің ролін атқарады. Оған $\mathbf{E}^* = \mathbf{F}/(-e) = [\mathbf{vB}]$ өріс сәйкес келеді. Осы өрнекті өрістерді түрлендіруге арналған (8.4) формулалары көмегімен де алуға болатынын еске саламыз.

Анықтама бойынша $\mathbf{E}^*$ вектордың контур бойынша циркуляциясы э.қ.к.-тің шамасын береді. Біздің жағдайымызда

$$\mathcal{E}_i = -vBl, \quad (9.4)$$

мұндағы минус таңбасы қабылданған таңбалар ережесіне байланысты қойылған: контурды қамтитын бетке $\mathbf{n}$ нормальды 9.3-сурет жазықтықтығынан сыртқа қарай (яғни $\mathbf{B}$ өріс бойымен) таңдадық, сондықтан оң бұранда ережесі бойынша контурды айналып өтудің оң бағыты суретте көрсетілгендей – сағат тілі бойымен. Ал $\mathbf{E}^*$ бөгде өріс контурды айналып өтудің оң бағытына қарсы бағытталған және $\mathcal{E}_i$ – теріс шама.

(9.4)-тегі vl көбейтіндісі контурмен шектелген ауданның бірлік уақыттағы (dS/dt) өсімшесі, сондықтан $vBl = BdS/dt = d\Phi/dt$, мұндағы $d\Phi$ контур ауданы арқылы өтетін магнит ағынының өсімшесі (біздің жағдайымызда $d\Phi > 0$). Сөйтіп,

$$\mathcal{E}_i = -d\Phi/dt. \quad (9.5)$$

Тұрақты біртекті емес магнит өрісінде еркінше қозғалатын кез келген контур үшін (9.1) заңы дұрыс екенін жалпы түрде дәлелдеуге болады (9.2 есепті қараңыз).

Сонымен, контур тұрақты магнит өрісінде қозғалған кезде индукция э.к.к.-тің қозуы өткізгіш қозғалған кезде пайда болатын $\propto [\mathbf{vB}]$ магниттік күштің әсерімен түсіндіріледі.

Жолай еске саламыз, сұлбаның (9.3-сурет) идеясы барлық индукциялық ток генераторлары жұмысының негізінде жатыр, ол генераторларда ротор орамдарымен сыртқы магнит өрісінде айналып тұрады.

Айнымалы магнит өрісінде тыныш тұрған контур. Бұл жағдайда да пайда болатын индукциялық ток уақыт өтуімен өзгеретін магнит өрісінің контурда бөгде күштерді тудыратынын растайды. Бірақ бұл қандай күштер? Олардың табиғаты қандай? Олардың $\propto [\mathbf{vB}]$ магниттік күштер емес екені анық, себебі бұл күштер тыныштықтағы ($\mathbf{v} = 0$) зарядтарды қозғалысқа келтіре алмайды. Бірақ $q\mathbf{E}$ және $q[\mathbf{vB}]$ -ден басқа күштер жоқ! Индукциялық ток сымда пайда болатын $\mathbf{E}$ электр өрісінің әсерінен пайда болады деп тұжырым жасауға тура келеді. Дәл осы өріс уақыт өтуімен өзгеретін магнит өрісінде орналасқан қозғалмайтын контурда индукция э.к.к.-інің пайда болуына жауапты.

Максвелл өткізгіш контурдың бар болуына тәуелсіз уақыт өтуімен өзгеретін магнит өрісі кеңістікте электр өрісін тудырады деген болжам жасады. Контур тек онда индукциялық токтың пайда болуы арқылы осы электр өрісінің бар екенін табуға мүмкіндік береді.

Сөйтіп, Максвелл бойынша, уақыт өтуімен өзгеретін магнит өрісі электр өрісін туғызады. Осы өрістің $\mathbf{E}$ векторының кез келген қозғалмайтын контур бойымен циркуляциясы мына түрде анықталады:

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}. \quad (9.6)$$

Мұнда уақыт бойынша дербес туындының символы ($\partial/\partial t$) контур және контурға керілген беттің қозғалмайтындығы фактысын айқындайды. Ағын $\Phi = \int \mathbf{B} d\mathbf{S}$ болғандықтан (интеграл біз қарастырып отырған контурға керілген қалауымызша алынған бет бойынша алынады), онда

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{B} d\mathbf{S} = \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S}.$$

Бұл теңдікте біз уақыт бойынша дифференциалдау мен бет бойынша интегралдау операцияларының орындарын алмастырдық, өйткені контур мен бет қозғалмайды. Сонда (9.6) теңдеуді мына түрде беруге болады:

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S}. \quad (9.7)$$

Осы теңдеудің құрылымы (6.17) теңдеудің құрылымымен бірдей және де $\mathbf{j}$ вектордың ролін $-\partial \mathbf{B}/\partial t$ вектор атқарады. Демек, оны (6.26) теңдеу сияқты дифференциалдық түрге келтіруге болады. Нәтижесінде мынаны аламыз:

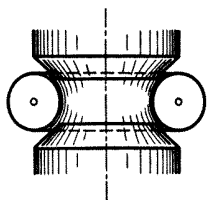
$$\nabla \times \mathbf{E} = - \partial \mathbf{B}/\partial t. \quad (9.8)$$

Осы теңдеу электр және магнит өрістері арасындағы *локальды* байланысты көрсетеді: *берілген нүктедегі $\mathbf{B}$ өрістің уақыт өтуімен өзгерісі сол нүктедегі $\mathbf{E}$ өрістің роторын анықтайды.* $\nabla \times \mathbf{E}$ -нің нөлден өзгешелігі электр өрісінің бар екенін растайды.

Уақыт өтуімен өзгертін магнит өрісін туғызған электр өрісінің циркуляциясының нөлден өзгеше болу фактысы осы электр өрісінің потенциалды емес екенін білдіреді. Ол, магнит өрісі сияқты, *құйынды* болып табылады. Сөйтіп, электр өрісі потенциалды да (электростатикада), сол сияқты құйынды да бола алады.

Жалпы жағдайда $\mathbf{E}$ электр өрісіне электростатикалық өріс және уақыт өтуімен өзгертін магнит өрісінен пайда болатын өрістің қосындысынан тұрады. Электростатикалық өрістің циркуляциясы нөлге тең. Электростатикалық өрістің циркуляциясы нөлге тең болғандықтан (9.6)-(9.8) теңдеулері $\mathbf{E}$ өрісі осы екі өрістің векторлық қосындысы болатын жалпы жағдай үшін де дұрыс болып шығады.

Бетатрон. Құйынды электр өрісі электрондардың индукциялық үдеткішінде – **бетатронда** тамаша қолданыс тапты. Бұл үдеткіш



9.4-сурет

электромагнит полюстары арасында орналасқан ауасы сорылып алынған тороидты камерада тұрады (9.4-сурет). Электромагнит обмоткасындағы токтың өзгерісі айнымалы магнит өрісін туғызады, ол электрондарды үдететін құйынды электр өрісін туғызады және де белгілі бір радиусты дөңгелек орбитада электрондарды тепе-теңдікте ұстап тұрады. (9.5-суретті қараңыз). Электр өрісі құйынды болғандықтан, электрондарға әсер ететін күш бағыты барлық уақытта қозғалыс бағытымен дәл келеді және

электрондар энергиясын үздіксіз арттырып отырады. Магнит өрісі күшейген уақыт ішінде ($\sim$ мс) электрондар миллионға дейін айналым жасап үлгереді және 400 МэВ-қа жететін энергия алады (мұндай энергияларда электрондардың жылдамдығы c -ға – вакуумдағы жарық жылдамдығына тең болады).

Индукциялық үдеткіш (бетатрон), бір орамнан тұратын екінші обмоткасының ролін электрондар шоғы атқаратын трансформаторға ұқсас.

Қорытынды. Осылайша, контурды қиып өтетін магнит ағыны контурдың қозғалысы есебінен, не уақыт өтуімен магнит өрісінің өзгерісі есебінен (не екеуінің есебінен де) өзгергенде, (9.1) электромагниттік индукция заңы дұрыс болады. Сонымен бірге осы екі жағдайда заңды түсіндіру үшін, мүлде *әртүрлі* екі құбылысты; қозғалыстағы контур үшін $\propto [\mathbf{vB}]$ магниттік күштің әсерін, ал уақыт өтуімен өзгертін $d\mathbf{B}/dt$ магнит өрісі үшін $\mathbf{E}$ құйынды электр өрісі жөніндегі түсінікті пайдаланып түсіндіруге тура келеді.

Осы екі құбылысты біріктіретін біртұтас терең принцип көрініп тұрмағандықтан, біз электромагниттік индукция заңын мүлде *әртүрлі* екі құбылыстың бірлескен эффектісі деп қабылдауымыз керек. Бұл екі құбылыс жалпы айтқанда, бір-біріне тәуелсіз, дей тұрғанмен, таңғаларлық нәрсе – контурдағы индукция э.к.к.-і әрқашанда контур арқылы өтетін магнит ағынының өзгеру жылдамдығына тең.

Басқаша айтқанда, уақыт өтуімен $\mathbf{B}$ магнит өрісі де, контурдың конфигурациясы да немесе контурдың өрісте орналасуы да өзгергенде, индукция э.к.к.-ін (9.1) формуласы бойынша есептеу керек, онда оң жақта екі факторды да автоматты ескеретін уақыт бойынша толық туынды $d\Phi/dt$ тұр. Осыған байланысты (9.1) заңды мына түрде беруге болады:

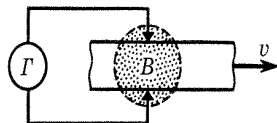
$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \oint [\mathbf{vB}] d\mathbf{l}. \quad (9.9)$$

Осы теңдіктің оң жағында тұрған өрнек толық туынды $-d\Phi/dt$ болып табылады. Мұнда бірінші қосылғыш уақыт өтуімен магнит өрісінің өзгеруімен, екіншісі контурдың қозғалысымен байланысты. Екінші қосылғыштың болуы 9.2-есепте егжей-тегжейлі түсіндірілген.

Болуы мүмкін қиындықтар. Кейбір жағдайларда (9.1) түрдегі электромагниттік индукция заңын қолдануға болмайтын жағдайлар кездесіп тұрады (негізінен контурдың өзін таңдап алумен байланысты). Бұл жағдайларда негізгі заңдарға $-q\mathbf{E} + q[\mathbf{v}\mathbf{B}]$ Лоренц күшіне және $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t$ заңына сүйенуіміз керек. Нақ солар барлық жағдайларда электромагниттік индукция заңының физикалық мазмұнын береді.

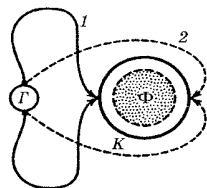
Міне тағылым аларлық екі мысал.

1-мысал. Өткізгіш лента $\mathbf{B}$ магнит өрісі бар аймақ арқылы v жылдамдықпен орын ауыстырады (9.5-сурет). Суретте бұл аймақ нүктелермен белгіленген дөңгелекше болып табылады, онда $\mathbf{B}$ өріс бізге қарай бағытталған. Γ Гальванометр қозғалмайтын контакті-ларға (тілшелерге) қосылған, олармен қозғалыстағы лента жанасады. Гальванометр тоқты көрсете ме?



9.5-сурет

Контурдың өзін таңдап алудың қиындығынан, сұрақ бір қарағанда жеңіл емес сияқты көрінеді: лентада контурды қай жерде «тұйықтау» керек екені және лентаның қозғалысы кезінде контурдың осы бөлігі өзін қалай ұстау керек екені айқын емес. Егер Лоренц күшіне сүйенетін болсақ, қозғалыстағы лентадағы электрондардың жоғары қарай ығысатыны бірден белгілі болады, және де бұл тізбекте сағат тілі бойымен бағытталған тоқты береді. Осы тәжірибенің идеясы *магнетогидродинамикалық генератордың* (МГДГ) жасаудың негізінде жатқанын еске саламыз, онда ішкі (жылулық) энергияны электр энергиясына тікелей түрлендіру әдісі пайдаланылады. Өткізгіш лента орнына онда үлкен жылдамдықпен плазма үрленеді (ол электрондар мен оң иондардан тұрады). Қалғандары өткізгіш лентадағыдай болады.



9.6-сурет

2-мысал. 9.6-суретте нүктелермен белгіленген дөңгелек $\mathbf{B}$ тұрақты магнит өрісі локальденген аймақты көрсетеді (ол сурет жазықтығына перпендикуляр бағытталған). Бұл аймақ K металл

сақинамен қамтылған. Сырғымалы контактіларды сақинаның екінші жағына ауыстырып, біз Φ магнит ағынын I гальванометрі бар тұйықталған контурға енгіземіз (1 – бастапқы қалпы, 2 – соңғы). Осы кезде гальванометр ток импульсын көрсете ме?

(9.1) заңды формальды қолдана отырып, біз индукциялық ток болады деп пайымдауымыз керек. Алайда бұлай емес. Ток жоқ, өйткені, $\partial \mathbf{B} / \partial t$ -да, Лоренц күші де нөлге тең: $\mathbf{B}$ өріс тұрақты және тұйық контур магнит өрісі жоқ жерде орын ауыстырады. Сөйтіп, мұнда электромагниттік индукция заңының негізінде жатқан екі физикалық себептің бірі де жоқ.

Жалған парадокс жөнінде. Магнит өрісінде электр зарядына әсер ететін күш оның жылдамдығына перпендикуляр екенін және сондықтан жұмыс жасамайтынын білеміз. Соның арасында тогы бар өткізгіштің қозғалысы кезінде (қозғалыстағы зарядтар) Ампер күштері, сөз жоқ, жұмыс жасайды (электромотор). Істің мәнісі неде?

Егер өткізгіштің магнит өрісіндегі қозғалысы электромагниттік индукция құбылысымен қоса жүретінін ескерсек, бұл сырттай солай көрінетін қайшылық жойылады. Өткізгіште зарядтармен жұмыс жасайтын э.қ.к. индукцияланатындықтан, магнит өрісінің толық жұмысы (Ампер күшінің жұмысы мен индукция э.қ.к.-нің жұмысы) нөлге тең. Шынында, тогы бар контурдың магнит өрісіндегі элементар орын ауыстыруы кезінде Ампер күшінің жасайтын (§ 6.8-ге қараңыз) жұмысы

$$\delta A_A = I d\Phi, \quad (9.10)$$

ал, индукция э.қ.к.-нің сол уақытта орындайтын жұмысы

$$\delta A_i = \mathcal{E}_i I dt = -I d\Phi, \quad (9.11)$$

мұнда, $\mathcal{E}_i = -d\Phi/dt$ екені ескерілген. Соңғы екі формуладан толық жұмыс мынаған тең екені көрініп тұр

$$\delta A_A + \delta A_i = 0. \quad (9.12)$$

Сонымен, магнит өрісі күштерінің жұмысына тек механикалық жұмыс емес (Ампер күштерінің себебінен болатын), контурдың қозғалысы кезінде индукцияланатын э.қ.к.-тің жұмысы да кіреді.

Екі жұмыс модулі бойынша тең, таңбасы жағынан қарама-қарсы, сондықтан олардың қосындысы нөлге тең.

Ампер күшінің жұмысы сыртқы магнит өрісі энергиясының есебінен емес, контурдағы тоқты сүйемелдейтін ток көзі есебінен жасалады. Сонымен бірге ток көзі индукция э.к.к.-не **қарсы** қосымша $dA^{\text{кoc}} = -\mathcal{E}_i Idt = Id\Phi$ жұмыс жасайды, ол Ампер күшінің δA_A жұмысымен бірдей болып шықты.

Контур амперлік тежеуші күштерге қарсы орын ауыстырғанда істелетін δA жұмыс (олар Ленц ережесіне сәйкес индукциялық токтың болуынан пайда болады) индукция э.к.к.-інің жұмысына түрленеді:

$$\delta A = -\delta A_A = \delta A_i. \quad (9.13)$$

Энергетикалық көзқарас тұрғысынан токтың барлық индукциялық генераторларының жұмысының мәні осыдан тұрады.

§ 9.3. Өздік индукция құбылысы

Контур арқылы өтетін магнит ағыны өзгертін жағдайлардың бәрінде электромагниттік индукция құбылысы пайда болады. Сонымен бірге ағынның бұл өзгерісінің неден болатыны мүлде маңызды емес. Егер қайсыбір контурда уақыт өтуімен өзгертін ток ағатын болса, онда осы токтың магнит өрісі де өзгертін болады. Бұл контур арқылы өтетін магнит ағынының өзгерісіне, демек индукция э.к.к.-нің пайда болуына әкеледі.

Сөйтіп, контурдағы ток өзгерісі осы контурдың өзінде индукция э.к.к.-інің пайда болуына әкелді. Осы құбылыс **өздік индукция** деп аталады.

Индуктивтік. Егер I тогы бар контур тұрған кеңістікке ферромагнетиктер болмаса $\mathbf{B}$ өріс, демек контур арқылы өтетін толық Φ магнит ағыны I ток күшіне пропорционал болады да, былай жазуға болады:

$$\Phi = LI, \quad (9.14)$$

мұндағы, L – контурдың **индуктивтігі** деп аталатын коэффициент. Φ және I үшін қабылданған таңбалар ережесіне сәйкес Φ және I

таңбалары әрқашан да бірдей болады екен. Бұл L индуктивтіктің шын мәнінде оң шама екенін білдіреді.

L индуктивтік контурдың пішініне және өлшемдеріне, сондай-ақ қоршаған ортаның магниттік қасиеттеріне тәуелді. Егер контур қатты және оған жақын жерде ферромагнетиктер болмаса, онда индуктивтік I ток күшіне тәуелсіз тұрақты шама болады.

Индуктивтіктің өлшем бірлігі **генри** (Гн) болып табылады. (9.14)-ке сәйкес ток 1 А болғанда, контур арқылы 1 Вб магнит ағыны өтетін болса, онда оның индуктивтігі 1 Гн болады, демек 1 Гн = 1 Вб/А.

Мысал. Жиіктік эффектілерді ескермей, соленоидтың индуктивтігін табайық. V – соленоид көлемі, n – оның ұзындық бірлігіне келетін орамдар саны, μ – соленоид ішіндегі заттың магнит өтімділігі болсын делік.

(9.14)-ке сәйкес $L = \Phi/I$. Демек, есеп берілген I токта Φ толық магнит анықтауға келіп тіреледі. Ток I болғанда, соленоидтағы магнит өрісі $B = \mu_0 nI$. Соленоидтың бір орамы арқылы өтетін магнит ағыны $\Phi_1 = BS = \mu_0 nIS$, ал N орамды қиып өтетін толық магнит ағыны:

$$\Phi = N\Phi_1 = nl \cdot BS = \mu_0 n^2 VI,$$

мұндағы, $V = Sl$. Осыдан соленоид индуктивтігі

$$L = \mu_0 n^2 V. \quad 9.15)$$

Кейбір қиындықтар жөнінде. Индуктивтікті $L = \Phi/I$ формуласымен анықтау белгілі бір қиындықтармен байланысты екенін ескереміз. Сым қаншалықты жіңішке, қимасы шектеулі болғанмен, біз өткізгіште Φ -ны есептеуге қажетті геометриялық контурды қалай жүргізу керек екенін білмейміз. Нәтиже бір мәнді болмай шығады. Жеткілікті жіңішке сым үшін бұл бір мәнділіктің болмауының маңызы шамалы, мұны жуан өткізгіштер үшін мүлде айтуға болмайды; мұнда геометриялық контурды таңдап алудың айқын еместігінен L -ді есептеудің нәтижесінің қателігі үлкен болуы мүмкін. Мұны ұмытуға болмайды.

Әрі қарай (§ 9.5-ті қараңыз) көрсетілген қиындықтардан толығымен арылған L -ді анықтаудың басқа тәсілі бар екені көрсетілетін болады.

Өздік индукция э.қ.к.-і. Контурдағы ток күші өзгергенде (9.1)-ге сәйкес $\mathcal{E}_s$ индукция э.қ.к.-і пайда болады:

$$\mathcal{E}_s = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{d}{dt}(LI). \quad (9.16)$$

Егер ток өзгергенде L индуктивтік тұрақты болып қалса (контур конфигурациясы өзгермейді және ферромагнетиктер жоқ), онда

$$\mathcal{E}_s = -L \frac{dI}{dt} \quad (L = \text{const}). \quad (9.17)$$

Минус таңбасы $\mathcal{E}_s$ Ленц ережесіне сәйкес әрқашанда ток күшінің өзгерісіне кедергі жасайтындай болып бағытталатынын көрсетеді. Бұл э.қ.к. токты өзгертпей сақтауға тырысады: ток артатын болса, оған қарсы әсер етеді, ал ток азаятын болса, оны сүйемелдейді. Өздік индукция құбылыстарында ток «инерцияға» ие болады, механикалық инерцияның дене жылдамдығын сақтауға тырысатыны сияқты, индукция эффектілері магнит ағынын тұрақты етіп сақтауға тырысады.

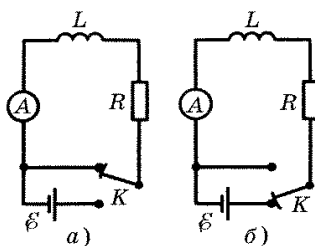
Өздік индукцияның білінуінің мысалдары. Өздік индукцияның өзіне тән білінулері тізбектегі токты тұйықтағанда және ажыратқан да байқалады. Тізбекті тұйықтағанда токтың тағайындалуы және тізбектей ажыратқанда токтың кемуі лезде емес, бірте-бірте болады. Әрі бұл эффектілер тізбектің индуктивті неғұрлым үлкен болса, соғұрлым айтарлықтай болады.

Кез келген үлкен электромагниттің индуктивтігі үлкен болады. Егер оның обмоткасын ток көзінен ажыратса, ток нөлге дейін шапшаң кемиді де, кему процесі кезінде орасан зор өздік индукция э.қ.к.-ін туғызады. Бұл көбінесе айырғыш контактылары арасында вольттық доғаның пайда болуына әкеледі және әрі тек электромагнит обмоткасы үшін ғана емес, тізбекті айыратын адам үшін де *өте қауіпті* болады. Осы себептерден электромагнит обмоткасына параллель етіп әдетте кедергісі обмотка кедергісіне шамалас шамды қосады. Бұл жағдайда обмоткадағы ток баяу кемиді және қауіпті болмайды.

Енді тізбекте токтың жоғалу және тағайындалу сипатын егжей-тегжейлі қарастырайық.

1-мысал. Тізбек ажыратылған кезде токтың жоғалуы.

Тізбек тұрақты L индуктивтіктен, R кедергіден, A амперметрден, $\mathcal{E}$ э.к.к.-тен және арнайы K кілттен тұратын болсын (9.7, а-сурет).



9.7-сурет

Бастапқыда K кілт төменгі қалыпта болады және тізбекте $I_0 = \mathcal{E}/R$ ток жүреді ($\mathcal{E}$ э.к.к. көзінің кедергісі ескеруге болмайтындай аз деп есептейміз).

$t = 0$ мезетте K кілтті сағат тілі бойымен төменгі қалыптан жоғарғыға шапшаң бұрамыз (97 а-сурет). Сонымен бірге мынадай жағдай болады: кілт қысқа уақытта $\mathcal{E}$ ток көзін тұйықтайды және сол кезде

оны тұйықталуын бұзбай тізбектен ажыратады.

L индуктивтік арқылы жүретін ток кеми бастайды, ал бұл Ленц заңы бойынша токтың кемуіне қарсы әсер ететін $\mathcal{E}_s = -L di/dt$ өздік индукция э.к.к.-і пайда болатынын білдіреді. Әрбір мезетте тізбектегі I ток $I = \mathcal{E}_s/R$ Ом заңымен анықталатын болады, немесе

$$RI = -L \frac{di}{dt}. \quad (9.18)$$

Айнымалыларды бөліп, мынаны аламыз:

$$\frac{di}{i} = -\frac{R}{L} dt.$$

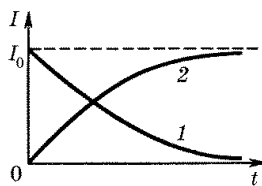
Осы теңдеуді I (I_0 -ден -ге дейін) және t (0-ден t -ға дейін) бойынша интегралдау $\ln(I/I_0) = -Rt/L$ -ді береді, немесе

$$I = I_0 e^{-t/\tau}, \quad (9.19)$$

мұндағы, τ – тұрақты, уақыт өлшемділігіне ие,

$$\tau = L/R. \quad (9.20)$$

Ол **уақыт тұрақтысы** деп аталады (**релаксация уақыты**). Бұл шама токтың кему жылдамдығын сипаттайды: (9.19)-дан τ -дың ток күші е есе кемитін уақыт екені шығады. τ -дың мәні неғұрлым үлкен болса, ток соғұрлым баяу кемиді. 9.8-суретте $I(t)$ тәуелділіктің графигі – ток



9.8-сурет

күшінің уақыт өтуімен кемуі көрсетілген (I қисығы).

2-мысал. Тізбекті тұйықтағанда тоқтың тағайындалуы.

$t = 0$ мезетте K кілтті жоғарғы қалыптан төменгіге сағат тіліне қарсы шапшаң бұрамыз (9.76-сурет). Осы арқылы біз L индуктивтікке $\mathcal{E}$ ток көзін қосамыз. Тізбектегі ток арта бастайды және осы артуға қарсы әсер ететін өздік индукция э.к.к.-і пайда болады. Ом заңына сәйкес $RI = \mathcal{E} + \mathcal{E}_s$, немесе

$$RI = \mathcal{E} - L \frac{dI}{dt}. \quad (9.21)$$

$\mathcal{E}$ -ні теңдеудің сол жағына шығарамыз және $u = RI - \mathcal{E}$ жаңа айнымалыны енгіземіз, $du = R dI$. Содан кейін алынған теңдеуді мына түрге келтіреміз:

$$du/u = - dt/\tau,$$

мұндағы, $\tau = L/R$ – уақыт тұрақтысы.

u ($-\mathcal{E}$ -ден $RI - \mathcal{E}$ -ге дейін) және t (0-ден t -ға дейін) бойынша интегралдау $\ln[(RI - \mathcal{E})/(-\mathcal{E})] = -t/\tau$ -ды береді немесе

$$I = I_0(1 - e^{-t/\tau}), \quad (9.22)$$

мұндағы, $I_0 = \mathcal{E}/R$ тағайындалған токты береді ($t \rightarrow \infty$ болғанда). (9.22) теңдеуден токтың тағайындалу шапшаңдығы сол τ тұрақтымен анықталатыны көрініп тұр. $I(t)$ тәуелділіктің графигі – токтың уақыт өтуі мен артуы 9.8-суретте көрсетілген (2 қисығы).

Магнит ағынының сақталуы жөнінде. Қалауымызша алынған сыртқы магнит өрісінде – тұрақты немесе айнымалы – тогы бар контур қозғалатын және де деформацияланатын болсын дейік. Бұл кезде контурда ток индукцияланады:

$$I = \frac{\mathcal{E}_i + \mathcal{E}_s}{R} = - \frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt}.$$

Егер контурдың кедергісі $R = 0$ болса, онда $d\Phi/dt = 0$ болуы керек, өйткені I ток күші шексіз үлкен бола алмайды. Осыдан $\Phi = \text{const}$ екені шығады.

Сөйтіп, асқын өткізгіш контурдың магнит өрісіндегі қозғалысы кезінде оны қиып өтетін магнит ағыны тұрақты болып қалады. Ағынның осындай сақталуын индукциялық токтар

қамтамасыз етеді, олар Ленц ережесіне сәйкес контур арқылы өтетін магнит ағынының әртүрлі өзгерістеріне кедергі жасайды.

Контур арқылы өтетін магнит ағынының сақталу тенденциясы кез келген жағдайда болады, бірақ ол асқын өткізгіш контурларда анағұрлым толық білінеді.

Мысал. Радиусы a , индуктивтігі L асқын өткізгіш дөңгелек сақина біртекті $\mathbf{B}$ магнит өрісінде орналасқан. Бастапқы қалпында сақина жазықтығы $\mathbf{B}$ векторына параллель және сақинада ток нөлге тең. Сақинаны $\mathbf{B}$ векторына перпендикуляр қалыпқа бұрады. Бұрылғаннан кейінгі сақинадағы токты және оның центріндегі магнит индукциясын табу керек.

Сақинаны бұрғанда, ол арқылы өтетін магнит ағыны өзгермейді және нөлге тең болып қалады. Демек, индукциялық ток өрісі мен сыртқы өрістің сақина арқылы өтетін магнит ағындары модулі бойынша бірдей, таңба жағынан қарама-қарсы болады. Сондықтан $LI = \pi a^2 B$, осыдан

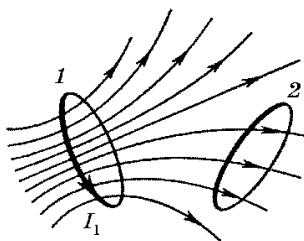
$$I = \pi a^2 B / L$$

Бұл ток (6.13)-ке сәйкес сақина центрінде $B_I = \mu_0 a B / 2L$ өріс туғызады. Онда осы нүктеде қорытқы магнит индукциясы:

$$B_{\text{корт}} = B - B_I = B(1 - \mu_0 a / 2L).$$

§ 9.4. Өзара индукция

Өзара индуктивтік. Бір-біріне жеткілікті жақын орналасқан 1 және 2 қозғалмайтын екі контурды қарастырамыз (9.9-сурет). Егер 1-ші контурда I_1 ток ағатын болса, ол I_1 токқа пропорционал (ферромагнетик болмағанда), 2-ші контур арқылы өтетін Φ_2 магнит ағынын туғызады:



9.9-сурет

$$\Phi_2 = L_{21} I_1. \quad (9.23)$$

Дәл осы сияқты, егер 2-ші контурда I_2 ток ағатын болса, ол 1-ші контур арқылы өтетін

$$\Phi_1 = L_{12}I_2 \quad (9.24)$$

толық магнит ағынын туғызады.

L_{12} және L_{21} пропорционалдық коэффициенттері контурлардың **өзара индуктивтігі** деп аталады. Өзара индуктивтік сан жағынан контурлардың бірі арқылы өтетін екінші контурдағы бірлік токтың жасайтын магнит ағынына тең, екені анық. L_{12} және L_{21} коэффициенттері контурлардың пішініне, өлшемдеріне және өзара орналасуына, сондай-ақ контурларды қоршап тұрған ортаның магнит өтімділігіне тәуелді болады. Бұл коэффициенттер L индуктивтіктің сияқты бірліктермен өрнектеледі.

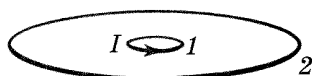
Өзаралық теорема. Сәйкес есептеу (оны тәжірибе де растайды) ферромагнетиктер болмағанда, L_{12} және L_{21} коэффициенттерінің бірдей болатынын көрсетеді:

$$L_{12} = L_{21}. \quad (9.25)$$

Өзара индуктивтіктің осы тамаша қасиетін **өзаралық теориясы** деп атау қабылданған. Осы теореманың арқасында L_{12} мен L_{21} арасында айырма жасамауға, тек екі контурдың өзара индуктивтігі жөнінде айтуға болады.

(9.25) теңдігінің мағынасы сол, кез келген жағдайда 1-контур арқылы 2-ші контурдағы I ток туғызған Φ_1 магнит ағыны, 2-ші контур арқылы өтетін, 1-ші контурдағы сондай I ток туғызған Φ_2 магнит ағынына тең. Бұл жағдай көбінесе мысалы магнит ағындарын табу жөніндегі сұрақтарды барынша жеңілдетуге мүмкіндік береді. Міне екі мысал:

1-мысал. Қайсыбір жазықтықта центрлері дәл келетін екі 1 және 2 дөңгелек орамдар жатыр (9.10-сурет). Орамдардың радиустары a_1 және a_2 .



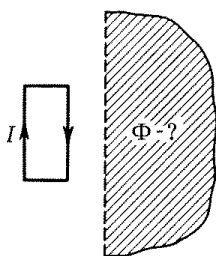
9.10-сурет

1-ші орамда I ток жүреді. Егер $a_1 \ll a_2$ болса, онда 2-ші орам қамтитын Φ_2 магнит ағынын табу керек.

Φ_2 ағынды тікелей есептеу өте күрделі есеп екені анық, өйткені өрістің өзінің конфигурациясы

күрделі болып табылады. Өзаралық теоремасын пайдалану қойылған сұрақтың шешімін жеңілдетеді. Шынында, нақ сол I тоқты 2-ші орам бойымен жіберейік. Сонда 1-ші орам арқылы өтетін I ток туғызған магнит ағынын $a_1 \ll a_2$ шартында өте оңай табуға болады: орам центріндегі B магнит индукциясын ($B = \mu_0 I / 2a_2$) дөңгелектің πa_1^2 ауданына көбейтсек және өзаралық теоремасына сәйкес $\Phi_2 = \Phi_1$ екенін ескерсек жеткілікті.

2-мысал. I тогы бар контур тіктөртбұрыш пішінді болсын. Шекарасы контурдан берілген қашықтықта болатын штрихталған жарты жазықтық (9.11-сурет) арқылы өтетін Φ магнит ағынын қалай табуға болады? Осы жарты жазықтық пен контур бір жазықтықта жатады деп ұйғарылады.



9.11-сурет

I токтың магнит өрісінің конфигурациясы мұнда да күрделі, сондықтан бізге қажетті Φ ағынды тікелей есептеп табу қиын. Алайда өзаралық теоремасын пайдалансақ, мұнда да шешімді күрт жеңілдетуге болады.

I ток тік бұрышты контур бойымен емес, жарты жазықтық шекарасы бойымен, оны шексіздікте айнала отырып ағатын болсын деп елестетейік. Осы токтың тікбұрыш контур аймағында туғызған магнит өрісінің конфигурациясы қарапайым – бұл түзу токтың өрісі.

Сондықтан тік бұрышты контур арқылы өтетін Φ' магнит ағынын табу жеткілікті жеңіл (күрделі емес интегралдау жолымен). Ал өзаралық теоремасы бойынша ізделініп отырған ағын $\Phi = \Phi'$, есеп шешілді.

Алайда ферромагнетиктердің болуы жағдайды өзгертеді, өзаралық теорема да орындалмайтын болады. Келесі нақты мысалда бұған көз жеткіземіз.

Мысал. Көлемі V ұзын ферромагнетікті цилиндрдің екі обмоткасы бар (бірі екіншісіне). Бір обмотканың бірлік ұзындыққа келетін n_1 орамы, ал екіншісінің n_2 орамы бар. Жиектік эффектілерді ескермей, олардың өзара индуктивтігін табайық.

(9.23)-ке сәйкес $L_{21} = \Phi_2 / I_1$. Біз демек, 1-ші обмоткада I_1 ток туғызуымыз керек те, 2-ші обмотканың барлық орамдары арқылы өтетін толық магнит ағынын есептеп табуымыз керек. Егер 2-ші обмотка N_2 орамнан тұратын болса, онда

$$\Phi_2 = N_2 B_1 S,$$

мұндағы, S – цилиндр қимасының ауданы. $N_2 = n_2 l$, l – цилиндр ұзындығы, $B_1 = \mu_1 \mu_0 n_1 I_1$, μ_1 – ток I_1 болғандағы магнит өтімділік екенін ескеріп, мынаны жазамыз $\Phi_2 = \mu_1 \mu_0 n_1 n_2 V I_1$, мұндағы, $V = lS$. Осыдан

$$L_{21} = \mu_1 \mu_0 n_1 n_2 V.$$

Баламалы түрде L_{12} -ні де табамыз:

$$L_{12} = \mu_2 \mu_0 n_1 n_2 V.$$

Соңғы екі өрнектен μ_1 және μ_2 -нің мәндерінің жалпы айтқанда, әртүрлілігінен (ферромагнетиктерде олар I_1 және I_2 токтарға тәуелді) L_{21} және L_{12} мәндері дәл келмейді.

Өзара индукция. Контурлар арасында магниттік байланыстың барлығы контурлардың біріндегі токтың кез келген өзгерісі кезінде екінші контурда индукция э.қ.к.-нің пайда болуынан көрінеді. Осы құбылыс *өзара индукция* деп аталады.

Электромагниттік индукция заңына сәйкес I және 2 контурларда пайда болатын э.қ.к. сәйкес:

$$\mathcal{E}_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -L_{12} \frac{dI_2}{dt}, \quad \mathcal{E}_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -L_{21} \frac{dI_1}{dt}. \quad (9.26)$$

Мұнда контурлар қозғалмайды және жақын жерде ферромагнетиктер жоқ деп ұйғарылады.

Өздік индукция құбылысын ескергенде, мысалы I -контурдағы ток екі контурдағы токтардың өзгерісі кезінде Ом заңымен төмендегідей анықталады:

$$R_1 I_1 = \mathcal{E}_1 - L_1 \frac{dI_1}{dt} - L_{12} \frac{dI_2}{dt},$$

мұндағы, $\mathcal{E}_1$ – I -ші контурдағы бөгде э.қ.к. (индукциялық э.қ.к.-тен басқа), L_1 – I -ші контурдың индуктивтігі. 2 -ші контурдағы I_2 токты анықтау үшін де баламалы теңдеу жазуға болады.

Трансформатордың – токтар мен кернеулерді түрлендіретін құрылғының жұмысы өзара индукция құбылысына негізделгенін атап кетеміз.

L_{12} -нің таңбасы жөнінде ескертулер. Айтылып кеткендей, оң шама болып табылатын L индуктивтіктен өзгешілігі L_{12} өзара индуктивтік **алгебралық** шама (дербес жағдайда нөлге тең). Бұл мысалы (9.23)-те Φ_2 және I_1 шамалар **әртүрлі** контурларға қатысты болатын жағдаймен байланысты. 9.9-суреттен I_1 токтың берілген бағытында Φ_2 магнит ағынының таңбасы 2 контурымен шектелген бетке нормальды таңдап алуға тәуелді болатыны көрініп тұр (не осы контурды айналып өтудің оң бағытын таңдауға).

Екі контурдағы токтар үшін (және э.к.к.) оң бағыттарды әрқашан да қалауымызша таңдап алуға болады (ал контурды айналып өтудің оң бағытымен – оң бұранда ережесімен – контурмен шектелген бетке **n** нормальдың бағыты, яғни ең ақырында магнит ағынының таңбасы бір мәнді байланысқан). Егер бұл бағыттар таңдалып алынған болса, токтар оң болғанда контур арқылы өтетін өзара индукцияның магнит ағындары да оң болады, яғни таңбасы жағынан өздік индукция ағындарымен дәл келгенде L_{12} шамасын оң деп есептеуіміз керек.



$L_{12} > 0$
а)



$L_{12} < 0$
б)

9.12-сурет

Басқаша айтқанда, екі контурдағы токтар оң болғанда олар бір-бірін «магниттесе» $L_{12} > 0$ болады, олай болмайтын болса $L_{21} < 0$. Дербес жағдайларда L_{12} шаманың бізге қажет таңбасын алу үшін, контурды айналып өтудің оң бағытын алдын ала тағайындауға болады (9.12-сурет).

§ 9.5. Магнит өрісінің энергиясы

Токтың магниттік энергиясы. L индуктивтіктен және R кедергіден тұратын козғалмайтын тізбекті э.к.к.-і $\mathcal{E}_0$ ток көзімен тұйықтаймыз. Контурда, біз білетіндей, ток арта бастайды. Бұл өздік индукция э.к.к.-інің пайда болуына әкеледі. Ом заңына сәйкес $RI = \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_s$, осыдан

$$\mathcal{E}_0 = RI - \mathcal{E}_s.$$

Бөгде күштердің (яғни $\mathcal{E}_0$ ток көзі) dt уақыт ішінде жасайтын элементар жұмысын табамыз. Бұл үшін алдыңғы теңдікті Idt -ға көбейтеміз:

$$\mathcal{E}_0 Idt = RI^2 dt - \mathcal{E}_s Idt.$$

Әрбір қосылғыштың мағынасын және $\mathcal{E}_s = -d\Phi/dt$ қатысын ескере отырып, мынаны жазамыз:

$$\delta A_{\text{бөгде}} = \delta Q + Id\Phi.$$

Токтың тағайындалу процесі кезінде магнит ағыны өзгергенде және $d\Phi > 0$ (егер $I > 0$ болса) болғанда, $\mathcal{E}_0$ ток көзінің жасайтын жұмысының тізбекте бөлінетін джоульдік жылудан **көп** болатынын көреміз. Осы жұмыстың бір бөлігі (қосымша жұмыс) өздік индукция э.қ.к.-іне **қарсы** істеледі. Ток тағайындалып болғаннан кейін, $d\Phi = 0$ және $\mathcal{E}_0$ ток көзінің барлық жұмысы тек джоульдік жылудың бөлінуіне кететінін еске саламыз.

Осылайша, токтың тағайындалу процесі кезінде бөгде күштердің өздік индукция э.қ.к.-іне қарсы істейтін қосымша жұмысы:

$$\boxed{\delta A^{\text{кoc}} = Id\Phi.} \quad (9.27)$$

Бұл қатыс жалпы сипатқа ие. Ол ферромагнетиктер бар болғанда да дұрыс, өйткені қорытқан кезде қоршаған ортаның магниттік қасиеттеріне қатысты ешқандай пікір кірістірілген жоқ.

Енді (әрі қарай да) ферромагнетиктер жоқ деп есептейтін боламыз. Онда $d\Phi = LdI$ және

$$\delta A^{\text{кoc}} = LI dI. \quad (9.28)$$

Осы теңдеуді интергралдап, мынаны аламыз: $A^{\text{кoc}} = LI^2/2$. Энергияның сақталу заңы бойынша кез келген жұмыс энергияның қандай да бір түрінің өсімшесіне кетеді. Бөгде күштердің ($\mathcal{E}_0$) жұмысының бір бөлігі өткізгіштердің ішкі энергиясын арттыруға (онымен джоульдік жылудың бөлінуі байланысты) және екінші бөлігі токтың тағайындалу процесі кезінде – тағы бірдемеге кететінін білеміз. Бұл «бірдеме» басқа емес, магнит өрісі, оның пайда болуының өзі токтың пайда болуымен байланысты.

Сөйтіп, біз бойымен I ток жүріп тұрған индуктивтігі L контур ферромагнетиктер жоқ кезде мынадай энергияға ие болады деген қорытындыға келеміз:

$$W = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}I\Phi = \frac{\Phi^2}{2L}. \quad (9.29)$$

Бұл энергия **тоқтың магниттік энергиясы** немесе **тоқтың меншікті энергиясы** деп аталады. Егер 9.7-суретте көрсетілгендей: K кілтті b қалпынан a қалпына шапшаң бұрып, $\mathcal{E}_0$ ток көзін ажыратса, оны түгелімен өткізгіштердің ішкі энергиясына айналдыруға болады.

Магнит өрісінің энергиясы. (9.29) формуласы тоқтың магнит өрісін индуктивтік және ток арқылы өрнектейді (ферромагнетиктер болмағанда). Алайда бұл жерде де зарядталған денелердің электр энергиясы жағдайындағыдай, энергияны тікелей $\mathbf{B}$ магнит индукциясы арқылы өрнектеуге болады. Ұзын соленоидтың қарапайым мысалында, оның шеттерінде өрістің бұрмалануын (жиектік эффектілерді) ескермей, осыған көз жеткіземіз. (9.29) формулаға $L = \mu\mu_0 n^2 V$ өрнекті қойып, мынаны аламыз:

$$W = LI^2/2 = \mu\mu_0 n^2 I^2 V/2.$$

$nI = H = B/\mu\mu_0$ болғандықтан:

$$W = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} V = \frac{\mathbf{B}\mathbf{H}}{2} V. \quad (9.30)$$

Бұл формула V көлемді толтырып тұрған біртекті өріс үшін дұрыс (біздің жағдайымызда соленоидтағыдай).

Жалпы теорияда W энергияны кез келген жағдайда бірақ (ферромагнетиктер жоқ кезде) $\mathbf{B}$ және $\mathbf{H}$ векторлары арқылы төмендегі формуламен өрнектеуге болатынын көрсетеді:

$$W = \int \frac{\mathbf{B}\mathbf{H}}{2} dV. \quad (9.31)$$

Осы теңдеудегі интеграл астындағы өрнек көлемі dV элементтегі энергия мағынасына ие.

Осыдан біз электр өрісі жағдайындағыдай, магниттік энергия да магнит өрісі алып тұрған кеңістікте локальденген деген қорытындыға келеміз.

(9.30) және (9.31) формулалардан магниттік энергияның кеңістікте төмендегідей көлемдік тығыздықта таралатындығы шығады

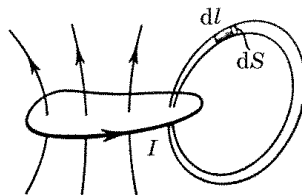
$$w = \frac{BH}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0}. \quad (9.32)$$

Алынған өрнек тек **B**-ның **H**-қа тәуелділігі *сызықтық*, яғни $B = \mu_0 H$ қатыстағы μ **H**-қа тәуелсіз болатын орталарға ғана қатысты екеніне көңіл аударамыз. Басқаша айтқанда (9.31) және (9.32) өрнектері тек пара және диамагнетиктерге ғана қатысты. Оларды ферромагнетиктерге қолдануға болмайды².

Сондай-ақ магниттік энергияның оң шама екеніне көңіл аударамыз. Мұны соңғы екі формуладан оңай көруге болады.

Тағы да (9.32) формуланы негіздеу жөнінде. «Кері» ретпен пайымдай отырып, осы формуланың дұрыстығына көз жеткіземіз, атап айтқанда егер (9.32) формула дұрыс болса, онда контурдың магниттік энергиясы $W = LI^2/2$ екенін көрсетеміз.

Осы мақсатта қалауымызша алынған I тогы бар контурдың магнит өрісін қарастырамыз (9.13-сурет). Барлық өрісті жасаушылары **B** векторының сызықтары болатын элементар түтіктерге бөлінген деп алайық. Осындай түтіктердің бірінен $dV = dl dS$ элементар көлемді бөліп алайық. (9.32) формулаға сәйкес бұл көлемде $(BH/2)dl dS$ энергия локальденген.



9.13-сурет

Енді барлық элементар түтік көлеміндегі dW энергияны табамыз, бұл үшін соңғы өрнекті түтік осі бойымен интегралдаймыз. Түтік қимасы арқылы өтетін $d\Phi = BdS$ ағын барлық түтіктің өн бойында тұрақты, сондықтан $d\Phi$ -ті интеграл таңбасының алдына шығаруға болады:

$$dW = \frac{d\Phi}{2} \oint H dl = I \frac{d\Phi}{2},$$

мұнда **H** векторының циркуляциясы туралы теорема пайдаланылды (біздің жағдайымызда $H_l = H$).

Соңында барлық элементар түтіктердің энергиясын қосамыз:

² Бұл ең ақырында (9.31) және (9.32) өрнектері $\delta A^{\text{көс}} = I d\Phi$ формуласының салдары болып табылатындығынан және гистерезис жоқ кезде $dA^{\text{көс}}$ жұмыс тек dW энергияның өсімшесіне кететіндігі фактысынан болады. Ферромагнитті орта үшін істің мәнісі басқаша болады: $dA^{\text{көс}}$ жұмыс тағы ортаның ішкі энергиясының өсімшесіне, яғни оны қыздыруға кетеді.

$$W = \frac{1}{2} I \int d\Phi = I\Phi/2 = LI^2/2,$$

мұндағы, Φ – тогы бар контур қамтитын толық магнит ағыны, $\Phi = LI$. Дәлелдеу керегі де осы еді.

Энергия өрнегінен индуктивтікті анықтау. Біз L индуктивтікті Φ толық магнит ағыны мен I ток арасындағы пропорционалдық коэффициент ретінде енгіздік. Алайда, L -ді есептеудің тағы бір – энергия өрнегінен алу мүмкіндігі бар. Шынында да (9.31) және (9.32) формулаларды салыстырудан шығатыны, ферромагнетик жоқ кезде

$$L = \frac{1}{I^2} \int \frac{B^2}{\mu\mu_0} dV. \quad (9.33)$$

L -ді осы жолмен табу (9.14) формулада Φ магнит ағынын есептеумен байланысты болған қиындықтардан арылған. L -ді (9.33) формуласы бойынша және (9.14) ағынның өрнегінен анықтаудың кейде қандай қайшылықтарға әкелетіні 9.9-есепте коаксиалды кабель мысалында көрсетілген.

§ 9.6. Тогы бар екі контурдың магнит энергиясы

Меншікті және өзаралық энергиялар. Бір-біріне жеткілікті жақын орналастырылған 1 және 2 қозғалмайтын екі контур аламыз (олардың арасында магниттік байланыс болу үшін). Әрбір контурдың өзінің тұрақты э.қ.к. көзі бар деп ұйғарылады. $t = 0$ мезетте әрбір контурды тұйықтаймыз. Контурдың әрқайсысының өзінде ток тағайындала бастайды, демек $\mathcal{E}_s$ өздік индукция э.қ.к.-і және $\mathcal{E}_i$ өзара индукция э.қ.к.-і пайда болады. Бұл кезде тұрақты э.қ.к.-нің $\mathcal{E}_s$ -пен $\mathcal{E}_i$ -ге **қарсы** істейтін қосымша жұмысы, біз білетіндей, магниттік энергияны жасауға кетеді.

dt уақыт ішіндегі осы жұмысты табамыз:

$$\delta A^{\text{кoc}} = -(\mathcal{E}_{s1} + \mathcal{E}_{i1})I_1 dt - (\mathcal{E}_{s2} + \mathcal{E}_{i2})I_2 dt = dW.$$

$\mathcal{E}_{s1} = -L_1 dI_1/dt$, $\mathcal{E}_{i1} = -L_{12} dI_2/dt$ және т.б. ескеріп, бұл формуланы түрлендіреміз:

$$dW = L_1 I_1 dI_1 + L_{12} I_1 dI_2 + L_2 I_2 dI_2 + L_{21} I_2 dI_1.$$

$L_{12} = L_{21}$ екенін ескеріп, соңғы теңдеуді мына түрде береміз:

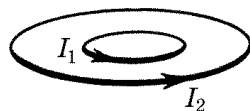
$$dW = d(L_1 I_1^2 / 2) + d(L_2 I_2^2 / 2) + d(L_{12} I_1 I_2),$$

осыдан

$$W = \frac{L_1 I_1^2}{2} + \frac{L_2 I_2^2}{2} + L_{12} I_1 I_2. \quad (9.34)$$

Мұнда бірінші екі қосылған I_1 және I_2 токтың *меншікті энергиясы*, соңғы қосылғыш екі токтың *өзара энергиясы* деп аталады. Токтардың меншікті энергияларынан айырмашылығы, токтардың өзара энергиясы алгебралық шама. Токтардың бірінің бағытының өзгерісі (9.34)-тегі соңғы қосылғыштың – өзара энергияның таңбасының өзгерісіне әкеледі.

Мысал. I_1 және I_2 токтарының бағыты 9.14-суретте көрсетілген екі концентрлік контур берілген. Бұл токтардың өзара энергиясы ($W_{12} = L_{12} I_1 I_2$), таңбалары екі контурды айналып өтудің оң бағыттарын таңдап алумен анықталатын үш алгебралық шамаларға тәуелді. Алайда W_{12} шаманың таңбасы (берілген жағдайда $W_{12} > 0$) тек токтардың өзінің өзара бағыттарымен анықталатындығына және контурларды айналып өтудің оң бағыттарын таңдап алуға тәуелді емес екеніне көз жеткізу пайдалы. L_{12} шамасының таңбасы жөнінде § 9.4-те айтылғанын еске саламыз.



9.14-сурет

(9.34) энергияны өрістік түсіндіру. Бірнеше маңызды сұрақтар бар, біз оларды екі контурдың магниттік энергиясын тағы да басқаша – энергияның өрістегі локалденуі тұрғысынан есептеу арқылы шеше аламыз.

$\mathbf{B}_1 - I_1$ токтың, ал $\mathbf{B}_2 - I_2$ токтың магнит өрісі болсын. Онда суперпозиция принципі бойынша, әрбір нүктеде өріс $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$ және (9.31)-ге сәйкес осы токтар жүйесінің магнит өрісінің энергиясы $W = \int (B^2 / 2\mu_0) dV$. Осыған $B^2 = B_1^2 + B_2^2 + 2\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2$ -ні қойып, мынаны аламыз:

$$W = \int \frac{B_1^2}{2\mu_0} dV + \int \frac{B_2^2}{2\mu_0} dV + \int \frac{\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2}{\mu_0} dV. \quad (9.35)$$

(9.35) және (9.34) формулалардағы жеке қосылғыштардың бір-біріне сәйкестігі күмән тудырмайды.

(9.34) және (9.35) формулалар мынадай маңызды салдарларға әкеледі.

1. Екі (одан да көп) токтар жүйесінің энергиясы – әрқашан да оң шама, $W > 0$. Бұл $W \propto \int B^2 dV$ болуы фактысынан шығады, мұнда интеграл астында оң шамалар тұр.

2. Токтардың энергиясы – аддитивті шама емес (өзара энергияның болуынан).

3. $B_1 \propto I_1$ және $B_2 \propto I_2$ болғандықтан, (9.35)-тегі соңғы интеграл токтардың $I_1 I_2$ көбейтіндісіне пропорционал. Пропорционалдық коэффициент (яғни қалған интеграл) 1 және 2 индекстерге қатысты симметриялы болады, сондықтан да оны L_{12} немесе L_{21} деп белгілеуге болады [(9.34) формуласына сәйкес]. Сөйтіп шынында да $L_{12} = L_{21}$.

4. (9.35) өрнегінен L_{12} индуктивтіктің басқа анықтамасы шығады. Шын мәнісінде, (9.35) пен (9.34)-ті салыстыру мынаны көрсетеді:

$$L_{12} = \frac{1}{I_1 I_2} \int \frac{\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2}{\mu_0} dV. \quad (9.36)$$

§ 9.7. Магнит өрісіндегі энергия және күштер

Магнит өрісіндегі күштерді анықтаудың анағұрлым жалпы әдісі *энергетикалық* әдіс болып табылады. Бұл әдісте магнит өрісі энергиясының өрнегі пайдаланылады.

Жүйе I_1 және I_2 токтары бар екі контурдан тұратын жағдаймен шектелеміз. Мұндай жүйенің магниттік энергиясын төмендегідей түрде еруге болады:

$$W = (I_1 \Phi_1 + I_2 \Phi_2)/2, \quad (9.37)$$

мұндағы, Φ_1 және Φ_2 – 1 және 2 контурларды қиып өтетін сәйкес толық магнит ағындары. Егер соңғы қосылғышты $L_{12} I_1 I_2 / 2 +$

$L_{21}I_2I_1/2$ қосынды түрінде беріп, содан кейін төмендегі формулаларды ескерсек, бұл өрнекті (9.34) формуласынан шығарып алу қиын емес.

$$\Phi_1 = L_1I_1 + L_{12}I_2, \quad \Phi_2 = L_2I_2 + L_{21}I_1. \quad (9.38)$$

Энергияның сақталу заңына сәйкес 1 және 2 контурларға қосылған ток көздері жасайтын δA^* жұмыс δQ жылуға, жүйенің магниттік энергиясының dW өсімшесіне (контурлардың қозғалысынан, не олардағы токтардың өзгерісінен) және $\delta A_{\text{мех}}$ жұмысқа кетеді (контурлардың орын ауыстыруынан не деформациясынан):

$$\delta A^* = \delta Q + dW + \delta A_{\text{мех}}. \quad (9.39)$$

Біз контурлардың сыйымдылығы ескеруге болмайтындай аз, сондықтан электр энергиясын ескермейміз деп ұйғарғанбыз.

Мұнан былай бізге ток көзінің δA^* барлық жұмысы емес, ток оның индукция және өздік индукция э.к.к.-теріне қарсы жасайтын бөлігі ғана қажет болады (әрбір контурда). Бұл жұмыс (біз оны қосымша деп атадық) $\delta A^{\text{коч}} = -(\mathcal{E}_{i1} + \mathcal{E}_{s1})I_1 dt - (\mathcal{E}_{i2} + \mathcal{E}_{s2})I_2 dt$. Әрбір контур үшін $\mathcal{E}_i + \mathcal{E}_s = -d\Phi/dt$ екенін ескеріп, қосымша жұмыс үшін өрнекті мына түрде қайта жазамыз:

$$\delta A^{\text{коч}} = I_1 d\Phi_1 + I_2 d\Phi_2. \quad (9.40)$$

Ток көздері жұмысының Φ_1 және Φ_2 ағындарының өзгерісімен байланысты осы бөлігі (индукция және өздік индукция э.к.к.-на қарсы істелетін жұмыс) жүйенің магниттік энергияның өсімшесіне және механикалық жұмысқа кетеді:

$$I_1 d\Phi_1 + I_2 d\Phi_2 = dW + \delta A_{\text{мех}}. \quad (9.41)$$

Бұл $\delta A_{\text{мех}}$ жұмысты, ал одан магнит өрісіндегі күштерді есептеуге арналған *негізгі* формула болып табылады.

Егер орын ауыстыру процесінде не контурлар арқылы өтетін магнит ағындары, не олардағы токтар өзгермейді деп есептесек,

(9.41) формуладан $\delta A_{\text{мех}}$ үшін анағұрлым қарапайым өрнектер алуға болады. Осының егжей-тегжейлі қарастырайық.

1. Егер ағындар тұрақты болса, $\Phi_k = \text{const}$, мұндағы $k = 1$ және 2, онда (9.41) ден бірден шығатыны:

$$\delta A_{\text{мех}} = -dW|_{\Phi}, \quad (9.42)$$

мұнда, Φ символы жүйенің магниттік энергиясының өсімшесі контурлар арқылы өтетін магнит ағындары тұрақты болғанда есептелуі керек екенін атап көрсетеді. Алынған формула оған сәйкес электр тогы жұмысына арналған (4.15) формуласына баламалы.

2. Егер токтар тұрақты болса, $I_k = \text{const}$, онда

$$\delta A_{\text{мех}} = dW|_{I}. \quad (9.43)$$

Шынында да, $I_k = \text{const}$ болғанда (9.37) формуладан мынау шығады:

$$dW|_I = (I_1 d\Phi_1 + I_2 d\Phi_2)/2,$$

яғни, бұл жағдайда жүйенің магнит өрісінің өсімшесі (9.40)-қа сәйкес э.қ.к. көзінің қосымша жұмысының жартысына тең болады. Осы жұмыстың екінші жартысы механикалық жұмыс істеуге кетеді. Басқаша айтқанда токтар тұрақты болғанда $dW|_I = \delta A_{\text{мех}}$, дәлелдеу керегі де осы еді.

Біз алған (9.42) және (9.43) өрнектер сол бір күштің механикалық жұмысын анықтайтындығын атап көрсету керек, яғни былай жазуға болады:

$$Fdl = -dW|_{\Phi} = dW|_I. \quad (9.44)$$

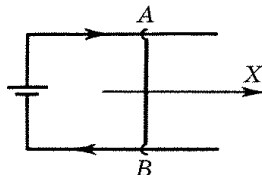
Осы формулалардың көмегімен күшті есептеп табу үшін, әрине, міндетті түрде не магнит ағындары, не токтар тұрақты болатындай режимді таңдаудың қажеті жоқ. Тек, не $\Phi_k = \text{const}$, не $I_k = \text{const}$ шартында жүйенің dW магниттік энергияның өсімшесін табу керек, бұл таза математикалық амал болып табылады.

Алынған (9.42) және (9.43) өрнектердің құндылығы олардың жалпылығында: олар контурлардың кезкелген санынан – бір, екі және т.б. – тұратын жүйе үшін жарамды.

Осы формулалар қолданылатын бірнеше мысалдарды қарастырайық.

1-мысал. Тоғы бар бір контур жағдайындағы

күш. Тоғы бар контурда AB – қозғалмалы қосқыш (9.15-сурет). Бұл контурдың индуктивтігі белгілі бір түрде x координатаға тәуелді, яғни $L(x)$ белгілі. Қосқышқа әсер ететін Ампер күшін екі тәсілмен табамыз: $I = \text{const}$ және $\Phi = \text{const}$ болғанда.



9.15-сурет

Біздің жағдайымызда жүйенің магниттік энергиясын (9.29)-ға сәйкес былай беруге болады:

$$W = LI^2/2 = \Phi^2/2L,$$

мұндағы, $\Phi = LI$. Қосқышты, мысалы, оңға қарай dx -ке көшіреміз. $\delta A_{\text{мех}} = F_x dx$ болғандықтан,

$$F_x = \left. \frac{\partial W}{\partial x} \right|_I = \frac{I^2}{2} \frac{\partial L}{\partial x},$$

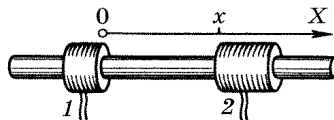
немесе

$$F_x = - \left. \frac{\partial W}{\partial x} \right|_{\Phi} = \frac{\Phi^2}{2L} \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{I^2}{2} \frac{\partial L}{\partial x},$$

яғни, (9.44) ке сәйкес екі формула бойынша есетеу бірдей нәтиже береді.

2-мысал. Токтары бар екі катушканың

өзара әсері. Магниттік емес екі өзекшеге (9.16-сурет) токтары I_1 және I_2 катушқалар кигізілген. Катушқалардың индуктивтігі белгілі $L_{12}(x)$ заң бойынша олардың x арақашықтығына тәуелді болсын делік. Катушқалар арасындағы өзара әсер күшін табамыз.



9.16-сурет

Екі катушқадан тұратын жүйенің магниттік энергиясы (9.34) формуламен беріледі. Өзара әсер күшін анықтау үшін (9.43)

формуласын пайдаланамыз. Өзгермейтін I_1 және I_2 токтарда 2-ші катушканы dx қашықтыққа көшіреміз. Жүйенің магниттік энергиясының сәйкес өсімшесі:

$$dW|_I = I_1 I_2 dL_{12}(x).$$

Элементар механикалық жұмыс $\delta A_{\text{мех}} = F_{2x} dx$ болғандықтан, (9.43) ке сәйкес мынаны аламыз:

$$F_{2x} = I_1 I_2 \frac{\partial L_{12}(x)}{\partial x}.$$

I_1 және I_2 токтар бір-бірін магниттейтін болсын делік, онда $L_{12} > 0$ және $dx > 0$ болғанда, өсімше $dL_{12} < 0$ яғни $F_{2x} < 0$. Демек, 2-ші катушкаға 1-ші катушка тарапынан әсер ететін күш, тартылу күші болып табылады: $\mathbf{F}_2$ векторы суретте солға қарай бағытталған.

3-мысал. **Соленоид орамына магниттік қысым.** Орам арқылы өтетін тоқты I өзгеріссіз сақтай отырып, соленоид қимасының радиусын ойша dr -ге арттырайық. Онда Ампер күштері $\delta A_{\text{мех}} = dW|_I$ жұмыс жасайды. Біздің жағдайымызда:

$$\delta A_{\text{мех}} = p S dr,$$

мұндағы, p – ізделініп отырған қысым, S – соленоидтың бүйір беті,

$$dW|_I = d\left(\frac{B^2}{2\mu_0} V\right) = \frac{B^2}{2\mu_0} S dr.$$

Мұнда, $I = \text{const}$ болғанда, $B = \text{const}$ екені ескерілген. Осы екі өрнектің теңдігінен мынаны аламыз:

$$p = B^2 / 2\mu_0.$$

Магниттік қысым. Соңғы мысалда қысым үшін алынған өрнекті, тогы бар беттің әртүрлі жағында магнит өрісі әртүрлі (өткізгіштік тогы, не магниттелу тогы) – $\mathbf{B}_1$ және $\mathbf{B}_2$ болатын жағдайға да жалпылауға болады. Бұл жағдайда, **магниттік қысым**

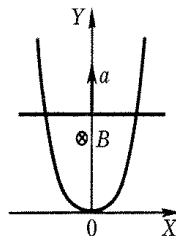
$$p = \left| \frac{\mathbf{B}_1 \mathbf{H}_1}{2} - \frac{\mathbf{B}_2 \mathbf{H}_2}{2} \right|, \quad (9.45)$$

бұған қоса істің мәнісі магниттік энергия тығыздығы үлкен аймақ, қысымы үлкен аймақ болатындығында екен.

(9.45) қатысы электр өткізгіш сұйықтарды зерттейтін **магнитогидродинамикадағы** негізгі қатыстардың бірі болып табылады (электротехникада және астрофизикада).

Есептер

- 9.1. Индукция э.к.к.-і.** $y = kx^2$ парабола пішіндегі сым XY жазықтығына перпендикуляр $\mathbf{B}$ біртекті магнит өрісінде орналасқан. Парабола төбесінен ілгерімелі және бастапқы жылдамдықсыз қосқыш тұрақты a үдеумен қосқыштың орнын ауыстырады (9.17-сурет). y координатаның функциясы ретінде пайда болған контурдағы индукция э.к.к.-ін табу керек.



9.17-сурет

Шешімі. Анықтама бойынша $\mathcal{E}_i = -d\Phi/dt$. $\mathbf{B}$ векторы бағытында контур жазықтығына нормальды таңдап алып, жазамыз: $d\Phi = B dS$, мұндағы, $dS = 2x dy$. Енді $x = \sqrt{y/k}$ екенін ескереміз, онда

$$\mathcal{E}_i = -B \cdot 2\sqrt{y/k} dy/dt.$$

Тұрақты үдеумен қозғалыс кезінде жылдамдық $dy/dt = \sqrt{2ay}$, сондықтан

$$\mathcal{E}_i = -By\sqrt{8a/k}.$$

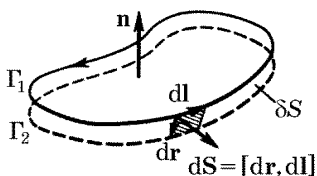
Алынған формуладан $\mathcal{E}_i \propto y$ екені көрініп тұр. Минус таңбасы $\mathcal{E}_i$ -дің суретте сағат тіліне қарсы әсер ететінін көрсетеді.

- 9.2. Контур қалауынша қозғалады.** Тұйықталған өткізгіш контурды қалауынша (тіпті деформациялана отырып) тұрақты біртекті емес магнит өрісінде орын ауыстырады. Бұл жағдайда да (9.1) электромагниттік индукция заңының орындалатынын көрсету керек.

Шешімі. Берілген мезетте $\mathbf{B}$ магнит өрісінде $\mathbf{v}$ жылдамдықпен қозғалған контурдың $d\mathbf{l}$ элементін қарастырайық. Өрістерді түрлендірудің (8.4) формуласына сәйкес берілген элементпен байланысқан санақ жүйесінде $\mathbf{E} = [\mathbf{v}\mathbf{B}]$ электр өрісі байқалады. Бұл өрнекті (9.4) формуласының алдында негізгі мәтінде істелгендей, Лоренц күшінің көмегімен де алуға болатынын еске саламыз.

Барлық контур бойынша $\mathbf{E}$ векторының циркуляциясы анықтама бойынша индукция э.к.к.-і:

$$\mathcal{E}_i = \oint [\mathbf{vB}]d\mathbf{l}. \quad (1)$$



9.18-сурет

Енді контур арқылы өтетін магнит ағынының сәйкес өсімшесін табамыз. Осы мақсатта 9.18-суретке көңіл аударамыз. dt – уақыт ішінде біздің контур Γ_1 қалпынан Γ_2 қалпына орын ауыстырды делік. Егер бірінші қалыпта контурға керілген S_1 бет арқылы өтетін магнит ағыны Φ_1 болса, онда контурдың екінші қалпында сәйкес магнит ағынын $S_1 + \delta S$ бет арқылы өтетін ағын ретінде, яғни $\Phi_1 + \delta\Phi$ түрінде беруге болады. Мұнда $\delta\Phi$ – Γ_1 және Γ_2 контурлармен шектелген δS жіңішке жолақ арқылы өтетін магнит ағынының бізге қажет өсімшесі.

9.18-сурет көмегімен мынаны жазамыз:

$$d\Phi = \int \mathbf{B} d\mathbf{S} = \int \mathbf{B}[\mathbf{dr}, d\mathbf{l}] = - \oint [\mathbf{dr}, \mathbf{B}]d\mathbf{l}. \quad (2)$$

Мұнда: 1) $\mathbf{n}$ нормальдың бағыты контурды айналып өтудің бағыты – $d\mathbf{l}$ векторымен байланысты (оң бұранда жүйесі); 2) $d\mathbf{S}$ векторының – жолақ ауданы элементінің бағыты $\mathbf{n}$ нормальдардың бағытын тандап алумен байланысты; 3) аралас көбейтіндіде циклдык орын ауыстыру пайдаланылған:

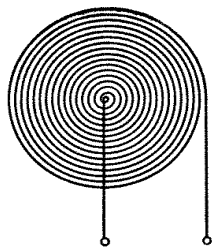
$$\mathbf{a}[\mathbf{bc}] = \mathbf{b}[\mathbf{ca}] = \mathbf{c}[\mathbf{ab}] = -[\mathbf{ba}]\mathbf{c}.$$

(2) өрнекті dt -ға бөліп, мынаны табамыз:

$$d\Phi/dt = - \oint [\mathbf{vB}]d\mathbf{l}, \quad (3)$$

мұндағы, $\mathbf{v} = \mathbf{dr}/dt$. (3)-ті (1)-мен салыстыру қалды, осыдан $\mathcal{E}_i = - d\Phi/dt$ екені шығады.

Бір-біріне тығыз тиіп тұрған, N орам саны көп жазық шиыршық, оның жазықтығына перпендикуляр біртекті магнит өрісінде орналасқан (9.19-сурет). Шиыршық орамдарының сыртқы радиусы a -ға тең. Магнит өрісі уақыт өтуімен $B = B_0 \sin \omega t$ заңымен өзгереді. Шиыршықта пайда болған индукция э.к.к.-інің



9.19-сурет

амплитудалық мәнін табу керек.

Шешімі. Шиыршықтың әрбір орамының іс жүзінде шеңберден айырмашылығы жоқ болғандықтан, онда пайда болатын индукция э.қ.к.-і

$$\varepsilon_i = -d\Phi/dt = -\pi r^2 B_0 \omega \cos \omega t,$$

мұндағы, r – қарастырылып отырған орамның радиусы. Радиус мәндерінің dr интервалына келетін орамдар саны $dN = (N/a)dr$. Орамдар тізбектей жалғанған, сондықтан шиыршықтағы толық индукция э.қ.к.-і

$$\mathcal{E}_i = \int \varepsilon_i(r) dN.$$

Интегралдап, индукция э.қ.к.-нің амплитудалық мәні үшін келесі өрнекті аламыз.

$$\mathcal{E}_{im} = (\pi/3)a^2 NB_0 \omega.$$

- 9.4.** Ұзын соленоид ішінде көлденең қимасының ауданы S , N орамнан тұратын катушка орналасқан. Катушка оның диаметрімен дәл келетін және соленоид осіне перпендикуляр ось айналасында тұрақты ω бұрыштық жылдамдықпен айналдырылады. Сонымен бірге соленоидтағы магнит өрісі уақыт өтуімен $B = B_0 \sin \omega t$ заңымен өзгереді. Егер $t = 0$ мезетте катушка осі соленоид осімен дәл келсе, онда катушкадағы индукция э.қ.к.-ін табу керек.

Шешімі. t мезетте катушка арқылы өтетін толық магнит ағыны

$$\Phi = NBS \cos \omega t = NB_0 S \sin \omega t \cdot \cos \omega t = \frac{1}{2} NB_0 S \sin 2\omega t.$$

Электромагниттік индукция заңына сәйкес

$$\varepsilon_i = -d\Phi/dt = -\frac{1}{2} NB_0 S \cdot 2\omega \cos 2\omega t = -NB_0 S \omega \cos 2\omega t.$$

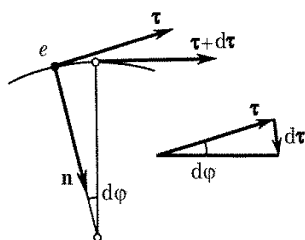
- 9.5. Бетатрондық шарт.** Орбитадағы B_0 магнит өрісі магнит өрісінің орбита ішіндегі аудан бойынша орташа мәнінің $\langle B \rangle$ жартысына тең, яғни $B_0 = \langle B \rangle / 2$ шартында бетатрондағы электрондар радиусы тұрақты r_0 орбита бойымен қозғалатынын көрсету керек.

Шешімі. Электрон қозғалысының релятивистік теңдеуін берейік:

$$d\mathbf{p}/dt = e\mathbf{E} + e[\mathbf{v}\mathbf{B}_0], \quad (1)$$

мұндағы, $\mathbf{E}$ – траекторияға $\boldsymbol{\tau}$ жанамадағы және $\mathbf{n}$ нормальдағы проекцияларындағы күйінды электр өрісі. Бұл үшін электрон импульсын $\mathbf{p} = p\boldsymbol{\tau}$ түрінде жазамыз және оның уақыт бойынша туындысын табамыз:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{dp}{dt}\boldsymbol{\tau} + p\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} = \frac{dp}{dt}\boldsymbol{\tau} + m\frac{v^2}{r_0}\mathbf{n}, \quad (2)$$



мұнда, $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ екені ескерілген, m – релятивистік масса, және де $d\boldsymbol{\tau}/dt = (v/r_0)\mathbf{n}$ бұған 9.20-суретінің көмегімен көз жеткізу қиын емес. Шындығында $d\boldsymbol{\tau} = d\phi \cdot \mathbf{n} = (v dt/r_0)\mathbf{n}$, одан арғысы анық. Бұдан басқа, электромагниттік индукция заңына сәйкес $2\pi r_0 E = |d\Phi/dt|$, мұндағы $\Phi = \pi r_0^2 \langle B \rangle$. Осыдан

9.20-сурет

$$E = \frac{r_0}{2} \frac{d}{dt} \langle B \rangle. \quad (3)$$

Енді (2) және (3) формулаларын ескеріп, (1) теңдеуді траекторияға жанамадағы және нормальдағы проекциясында жазамыз:

$$\frac{dp}{dt} = eE = e \frac{r_0}{2} \frac{d}{dt} \langle B \rangle, \quad (4)$$

$$mv^2/r_0 = evB_0.$$

v -ға қысқартқаннан кейін, соңғы теңдеуді мына түрде қайта жазамыз:

$$p = er_0 B_0.$$

$r_0 = \text{const}$ екенін ескеріп, осы теңдеуді уақыт бойынша дифференциалдаймыз:

$$\frac{dp}{dt} = er_0 \frac{dB_0}{dt}. \quad (5)$$

(5) пен (4)-ті салыстырудан мынаны аламыз:

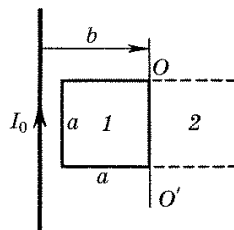
$$\frac{d}{dt} B_0 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle B \rangle.$$

Дербес жағдайда,

$$B_0 = \langle B \rangle / 2$$

болғанда, соңғы шарт орындалатын болады. Іс жүзінде бұл арнайы түрдегі полюстік ұштық жасау жолымен жүзеге асады (қиық конустар түріндегі).

9.6. Индукциялық ток. Кабырғасы a квадрат сым рамка және I_0 тұрақты тогы бар түзу ұзын өткізгіш бір жазықтықта жатыр (9.21-сурет). Рамканың индуктивтігі L , оның кедергісі R . Рамканы OO' осі айналасында 180° -қа бұрады да, тоқтатады. Рамкада ағатын электр мөлшерін табу керек. OO' осі мен ұзын өткізгіштің b арақашықтығы белгілі деп ұйғарылады.



9.21-сурет

Шешімі. Ом заңына сәйкес рамканы бұру процесінде ондағы I ток мына формуламен анықталады:

$$RI = -\frac{d\Phi}{dt} - L\frac{dI}{dt}.$$

Сондықтан ізделініп отырған электр мөлшері:

$$q = \int I dt = -\frac{1}{R} \int (d\Phi + L dI) = -\frac{1}{R} (\Delta\Phi + L\Delta I).$$

Бұрағаннан кейін, рамка тоқтатылғандықтан, ондағы ток тоқтады, демек $\Delta I = 0$. Рамка арқылы өтетін ағынның өсімішесі $\Delta\Phi$ -тің неге тең екенін анықтау қалды ($\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$).

Рамка жазықтығына $\mathbf{n}$ нормальді, мысалы, соңғы қалыпта $\mathbf{n}$ сурет жазықтығынан ары қарай бағытталатындай етіп таңдап аламыз ($\mathbf{B}$ жағына қарай). Онда соңғы қалыпта $\Phi_2 > 0$, ал бастапқы қалыпта $\Phi_1 < 0$ (нормаль $\mathbf{B}$ -ға қарсы бағытталған) екенін көру қиын емес, және де $\Delta\Phi$ тек рамканың соңғы және бастапқы қалыптарымен шектелген аудан арқылы өтетін ағынға тең болып шығады:

$$\Delta\Phi = \Phi_2 + |\Phi_1| = \int_{b-a}^{b+a} B a dr,$$

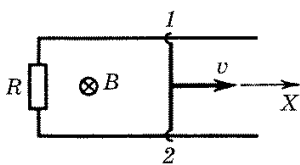
мұнда, B r -дің функциясы болып табылады, оның түрін циркуляция туралы теорема көмегімен табуға болады.

Минус таңбасын алып тастап, соңында мынаны аламыз:

$$q = \frac{\Delta\Phi}{R} = \frac{\mu_0 a I_0}{2\pi R} \ln \frac{b+a}{b-a}.$$

Алынған шама, көріп тұрғанымыздай, контур индуктивтігіне тәуелді емес (егер контур асқын өткізгіш болған болса, істің мәнісі басқаша болған болар еді).

- 9.7. Массасы m 12 қосқышы бір-бірінен l қашықтықта орналасқан екі ұзын өткізгіш рельстер бойымен үйкеліссіз сырғанайды (9.22-сурет). Жүйе контур жазықтығына перпендикуляр біртекті магнит өрісінде орналасқан. Рельстердің сол жақ шеттері R кедергі арқылы тұйықталған. $t = 0$ мезетте 12 қосқышқа v_0 бастапқы жылдамдық берілген. Рельстер мен қосқыштың кедергісін, сондай-ақ контурдың өздік индукциясын ескермей, t



9.22-сурет

Шешімі. Контур жазықтығына нормальдың оң бағытын суреттен ары қарай таңдап аламыз (бізден әрі қарай). Бұл контурды айналып өтудің оң бағытын (индукция э.к.к.-і және ток үшін) оң бұранда ережесіне сәйкес сағат тілі бойынша алғанымызды білдіреді. Ом заңынан шығатыны:

$$RI = -\frac{d\Phi}{dt} = -B \frac{ds}{dt} = -Blv, \quad (1)$$

мұнда қосқыш оң жаққа қарай қозғалғанда $\Delta\Phi > 0$ екені ескерілген. Ленц ережесіне сәйкес, I индукциялық ток қозғалысқа қарсы әсер ететін Ампер күшін туғызады – ол солға қарай бағытталатын болады. X осін оңға қарай бағыттап, қосқыш қозғалысының теңдеуін жазамыз.

$$m \, dv/dt = IlB, \quad (2)$$

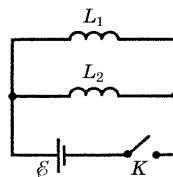
мұнда оң жақта Ампер күшінің X осіндегі проекциясы жазылған (бұл шама теріс, бірақ (1)-ден көрініп тұрғандай, ток $I < 0$ болғандықтан, минус таңбасын жазбаймыз). (1) және (2) теңдеулерден I -ді шығарып, мынаналарды аламыз:

$$dv/v = -a \, dt, \quad a = B^2 l^2 / mR.$$

Бастапқы шарттары ескеріп, бұл өрнекті интегралдау мынаналарды береді:

$$\ln(v/v_0) = -at, \quad v = v_0 e^{-at}.$$

- 9.8. **Өтпелі процестердің ролі.** Сұлбада (9.23-сурет). $\mathcal{E}$ көзінің э.к.к.-і, оның R ішкі кедергісі және L_1 мен L_2 асқын өткізгіш катушкалардың индуктивтіктері



9.23-сурет

белгілі. K кілті қосқаннан кейін, катушкаларда тағайындалған токтарды табу керек.

Шешімі. $\mathcal{E}L_1$ және $\mathcal{E}L_2$ контурлар үшін Кирхгофф ережелерін пайдаланамыз:

$$RI = \mathcal{E} - L_1 \frac{dI_1}{dt}, \quad RI = \mathcal{E} - L_2 \frac{dI_2}{dt}.$$

Осы өрнектерді салыстырудан $L_1 dI_1 = L_2 dI_2$ екені көрініп тұр, ал тағайындалған токтар үшін

$$L_1 I_{10} = L_2 I_{20}. \quad (1)$$

Бұдан басқа

$$I_{10} + I_{20} = I_0 = \mathcal{E}/R. \quad (2)$$

(1) және (2) теңдеулерден мыналарды табамыз:

$$I_{10} = \frac{\mathcal{E}}{R} \frac{L_2}{L_1 + L_2}, \quad I_{20} = \frac{\mathcal{E}}{R} \frac{L_1}{L_1 + L_2}.$$

9.9. Индуктивтікті есептеу. Коаксиальді кабель радиусы a ішкі тұтас өткізгіштен және радиусы b сыртқы жұқа қабырғалы түтіктен тұрады. Ішкі өткізгіш қимасының бойымен токтың таралуы біркелкі деп есептеп, кабельдің бірлік ұзындығының индуктивтігін табу керек. Магнит өтімділік барлық жерде бірге тең.

Шешімі. Берілген жағдайда ішкі өткізгіш жұқа емес, сондықтан индуктивтікті магнит ағыны арқылы емес, энергетикалық жолмен табу керек. (9.33)-ке сәйкес

$$L_{\text{бірл}} = \frac{1}{I^2} \int_0^b \frac{B^2}{\mu_0} 2\pi r \, dr, \quad (1)$$

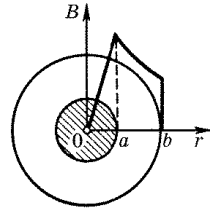
мұндағы, r – кабель осіне дейінгі қашықтық. Бұл интегралды есептеп табу үшін, $B(r)$ тәуелділікті табу керек. Циркуляция туралы теореманың көмегімен мыналарды аламыз:

$$B_{r < a} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} r, \quad B_{a < r < b} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{r}, \quad B_{r > b} = 0. \quad (2)$$

Бұл тәуелділіктердің графиктік түрі 9.24-суретте көрсетілген. (2)-ні ескерсек, (1) интегралы екі бөлікке бөлінеді де, интегралдау нәтижесінде мынаны аламыз:

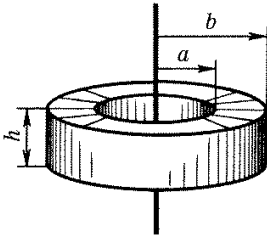
$$L_{\text{бірл}} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left(\frac{1}{4} + \ln \frac{b}{a} \right).$$

Осы шаманы $L_{\text{бірл}} = \Phi_{\text{бірл}}/I$ формуласы бойынша магнит ағыны арқылы анықтау басқа – қате нәтижеге әкелетінін еске саламыз, атап айтқанда, дөңгелек жақша ішіндегі $1/4$ -дің орнына $1/2$ алынады. Неғұрлым орталық сым жіңішке, яғни b/a қатынасы үлкен болса, соғұрлым екі тәсілмен: энергетикалық және ағын арқылы есептеудің нәтижелеріндегі салыстырмалы айырмашылық аз болады.



9.24-сурет

- 9.10. Өзара индукция.** Тороидты катушка және оның симметрия осінен өтетін ұзын түзу сым берілген. Катушканың қимасы тікбұрышты, оның өлшемдері 9.25-суретте көрсетілген. Катушканың орам саны N , қоршаған ортаның магнит өтімділігі бірге тең. Егер түзу сым бойымен $I = I_m \cos \omega t$ айнымалы ток өтетін болса, осы катушкада индукцияланатын э.к.к. амплитудасын табу керек.



9.25-сурет

Шешімі. Ізделініп отырған э.к.к. $\mathcal{E}_i = -d\Phi/dt$, мұндағы, $\Phi = N\Phi_1$, Φ_1 – катушканың көлденең қимасы арқылы

өтетін магнит ағыны:

$$\Phi_1 = \int B_n dS = \int_a^b \frac{\mu_0}{2\pi r} I h dr = \frac{\mu_0 h I}{2\pi} \ln \frac{b}{a},$$

мұндағы, B_n $\mathbf{B}$ векторының циркуляциясы туралы теорема көмегімен анықталады. Φ_1 -ден уақыт бойынша туынды алып, алынған нәтижені N -ге көбейтіп, индукция э.к.к.-нің амплитудасы үшін келесі өрнекті аламыз:

$$\mathcal{E}_{im} = \frac{\mu_0 h \omega I_m N}{2\pi} \ln \frac{b}{a}.$$

- 9.11. Өзара индуктивтікті есептеу.** Ұзындығы бірдей және іс жүзінде қимасы бірдей екі соленоид толығымен бірінің ішіне бірі салынған. Соленоидтардың индуктивтіктері L_1 және L_2 . Жиіктік эффектiлердi ескермей, олардың өзара индуктивтігін табу керек (модулі бойынша).

Шешімі. Анықтама бойынша өзара индуктивтік:

$$L_{12} = \Phi_1/I_2, \quad (1)$$

мұндағы, Φ_1 – 2-ші соленоидтан I_2 ток өткенде, 1-ші соленоидтың барлық орамдары арқылы өтетін толық магнит ағыны. Ағын $\Phi_1 = N_1 B_2 S$, мұндағы N_1 – 1-соленоидтағы орамдар саны, S – соленоид қимасы, $B_2 = \mu_0 n_2 I_2$. Сондықтан (1) формуланы былай қайта жазуға болады (I_2 -ге қысқартқаннан кейін):

$$|L_{12}| = \mu_0 n_2 N_1 S = \mu_0 n_1 n_2 V, \quad (2)$$

мұнда, $N_1 = n_1 l$ екені ескерілген, l – соленоидтың ұзындығы және $lS = V$ – оның көлемі. (2) өрнегін L_1 және L_2 арқылы төмендегідей беруге болады:

$$|L_{12}| = \sqrt{\mu_0 n_1^2 V} \sqrt{\mu_0 n_2^2 V} = \sqrt{L_1 L_2}.$$

Бұл өрнектің $|L_{12}|$ -нің шектік (максимал) мәнін анықтайтынын еске саламыз, жалпы алғанда $|L_{12}| < \sqrt{L_1 L_2}$.

9.12. Өзаралық теоремасы. Радиусы a , N орамнан тұратын жіңішке катушканың центрінде кішкентай цилиндрлік M магнит орналасқан (9.26-сурет). Катушка баллистикалық G гальванометрге қосылған. Тізбектің кедергісі R . Магнитті катушкадан шапшаң шығарып алғаннан кейін, гальванометр арқылы q заряд өтеді. Магниттің магниттік моментін табу керек.



9.26-сурет

Шешімі. Магнитті шығарып алу процесінде катушка арқылы өтетін толық магнит ағыны өзгерді және онда төмендегі теңдеумен анықталатын индукциялық ток пайда болды:

$$RI = -\frac{d\Phi}{dt} - L \frac{dI}{dt}.$$

Осы теңдеудің екі жағын dt -ға көбейтеміз және $I dt = dq$ екенін ескереміз, онда

$$R dq = -d\Phi - L dI.$$

Соңғы өрнекті интегралдап, $Rq = -\Delta\Phi - L\Delta I$ -ды аламыз. Енді $\Delta I = 0$ екеніне назар аударамыз (процестің басында, сондай-ақ соңында да ток нөлге тең болды), сондықтан

$$q = \Delta\Phi / R = \Phi / R, \quad (1)$$

мұндағы, Φ – процесс басында катушка арқылы өткен магнит ағыны (минус таңбасын алып тастадық – ол мәнді емес).

Сонымен есеп катушка арқылы өтетін Φ ағынды анықтауға келіп тіреледі. Бұл шаманы біз тікелей анықтай алмаймыз. Алайда бұл қиындықты өзаралық теориясын пайдаланып жеңуге болады. Магнитті ойша қоршаған кеңістікте магниттіктей өріс туғызатын тогы бар кішкентай ораммен алмастырамыз. Егер орамның ауданы S және ондағы ток I болса, онда олардың көбейтіндісі магниттің p_m магниттік моментіне тең болуы керек: $p_m = IS$. Өзаралық теоремасы бойынша $L_{12}I = L_{21}I$ және сұрақ орамның S ауданы арқылы өтетін магнит ағынын табуға келіп тіреледі, ол сондай, бірақ катушкадан өтетін I токты туғызады. Орам шегінде өрісті біртекті деп есептеп, мынаны аламыз:

$$\Phi = BS = \mu_0 NIS/2a. \quad (2)$$

(2)-ні (1)-ге қою және $IS = p_m$ екенін еске түсіру қалды. Онда $q = \mu_0 Np_m/2aR$ және

$$p_m = 2aRq/\mu_0 N.$$

Максвелл теңдеулері. Электромагниттік өрістің энергиясы



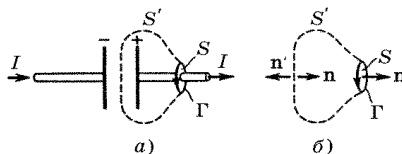
§ 10.1. Ығысу тогы

Максвелл ашқан жаңалық. Негізін Фарадей қалаған электромагниттік өріс теориясын математикалық тұрғыдан Максвелл аяқтады. Максвелл алға тартқан маңызды жаңа идеялардың бірі – электр және магнит өрістерінің өзара тәуелділігінің симметриясы жөніндегі пікір болды. Атап айтқанда уақыт өтуімен өзгеретін магнит өрісі ($\partial \mathbf{B}/\partial t$) электр өрісін туғызатын болса, уақыт өтуімен өзгеретін электр өрісі ($\partial \mathbf{E}/\partial t$) магнит өрісін туғызады.

Мәнісі жағынан жаңа индукция құбылысының болу қажеттігі идеясына мысалы келесі пайымдаулар жолымен келуге болады. $\mathbf{H}$ векторының циркуляциясы жөніндегі теоремаға сәйкес

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int \mathbf{j} d\mathbf{S}. \quad (10.1)$$

Осы теореманы алдынала зарядталған жазық конденсатордың қайсыбір сыртқы кедергі арқылы разрядталатын жағдайы үшін қолданайық (10.1 а-сурет). Γ контур үшін сымды орап жатқан қисықты аламыз. Γ контурға әртүрлі, мысалы S және S' беттерді керуге болады. Екі беттің де «құқы тең», алайда S бет арқылы I ток жүреді, ал S' бет арқылы ешқандай ток жүрмейді.



10.1-сурет

H векторының циркуляциясы берілген контурға қандай бетті керетіндігімізге тәуелді болып шығады (?!), бұл ашықтан-ашық мүмкін емес (тұрақты ток жағдайында мұндай болған жоқ).

Мұндай ыңғайсыздықтан құтылу үшін (10.1)-дің оң жақ бөлігін өзгертуге болмас па екен? Болады екен, міне былайша.

Алдымен байқайтынымыз сол, S' бетті тек электр өрісі «қиып өтеді». Гаусс теоремасы бойынша тұйық бет арқылы **D** векторының ағыны $\oint \mathbf{D} d\mathbf{S} = q$, осыдан

$$\oint \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} d\mathbf{S} = \frac{\partial q}{\partial t}. \quad (10.2)$$

Екінші жағынан (5.4) үздіксіздік теңдеуіне сәйкес

$$\oint \mathbf{j} d\mathbf{S} = -\frac{\partial q}{\partial t}. \quad (10.3)$$

(10.2) және (10.3) теңдеулерінің оң және сол жақтарын жеке-жеке бөліп, мынаны аламыз:

$$\oint \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) d\mathbf{S} = 0. \quad (10.4)$$

Бұл теңдеу тұрақты токқа арналған үздіксіздік теңдеуіне баламалы. Одан **j** өткізгіштік ток тығыздығынан басқа, өлшемділігі ток тығыздығының өлшемділігіне тең тағы бір $\partial \mathbf{D} / \partial t$ қосылғыш бар екені көрініп тұр. Максвелл бұл қосылғышты **ығысу тогының** тығыздығы деп атады:

$$\boxed{\mathbf{j}_{\text{ыф}} = \partial \mathbf{D} / \partial t}. \quad (10.5)$$

Өткізгіштік ток пен ығысу тогының тығыздығының қосындысы **толық ток** деп аталады. Оның тығыздығы

$$\mathbf{j}_{\text{тол}} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (10.6)$$

(10.4)-ке сәйкес өткізгіштік ток сызықтарынан өзгешелігі, толық ток сызықтары үздіксіз болады. Егер өткізгіштік ток тұйық болмаса, ығысу тогымен тұйықталады.

Біз қазір толық токты енгізу $\mathbf{H}$ векторының циркуляциясының Γ контурға керілген бетті таңдауға тәуелділігіне байланысты болатын қиындықты жоятынына көз жеткіземіз. Бұл үшін (10.1) теңдеуінің оң жағындағы өткізгіштік ток орнына толық токты, яғни мына шаманы енгізсе болады екен:

$$\mathbf{j}_{\text{тол}} = \int \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) d\mathbf{S}. \quad (10.7)$$

Іс жүзінде (10.7)-нің оң жағы I – өткізгіштік тогы мен $I_{\text{ығ}}$ ығысу тогының қосындысы болып табылады. $I_{\text{тол}} = I + I_{\text{ығ}}$. I толық ток бір Γ контурына керілген S бет үшін де, S' бет үшін де бірдей болатынын көрсетейік. Бұл үшін (10.4)-ті S және S' беттен туратын тұйық бетке қолданамыз (10.1, б-сурет). Тұйық бет үшін $\mathbf{n}$ нормалы сыртқа бағытталғандығын ескеріп, мынаны жазамыз:

$$I_{\text{тол}}(S') + I_{\text{тол}}(S) = 0.$$

Енді егер S' беттің $\mathbf{n}'$ нормалін S -тікіндей жаққа бұрса, онда соңғы теңдеудегі бірінші қосылғыш таңбасын өзгертеді де, біз мынаны аламыз:

$$I_{\text{тол}}(S') = I_{\text{тол}}(S),$$

дәлелдеу керегі де осы еді. Сонымен, тұрақты токтар үшін тағайындалған $\mathbf{H}$ векторының циркуляциясы жөніндегі теореманы қалауымызша алынған жағдай үшін жинақтап қорытуға және былай жазуға болады:

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) d\mathbf{S}. \quad (10.8)$$

Осы түрдегі $\mathbf{H}$ векторының циркуляциясы жөніндегі теорема әрқашанда дұрыс, мұның дәлелі бұл теңдеудің барлық жағдайларда тәжірибе нәтижелерімен сәйкес келуі болып табылады **(10.8) теңдеудің дифференциалдық түрі**

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (10.9)$$

яғни, $\mathbf{H}$ векторының роторы $\mathbf{j}$ өткізгіштік токтың және сол нүктедегі $\partial \mathbf{D} / \partial t$ ығысу тогының тығыздығымен анықталады.

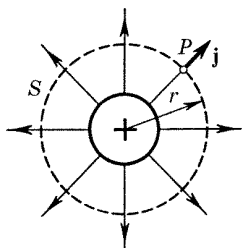
Ығысу тогы туралы бірнеше ескертпелер. Ығысу тогы тек магнит өрісін туғызу қабілетіне қатысты ғана өткізгіштік токқа эквивалентті екенін ескерту керек. Ығысу токтары қай жерде уақыт өтуімен электр өрісі өзгерсе, тек сол жерде болады. Диэлектриктерде ығысу тогы мәні жағынан әртүрлі екі қосылғыштан тұрады. Вектор $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ болғандықтан, осыдан ығысу тогының тығыздығы $\partial \mathbf{E} / \partial t$ «нағыз» ығысу тогы мен байланысқан зарядтардың қозғалысынан болатын шама – $\partial \mathbf{P} / \partial t$ *полярлану тогының* қосылуынан болады. Полярлану токтарының магнит өрісін туғызатындығында ешқандай оқыстық жоқ, өйткені бұл токтардың табиғаты жағынан өткізгіштік токтардан айырмашылығы жоқ. Принципі жаңалық зарядтардың ешқандай да қозғалысымен байланысты емес, тек электр өрісінің өзгерісінен болатын ығысу тогының екінші бөлігі де ($\varepsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$) магнит өрісін туғызады деген ұйғарымда жатыр. Тіпті вакуумда да уақыт өтуімен болатын электр өрісінің өзгерісі қоршаған ортада магнит өрісін туғызады.

Бұл құбылыстың ашылуы – электромагниттік өріс теориясын құруда, Максвелл жасаған анағұрлым мәнді және шешуші қадам болды. Бұл жаңалық толығымен электромагниттік индукцияның ашылуына баламалы, оған сәйкес айнымалы магнит өрісі құйынды электр өрісін туғызады.

Сондай-ақ, Максвелдің ығысу тогын ашуы – нағыз теориялық, оған қоса аса маңызды жаңалық екенін атап айту керек.

Ығысу токтары білінетін мысалды қарастырайық.

Мысал. Шектеусіз біртекті өткізгіш ортада оң электр заряды берілген



10.2-сурет

металл шар орналасқан (10.2-сурет). Радиал бағыттарда жүретін электр токтары магнит өрісін қоздыруы керек. Қалауымызша алынған P нүктеде $\mathbf{B}$ векторы қайда қайда бағытталғанын анықтайық.

Бәрінен бұрын $\mathbf{B}$ векторының радиал құраушысы болмайтыны анық. Егер бұлай болмаған болса, сфераның S беті арқылы өтетін $\mathbf{B}$ векторының ағыны нөлден өзгеше болар еді, бұл (7.2) теңдеуіне қайшы келеді. Демек $\mathbf{B}$ векторы P нүктесінде радиал

бағытқа перпендикуляр болуы керек. Бірақ бұл да мүмкін емес, өйткені радиалға перпендикуляр барлық бағыттар толық тең құқылы, олардың ешқандай ерекшелігі жоқ. Жалғыз қалатыны – магнит өрісі барлық жерде нөлге тең.

Тығыздығы $\mathbf{j}$ электр тогы барда магнит өрісінің болмауы, жүйеде $\mathbf{j}$ өткізгіштік токтан басқа, толық ток барлық жерде нөлге тең болатындай $\mathbf{j}$ ығысу тогы да бар екенін білдіртеді, яғни әрбір нүктеде $\mathbf{j}_{\text{ығ}} = -\mathbf{j}$. Немесе

$$j_{\text{ығ}} = j = \frac{\dot{q}}{4\pi r^2} \frac{\partial D}{\partial t},$$

мұнда, Гаусс теоремасына сәйкес $D = q/4\pi r^2$ екендігі ескерілген.

§ 10.2. Максвелл теңдеулерінің жүйесі

Интегралдық түрдегі Максвелл теңдеулері. Ығысу тогының енгізілуімен электромагниттік өрістің макроскопиялық теориясы тамаша аяқталады. Ығысу тогының $(\partial \mathbf{D}/\partial t)$ ашылуы Максвелге электрлік және магниттік құбылыстардың біртұтас теориясын жасауға мүмкіндік берді. Максвелл теориясы электр және магнетизмнің барлық жекеленген құбылыстарын түсіндіріп қана қоймай (біртұтас көзқараста), бар екені кейін дәлелденген бірқатар жаңа құбылыстарды алдын ала болжады.

Біз осы уақытқа дейін осы теорияның жеке бөліктерін қарастырдық. Енді осыны *қозғалмайтын орталардағы Максвелл теңдеулері* деп аталатын электродинамиканың фундаментальды теңдеулерінің жүйесі түрінде бере аламыз. Бұл теңдеулер төртеу (олардың әрқайсысымен жеке-жеке алдыңғы бөлімдерде таныстық, ал қазір олардың бәрін бірге жинақтаймыз). Максвелл теңдеулерінің интегралдық түрі төмендегідей болады:

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S}, \quad \oint \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0, \quad (10.10)$$

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) d\mathbf{S}, \quad \oint \mathbf{D} d\mathbf{S} = \int \rho dV, \quad (10.11)$$

мұндағы, ρ – бөгде зарядтардың көлемдік тығыздығы, $\mathbf{j}$ – өткізгіштік токтың тығыздығы.

Қысқа түрдегі бұл теңдеулер электромагниттік өріс жөніндегі біздің мәліметтеріміздің барлық жиынтығын береді. Бұл теңдеулердің мазмұны төмендегідей.

1. **E** векторының кез келген тұйық контур бойындағы циркуляциясы берілген контурмен шектелген кез келген бет арқылы өтетін магнит ағынының теріс таңбамен алынған уақыт бойынша туындысына тең. Мұнда **E**-ні тек құйынды электр өрісі емес, электростатикалық өріс деп те түсінеді (соңғысының циркуляциясы белгілі болғандай, нөлге тең).

2. **B** векторының қалауымызша алынған бет арқылы ағыны әрқашанда нөлге тең

3. **H** векторының кез келген тұйық контур бойымен циркуляциясы берілген контурмен шектелген қалауымызша алынған бет арқылы, өтетін толық токқа тең (өткізгіштік ток пен ығысу тогы).

4. Кез келген тұйық бет арқылы өтетін **D** векторының ағыны осы бет қармайтын бөгде зарядтардың алгебралық қсындысына тең.

E және **H** векторларының циркуляциясына арналған Максвелл теңдеулерінен, электр және магнит өрістерін тәуелсіз деп қарастыруға болмайтындығы шығады: осы өрістердің бірінің уақыт өтуімен өзгерісі екіншісінің пайда болуына әкеледі.

Сондықтан біртұтас электромагниттік өрісті сипаттайтын осы өрістердің жиынтығының ғана мағынасы бар.

Егер өрістер стационар болса (**E** = const және **B** = const), онда Максвелл теңдеулері тәуелсіз теңдеулердің екі тобына бөлінеді:

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0, \quad \oint \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0, \quad (10.12)$$
$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = 0, \quad \oint \mathbf{D} d\mathbf{S} = 0.$$

Бұл жағдайда электр және магнит өрістері бір-біріне тәуелсіз, бұл бізге алдымен тұрақты электр өрісін ал содан кейін оған тәуелсіз тұрақты магнит өрісін оқып білуге мүмкіндік берді.

Бізді Максвелл теңдеулеріне әкелген пайымдаулар, ешқашанда оларды дәлелдеуге күш салмайтынын баса айту керек.

Бұл теңдеулерді қорытуға болмайды, олар тәжірибе фактыларын қорытудан алынған электродинамика аксиомалары. Бұл постулаттар электродинамикада классикалық механикадағы Ньютон заңдарындай, не термодинамика бастамаларындай роль атқарады.

Дифференциалдық түрдегі Максвелл теңдеулері. (10.10) және (10.11) теңдеулерін дифференциалдық түрде, яғни дифференциалдық теңдеулер жүйесі түрінде беруге болады, атап айтқанда:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (10.13)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho. \quad (10.14)$$

Бұл теңдеулер электр өрісінің екі себептен пайда болатынын білдіреді. Біріншіден оның негізі бөгде, сол сияқты байланысқан электр зарядтары болып табылады. Бұл $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ теңдеуінен шығады, егер $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ және $\nabla \cdot \mathbf{P} = -\rho'$ екенін ескерсек, $\nabla \cdot \mathbf{E} \propto (\rho + \rho')$. Екіншіден, магнит өрісі уақыт өтуімен өзгергенде, әрқашан $\mathbf{E}$ пайда болады. (Фарадейдің электромагниттік индукция заңының өрнегі).

Бұл теңдеулер $\mathbf{B}$ магнит өрісін не қозғалыстағы электр зарядтары (электр токтары), не айнаымалы электр өрістері, не екеуі де бір мезгілде тудыратынын білдіреді.

Егер $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{J}$ және $\nabla \times \mathbf{J} = \mathbf{j}'$ екенін ескерсек, бұл $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \partial \mathbf{D}/\partial t$ теңдеуінен шығады, онда $\nabla \times \mathbf{B} \propto (\mathbf{j} + \mathbf{j}' + \partial \mathbf{P}/\partial t + \epsilon_0 \partial \mathbf{E}/\partial t)$, мұндағы, $\mathbf{j}'$ – магниттелу тогының тығыздығы, $\partial \mathbf{P}/\partial t$ – полярлану тогының тығыздығы.

Алдыңғы үш ток зарядтар қозғалысымен, соңғы ток – уақыт өтуімен өзгертін $\mathbf{E}$ өрісімен байланысты. Электр зарядтары сияқты магнит өрісінің ешқандай көздері (баламалы түрде оларды магниттік зарядар деп атайды) табиғатта жоқ, бұл $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ теңдеуінен шығады.

Дифференциалдық түрдегі Максвелл теңдеулерінің маңызы тек олардың электромагниттік өрістің негізгі заңдарын өрнектейтіндігі ғана емес, оларды шешу жолымен (интегралдау) **E** және **B** өрістерін табуға болатындығында.

Дифференциалдық түрдегі Максвелл теңдеулері

$$dp/dt = qE + q[vB]. \quad (10.15)$$

Лоренц күшінің әсерінен болатын зарядталған бөлшектер қозғалысының теңдеуімен бірге теңдеулердің фундаментальды жүйесін құрайды. Түптеп келгенде бұл жүйе кванттық эффект білінбейтін барлық электромагниттік құбылыстарды сипаттау үшін жеткілікті.

Шекаралық шарттар. Интегралдық түрдегі Максвелл теңдеулері дифференциалдық теңдеулерге карағанда жоғары жалпылыққа ие, өйткені олар *үздік беттері* орта мен өрістердің қасиеттері секіrmелі түрде өзгеретін беттер бар болғанда да дұрыс. Дифференциаладық түрдегі Максвелл теңдеулері барлық шамалар кеңістікте және уақыт бойынша үздіксіз өзгереді деп болжайды.

Алайда оны екі ортаны бөліп тұрған шекарадағы электромагниттік өріс қанағатандыратын **шекаралық шарттармен** толықтырса, теңдеулердің дифференциалдық түрі үшін де осындай жалпылыққа қол жеткізуге болады. Бұл шарттар Максвелдің интегралдық түрдегі теңдеулерінде бар және өзімізге бұрыннан таныс түрде болады:

$$D_{1n} = D_{2n}, \quad E_{1\tau} = E_{2\tau}, \quad B_{1n} = B_{2n}, \quad H_{1\tau} = H_{2\tau} \quad (10.16)$$

(мұнда бірінші және соңғы шарттар бөліп тұрған шекарада бөгде зарядтар да, өткізгіштік тоқтарда болмайтын жағдайларға қатысты). Сондай-ақ, келтірілген шекаралық шарттар тұрақты да, айнымалы да өрістер үшін дұрыс екенін еске саламыз.

Материалдық теңдеулер. Максвеллдің фундаменталдық теңдеулері әлі де электромагниттік өріс теңдеулерінің толық жүйесі емес. Зарядтар мен токтардың берілген таралуы бойынша өрістерді табу үшін, бұл теңдеулер жеткіліксіз.

Максвелл теңдеулерін ортаның өзіндік қасиеттерін сипаттайтын шамалар кіретін қатыстармен толықтыру керек. Бұл қатыстар **материалдық теңдеулер** деп аталады. Жалпы айтқанда

бұл теңдеулер жеткілікті күрделі және Максвелл теңдеулеріне тән жалпылық пен фундаменталдыққа ие емес.

Материалдық теңдеулер кеңістікте және уақыт ішінде салыстырмалы баяу өзгеретін жеткілікті әлсіз электромагниттік өрістер жағдайында анағұрлым қарапайым. Бұл жағдайда сегнетоэлектриктер мен ферромагнетиктер жоқ изотропты орталарда материалдық теңдеулердің түрі төмендегідей болады (ол бізге бұрынан белгілі):

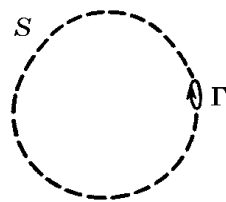
$$\mathbf{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H}, \quad \mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*), \quad (10.17)$$

мұндағы, ε , μ , σ – ортаның электрлік және магниттік қасиеттерін сипаттайтын бізге белгілі тұрақтылар (диэлектрик өтімділік және магнит өтімділік, өткізгіштік), $\mathbf{E}^*$ – химиялық және жылулық процестерден болатын бөгде күштер өрісінің кернеулігі.

§ 10.3. Максвелл теңдеулерінің қасиеттері

Максвелл теңдеулері сызықтық: оған тек $\mathbf{E}$ және $\mathbf{B}$ өрістердің уақыт және кеңістік координаталары бойынша бірінші туындылары және электр зарядтарының ρ және токтардың $\mathbf{j}$ тығыздықтарының бірінші дәрежелері кіреді. Максвелл теңдеулерінің сызықтық қасиеті тікелей суперпозиция принципімен байланысты: егер қандай да бір екі өріс Максвелл теңдеулерін қанағаттандырса, онда бұл осы өрістердің қосындысына да қатысты болады.

Максвелл теңдеулеріне, электр зарядының сақталу заңын өрнектейтін **үздіксіздік теңдеуі кіреді.** Бұған көз жеткізу үшін шексіз аз Γ контурды аламыз, оған қалауымызша алынған шектеулі S бетті кереміз де (10.3-сурет), содан кейін S бетті шеті етіп қалдырып, контурды нүктеге дейін жеткіземіз.



10.3-сурет

Шегінде $\oint \mathbf{H} d\mathbf{l}$ циркуляция нөлге айналады, S бет тұйықталады, (10.11) теңдеулердің біріншісі мынаған өтеді:

$$\oint \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) d\mathbf{S} = 0.$$

Осыдан шығатыны:

$$\oint \mathbf{j} d\mathbf{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \oint \mathbf{D} d\mathbf{S} = -\frac{\partial q}{\partial t},$$

бұл басқа емес, (5.4) үздіксіздік теңдеуі, ол V көлемінен S тұйық бет арқылы шығатын ток осы V көлем ішіндегі зарядтың бірлік уақыттағы кемуіне тең екенін растайды.

Сол заңды (үздіксіздік теңдеуі) Максвеллдің дифференциалдық теңдеулерінен де алуға болады. (10.14) теңдеулерінің біріншісінің екі жағынан да дивергенция алып, (10.14) теңдеулердің екіншісін пайдаланса жеткілікті, $\nabla \cdot \mathbf{j} = -\partial \rho / \partial t$ -ны аламыз.

Максвелл теңдеулері барлық инерциялық санақ жүйелерінде орындалады. Олар релятивистік инвариантты болып табылады. Бұл салыстырмалылық принципінің салдары, оған сәйкес барлық инерциялық санақ жүйелері бір-біріне физикалық эквивалентті Максвеллдің теңдеулерінің инварианттылығы фактысы (Лоренц түрлендірулеріне қатысты) көптеген тәжірибе мәліметтерімен дәлелденеді. Максвелл теңдеулерінің түрі бір инерциялық санақ жүйесінен екіншісіне өткенде өзгермейді, бірақ оған кіретін шамалар белгілі бір ережелер бойынша түрленеді. Сол кезде $\mathbf{E}$ және $\mathbf{B}$ векторларының қалай түрленетінін біз 8-тарауда анықтадық.

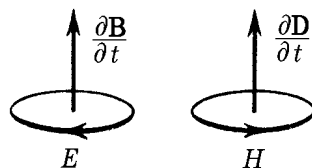
Сонымен, Максвелл теңдеулерінің Ньютон механикасы теңдеулерінен айырмашылығы, дұрыс релятивистік теңдеулер болып табылады.

Максвелл теңдеулерінің симметриясы жөнінде. Максвелл теңдеулері электр және магнит өрістеріне қатысты симметриялы емес. Бұл тағы да сол, табиғатта электр зарядының барлығынан, ал магниттік зарядтың жоқтығынан (осы кезде қаншалықты белгілі болғандай). Сонымен бірге $\rho = 0$ және $\mathbf{j} = 0$ нейтраль біртекті ортада Максвелл теңдеулері симметриялық түрге ие болады, яғни $\mathbf{B}$ $\partial \mathbf{E} / \partial t$ мен байланысты болғандай $\mathbf{E}$ $\partial \mathbf{B} / \partial t$ мен байланысты:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\partial \mathbf{B} / \partial t, & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{j} + \partial \mathbf{D} / \partial t, & \nabla \cdot \mathbf{D} &= 0. \end{aligned} \tag{10.18}$$

Электр және магнит өрістеріне қатысты теңдеулер симметриясының тек $\partial \mathbf{B} / \partial t$ және $\partial \mathbf{E} / \partial t$ туындыларының

алдындағы таңбаға ғана қатысы жоқ. Осы туындылар алдындағы таңбалардың айырмашылығының болуы, $\mathbf{B}$ өрістің өзгерісінен индукцияланған күйінді электр өрісінің $\partial\mathbf{B}/\partial t$ векторы-мен сол винттік жүйе жасайтындығын, ал сол кезде $\mathbf{D}$ өзгерісінен индукцияланған магнит өрісі сызықтарының $\partial\mathbf{D}/\partial t$ векторы-мен оң винттік жүйе жасайтындығын көрсетеді.



10.4-сурет

Электромагниттік толқындар жөнінде. Максвелл теңдеулерінен принципті жаңа физикалық құбылыс бар екендігі жөнінде маңызды қорытынды шығады: электромагниттік өріс электр зарядтарынсыз және токтарсыз өз бетінше өмір сүруге қабілетті. Бұл кезде оның күйінің өзгеруі міндетті түрде толқындық сипатқа ие болады. Осы тектес өрістер **электромагниттік толқындар** деп аталады. Вакуумда олар әрқашан c жарық жылдамдығына тең жылдамдықпен таралады.

Сондай-ақ осы құбылыста ығысу тогының ($\partial\mathbf{D}/\partial t$) бірінші дәрежелі орын алатындығы анықталды. Әрі оның $\partial\mathbf{B}/\partial t$ шамасымен қатар болуы электромагниттік толқынның пайда болу мүмкіншілігін білдіреді. Уақыт өтуімен магнит өрісінің кез келген өзгерісі электр өрісін қоздырады, ал электр өрісінің өзгерісі, өз кезегінде магнит өрісін қоздырады. Үздіксіз өзара түрленудің, немесе өзара әсердің есебінен олар сақталуы тиіс – электромагниттік ұйытқулар кеңістікте таралады.

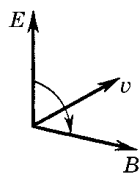
Максвелл теориясы тек электромагниттік толқынның болу мүмкіндігін болжап қана қойған жоқ, оның барлық негізгі қасиеттерін де тағайындауға мүмкіндік берді, атап айтқанда: кез келген электромагниттік толқын оның нақты түріне тәуелсіз (бұл гармониялық толқын не кез келген түрдегі электромагниттің ұйытқу бола алады) төмендегідей жалпы қасиеттерімен сипатталады:

1) өткізбейтін нейтраль ферромагнитті емес ортада оның таралу жылдамдығы

$$v = c/\sqrt{\varepsilon\mu}, \quad (10.19)$$

мұндағы, $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$;

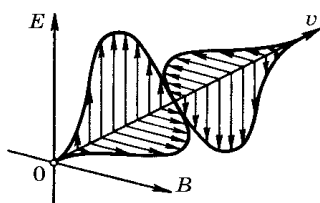
2) $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ және $\mathbf{v}$ (толқын жылдамдығы) векторлары *өзара перпендикуляр және оң винттік жүйе* құрайды (10.5-сурет). Мұндай оң винттік қатыс ешқандай координаталық жүйеге тәуелді болмайтын электромагниттік толқынның *ішкі қасиеті* болып табылады.



10.5-сурет

3) Электромагниттік толқында $\mathbf{E}$ және $\mathbf{B}$ векторлары бірдей фазаларда тербеледі (10.6-сурет, онда толқынның лездік фотографиясы көрсетілген), бұған қоса кез келген нүктеде E және B -ның лездік мәндерінің арасында белгілі бір байланыс бар, атап айтқанда $E = vB$, немесе

$$\sqrt{\epsilon\epsilon_0}E = \sqrt{\mu\mu_0}H. \quad (10.20)$$



10.6-сурет

Демек, E және H (немесе B) бір мезгілде максимумға жетеді, бір мезгілде нөлге айналады және т.б.

(10.18) дифференциалдық теңдеулерден электромагниттік толқындардың бар болу мүмкіндігі шығатындығын ұғылу Максвеллге жарықтың электромагниттік теориясын тамаша табыспен дамытуына

мүмкіндік берді.

§ 10.4. Энергия және энергия ағыны. Пойнтинг векторы

Пойнтинг теоремасы. Егер қандай да бір аймақта энергия азаятын болса, онда бұл қарастырылып отырған аймақ шекарасы арқылы оның «шығып кетуі» есебінен болатынын біз өрістің өзіндегі энергияның локальденуі жөніндегі түсініктен және энергияның сақталу принципін басшылыққа ала отырып, пайымдауға тиіспіз.

Осы тұрғыда зарядтың сақталу заңы (5.4) теңдеумен формальды ұқсастықта болады. Бұл заңның мағынасы сол, берілген көлемдегі зарядтың бірлік уақыттағы кемуі осы көлемді қармап тұрған бет арқылы өтетін $\mathbf{j}$ векторының ағынына тең.

Энергияның сақталу заңы жағдайында да берілген аймақта тек ω энергия тығыздығы емес, *энергия ағыны тығыздығын* сипаттайтын қайсыбір Π векторы да болады деп санау керек.

Егер тек электромагниттік өріс энергиясы туралы айтатын болсақ, онда оның берілген көлемдегі толық энергиясы оның көлемнен шығып кетуі есебінен да, сондай-ақ өрістің өз энергиясын затқа (зарядталған бөлшектерге) беруі есебінен де өзгереді, яғни затпен жұмыс жасайды. Макроскопиялық түрде бұл ұйғарымды былай жазуға болады:

$$-\frac{dW}{dt} = \oint \Pi dS + P, \quad (10.21)$$

мұндағы, dS – бет элементі.

Бұл теңдеу **Пойнтинг теоремасын** өрнектейді: *берілген көлемде бірлік уақытта энергияның кемуі осы көлеммен шектелген бет арқылы өтетін энергия ағыны мен осы көлем ішіндегі заттың зарядтарымен өріс күштері тудыратын қуаттың қосындысына тең.*

(10.21) теңдеуінде $W = \int w dV$, w – өріс энергиясының тығыздығы, $P = \int \mathbf{j} \mathbf{E} dV$, $\mathbf{j}$ – ток тығыздығы, $\mathbf{E}$ – электр өрісінің кернеулігі, P үшін келтірілген өрнекті былай алуға болады. $\mathbf{E}$ өріс dt уақыт ішінде q нүктелік зарядпен $dA = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{u} dt$ жұмыс жасайды, мұндағы $\mathbf{u}$ – заряд жылдамдығы. Осыдан $q\mathbf{E}$ күштің қуаты $P = q\mathbf{u} \mathbf{E}$ -ге тең. Зарядтардың таралуына өтіп, q -ды ρdV -мен алмастырамыз, ρ – зарядтың көлемдік тығыздығы. Онда $dP = \rho \mathbf{u} \mathbf{E} dV = \mathbf{j} \mathbf{E} dV$. Біз қарастырып отырған көлем бойынша dP -ны интегралдау қалды. (10.21)-дегі P қуат оң да, сондай-ақ теріс те болуы мүмкін соңғысы заттағы оң зарядтар $\mathbf{E}$ өрісінің бағытына қарсы немесе теріс зарядтар қарама-қарсы бағытта қозғалған жағдайларда орын алады. Мысалы, $\mathbf{E}$ электр өрісінен басқа $\mathbf{E}^*$ бөгде күштердің өрісі де әсер ететін орта нүктелерінде осылай болады. Бұл нүктелерде $\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*)$, егер $\mathbf{E}^* \uparrow \mathbf{E}$ және модулі бойынша $\mathbf{E}^* > E$ болса, онда P өрнегіндегі $\mathbf{j} \mathbf{E}$ теріс болады.

Максвелл теңдеулерін пайдаланып, Пойнтинг w энергия тығыздығының және Π векторының өрнегін алды (бұл қорытуды біз келтірмейміз). Егер ортада сегнетоэлектриктер және ферромагнетиктер болмаса (яғни гистерезис құбылысы болмаса), онда электромагниттік өрістің энергия тығыздығы

$$w = \frac{ED}{2} + \frac{BH}{2}. \quad (10.22)$$

Бұл өрнектің жеке құраушыларын біз бұрын алғанымызды еске саламыз [(4.10) және (9.32)]-ні қараңыз.

Электромагниттік өріс энергиясының тығыздығы – **Пойнтинг векторы** деп аталатын **П** векторы мына түрде анықталады:

$$\boxed{\mathbf{P} = [\mathbf{EH}].} \quad (10.23)$$

Қатаң түрде айтқанда, Максвелл теңдеулерінен ω және **П** екі шаманың бір мәнді өрнектерін алуға болмайды; келтірілген өрнектер мүмкін боларлық шексіз сандар ішіндегі ең қарапайымдары болып табылады. Сондықтан біз бұл өрнектерді постулаттар ретінде қарастыруымыз керек, олардың дұрыстығы, олардан алынатын салдардың тәжірибеге сәйкес келуімен дәлелденуі тиіс.

Соңғы екі формулалар көмегімен алынған нәтижелер кейде әдеттен тыс көрінгенмен, оларда сенбестіктей бірдеме, тәжірибемен қандай-да бір қайшылықтар табылмайтынын бірнеше мысалдардан көреміз. Ал, бұл екі өрнектің дұрыс екенінің айғағы болып табылады.

1-мысал. Электромагниттік толқындағы энергия ағыны (вакуумдағы).

Толқынның таралу бағытына перпендикуляр бірлік ауданнан dt уақыт ішінде өтетін dW энергияны есептейік.

Егер осы ауданша тұрған орында **E** және **B**-ның мәндері белгілі болса, онда

$$dW = wcdt,$$

мұндағы, w – энергия тығыздығы, $w = \epsilon_0 E^2/2 + \mu_0 H^2/2$ (10.20)-ға сәйкес электромагниттік толқын үшін

$$\epsilon_0 E^2 = \mu_0 H^2.$$

Демек, электромагниттік толқында электр энергиясының тығыздығы кезкелген мезетте сол нүктедегі магнит энергиясының тығыздығына тең де, энергия тығыздығы үшін, былай жазамыз

$$w = \epsilon_0 E^2.$$

Онда

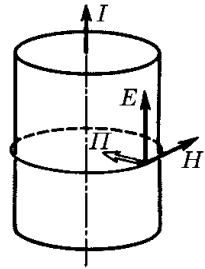
$$dW = \varepsilon_0 E^2 c dt = \sqrt{\varepsilon_0 / \mu_0} E^2 dt.$$

Пойнтинг векторын пайдалансақ, нені алатынымызды анықтайық. Осы dW шаманы Π векторының модулі арқылы былай беруге болады:

$$dW = \Pi dt = EH dt = \sqrt{\varepsilon_0 / \mu_0} E^2 dt.$$

Сонымен, w және Π -ның екі өрнегі де бірдей нәтиже берді (соңғы екі формула).

2-мысал. Өткізгіште жылудың бөлінуі. Қимасы радиусы r дөңгелек болатын түзу сым бойымен I ток жүреді делік (10.7-сурет). Сымның кедергісі болатындықтан, оның бойында қайсыбір E электр өрісі әсер етеді. Вакуумда сымның бетінде де E -нің мәні сондай болады. Сонымен қатар токтың болуы магнит өрісін туғызады. H векторын циркуляциясы жөніндегі теорема бойынша сымның бетіне жақын жерде $2\pi aH = I$, $H = I/2\pi a$. E және H векторлары Пойнтинг векторы сым ішінде оның бүйір бетіне нормаль бағытталатындай болып орналасқан. (10.7-сурет). Олай болса, электромагниттік энергия сым ішіне қоршаған кеңістіктен ағып кіреді. Алайда бұл өткізгіште бөлініп шығатын жылумен үйлесе ме? Сымның ұзындығы l бөлігінің бүйір беті арқылы өтетін электромагниттік энергия ағынын есептелік:

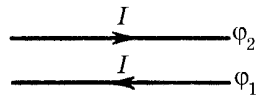


10.7-сурет

$$EH \cdot 2\pi al = 2\pi aH \cdot El = I \cdot U = RI^2,$$

мұнда, U – берілген бөлік ұштарындағы потенциалдар айырымы, R – оның кедергісі екені ескерілген. Сонымен, біз электромагниттік энергия ағыны сымға келіп, түгелімен джоульдік жылуға айналатынын көрдік. Күтпеген қорытындыға келдік.

Ток көзінде E векторы I токқа қарсы бағытылған, сондықтан ток көзі аймағында Пойнтинг векторы сыртқа бағытталғандығын еске саламыз: онда электромагниттік энергия қоршаған кеңістікке шығады, яғни энергия ток көзінен сымдардың бойымен емес, сымды қоршаған кеңістік арқылы электромагниттік энергия ағыны – Π векторының ағыны түрінде беріледі екен.



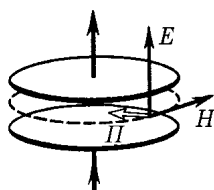
10.8-сурет

3-мысал. 10.8-суретте екі сымды желінің бөлігі

көрсетілген. Сымдардағы ток бағыты және сымдардың потенциалдары $\varphi_1 < \varphi_2$ екендігі фактысы белгілі. Пойнтинг векторы көмегімен ток көзі (генератор) қайда орналасқан, оң жақта ма, әлде сол жақта ма, соны анықтаймыз.

Біздің жағдайымызда сымдар арасында **E** векторы төмен қарай ал **H** векторы сурет жазықтығынан сыртқа бағытталған, сондықтан **P** = [**E****H**] векторы оңға қарай бағытталған, яғни ток көзі сол жақта, тұтынушы оң жақта орналасқан.

4-мысал. Конденсаторды зарядтау. Астарларының радиусы a дөңгелек



10.9-сурет

болатын жазық конденсатор алайық. Шекаралық шарттарды (өрістің шашырауы) ескермей, конденсатордың «бүйір беті» арқылы өтетін электромагниттік энергия ағынын табайық, өйткені тек сонда ғана **P** Пойнтинг векторы конденсатор ішіне бағытталған (10.9-сурет).

Бұл бетте өзгермелі **E** электр өрісі және оның өзгерісі туғызған **H** магнит өрісі бар. **H** векторының циркуляциясы туралы торемасынан $2\pi aH = \pi a^2 \partial D / \partial t$, екендігі шығады, мұнда оң жақта 10.9-суретте пунктирмен көрсетілген контур арқылы өтетін ығысу тогы тұр. Егер астарлар аракашықтығы h болса, онда бүйір бет арқылы өтетін **P** векторының ағыны

$$EH2\pi ah = E \frac{a}{2} \frac{\partial D}{\partial t} 2\pi ah = E \frac{\partial D}{\partial t} V, \quad (1)$$

мұндағы, $V = \pi a^2 h$ – конденсатор көлемі. Осы ағын түгелімен конденсатордың энергиясын арыттыруға кетеді деп есептейміз. Онда (1)-ді dt -ға көбейтіп, dt уақыттағы конденсатор энергиясының өсімшесін аламыз:

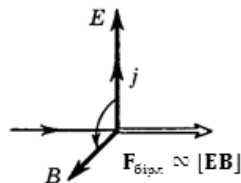
$$dW = E dD \cdot V = d\left(\frac{\varepsilon \varepsilon_0 E^2}{2} V\right) = d\left(\frac{ED}{2} V\right).$$

Осы теңдеуді интегралдап, зарядталған конденсатордың W энергиясының формуласын табамыз. Сонымен бұл жерде де бәрі дұрыс.

§ 10.5. Электромагниттік өрістің импульсы

Электромагниттік толқынның қысымы. Денелерге түскен электромагниттік толқындардың оларда шағыла, не жұтыла отырып, оларға **қысым** түсіретінін Максвелл теориялық тұрғыда көрсетті. Бұл қысым толқынның магнит өрісінің сол толқынның электр өрісі қоздыратын электр токтарына әсерінің нәтижесінде пайда болады.

Электромагниттік толқын жұтатын біртекті ортада таралатын болсын делік. Жұтылудың болуы, ортада көлемдік тығыздығы $\rho j^2 = \sigma E^2$ джоульдік жылу бөлініп шығатынын білдіреді, сондықтан да $\sigma \neq 0$, яғни жұтатын орта өткізгіштікке ие.



10.10-сурет

Толқынның электр өрісі осындай ортада тығыздығы $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ электр тогын қоздырады.

Осының салдарынан ортаның бірлік көлеміне толқынның таралу жағына қарай бағытталған тығыздығы $\mathbf{F}_{\text{бiрл}} = [\mathbf{j}\mathbf{B}] = \sigma[\mathbf{E}\mathbf{B}]$ ампер күші әсер етеді (10.10-сурет). Осы күш электромагниттік толқынның қысымын тудырады.

Жұтылу болмаса, өткізгіштік $\sigma = 0$ және $\mathbf{F}_{\text{бiрл}} = 0$, яғни бұл жағдайда электромагниттік толқын ортаға ешқандай қысым түсірмейді.

Электромагниттік өріс импульсі. Электромагниттік өріс затқа қысым түсіретіндіктен, соңғысы белгілі бір импульс алады. Егер тек зат қана импульске ие болса, зат пен электромагниттік толқыннан тұратын тұйықталған жүйеде импульстың сақталу заңының бұзылуы туындаған болар еді.

Электромагниттік өріс (толқын) импульске ие болған жағдайда ғана мұндай жүйенің импульсі сақтала алады: электромагниттік өрістің берген импульсі есебінен зат импульс алады.

Сандық жағынан бірлік көлемдегі өріс импульсына тең шама ретінде $\mathbf{G}$ электромагниттік өріс **импульсының тығыздығы** ұғымын еңгіземіз. Импульс тығыздығы

$$\boxed{\mathbf{G} = \mathbf{\Pi}/c^2,} \quad (10.24)$$

Бұл жерде мұны көрсететін есептеулерді келтірмейміз, мұндағы, $\mathbf{P} = [\mathbf{E}\mathbf{H}]$ – Пойнтинг векторы. $\mathbf{P}$ Пойнтинг векторы сияқты $\mathbf{G}$ импульс тығыздығы, жалпы айтқанда, уақыттың және координатаның функциясы болып табылады.

Вакуумдағы электромагниттік толқын үшін (10.20)-ға сәйкес $\sqrt{\varepsilon_0 E} = \sqrt{\mu_0 H}$, сондықтан w энергия тығыздығы және $\mathbf{P}$ Пойнтинг векторының модулі сәйкесінше:

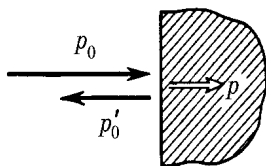
$$w = \varepsilon_0 E^2 / 2 + \mu_0 H^2 / 2 = \varepsilon_0 E^2, \quad P = EH = \sqrt{\varepsilon_0 / \mu_0} E^2.$$

Осыдан $P = w / \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ екені шығады. Ал $\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = 1/c$, c -вакуумдағы жарық жылдамдығы $P = wc$ және (10.24) формуласынан шығатыны, вакуумдағы электромагниттік толқын үшін:

$$\boxed{G = w/c.} \quad (10.25)$$

Энергия мен импульс арасындағы осындай байланыс тыныштық массасы нөлге тең бөлшектерге де тән (салыстырмалылық теориясы көрсеткендей). Кванттық түсініктерге сәйкес электромагниттік толқын тыныштық массасы нөлге тең бөлшектер – фотондардың ағынына эквивалентті болғандықтан, бұлай болуы орынды.

Тағы да электромагниттік толқындардың қысымы жөнінде. Электромагниттік толқын дене бетіне нормаль түсіп, бір бөлігі қарама-қарсы бағытта шағылғанда, толқынның оған түсіретін



10.11-сурет

қысымын (10.25) формуласының көмегімен есептеп табайық. Импульстің сақталу заңына сәйкес $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}'_0 + \mathbf{p}$, мұндағы $\mathbf{p}_0$ және $\mathbf{p}'_0$ – түскен және шағылған толқындардың импульстері, $\mathbf{p}$ денеге берілген импульс (10.11-сурет). Осы теңдікті түскен толқын бағытына проекциялап, барлық шамаларды

бірлік уақытқа және көлденең қиманың бірлік ауданына қатысты, етіп мынаны аламыз:

$$p = p_0 + p'_0 = \langle G \rangle c + \langle G' \rangle c,$$

мұндағы, $\langle G \rangle$ және $\langle G' \rangle$ – түскен және шағылған толқындардағы импульс тығыздығының орташа мәндері. $\langle G \rangle$ және $\langle w \rangle$ арасындағы (10.25) байланысты және $\langle w' \rangle = \rho \langle w \rangle$ фактысын ескеру ғана қалды, мұнда ρ – *шағылу коэффициенті*. Нәтижесінде алдыңғы өрнек төмендегідей түрге келеді:

$$p = (1 + \rho) \langle w \rangle, \quad (10.26)$$

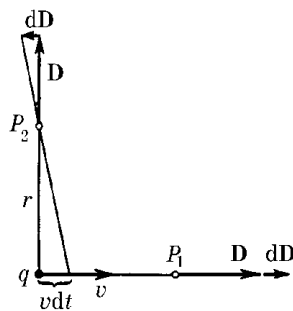
мұнда, p шамасы өзінің мағынасы жағынан басқа нәрсе емес, электромагниттік толқынның денеге түсіретін қысымы. Толық шағылуда $\rho = 1$ және қысым $p = 2 \langle w \rangle$, толық жұтулуда $\rho = 0$ және $p = \langle w \rangle$.

Енді қосарымыз, электромагниттік сәуле шығарудың қысымының әдетте өте аз болатыны (лазер сәулесінің қуатты шоқтарының, әсіресе шоқты фокустағаннан кейінгі қысымын, сондай-ақ қызған жұлдыздар ішіндегі сәуле шығарудың қысымын қоспағанда). Мысалы, күн сәулесінің жердегі қысымы 10^{-6} Па-ға көбейтілген бірнеше бірліктерді құрайды, яғни атмосфералық қысымнан 10^{10} есе аз. Осы шамалардың өте аз болуына карамастан, электромагниттік толқынның бар екенінің эксперименттік дәлелдемесін – жарық қысымы – П. Н. Лебедев алды. Осы тәжірибелердің нәтижелері жарықтың электромагниттік теориясымен сәйкес келді.

Есептер

10.1. Ығысу тогы. Нүктелік q заряд релятивистік емес v жылдамдықпен бірқалыпты және түзу сызықты қозғалады. Зарядтан r қашықтықта: 1) оның траекториясымен дәл келетін; 2) оның траекториясына перпендикуляр және заряд арқылы өтетін түзудің P нүктесіндегі ығысу тогы тығыздығының векторын табу керек.

Шешімі. Ығысу тогының тығыздығы $j_{\text{ылс}} = \partial \mathbf{D} / \partial t$, сондықтан есеп шешімі көрсетілген нүктелердегі $\mathbf{D}$ векторын анықтауға және оның уақыт бойынша туындысын табуға келіп тіреледі. Екі жағдайда да $\mathbf{D} = q \mathbf{e}_r / 4\pi r^2$, мұндағы $\mathbf{e}_r$ –



10.12-сурет

$\mathbf{r}$ векторының орты, $\partial \mathbf{D} / \partial t$ туындысын табайық.

1. P_1 нүктеде (10.12-сурет, мұнда $q > 0$ деп ұйғарылады)

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = -\frac{2q}{4\pi r^3} \frac{\partial r}{\partial t} \mathbf{e}_r = \frac{2qv}{4\pi r^3},$$

мұнда P_1 нүкте үшін, туынды $\partial r / \partial t = -v$ екені ескерілген. Егер P_1 нүктесі заряд алдында емес (оның қозғалысы бағытында), одан кейін тұрған болса, онда $\mathbf{j}_{\text{ыз}}$ векторы сол жаққа бағытталған болар еді және модулі де сондай болған болар еді. Сөйтіп, егер $q > 0$ болса, вектор $\mathbf{j}_{\text{ыз}} \uparrow \uparrow \mathbf{v}$ және керісінше болады.

2. P_2 нүктесінде (10.12-сурет) $|\mathbf{dD}|/D = v dt/r$, сондықтан

$$\partial \mathbf{D} / \partial t = -q\mathbf{v} / 4\pi r^3.$$

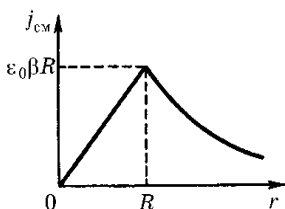
Егер $q > 0$ болса, онда $\mathbf{j}_{\text{ыз}} \downarrow \uparrow \mathbf{v}$, және керісінше.

- 10.2. Қимасының радиусы R , ұзын түзу соленоид бойымен жүретін токты соленоид ішіндегі магнит өрісі уақыт өтуімен $B = \beta t^2$ заңымен артатындай етіп өзгертеді, мұндағы, β – тұрақты. Соленоид өсінен r қашықтықтың функциясы ретінде ығысу тогының тығыздығын табу керек.

Шешімі. Ығысу тогының тығыздығын табу үшін, (10.5)-ке сәйкес алдымен электр өрісінің кернеулігін табу керек – бұл жерде ол құйынды. $\mathbf{E}$ векторының циркуляциясы үшін Максвелл теңдеуін пайдаланып, төмендегідей жазамыз:

$$2\pi r E = \pi r^2 \partial \mathbf{B} / \partial t, E = r\beta t \quad (r < R);$$

$$2\pi r E = \pi R^2 \partial \mathbf{B} / \partial t, E = R^2 \beta t \quad (r > R).$$



10.13-сурет

Енді $\mathbf{j}_{\text{ыз}} = \epsilon_0 \partial E / \partial t$ формуласынан ығысу тогының тығыздығын табамыз:

$$\mathbf{j}_{\text{ыз}} = \epsilon_0 \beta \mathbf{r} \quad (r < R);$$

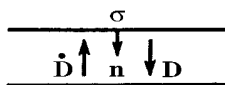
$$\mathbf{j}_{\text{ыз}} = \epsilon_0 \beta R^2 / \mathbf{r} \quad (r > R).$$

$\mathbf{j}_{\text{ыз}}(r)$ тәуелділігінің графигі 10.13-суретте көрсетілген.

- 10.3. Жазық конденсатор арасында нашар өткізетін біртекті орта бар екі дискіден жасалған. Конденсаторды зарядтайды да, кернеу көзінен

ажыратады. Шекаралық эффектілерді ескермей, конденсатор ішінде магнит өрісі болмайтынын көрсету керек.

Шешімі. Магнит өрісі болмайды, өйткені толық ток (өткізгіштік ток плюс ығысу тогы) нөлге тең. Осыны көрсету керек. Ток тығыздығын қарастырайық. Қайсыбір мезетте өткізгіштік ток тығыздығы $\mathbf{j}$ болсын. $\mathbf{j} \propto \mathbf{D}$ екені анық, оған қоса $\mathbf{D} = \sigma \mathbf{n}$, мұндағы, σ – оң зарядталған астардағы зарядтың беттік тығыздығы; $\mathbf{n}$ – нормаль (10.14-сурет).



10.14-сурет

Өткізгіштік токтың болуы σ зарядтың беттік тығыздығының кемуіне әкеледі де, $\mathbf{D}$ – өткізгіштік ток ығысу тогымен қоса жүреді. Соңғысының тығыздығы

$$\mathbf{j}_{\text{тол}} = \partial \mathbf{D} / \partial t = (\partial \sigma / \partial t) \mathbf{n} = -\mathbf{j} \mathbf{n} = -\mathbf{j}.$$

Осыдан, шынында да

$$\mathbf{j}_{\text{тол}} = \mathbf{j} + \mathbf{j}_{\text{ылс}} = 0$$

екендігі шығады.

- 10.4.** Жазық конденсатордың дөңгелек дискілер түріндегі астарларының арасындағы кеңістік меншікті өткізгіштіктігі σ және диэлектрик өтімділігі ε болатын нашар өткізетін біртекті ортамен толтырылған. Егер астарлар арасындағы электр өрісінің кернеулігі уақыт өтуімен $E = E_m \cos \omega t$ заңымен өзгертін болса, шекаралық эффектілерді ескермей, астарлар арасында олардың осьтерінен r қашықтықтағы $\mathbf{H}$ векторының модулін табу керек.

Шешімі. $\mathbf{H}$ векторының циркуляциясы үшін Максвелл теңдеулерінен

$$2\pi r H = \left(j_n + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_n}{\partial t} \right) \pi r^2$$

екендігі шығады.

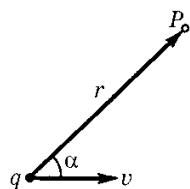
$j_n = \sigma E_n(t)$ Ом заңын ескеріп, мынаны аламыз:

$$H = \frac{r}{2} \left(\sigma E_n + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_n}{\partial t} \right) = \frac{r E_m}{2} (\sigma \cos \omega t - \varepsilon \varepsilon_0 \omega \sin \omega t).$$

Жақшалардағы өрнекті косинуска түрлендіреміз. Бұл үшін осы өрнекті $f = \sqrt{\sigma^2 + (\varepsilon \varepsilon_0 \omega)^2}$ -қа көбейтеміз және бөлеміз, содан кейін $\sigma/f = \cos \delta$, $\varepsilon \varepsilon_0 \omega/f = \sin \delta$ формулалары бойынша δ бұрышты еңгіземіз. Онда

$$H = \frac{r}{2} E_m \sqrt{\sigma^2 + (\epsilon \epsilon_0 \omega)^2} |\cos(\omega t + \delta)|.$$

- 10.5. Нүктелік заряд вакуумда $\mathbf{v}$ релятивистік емес жылдамдықпен бірқалыпты және түзу сызықты қозғалады. $\mathbf{H}$ векторының циркуляциясы үшін Максвелл теңдеуін пайдаланып, зарядқа қатысты орны $\mathbf{r}$ радиус-вектормен сипатталатын P нүктесіндегі $\mathbf{H}$ үшін өрнекті алу керек (10.15-сурет)



10.15-сурет

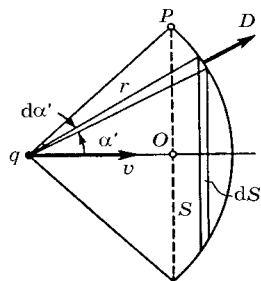
Шешімі. Симметриялық пайымдаулардан, $\mathbf{H}$ векторының циркуляциясы үшін алынатын контур ретінде центрі O нүктесінде болатын шеңберді алу керек екені анық (осытің ізі 10.16-суретте штрих сызықпен көрсетілген). Онда

$$2\pi R H = \frac{\partial}{\partial t} \int D_n dS, \quad (1)$$

мұндағы, R – шеңбердің радиусы.

Осы шеңбермен шектелген бет арқылы өтетін $\mathbf{D}$ векторының ағынын табайық.

Егер осы S бетті қисықтық радиусы r сфералық деп алсақ, бәрінен де оңай болады (10.16-сурет). Онда берілген сфералық бетте алынған элементар сақина арқылы өтетін $\mathbf{D}$ векторының ағыны



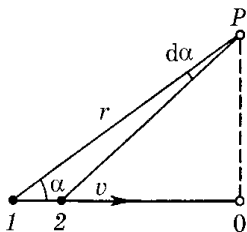
10.16-сурет

$$D dS = \frac{q}{4\pi r^2} 2\pi r \sin \alpha' \cdot r d\alpha' = \frac{q}{2} \sin \alpha' d\alpha',$$

таңдалынып алынған бет арқылы өтетін барлық ағын

$$\int D dS = \frac{q}{2} (1 - \cos \alpha). \quad (2)$$

Енді (1)-ге сәйкес (2)-ні уақыт бойынша дифференциалдаймыз.



10.17-сурет

$$\frac{\partial}{\partial t} \int D dS = \frac{q}{2} \sin \alpha \frac{d\alpha}{dt}. \quad (3)$$

Зарядты 1-ші нүктеден 2-ші нүктеге (10.17-сурет) $v dt$ қашықтыққа орын ауыстырғанда $v dt \cdot \sin \alpha = r d\alpha$ болады, осыдан

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{v \sin \alpha}{r}. \quad (4)$$

(4)-ті (3)-ке, содан кейін (3)-ті (1)-ге қойып, мынаны аламыз:

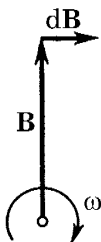
$$H = qvr \sin \alpha / 4\pi r^3, \quad (5)$$

мұнда $R = r \sin \alpha$ екендігі ескерілген. (5) қатыстың векторлық түрі:

$$\mathbf{H} = \frac{q}{4\pi} \frac{[\mathbf{vr}]}{r^3}.$$

Сөйтіп, біз бұрын қарастырған (6.3) өрнегі Максвелл теңдеулерінің салдары екенін көреміз.

- 10.6. Ротор $\mathbf{E}$.** Инерциялық санақ жүйесінің қайсыбір аймағында модулі $B = \text{const}$ болатын ω бұрыштық жылдамдықпен айналып тұрған магнит өрісі бар. ω және $\mathbf{B}$ векторының функциясы ретінде осы аймақтағы $\nabla \times \mathbf{E}$ -ні табу керек.



Шешімі. $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ теңдеуінен $\nabla \times \mathbf{E}$ векторының $d\mathbf{B}$ векторына қарама-қарсы бағытталғандығы, ал оның модулін 10.18-сурет көмегімен есептеп табуға болатындығы көрініп тұр.

10.18-сурет

$$|d\mathbf{B}| = B \cdot \omega dt, \quad |d\mathbf{B} / dt| = B\omega.$$

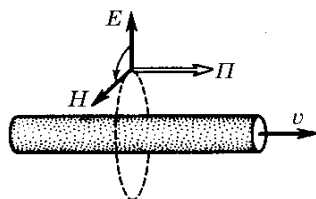
Сондықтан

$$\nabla \times \mathbf{E} = -[\omega \mathbf{B}].$$

- 10.7. Пойнтинг векторы.** Жылдамдықтары $\mathbf{v}$ бірдей болатын протондар I тогы бар қимасы дөңгелек шоқ жасайды. Шоқтан тысқары оның осінен r қашықтағы $\mathbf{\Pi}$ Пойнтинг векторының модулін және бағытын табу керек.

Шешімі. 10.19-суреттен $\mathbf{\Pi} \uparrow \mathbf{v}$ екендігі көрініп тұр. $\mathbf{\Pi}$ векторының модулін табайық: $\Pi = EH$, мұндағы, E және H r -ге тәуелді. Гаусс теоремасы бойынша

$$2\pi r E = \lambda / \epsilon_0$$



10.19-сурет

мұндағы, λ – шоқтың бірлік ұзындығына келетін заряд. Бұдан басқа, $\mathbf{H}$ векторының циркуляциясы жөніндегі теорема бойынша

$$2\pi rH = I.$$

Соңғы екі теңдеуден E және H -ты анықтай отырып, $I = \lambda v$ екенін ескеріп, мынаны аламыз:

$$\Pi = EH = I^2 / 4\pi^2 \varepsilon_0 v r^2.$$

- 10.8.** Ұзын түзу соленоид бойымен жүріп тұрған токты арттырады. Соленоидтағы магнит өрісі энергиясының арту жылдамдығы оның бүйір беті арқылы өтетін Пойнтинг векторының ағынына тең екенін көрсету керек.

Шешімі. Ток өскенде, соленоидтағы магнит өрісі артады, демек құйынды электр өрісі пайда болады. Соленоид қимасының радиусы a болсын дейік.

Онда соленоидтың бүйір бетіндегі құйынды электр өрісінің кернеулігін, электромагниттік индукция заңын өрнектейтін Максвелл теңдеулерінің көмегімен анықтауға болады:

$$2\pi aE = \pi a^2 \frac{\partial B}{\partial t}, \quad E = \frac{a}{2} \frac{\partial B}{\partial t}.$$

Соленоидтың бүйір беті арқылы өтетін энергия ағынын мына түрде беруге болады:

$$\Phi = EH \cdot 2\pi al = \pi a^2 l \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right),$$

мұндағы, l – соленоид ұзындығы, $\pi a^2 l$ – оның көлемі.

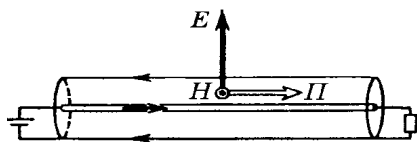
Сөйтіп, біз соленоидтың бүйір беті арқылы өтетін энергия ағыны (Пойнтинг векторының ағыны) соленоид ішіндегі магнит энергиясының өзгеру жылдамдығына тең екенін көрдік:

$$\Phi = \Pi \cdot 2\pi l = \partial W / \partial t.$$

- 10.9.** Энергия U тұрақты кернеу көзінен тұтынушыға кедергісі ескеруге болмайтындай аз ұзын коаксиальды кабель бойымен жеткізіледі. Кабельдегі ток I . Кабельдің көлденең қимасы арқылы өтетін энергия ағынын табу керек. Кабельдің сыртқы өткізгіш қабығының қабырғасы жұқа.

Шешімі. Ізделініп отырған энергия ағыны мына формуласымен анықталады:

$$\Phi = \int_a^b \Pi \cdot 2\pi r dr, \quad (1)$$



10.20-сурет

мұндағы, $\mathbf{P} = \mathbf{E}\mathbf{H}$ – ағын тығыздығы, $2\pi r \mathbf{dr}$ – ені $\mathbf{dr}$ сақинаның ауданы, оның шегінде $\mathbf{P}$ бірдей, a және b – ішкі сымның және кабельдің сыртқы қабығының радиустары (10.20-сурет). Бұл интегралды есептеу үшін $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ не

$\mathbf{E}(\mathbf{r})$ және $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ тәуелділіктерді білу керек. Гаусс теоремасы көмегімен мынаны аламыз:

$$2\pi r E = \lambda / \varepsilon_0, \quad (2)$$

мұндағы, λ – бірлік ұзындыққа келетін заряд. Әрі қарай циркуляция теоремасы бойынша, мынаны аламыз:

$$2\pi r H = I. \quad (3)$$

(2) және (3) формулаларындағы E -мен H -ты (1) өрнегіне қойып, интегралдағаннан кейін

$$\Phi = \frac{\lambda I}{2\pi \varepsilon_0} \ln \frac{b}{a}. \quad (4)$$

Есеп шартында λ , a және b берілмеген, олардың орнына U берілген. Осы шамалардың арасындағы байланысты табамыз:

$$U = \int_a^b E dr = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0} \ln \frac{b}{a}. \quad (5)$$

(4)-пен (5)-ті салыстырудан

$$\Phi = UI$$

екендігі шығады. Бұл жүктемеде бөлінген қуаттың мәнімен дәл келеді.

Пластиналары радиусы a дискі түріндегі жазық ауа конденсаторы, жиілігі ω айнымалы гармониялық кернеу көзіне қосылған. Конденсатор ішіндегі магнит және электр энергияларының максимал мәндерінің қатынасын табу керек.

Шешімі. Конденсатор кернеуі $U = U_m \cos \omega t$ заңмен өзгертін болсын және конденсатор пластиналарының арақашықтығы h -қа тең болсын. Демек, онда конденсатордың электр энергиясы:

$$W_{\text{э}} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \pi a^2 h = \frac{\varepsilon_0 \pi a^2}{2h} U_m^2 \cos^2 \omega t. \quad (1)$$

Магниттік энергияны мына формуламен анықтаймыз:

$$W_M = \int \frac{B^2}{2\mu_0} dV. \quad (2)$$

Осы интегралды есептеуге қажет B шаманы $\mathbf{H}$ векторының циркуляциясы жөніндегі теоремадан табамыз: $2\pi r H = \pi r^2 \partial D / \partial t$. Осыдан, $H = B / \mu_0$ және $\partial D / \partial t = -\varepsilon_0 (U_m / h) \omega \sin \omega t$ екенін ескеріп, мынаны аламыз:

$$B = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \mu_0 \frac{r \omega U_m}{h} |\sin \omega t|. \quad (3)$$

(3)-ті (2)-ге қою қалды, мұнда dV ретінде сақина түріндегі элементар көлемді алу керек, сақина үшін $dV = 2\pi r dr \cdot h$. Интегралдау нәтижесінде мынаны аламыз:

$$W_M = \frac{\pi}{16} \frac{\mu_0 \varepsilon_0^2 \omega a^4 U_m^2}{h} \sin^2 \omega t. \quad (4)$$

Магниттік энергияның (4) және электр энергиясының (1) максималь мәндерінің қатынасы мындай:

$$\frac{W_{\text{м.макс}}}{W_{\text{э.макс}}} = \frac{1}{8} \mu_0 \varepsilon_0 a^2 \omega^2.$$

Мысалы, $a = 6 \text{ см}$ және $\omega = 1000 \text{ с}^{-1}$ болғанда, бұл қатынас $5 \cdot 10^{-15}$ -не тең.

11-тарау

Электрлік тербелістер



§ 11.1 Тербелмелі контурдың теңдеуі

Электрлік тербелістер болған кезде тізбектегі ток уақыт өтуімен өзгереді де, жалпы айтқанда, әрбір уақыт мезетінде ток тізбектің әртүрлі бөліктерінде бірдей болмайды (электромагниттік ұйытқулар өте үлкен, бірақ шекті жылдамдықпен тарайтын болғандықтан). Алайда токтың лездік мәндері тізбектің барлық бөліктерінде іс жүзінде бірдей болатын жағдайлар көп кездеседі (мұндай ток **квазистационарлық** деп аталады). Бұл үшін уақыт ішіндегі барлық өзгерістер электромагниттік ұйытқуларды *лездік* деп есептеуге болатындай баяу жүруі тиіс. Егер l – тізбектің ұзындығы болса, онда l ұзындықты жүріп өту үшін электромагниттік ұйытқу $\tau = l/c$ шамасындай уақыт жұмсайды. Егер

$$\tau = l/c \ll T$$

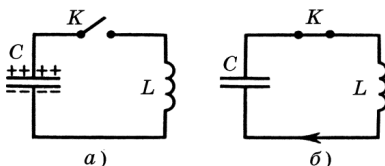
болса, периодты өзгертін токтар үшін квазистационарлық шарты орындалады, мұндағы T – өзгерістер периоды.

Мысалы, ұзындығы $l = 3$ м тізбек үшін уақыт $\tau = 10^{-8}$ с, токтарды 10^6 Гц жиілікке дейін квазистационарлық деп есептеуге болады (бұл $\tau = 10^{-6}$ с-қа сәйкес келеді). Бұл тарауда біз барлық жерде қарастырылып отырған жағдайларда квазистационарлық шарты орындалады деп ұйғарамыз да, токтарды **квазистационар** деп есептейміз. Бұл бізге статикалық өрістерде алынған формулаларды пайдалануға мүмкіндік береді. Дербес жағдайда, біз квазистационар токтардың лездік мәндерінің Ом заңына бағынатындығы фактысын пайдаланамыз.

Тербелмелі контур. Индуктивтігі L катушка мен сыйымдылығы C конденсатордан тұратын тізбекте электрлік тербелістер пайда болады. Сондықтан мұндай тізбек **тербелмелі контур** деп аталады. Электрлік тербелістердің тербелмелі контурда қалай пайда болатынын және сүйемелденетінін анықтайық.

Басында конденсатордың жоғары астары оң, ал төменгісі теріс зарядталған болсын (11.1 а-сурет).

Бұл кезде тербелмелі контурдың барлық энергиясы конденсаторда жинақталған. K кілтті тұйықтаймыз. Конденсатор разрядтала бастайды да, L катушка арқылы ток жүреді.

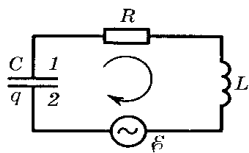


11.1-сурет

Конденсатордың электр энергиясы катушканың магниттік энергиясына айнала бастайды. Конденсатор толық разрядталып, ал тізбектегі ток максимумға жеткенде, бұл процесс аяқталады (11.1 б-сурет). Осы мезеттен бастап ток бағытын өзгертпей, кеми бастайды. Алайда ол бірден тоқтамайды – оны өздік индукция э.к.к-і сүйемелдейді. Ток конденсаторды қайта зарядтайды, токты әлсіретуге тырысатын электр өрісі пайда болады. Соңында ток тоқтайды, ал конденсатордағы заряд максимумға жетеді. Осы мезеттен бастап конденсатор тағы да разрядтала бастайды, ток кері бағытта жүреді және т.б. – процесс қайталанады. Өткізгіштердің кедергісі болмаса, контурда қатаң периодты тербелістер болады. Процесс барысында конденсатор астарларындағы заряд ондағы кернеу және катушка арқылы өтетін ток периодты өзгереді. Тербелістер электр және магнит өрістері энергияларының өзара түрленуімен қоса жүреді.

Егер өткізгіштердің кедергісі $R \neq 0$ болса, онда сипатталған процесспен қатар электромагниттік энергияның джоулдік жылуға түрленуі болады.

Тізбектің өткізгіштерінің R кедергісін **актив кедергі** деп атау қабылданған.



11.2-сурет

Тербелмелі контур теңдеуі. Тізбектей қосылған C конденсатордан, индуктивтігі L катушкадан, R актив кедергіден және сыртқы айнымалы $\mathcal{E}$ э.к.к-тен тұратын контурдағы тербелістердің теңдеуін табайық (11.2-сурет).

Алдымен контурды айналып өтудің оң бағытын таңдап аламыз, мысалы сағат тілі

бойымен. Төменгі астар 2 конденсатордың қайта зарядталу процесінде $q > 0$ заряд алып, I ток оң бағытта жүрген кездегі уақыт мезетіндегі жағдайды қарастырайық. Онда dt уақыт аралығында заряд $dq > 0$ өсімше алады да, контурдағы ток мына түрде анықталады

$$I = dq/dt. \quad (11.1)$$

Демек егер $I > 0$ болса, онда $dq > 0$ және керісінше (I таңбасы dq таңбасымен дәл келеді).

Тізбектің $1RL2$ бөлігі үшін Ом заңына сәйкес

$$RI = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_S + \mathcal{E}, \quad (11.2)$$

мұндағы $\mathcal{E}_S$ – өздік индукция э.к.к.-і. Біздің жағдайымызда

$$\mathcal{E}_S = -LdI/dt, \quad \varphi_2 - \varphi_1 = q/C$$

(q -дің таңбасы $\varphi_2 - \varphi_1$ айырымының таңбасымен дәл келуі керек, өйткені $C > 0$). Сондықтан (11.2) теңдеуін былай жазуға болады:

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{q}{C} = \mathcal{E}, \quad (11.3)$$

не (11.1)-ді ескеріп, мына түрде жазуға болады:

$$\boxed{L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = \mathcal{E}.} \quad (11.4)$$

Бұл **тербелмелі контурдың теңдеуі** – коэффициенттері тұрақты біртекті емес сызықтық дифференциалдық екінші дәрежелі теңдеу. Осы теңдеу көмегімен $q(t)$ -ны тауып, біз конденсатордағы кернеуді $U_C = \varphi_2 - \varphi_1 = q/C$ түрінде және (11.1) формуласынан I ток күшін оңай есептей аламыз. Тербелмелі контур теңдеуін басқа түрде беруге болады:

$$\boxed{\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = \mathcal{E}/L,} \quad (11.5)$$

мұнда төмендегідей белгілеулер енгізілген

$$2\beta = R/L, \quad \omega_0^2 = 1/LC. \quad (11.6)$$

ω_0 шамасы контурдың *меншікті жиілігі*, β – *өшу коэффициенті* деп аталады. Бұл атаулардың мағынасын төменде анықтаймыз.

Контурдың W энергиясының бірлік уақыттағы өсімшесі, яғни $dW/dt = \mathcal{E}I - RI^2$ екенін ескеріп, (11.5) теңдеуін энергетикалық пайымдаулардан алуға болады. Мұнда $\mathcal{E}I$ – сыртқы э.қ.к. қуаты, ал RI^2 – жылулық қуат (оның минус таңбалы болуы керек екені анық). $W = LI^2/2 + q^2/2C$, екендігін ескеріп, W -ны t бойынша дифференциалдаудан кейін мынаны аламыз:

$$LI\dot{I} + q\dot{q}/C = \mathcal{E}I - RI^2,$$

мұндағы $\dot{q} = I$. барлық қосылғыштарды I -ге қысқартудан және соңғы қосылғышты теңдіктің сол жағына шығарғаннан кейін, мынаны аламыз:

$$L\dot{I} + RI + q/C = \mathcal{E}.$$

$\dot{I} = \ddot{q}$ және $I = \dot{q}$ екендігін ескеру ғана қалды, барлық қосылғыштарды L -ге бөліп, (11.5) теңдеуіне келеміз.

Егер $\mathcal{E} = 0$ болса, онда тербелістер *еркін* деп аталады. $R = 0$ болғанда олар *өшпейтін* болады, $R \neq 0$ болғанда өшетін болады. Барлық жағдайларды рет-ретімен қарастырамыз.

§ 11.2. Еркін электрлік тербелістер

Еркін өшпейтін тербелістер. Егер контурда сыртқы э.қ.к $\mathcal{E}$ жоқ және актив кедергі $R = 0$ болса, онда мұндай контурдағы тербелістер *еркін өшпейтін тербелістер* болады. Олардың теңдеуі $-\mathcal{E} = 0$ және $R = 0$ болғандағы (11.5) теңдеуінің дербес жағдайы

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0. \quad (11.7)$$

Осы теңдеудің шешімі мына функция болады:

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad (11.8)$$

мұндағы q_m – конденсатор астарындағы зарядтың амплитудалық мәні, ω_0 – контурдың меншікті жиілігі, α – бастапқы фаза. ω_0 мәні

тек контурдың өзінің қасиеттерімен, ал q_m және α бастапқы шарттардан анықталады. Осы ретте, мысалы, $t = 0$ мезеттегі q зарядтың және $I = \dot{q}$ токтың мәндерін алуға болады.

(11.6)-ға сәйкес $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, сондықтан еркін өшпейтін тербелістердің периоды

$$T_0 = 2\pi/\sqrt{LC} \quad (11.9)$$

(Томсон формуласы).

I токты тауып, ((11.8)-ді уақыт бойынша дифференциалдап) және конденсатордағы кернеу q зарядпен бірдей фазада болатынын ескеріп, еркін өшпейтін тербелістерде I ток фаза бойынша конденсатордағы кернеуден $\pi/2$ -ге озатынына көз жеткізуге болады.

Еркін өшетін тербелістер. Әрбір нақты контурдың актив кедергісі болады да, контурда жинақталған энергия бірте-бірте қызуға шығындалады. Еркін тербелістер өшетін болады.

(11.5)-те $\mathcal{E} = 0$ деп алып, берілген тербелмелі контурдың теңдеуін аламыз. Онда

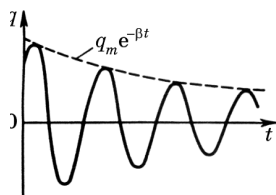
$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 = 0. \quad (11.10)$$

$\beta < \omega_0$ болғанда, осы біртекті дифференциалдық теңдеудің шешімі төмендегідей болатынын көрсетуге болады:

$$q = q_m e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha), \quad (11.11)$$

мұндағы ω -өшетін тербелістердің жиілігі:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}, \quad (11.12)$$



11.3-сурет

ал q_m және α — қалауымызша алынған тұрақтылар. (11.11) функцияның графигі 11.3-суретте көрсетілген. Бұл функцияның периодты емес екендігі көрініп тұр, ол өшетін тербелістерді анықтайды.

Дегенмен $T = 2\pi/\omega$ шама өшетін

тербелістердің периоды деп аталады:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - (\beta/\omega_0)^2}}, \quad (11.13)$$

мұндағы T_0 – еркін өшпейтін тербелістердің периоды.

$q_m e^{-\beta t}$ көбейткіш (11.11) **өшетін тербелістердің амплитудасы** деп аталады. Оның уақытқа тәуелділігі 11.3-суретте штрихталған сызықпен көрсетілген.

Конденсатордағы кернеу және контурдағы ток. $q(t)$ -ны біле отырып, конденсатордағы кернеуді және контурдағы токты табуға болады. Конденсатордағы кернеу

$$U_C = \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha). \quad (11.14)$$

Контурдағы ток

$$I = \frac{dq}{dt} = q_m e^{-\beta t} [-\beta \cos(\omega t + \alpha) - \omega \sin(\omega t + \alpha)].$$

Квадрат жақшадағы өрнекті косинуске түрлендіреміз. Бұл үшін осы өрнекті $\sqrt{\omega^2 + \beta^2} = \omega_0$ -ге бөлеміз де, содан кейін төмендегі формулалар бойынша δ бұрышты енгіземіз

$$-\beta/\omega_0 = \cos \delta, \quad \omega/\omega_0 = \sin \delta. \quad (11.15)$$

Осыдан кейін I -дін өрнегі мынадай түрге келеді:

$$I = \omega q_m e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha + \delta) \quad (11.16)$$

(11.15)-тен δ бұрыш екінші ширекте ($\pi/2 < \delta < \pi$) жататындығы шығады. Бұл R актив кедергі барда контурдағы ток фаза жағынан конденсатордағы кернеуден (11.14) $\pi/2$ -ден көбірек озатындығын білдіреді. $R = 0$ болғанда, озу $\delta = \pi/2$.

$U_C(t)$ және $I(t)$ тәуелділіктердің графиктері $q(t)$ үшін 11.3-суретте көрсетілгендей түрде болады.

Мысал. Тербелмелі контур сыйымдылығы C конденсатордан және актив кедергісі R , индуктивтігі L катушкадан тұрады. Ток максимумы мезетіндегі магнит өрісі энергиясының контурдағы электр өрісінің энергиясына қатынасын табамыз.

(11.3) тербелмелі контур теңдеуіне сәйкес

$$L \frac{dI}{dt} = RI + \frac{q}{C} = 0.$$

Ток максимумы кезінде $dI/dt = 0$ және $RI = -q/C$. Сондықтан ізделініп отырған қатынас:

$$\frac{W_m}{W_e} = \frac{LI^2/2}{q^2/2C} = \frac{L}{CR^2}.$$

Өшуді сипаттайтын шамалар.

1. Өшу коэффициенті β және релаксация уақыты τ – тербелістер амплитудасы е есе азаятын уақыт. (11.11) формуласынан төмендегіні көру қиын емес:

$$\tau = 1/\beta. \quad (11.17)$$

2. Өшудің логарифмдік декременті λ . Ол T тербеліс периоды өткеннен кейінгі амплитудалардың екі мәндерінің қатынастарының натурал логарифмі ретінде анықталады:

$$\lambda = \ln \frac{a(t)}{a(t+T)} = \beta T, \quad (11.18)$$

мұндағы, a – сәйкес шаманың (q, U, I) амплитудасы. Не басқаша

$$\lambda = 1/N_e, \quad (11.19)$$

мұндағы, N_e – τ уақыт ішіндегі, яғни тербелістер амплитудасы е есе азаятын уақыт ішіндегі тербеліс саны. Мұны (11.17) және (11.18) формулалардан оңай алуға болады.

Егер өшу аз болса ($\beta \ll \omega_0$), онда $\omega \approx \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ және (11.18)-ге сәйкес.

$$\lambda \approx \beta \cdot 2\pi/\omega_0 = \pi R \sqrt{C/L}. \quad (11.20)$$

3. Тербелмелі контурдың Q *төзімділігі*. Анықтама бойынша

$$Q = \pi/\lambda = \pi N_e, \quad (11.21)$$

мұндағы λ – өшудің логарифмдік декременті. Өшу аз болған сайын, Q үлкен болады. Өшу әлсіз болғанда ($\beta \ll \omega_0$) (11.20)-ға сәйкес төзімділік

$$Q \approx (1/R)\sqrt{LC}. \quad (11.22)$$

Өшу әлсіз болған жағдайда Q үшін тағы бір маңызды формула

$$Q \approx 2\pi \frac{W}{\delta W}, \quad (11.23)$$

мұндағы, W – контурда жинақталған энергия, δW – осы энергияның T тербеліс периоды ішіндегі кемуі. Өз мәнісінде, W энергия конденсатор заряды амплитудасының квадратына пропорционал, яғни $W \propto e^{-2\beta t}$. Осыдан период ішіндегі энергияның салыстырмалы кемуі $\delta W/W = 2\beta T = 2\lambda$. (11.21)-ге сәйкес $\lambda = \pi/Q$ екенін ескеру ғана қалды.

Қорытындыда $\beta \gg \omega_0$ болғанда, тербелістер орнына конденсатордың *апериодты* разряды болатынын атап айтамыз. Контурдың апериодты процесс басталатын актив кедергісі *критикалық* деп аталады:

$$R_{кр} = 2\sqrt{L/C}. \quad (11.24)$$

Екі мысал қарастырамыз.

1-мысал. Тербелмелі контурдың сыйымдылығы C , индуктивтігі L және актив кедергісі R . Қанша тербелістен кейін контурдағы ток амплитудасы e есе кемиді? Ток амплитудасы $(I_m \propto e^{-\beta t})\tau = 1/\beta$ уақыт ішінде e есе кемиді. Осы уақыт ішінде N_e тербеліс жасалады. Егер T – өшетін тербелістердің периоды болса, онда

$$N_e = \frac{\tau}{T} = \frac{1/\beta}{2\pi/\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{\omega_0}{\beta}\right)^2 - 1}.$$

$\omega_0^2 = 1/LC$ және $\beta = R/2L$ ескеріп, мынаны аламыз:

$$N_e = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{4l}{CR^2} - 1}.$$

2-мысал. Егер өшетін тербелістердің жиілігі ω болса, онда төзімділігі Q контурдағы ток тербелістерінің амплитудасы η есе азаятын уақытты табу керек.

Ток амплитудасы $I_m \propto e^{-\beta t}$ болғандықтан, амплитуда η есе азаятын t_0 уақыт $\eta = \exp(-\beta t_0)$ теңдеуімен анықталады. Осыдан

$$t_0 = (\ln \eta) / \beta.$$

Екінші жағынан, Q төзімділік, сондай-ақ β -мен байланысты:

$$Q = \pi / \lambda = \pi / \beta T = \omega / 2\beta.$$

Соңғы екі теңдеуден β -ны шығарып, мынаны аламыз:

$$t_0 = \frac{2Q}{\omega} \ln \eta.$$

§ 11.3. Еріксіз электрлік тербелістер

Орныққан тербелістер. (11.3) және (11.4) тербелмелі контур теңдеулеріне ораламыз және контурға уақытқа гармониялық заңмен тәуелді болатын сыртқы айнымалы $\mathcal{E}$ э.к.к қосылғанда болатын жағдайды қарастырамыз:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \cos \omega t. \quad (11.25)$$

Сыртқы гармониялық э.к.к әсер еткенде тербелмелі контурдың өзінің тербелістердің гармониялық түрін сақтайтын қасиетінің арқасында бұл заңның ерекше орны бар.

Берілген жағдайда тербелмелі контур теңдеуі мынадай түрде жазылады:

$$L \frac{dl}{dt} + RI + \frac{q}{C} = \mathcal{E}_m \cos \omega t, \quad (11.26)$$

немесе

$$\ddot{q} + 2\beta \dot{q} + \omega_0^2 q = (\mathcal{E}_m / L) \cos \omega t. \quad (11.27)$$

Математикадан белгілі болғандай, бұл теңдеудің шешімі біртекті теңдеудің (оң жақ бөлігінсіз) жалпы шешімі мен біртекті емес теңдеудің дербес шешімінің қосындысы болып табылады.

Біз тек орныққан тербелістерді, яғни осы теңдеудің дербес шешімін қарастыратын боламыз (біртекті теңдеудің жалпы шешімі экспоненциалды өшеді де, белгілі бір уақыт өткеннен кейін іс жүзінде жоғалады, нөлге айналады). Бұл шешімнің түрі төмендегідей болатынына көз жеткізу қиын емес

$$q = q_m \cos(\omega t - \psi), \quad (11.28)$$

мұндағы, q_m – конденсатордағы заряд амплитудасы; ψ – заряд пен сыртқы э.қ.к. (11.25) тербелістерінің арасындағы фаза айырымы. Біздің көретініміздей, q_m және ψ контурдың өзінің қасиеттерімен және мәжбүрлеуші $\mathcal{E}$ э.қ.к-пен анықталады, бұған қоса $\psi > 0$, сондықтан q әрқашан $\mathcal{E}$ -ден фаза жағынан қалады.

q_m және ψ тұрақтыларды анықтау үшін, (11.28)-ді бастапқы (11.27) теңдеуге қойып, алынған өрнекті түрлендіру керек. Біз біршама басқаша қарастырамыз (оңайлату мақсатында): алдымен I тоқты табамыз да, содан кейін оның өрнегін бастапқы (11.26) теңдеуге қоямыз. q_m және ψ тұрақтыларының мәселесі де қоса шешіледі.

(11.28)-ді t бойынша дифференциалдап, мынаны табамыз:

$$I = -\omega q_m \sin(\omega t - \psi) = \omega q_m \cos(\omega t - \psi + \pi/2).$$

Бұл өрнекті былай жазамыз:

$$I = I_m \cos(\omega t - \varphi), \quad (11.29)$$

мұндағы, I_m – ток амплитудасы, φ – ток пен сыртқы э.қ.к. $\mathcal{E}$ арасындағы фаза айырымы,

$$I_m = \omega q_m, \quad \varphi = \psi - \pi/2. \quad (11.30)$$

Біздің мақсатымыз I_m -мен φ -ді табу. Осы мақсатта былай етеміз. Бастапқы теңдеуді (11.26) төмендегідей түрде береміз.

$$U_L + U_R + U_C = \mathcal{E}_m \cos \omega t, \quad (11.31)$$

мұнда сол жақта L индуктивтегі, R кедергідегі және C сыйымдылықтағы кернеулердің қосындысы жазылған. Сөйтіп, біз әрбір уақыт мезетінде осы кернеулердің қосындысы сыртқы $\mathcal{E}$ э.к.к.-ке тең екенін көрдік.(11.30) қатысты ескеріп, былай жазамыз:

$$U_R = RI = RI_m \cos(\omega t - \varphi), \quad (11.32)$$

$$U_C = \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C} \cos(\omega t - \psi) = \frac{I_m}{\omega C} \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right), \quad (11.33)$$

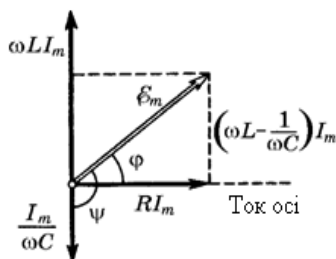
$$U_L = L \frac{dI}{dt} = -\omega LI_m \sin(\omega t - \varphi) = \omega LI_m \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right). \quad (11.34)$$

Векторлық диаграмма. Соңғы үш формуладан U_R -дің I токпен бір фазада, U_C фаза жағынан I -ден $\pi/2$ -ге қалатыны, ал U_L -дің I -ден $\pi/2$ -ге озатыны көрініп тұр.

$$U_{Rm} = RI_m, \quad U_{Cm} = I_m/\omega C, \quad U_{Lm} = \omega LI_m$$

кернеу амплитудаларын және олардың (11.31)-ге сәйкес $\mathcal{E}_m$ шамасының векторына тең қосындысын (11.4-сурет) **векторлық диаграмма** көмегімен кескіндеп, осының бәрін көрнекі түрде беруге болады.

Осы диаграмманың тік бұрышты үшбұрышынан (11.29)-дағы I_m және φ үшін төмендегі өрнектерді оңай алуға болады:



$$I_m = \frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}, \quad (11.35)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}. \quad (11.36)$$

11.4-сурет

Сөйтіп есеп шешілді.

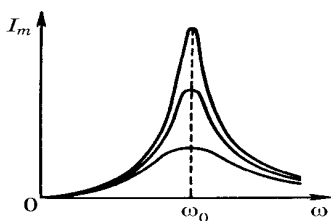
Қорытындыда біздің алған векторлық диаграмма көптеген нақты есептерді шешуде аса пайдалы екенін ескертеміз. Ол әртүрлі жағдайларды көрнекі, оңай және шапшаң талдауға мүмкіндік береді.

Резонанстық қисықтар. Төмендегі шамалардың: I токтың конденсатордағы зарядтың және (11.32)–(11.34) формулаларымен анықталатын U_R, U_C және U_L кернеулердің амплитудаларының сыртқы $\mathcal{E}$ э.қ.к.-тің ω жиілігіне тәуелділіктерінің графиктері осылай аталады.

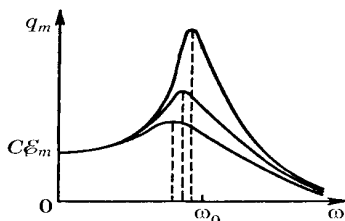
$I_m(\omega)$ ток күшінің резонанстық қисықтары 11.5-суретте көрсетілген. (11.35) өрнектен көрініп тұрғандай, ток күшінің амплитудасы $\omega L - 1/\omega C = 0$ болғанда максимум мәнге ие болады. Демек ток күшіне арналған резонанстық жиілік контурдың меншікті жиілігімен дәл келеді:

$$\omega_{\text{рез}} = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}. \quad (11.37)$$

$\beta = R/2L$ өшу коэффициенті неғұрлым аз болса, резонанс кезіндегі максимум соғұрлым жоғары және өткір болады.



11.5-сурет



11.6-сурет

Конденсатордағы заряд үшін $q_m(\omega)$ резонанстық қисықтар 11.6-суретте көрсетілген (конденсатордағы U_{Cm} кернеу үшін де резонанстық қисықтардың түрі сондай болады). Заряд амплитудасы максимумға мына резонанстық жиілікте жетеді

$$\omega_{\text{рез}} \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}, \quad (11.38)$$

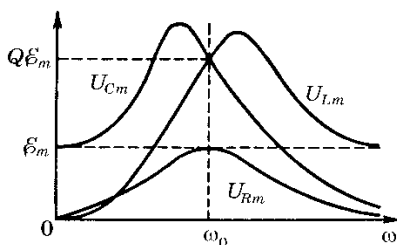
ол β кеміген сайын ω_0 -ге жақындай түседі. (11.38) өрнекті алу үшін q_m -ді (11.30)-ғасәйкес $q_m = I_m/\omega$ түрінде керек, мұндағы I_m (11.35) формуласымен беріледі. Онда

$$q_m = \frac{\mathcal{E}_m/L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2) + 4\beta^2 \omega^2}}. \quad (11.39)$$

Түбір астындағы өрнектің ω бойынша туындысын нөлге теңестіріп, осы функциясының максимумын, немесе сол сияқты түбір астындағы өрнектің минимумын табамыз. Осыдан (11.38) резонанстық жиілікті табамыз.

Енді сыртқы э.к.к.-тің ω жиілігіне тәуелді U_R, U_C және U_L кернеулері амплитудаларының қайта үлестірілулерін қарайық. Бұл кескін 11.7-суретте бейнеленген.

U_R, U_C және U_L -ге арналған резонанстық жиіліктер төмендегі формулалармен анықталады:



11.7-сурет

$$\omega_{R\text{рез}} = \omega_0,$$

$$\omega_{C\text{рез}} = \omega_0 \sqrt{1 - 2(\beta/\omega_0)^2}, \quad (11.40)$$

$$\omega_{L\text{рез}} = \omega_0 / \sqrt{1 - 2(\beta/\omega_0)^2}.$$

Неғұрлым β аз болса, барлық шамалардың резонанстық жиіліктері ω_0 мәніне соғұрлым жақын болады.

Резонанстық қисықтар және Q төзімділік. Резонанстық қисықтардың түрі белгілі бір түрде контурдың Q төзімділігімен байланысты. Бұл байланыс, әсіресе әлсіз өшуде, яғни $\beta \ll \omega_0$ болатын жағдай үшін қарапайым болады. Бұл жағдайда

$$U_{C\text{рез}}/\epsilon_m = Q \quad (11.41)$$

(11.7-сурет. Шындығында да $\beta \ll \omega_0$ болғанда, $\omega_{\text{рез}} \approx \omega_0$ және (11.33)-пен (11.35)-ке сәйкес $U_{C\text{рез}} = I_m/\omega_0 C = \epsilon_m/\omega_0 CR$, немесе $U_{C\text{рез}}/\epsilon_m = \sqrt{LC}/CR = (1/R)\sqrt{L/C}$, ал бұл (11.22) формуласымен салыстыру көрсетіп тұрғандай, Q болып табылады.

Сөйтіп, контур төзімділігі $\beta \ll \omega_0$ болғанда, конденсатордағы (және индуктивтіктегі) кернеудің амплитудасының максимал мәні сыртқы э.к.к. амплитудасынан неше есе артық екенін көрсетеді.

Контур төзімділігі резонанстық қисықтың тағы бір маңызды сипаттамасы – оның енімен байланысты. $\beta \ll \omega_0$ болғанда, былай болады екен:

$$Q = \omega_0 / \delta\omega, \quad (11.42)$$

мұндағы ω_0 – резонанстық жиілік, $\delta\omega$ – максималдың 0,7-не тең «биіктіктегі», яғни резонанс кезіндегі, резонанстық қисықтың ені.

Резонанс. Біздің жағдайымызда резонанс – сыртқы э.к.к-тің немесе кернеудің жиілігі тербелмелі контурдың меншікті жиілігіне тең не оған жақын болғанда күшті тербелістердің қозуы. Резонансты күрделі кернеуден қажет құраушыны бөліп алу үшін пайдаланады. Радио қабылдаудың барлық техникасы осыған негізделген. Радиоқабылдағыш бізге қажет радиостанцияны қабылдау үшін оны дәлдеу, яғни тербелмелі контурдың C және L -ін өзгерту арқылы оның меншікті жиілігін радиостанция шығаратын электромагниттік толқындардың жиілігі мен дәлдестіру керек.

Резонанс құбылысы *қауіптілікпен* байланысты. Сыртқы э.к.к. немесе кернеу аз болуы мүмкін, алайда контурдың жеке элементтерінде кернеулер өмірге қауіпті шамаға жетуі мүмкін. Мұны әрқашан есте ұстау керек!

§ 11.4. Айнымалы ток

Толық кедергі (импеданс). Орныққан еріксіз электр тербелістерін сыйымдылығы, индуктивтігі және R актив кедергісі бар тізбекте айнымалы токтың өтуі деп қарастыруға болады.

$$U = U_m \cos \omega t \quad (11.43)$$

сыртқы кернеудің әсерінен (ол сыртқы $\mathcal{E}$ э.к.к.-тің рөлін атқарады) тізбектегі ток мына заңмен өзгереді:

$$I = I_m \cos(\omega t - \varphi), \quad (11.44)$$

Мұндағы

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}. \quad (11.45)$$

Есеп ток күшінің амплитудасын және токтың U -ға қатысты фаза бойынша ығысуын анықтауға келіп тіреледі.

Ток күшінің $I_m(\omega)$ амплитудасы үшін алынған өрнекті формалды түрде ток пен кернеудің амплитудалық мәндері үшін Ом заңы деп түсінуге болады. Осы өрнектің бөлімінде тұрған, кедергінің өлшемділігіне ие шама Z әрпімен белгіленеді де, **толық кедергі** немесе **импеданс** деп аталады:

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}. \quad (11.46)$$

$\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ болғанда, кедергі минимал және R **актив кедергіге** тең екені көрініп тұр. (11.46) формуласында дөңгелек жақшалардың ішіндегі шама X әрпімен белгіленеді де, **реактив кедергі** деп аталады.

$$X = \omega L - 1/\omega C. \quad (11.47)$$

Сонымен қатар ωL шама **индуктивтік кедергі**, ал $1/\omega C$ – **сыйымдылық кедергі** деп аталады. Олар сәйкесінше X_L және X_C деп белгіленеді. Осылайша,

$$X_L = \omega L, X_C = 1/\omega C, X = X_L - X_C, Z = \sqrt{R^2 + X^2}. \quad (11.48)$$

ω жиілік артқан сайын индуктивтік кедергінің артатынын, ал сыйымдылық кедергінің кемитінін байқаймыз. Тізбекте сыйымдылық жоқ дегенді $1/\omega C$ -ға тең сыйымдылық кедергі жоқ, яғни $C \rightarrow \infty$ болғанда нөлге айналады деген мағынада түсіну керек (конденсаторды қысқа бөлікпен алмастырғанда).

Соңғысы. Реактив кедергі актив кедергідей бірліктермен өлшенетін болғанмен, олардың арасында принципті айырмашылық бар. Ол айырмашылық – тек актив кедергінің ғана тізбектегі қайтымсыз процестерді, мысалы, электромагниттік энергияның джоульдік жылуға түрленуін анықтайтындығында.

Айнымалы ток тізбегінде бөлінетін қуат. Қуаттың лездік мәні кернеу мен токтың лездік мәндерінің көбейтіндісіне тең:

$$P(t) = UI = U_m I_m \cos \omega t \cos(\omega t - \varphi). \quad (11.49)$$

$\cos(\omega t - \varphi) = \cos \omega t \cos \varphi + \sin \omega t \sin \varphi$ болғандықтан,
(11.49)-ды мынадай түрге келтіреміз:

$$P(t) = U_m I_m (\cos^2 \omega t \cos \varphi + \sin \omega t \cos \omega t \sin \varphi).$$

Тербеліс периоды ішіндегі қуаттың орташа мәнінің практикалық маңызы бар. $\langle \cos^2 \omega t \rangle = 1/2$ және $\langle \sin \omega t \cos \omega t \rangle = 0$ екенін ескеріп, мынаны аламыз:

$$\langle P \rangle = \frac{U_m I_m}{2} \cos \varphi. \quad (11.50)$$

Векторлық диаграммадан (11.4-суретті қараңыз) $U_m \cos \varphi = R I_m$ екенін ескеріп, бұл өрнекті басқаша түрге келтіруге болады

$$\langle P \rangle = R I_m^2. \quad (11.51)$$

Осындай қуатты $I = I_m / \sqrt{2}$ тұрақты токта өндіреді. Төмендегі шамалар **ток пен кернеудің әсерлік** (немесе **эффектілік**) **мәндері** деп аталады

$$I = I_m / \sqrt{2}, \quad U = U_m / \sqrt{2}. \quad (11.52)$$

Барлық амперметрлер мен вольтметрлер ток пен кернеудің әсерлік мәндері бойынша градуирленген.

Кернеу мен токтың әсерлік мәндері арқылы орташа қуат өрнегі (11.50) мына түрге келеді:

$$\boxed{\langle P \rangle = UI \cos \varphi}, \quad (11.53)$$

мұндағы, $\cos \varphi$ көбейткішін **қуат коэффициенті** деп атау қабылданған. Сөйтіп, тізбекте бөлініп шығатын қуат тек кернеу мен ток күшіне ғана емес, сонымен бірге ток пен кернеу арасындағы фаза айырымына да тәуелді болады.

U және I шамалары қандай болғанда да, $\varphi = \pi/2$ болғанда $\langle P \rangle = 0$. Бұл жағдайда ширек периодта генератордан сыртқы тізбекке берілетін энергия, келесі ширек период ішінде сыртқы тізбектен генераторға жеткізілетін энергияға дәлме-дәл тең болады

да, барлық энергия генератор мен сыртқы тізбек арасында пайдасыз «тербеледі».

Қуаттың $\cos \varphi$ -ға тәуелділігін айнымалы токтың электр жеткізу желілерін жобалау кезінде ескеру қажет. Егер қоректенетін жүктемелердің X реактивті кедергілері үлкен болса, $\cos \varphi$ бірден елерліктей аз болады. Сондықтан әрқашанда жүктемені, индуктивтікті және сыйымдылықты $\cos \varphi$ мүмкіндігінше бірге жақын болатындай етіп алуға тырысу керек. Бұл үшін X реактив кедергіні барынша азайту жеткілікті, яғни индуктивтік және сыйымдылық кедергілердің теңдігін ($X_L = X_C$) қамтамасыз ету керек.

Қорытындыда тізбекті құрап тұрған өткізгіштердің электрлік кедергісі ұғымына қарағанда актив кедергі ұғымының кең екенін атап өтеміз. Соңғысында ток энергиясының джоульдік жылуға өтуі болады, алайда бұл энергияның басқа да, мысалы, механикалық энергияға түрленуі болуы мүмкін (электромоторлар). Онда актив кедергі енді электрлік кедергідей болмайды, әдетте ол одан едәуір артық болады.

Есептер

11.1. Меншікті өшпейтін тербелістер. Сыйымдылығы C конденсатордан және индуктивтігі L катушадан тұратын контурда конденсатордағы кернеудің амплитудасы U_m болатын еркін өшпейтін тербелістер орындалады. Катушкадағы магниттік энергия конденсатордағы электр энергиясына тең болған мезеттегі катушкадағы өздік индукция э.к.к.-н табу керек.

Шешімі. Ом заңына сәйкес

$$RI = U + \mathcal{E}_s,$$

мұндағы U – конденсатордағы кернеу ($U = \varphi_1 - \varphi_2$). Біздің жағдайымызда $R = 0$, сондықтан $\mathcal{E} = -U$. Конденсатордағы электр энергиясы катушканың магниттік энергиясына тең болған мезеттегі U кернеуді табу керек. Осы шартта былай деп жазуға болады:

$$\frac{CU_m^2}{2} = \frac{C^2}{2} + \frac{LI^2}{2} = 2 \frac{CU^2}{2},$$

осыдан $|U| = U_m / \sqrt{2}$.

Нәтижесінде $|\mathcal{E}_s| = U_m/\sqrt{2}$ болады.

- 11.2.** Тербелмелі контур индуктивтігі L катушкадан және сыйымдылығы C зарядталмаған конденсатордан тұрады. Контурдың актив кедергісі $R = 0$. Катушка тұрақты магнит өрісінде орналасқан, оның барлық орамдарын қиып өтетін толық магнит ағыны Φ -ке тең. $t = 0$ мезетте магнит өрісі күрт ажыратылады. Контурдағы токты t уақыттың функциясы ретінде табу керек.

Шешімі. Сыртқы магнит өрісін күрт ажыратқанда $t = 0$ мезетте индукциялық ток пайда болады, бірақ конденсатор әлі зарядталмаған болады. Сондықтан Ом заңына сәйкес.

$$RI = -\frac{d\Phi}{dt} - L\frac{dI}{dt}.$$

Берілген жағдайда $R = 0$, демек $\dot{\Phi} + L\dot{I} = 0$ осыдан $\Phi = LI_0$, мұндағы I_0 – бастапқы ток (тікелей өрісті ажыратқаннан кейінгі).

Сыртқы өрісті ажыратқаннан кейін, процесс мына теңдеумен сипатталады:

$$0 = -\frac{q}{C} - L\frac{dI}{dt}. \quad (1)$$

Осы теңдеуді уақыт бойынша дифференциалдап, мынаны аламыз:

$$\ddot{I} + \frac{1}{LC}I = 0.$$

Бұл гармониялық тербелістердің теңдеуі, оның шешімін төмендегідей түрде іздейміз.

$$I = I_m \cos(\omega_0 t + \alpha).$$

I_m және α тұрақтыларды бастапқы шарттардан табамыз:

$$I(0) = I_0, \frac{dI}{dt}(0) = 0$$

(екінші шарт (1)-ші теңдеуден шығады, өйткені бастапқы $t = 0$ мезетте конденсатор зарядталмаған болатын). Осы шарттардан $\alpha = 0$, $I_m = I_0$ -ді табамыз. Нәтижесінде

$$I = I_0 \cos \omega_0 t = (\Phi/L) \cos \omega_0 t,$$

мұндағы $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

11.3. Тербелмелі контурда энергиясы W еркін өшпейтін тербелістер орындалады. Конденсатор пластиналарын тербелістердің жиілігі η есе артатындай етіп, *баяу* жылжытады. Бұл кезде электр күштеріне қарсы қандай жұмыс жасалды?

Шешімі. W контур тербелісі энергиясының өсімшесі электр күштеріне қарсы жұмыстың есебінен болатындығынан бастаймыз. Алдымен бұл жұмысты δt уақыт аралығында анықтаймыз, сол уақыт ішінде пластиналар арақашықтығы dh -қа артқан:

$$dA = \langle F \rangle dh = \langle qE \rangle dh, \quad (1)$$

мұндағы, $\langle F \rangle$ – пластиналар арасындағы электрлік өзара әсер ету күші модулінің δt -дағы орташа мәні. $E = q/2\varepsilon_0 S$ болғандықтан және $C = \varepsilon_0 S/h$ формуласына сәйкес $dh = \varepsilon_0 S d(1/C)$, онда

$$dA = \langle q^2/2 \rangle d(1/C). \quad (2)$$

Берілген жағдайда (процесс баяу) δt уақыт аралығын $T \ll \delta t \ll t$ болатындай етіп аламыз, мұндағы T – тербелістер периоды, t – барлық процестің уақыты. Осы шартта δt уақыт ішіндегі тербелістерді іс жүзінде гармониялық және $\langle q^2 \rangle = q_m^2/2 = WC$ деп есептеуге болады, өйткені $W = q_m^2/2C$. Осыны ескеріп, (2)-ні қайтадан жазамыз және алынған өрнекті dW -ге теңестіреміз.

$$\frac{1}{2} WC d\left(\frac{1}{C}\right) = dW \text{ немесе } \frac{dW}{W} = -\frac{dC}{2C}. \quad (3)$$

Соңғы теңдеуді интегралдап, $\ln(W\sqrt{C}) = \text{const}$ -ны табамыз. $\omega \propto 1/\sqrt{C}$ екенін ескеріп, мынаны аламыз

$$W/\omega = \text{const}. \quad (4)$$

Бұл маңызды қатыс және тек *баяу* процестер үшін дұрыс. Ізделініп отырған жұмысты контурдың тербелмелі энергиясының өсімшесі ретінде беруге болады: $A = W' - W$. (4)-ті пайдаланып, мынаны аламыз:

$$A = W(\omega'/\omega - 1) = W(\eta - 1).$$

11.4. Контурдың төзімділігі. Өшуі аз, тербелмелі контурдың сыйымдылығы C және индуктивтігі L . Онда конденсатордағы кернеу амплитудасы U_m болатын өшпейтін гармониялық тербелістерді сүйемелдеу үшін, $\langle P \rangle$ орташа қуат жеткізу қажет. Контурдың төзімділігін табу керек.

Шешімі. Өшудің аздығы салдарынан (11.23) формуласын пайдаланамыз:

$$Q = 2\pi W / \delta W, \quad (1)$$

мұндағы $W \approx CU_m^2/2$ және $dW = \langle P \rangle T$, T – өшетін тербелістердің периоды. Біздің жағдайымызда $T \approx T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$. Осы өрнектерді (1)-ге қойғаннан кейін, мынаны аламыз:

$$Q = \frac{U_m^2}{2\langle P \rangle} \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

11.5. Өшетін тербелістер. Тербелмелі контур сыйымдылығы C конденсатордан, индуктивтігі L катушкadan, R актив кедергіден және кілттен тұрады. Кілт ажыратылып тұрғанда конденсаторды зарядтайды да, содан кейін кілтті тұйықтайды. Бастапқы мезеттегі конденсатордағы кернеудің оның амплитудалық мәніне қатынасын табу керек (дереу кілтті тұйықтағаннан кейін).

Шешімі. Конденсатордағы кернеудің уақытқа тәуелділігі зарядты-кіндей болады:

$$U = U_m e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha). \quad (1)$$

$t = 0$ бастапқы мезетте кернеу $U(0) = U_m \cos \alpha$, мұндағы U_m – осы мезеттегі амплитуда. $U(0)/U_m$ -ді, яғни $\cos \alpha$ -ны табуымыз керек.

Бұл үшін басқа бастапқы шартты пайдаланамыз: $t = 0$ мезетте ток $I = \dot{q} = 0$. $q = CU$ болғандықтан, (1)-ді уақыт бойынша дифференциалдап, $t = 0$ мезеттегі өрнекті нөлге теңестірсе жеткілікті. $-\beta \cos \alpha - \omega \sin \alpha = 0$ -ді аламыз, осыдан $\tan \alpha = -\beta/\omega$. Сондықтан ізделініп отырған қатыс

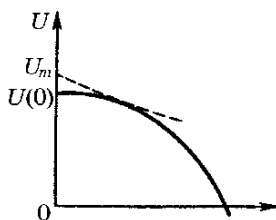
$$\frac{U(0)}{U_m} = \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\beta/\omega)^2}}. \quad (2)$$

$U(0)$ және U_m шамалар 11.8-суретте көрсетілген.

$\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$ екенін ескеріп, (2)-ні төмендегідей түрге келтіреміз.

$$U(0)/U_m = \sqrt{1 - (\beta/\omega)^2} = \sqrt{1 - R^2 C / 4L}.$$

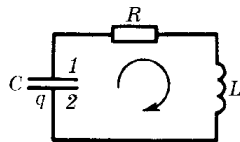
мұнда $\beta = R/2L$ және $\omega_0^2 = 1/LC$ екендігі ескерілген.



11.8-сурет

- 11.6.** Сыйымдылығы C және индуктивтігі L тербелмелі контурда өшетін тербелістер жасалады, онда ток уақыт өтуімен $I(t) = I_m e^{-\beta t} \sin \omega t$ заңымен өзгереді. Уақытқа тәуелділікте конденсатордағы кернеуді табу керек.

Шешімі. Сағат тілі бойымен контурды айналып өтудің оң бағытын таңдап аламыз (11.9-сурет). Ом заңына сәйкес контурдың $IRL2$ бөлігі үшін $RI = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_S$. Біздің жағдайымызда $\mathcal{E}_S = -L\dot{I}$ және $\varphi_2 - \varphi_1 = q/C = U_C$, мұндағы q –ші астардағы заряд, сондықтан бірінші формуланы былай жазуға болады:



11.9-сурет

$$U_C = -RI - L\dot{I}.$$

Осыған $I(t)$ меноның туындысына арналған өрнекті қойып, мынаны аламыз:

$$U_C = \frac{RI_m e^{-\beta t}}{2\beta} (-\beta \sin \omega t - \omega \cos \omega t).$$

Жақша ішіндегі өрнекті синуска түрлендіреміз. Бұл үшін оны $\sqrt{\omega^2 + \beta^2} = \omega_0$ -ге көбейтеміз және бөлеміз, ал содан кейін төмендегі формулалар бойынша δ бұрышты енгіземіз

$$-\beta/\omega_0 = \cos \delta, \quad \omega/\omega_0 = \sin \delta. \quad (1)$$

Онда

$$U_C = \frac{RI_m \omega_0}{2\beta} e^{-\beta t} \sin(\omega t - \delta) = I_m \sqrt{L/C} e^{-\beta t} \sin(\omega t - \delta),$$

мұндағы δ бұрыш (1)-ге сәйкес екінші ширекте жатыр, яғни $\pi/2 < \delta < \pi$ мәндерді қабылдайды. Сөйтіп конденсатордағы кернеу фаза жағынан токтан қалады.

- 11.7. Тербелістерді орнықтыру.** Индуктивтігі L және актив кедергісі R катушка $t = 0$ мезетте $U = U_m \cos \omega t$ сыртқы кернеуге қосылады. t уақыттың функциясы ретінде тізбектегі токты табу керек.

Шешімі. Берілген жағдайда $RI = U - L\dot{I}$ немесе

$$\dot{I} + (R/L)I = (U_m/L) \cos \omega t.$$

Бұл теңдеудің шешімі біртекті теңдеудің жалпы шешімі мен біртекті емес теңдеудің дербес шешімінің қосындысы болып табылады:

$$I(t) = Ae^{-(R/L)t} + \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\omega t - \varphi),$$

мұндағы, A – қалауымызша алынған тұрақты, ал φ бұрыш (11.36) шартынан анықталады: $\operatorname{tg} \varphi = \omega L/R$.

А тұрақтыны $I(0) = 0$ бастапқы шарттан табамыз.

Осыдан $A = -(U_m/\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}) \cos \varphi$. Нәтижесінде

$$I(t) = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} [\cos(\omega t - \varphi) - e^{-(R/L)t} \cos \varphi].$$

t жеткілікті үлкен болғанда, квадрат жақшадағы екінші қосылғыш ескеруге болмайтындай аз болады да, $I(t) \propto \cos(\omega t - \varphi)$ орныққан шешім аламыз.

11.8. Еріксіз тербелістер. Тізбектей қосылған конденсатор мен R актив кедергіден тұратын тізбек бөлігі амплитудасы U_m сыртқы айнымалы кернеуге қосылады. Бұл кезде орныққан ток амплитудасы I_m болды. Ток пен сыртқы кернеудің арасындағы фаза айырымын табу керек.

Шешімі. Берілген жағдайда

$$U = U_m \cos \omega t, \quad I = I_m \cos(\omega t - \varphi),$$

мұндағы, φ (11.36) формуласымен анықталады: $\operatorname{tg} \varphi = -1/\omega CR$.

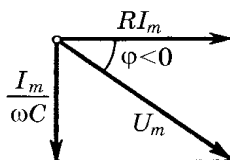
C сыйымдылықтың белгісіз мәнін ток амплитудасы өрнегінен табамыз:

$I_m = U_m/\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}$, осыдан

$$C = \frac{1}{\omega \sqrt{(U_m/I_m)^2 - R^2}}.$$

$\operatorname{tg} \varphi$ -дің өрнегіне қойғаннан кейін мынаны аламыз:

$$\operatorname{tg} \varphi = -\sqrt{(U_m/RI_m)^2 - 1}.$$



Біздің жағдайымызда $\varphi < 0$, демек ток сыртқы кернеуден фаза жағынан **озады** (11.10-сурет).

11.10-сурет

11.9. Тізбектей қосылған конденсатордан және актив кедергісі бар катушкадан тұратын айнымалы ток тізбегі амплитудасын өзгертпей, жиілігін өзгертуге болатын сыртқы айнымалы кернеуге қосылған. ω_1 және ω_2 жиіліктерде ток күшінің амплитудалары бірдей болды. Токтың резонанстық жиілігін табу керек.

Шешімі. (11.35)-ке сәйкес амплитудалар төмендегі шартта бірдей болады

$$\left| \omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C} \right| = \left| \omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C} \right|. \quad (1)$$

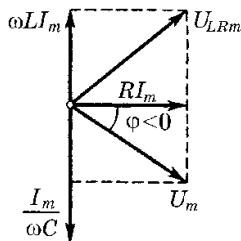
Токтың резонанстық қисығының максимумына $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ меншікті жиілікке тең жиілік сәйкес келеді. $\omega_1 < \omega_0 < \omega_2$ болсын делік (керісінше де ұйғаруға болады, одан акырғы нәтиже өзгермейді), онда модульдерді төмендегідей алып, (1) теңдікті қайта жазуға болады: $\omega_0^2/\omega_1 - \omega_1 = \omega_2 - \omega_0^2/\omega_2$, немесе

$$\omega_2 + \omega_1 = \omega_0^2 \left(\frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2} \right).$$

Осы теңдіктің екі жағын $(\omega_2 + \omega_1)$ -ге қысқартқаннан кейін $1 = \omega_0^2/\omega_1\omega_2$ -ні аламыз, осыдан

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1\omega_2}.$$

11.10. Векторлық диаграмма. Тізбектей қосылған сыйымдылығы C конденсатордан және актив кедергісі R , индуктивтігі L катушкadan тұратын тізбек амплитудасы U_m және жиілігі ω сыртқы гармониялық кернеуге қосылған. Ток сыртқы кернеуден фаза жағынан озады деп есептеп, сәйкес векторлық диаграмманы салып, оның көмегімен катушкадағы кернеудің амплитудасын табу керек.



11.11-сурет

Шешімі. Берілген жағдай үшін векторлық диаграмма түрі, 11.11-суретте көрсетілгендей болады. Бұл диаграммадан катушкадағы кернеу амплитудасы

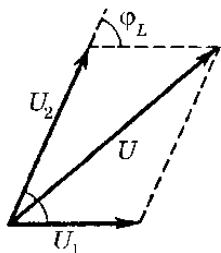
$$U_{LRm} = I_m \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$$

Екендігі бірден көрініп тұр, мұндағы $I_m = U_m / \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$. Актив кедергі болғанда катушкадағы кернеудің токтан фаза бойынша озуы $\pi/2$ -ден аз болады.

11.11. Айнымалы ток тізбегіндегі қуат. Тізбектей қосылған R индукциясыз кедергіден және белгілі бір актив кедергісі бар катушкadan тұратын тізбек әсерлік кернеуі U желіге қосылған. Егер R кедергідегі және

катушкадағы әсерлік кернеулер сәйкес U_1 және U_2 -ге тең болса, онда катушкада бөлінетін жылулық қуатты табу керек.

Шешімі. 11.12-суретте берілген векторлық диаграмманы пайдаланамыз.



11.12-сурет

Косинустар теоремасына сәйкес бұл диаграммадан

$$U^2 = U_1^2 + U_2^2 + 2U_1U_2 \cos \varphi_L. \quad (1)$$

Катушкада бөлінетін қуат:

$$P_2 = IU_2 \cos \varphi_L, \quad (2)$$

мұндағы $I = U_1/R$. (1) және (2) теңдеулерден мынаны аламыз:

$$P_2 = (U^2 - U_1^2 - U_2^2)/2R.$$

Қосымшалар



1. Шамалардың СИ және Гаусс жүйесіндегі бірліктері

Шама	Белгіленулер	Шаманың бірлігі		Қатынас СИ бірл. СГС бірл.
		СИ	СГС	
Күш	F	Н	дин	10^5
Жұмыс, энергия	A, W	Дж	эрг	10^7
Заряд	q	Кл	СГСЭ бірл.	$3 \cdot 10^9$
Электр өрісінің кернеулігі	E	В/м	СГСЭ бірл.	$1/(3 \cdot 10^4)$
Потенциал, кернеу	φ, U	В	СГСЭ бірл.	$1/300$
Электрлік момент	p	Кл·м	СГСЭ бірл.	$3 \cdot 10^{11}$
Полярлану	P	Кл/м ²	СГСЭ бірл.	$3 \cdot 10^5$
D векторы	D	Кл/м ²	СГСЭ бірл.	$12 \pi \cdot 10^5$
Сыйымдылық	C	Ф	см	$9 \cdot 10^{11}$
Ток күші	I	А	СГСЭ бірл.	$3 \cdot 10^9$
Ток тығыздығы	j	А/м ²	СГСЭ бірл.	$3 \cdot 10^5$
Кедергі	R	Ом	СГСЭ бірл.	$1/(9 \cdot 10^{11})$
Меншікті кедергі	ρ	Ом·м	СГСЭ бірл.	$1/(9 \cdot 10^9)$
Өткізгіштік	Σ	См	СГСЭ бірл.	$9 \cdot 10^{11}$
Меншікті өткізгіштік	σ	См/м	СГСЭ бірл.	$9 \cdot 10^9$
Магниттік индукция	B	Тл	Гс	10^4
Магнит ағыны, магниттік ілініс	Φ, Ψ	Вб	Мкс	10^8
Магниттік момент	p_m	А·м ²	СГСМ бірл.	10^3
Магниттелгендік	J	А/м	СГСЭ бірл.	10^{-3}
H векторы	H	А/м	Э	$4 \pi \cdot 10^{-3}$
Индуктивтік	L	Гн	см	10^9

2. Электромагнетизмнің СИ және Гаусс жүйесіндегі негізгі формулалары

Аталуы	СИ	Гаусс жүйесі
Нүктелік зарядтың E өрісі	$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$	$E = \frac{q}{r^2}$
Жазық конденсатордағы және өткізгіш бетіндегі E өріс	$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon}$	$E = \frac{4\pi\sigma}{\epsilon}$
Нүктелік заряд өрісінің потенциалы	$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$	$\varphi = \frac{q}{r}$
E және φ арасындағы байланыс	$E = -\nabla\varphi, \varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \mathbf{E} d\mathbf{l}$	
Электростатикалық өрістегі E векторының циркуляциясы	$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0$	
Дипольдың электрлік моменті	$\mathbf{p} = q\mathbf{l}$	
E өрістегі p электрлік диполь	$\mathbf{F} = p \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial l}, \mathbf{M} = [\mathbf{pE}], W = -\mathbf{pE}$	
Полярлану мен кернеулік арасындағы байланыс	$\mathbf{P} = \kappa\epsilon_0 \mathbf{E}$	$\mathbf{P} = \kappa \mathbf{E}$
$\sigma', \mathbf{P}$ және E арасындағы байланыс	$\sigma' = P_n = \kappa\epsilon_0 E_n$	$\sigma' = P_n = \kappa E_n$
D векторының анықтамасы	$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$	$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$
ϵ және иарасындағы байланыс	$\epsilon = 1 + \kappa$	$\epsilon = 1 + 4\pi\kappa$
D және E арасындағы байланыс	$\mathbf{D} = \epsilon\epsilon_0 \mathbf{E}$	$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$
D векторы үшін Гаусс теоремасы	$\oint \mathbf{D} d\mathbf{S} = q$	$\oint \mathbf{D} d\mathbf{S} = 4\pi q$
Конденсатор сыйымдылығы	$C = q/U$	
Жазық конденсатордың сыйымдылығы	$C = \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{h}$	$C = \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{4\pi h}$
Зарядтар жүйесінің энергиясы	$W = 1/2 \sum q_i \varphi_i$	
Өзара әсердің толық энергиясы	$W = 1/2 \int \rho \varphi dV$	
Конденсатор энергиясы	$W = qU/2 = CU^2/2 = q^2/2C$	
Электр өрісінің энергия тығыздығы	$\omega = \mathbf{ED}/2$	$\omega = \mathbf{ED}/8\pi$
Үздіксіздік теңдеуі	$\int \mathbf{j} d\mathbf{S} = -\frac{dq}{dt},$	$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$

Аталуы	СИ	Гаусс жүйесі
Ом заңы	$RI = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}, \quad \mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*)$	
Джоуль-Ленц заңы	$\dot{Q} = RI^2,$	$\dot{Q}_{\text{менш}} = \rho j^2$
Лоренц күші	$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q[\mathbf{v}\mathbf{B}]$	$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + \frac{q}{c}[\mathbf{v}\mathbf{B}]$
Қозғалыстағы зарядтың $\mathbf{B}$ өрісі	$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q[\mathbf{v}\mathbf{r}]}{r^3}$	$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{q[\mathbf{v}\mathbf{r}]}{r^3}$
Био-Савар заңы	$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\mathbf{j}\mathbf{r}]dV}{r^3}$	$d\mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{[\mathbf{j}\mathbf{r}]dV}{r^3}$
	$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I[d\mathbf{l}, \mathbf{r}]}{r^3}$	$d\mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{I[d\mathbf{l}, \mathbf{r}]}{r^3}$
B өрісі:		
а) түзу токтың	$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{b}$	$B = \frac{1}{c} \frac{2I}{b}$
б) орам центріндегі	$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi I}{R}$	$B = \frac{1}{c} \frac{2\pi I}{R}$
в) соленоидтағы	$B = \mu_0 nI$	$B = \frac{4\pi}{c} nI$
Ампер заңы	$d\mathbf{F} = I[d\mathbf{l}, \mathbf{B}]$	$d\mathbf{F} = \frac{1}{c} [d\mathbf{l}, \mathbf{B}]$
	$d\mathbf{F} = [\mathbf{j}\mathbf{B}]dV$	$d\mathbf{F} = \frac{1}{c} [\mathbf{j}\mathbf{B}]dV$
Параллель токтардың өзара әсерлесу күші	$F_{\text{бiрл}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{b}$	$F_{\text{бiрл}} = \frac{2I_1 I_2}{b}$
Тоғы бар контурдың магниттік моменті	$p_m = IS$	$p_m = \frac{1}{c} IS$
B өрісіндегі p_m магниттік момент	$\mathbf{F} = p_m \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial n}, \quad \mathbf{N} = [p_m \mathbf{B}]$	
Тоғы бар контур орын ауыстырғандағы жұмыс	$A = I(\Phi_2 - \Phi_1)$	$A = \frac{1}{c} I(\Phi_2 - \Phi_1)$
Магниттелгендік циркуляциясы	$\oint \mathbf{J} d\mathbf{l} = I'$	$\oint \mathbf{J} d\mathbf{l} = \frac{1}{c} I'$
H векторының анықтамасы	$\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{J}$	$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{J}$
Стационар өрісіндегі H векторының циркуляциясы	$\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = I$	$\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} I$
J және H		$\mathbf{J} = \chi \mathbf{H}$
μ және χ	$\mu = 1 + \chi$	$\mu = 1 + 4\pi\chi$
B және H арасындағы байланыс	$\mathbf{B} = \mu\mu_0 \mathbf{H}$	$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$

Аталуы	СИ	Гаусс жүйесі
$\vartheta_0 \ll c$ болғанда $\mathbf{E}$ және $\mathbf{B}$ өрістерінің түрлену заңы	$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + [\mathbf{v}_0 \mathbf{B}]$ $\mathbf{B}' = \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} [\mathbf{v}_0 \mathbf{E}]$	$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_0 \mathbf{B}]$ $\mathbf{B}' = \mathbf{B} - \frac{1}{c} [\mathbf{v}_0 \mathbf{E}]$
Электромагниттік өріс инварианттары	$\mathbf{EB} = \text{inv}$ $E^2 - c^2 B^2 = \text{inv}$	$E^2 - B^2 = \text{inv}$
Индукция э.к.к.-і	$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}$	$\mathcal{E}_i = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}$
Индуктивтік	$L = \Phi/I$	$L = c \Phi/I$
Соленоид индуктивтігі	$L = \mu\mu_0 n^2 V$	$L = 4\pi\mu n^2 V$
Өздік индукция э.к.к.-і	$\mathcal{E}_s = -L \frac{dI}{dt}$	$\mathcal{E}_s = -\frac{1}{c^2} L \frac{dI}{dt}$
Токтың магнит өрісінің энергиясы	$W = \frac{LI^2}{2}$	$W = \frac{1}{c} \frac{LI^2}{2}$
Магнит өрісі энергиясының тығыздығы	$\omega = \frac{\mathbf{BH}}{2}$	$\omega = \frac{\mathbf{BH}}{8\pi}$
Бйғысу тогының тығыздығы	$\mathbf{j}_{\text{бйф}} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	$\mathbf{j}_{\text{бйф}} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$
Интегралдық түрдегі Максвелл тендеуі	$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\int \dot{\mathbf{B}} d\mathbf{S}$ $\oint \mathbf{D} d\mathbf{S} = \int \rho dV$ $\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int (\mathbf{j} + \dot{\mathbf{D}}) d\mathbf{S}$ $\oint \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0$ $\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}$ $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \dot{\mathbf{D}}$ $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ $E\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon} = H\sqrt{\mu_0\mu}$ $\mathbf{\Pi} = [\mathbf{EH}]$ $\mathbf{G} = \frac{1}{c^2} [\mathbf{EH}]$	$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{1}{c} \int \dot{\mathbf{B}} d\mathbf{S}$ $\oint \mathbf{D} d\mathbf{S} = 4\pi \int \rho dV$ $\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \int \left(\mathbf{j} + \frac{\dot{\mathbf{D}}}{4\pi} \right) d\mathbf{S}$ $\oint \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0$ $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{B}}$ $\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho$ $\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \left(\mathbf{j} + \frac{\dot{\mathbf{D}}}{4\pi} \right)$ $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ $E\sqrt{\varepsilon} = H\sqrt{\mu}$ $\mathbf{\Pi} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{EH}]$ $\mathbf{G} = \frac{1}{4\pi c} [\mathbf{EH}]$
Дифференциалдық түрдегі Максвелл тендеулері		
Электромагнит толқындағы E және H арасындағы байланыс		
Пойнтинг векторы		
Электромагниттік өріс импульсының тығыздығы		

3. Негізгі шамалар және СИ бірліктері

Уақыт t – құбылыстар мен материя күйінің ретімен ауысуын сипаттайтын, олардың болмысының ұзақтығын сипаттайтын шама; бірлігі – секунда (с).

Секунда цезий – 133 атомының негізгі күйінің екі аса жұқа деңгейлері арасындағы өтуге сәйкес сәуле шығарудың 9 192 631 770 периодына тең.

Ұзындық l – созылыңқылықты, қашықтықты және берілген сызық бойымен дененің, не оның бөліктерінің орын ауыстыруын сипаттайтын шама; бірлігі – метр (м).

Метр – вакуумда жарықтың $1/299\,792\,458$ с уақыт ішінде жүретін жолының ұзындығы.

Масса m – материялық объектілердің инерттік және гравитациялық қасиеттерін сипаттайтын шама; бірлігі – килограмм (кг).

Килограмм өлшеуіштер мен таразылардың Халықаралық бюросында сақтаулы тұрған платина – иридий эталонның массасына тең (Севрде, Парижге жақын). Масса эталоны 4°C -тағы 1 дм^3 таза судың массасына жуық.

Электрлік ток күші I – сан жағынан қарастырылып отырған бет арқылы бірлік уақытта тасымалданатын электр зарядына тең скаляр шама; бірлігі – ампер (А).

Ампер вакуумда бір-бірінен 1 м қашықта орналасқан шексіз ұзын және дөңгелек қимасының ауданы аз, екі параллель өткізгіш бойымен ток өткен кезде өткізгіштің ұзындығы 1 м әрбір бөлігінде $2 \cdot 10^{-7}\text{ Н}$ өзара әсер күшін тудыратын тұрақты ток күшіне тең.

Термодинамикалық температура T – термодинамикалық шкала бойымен абсолют нөлден бастап есептелетін температура; бірлігі – кельвин (К).

Кельвин судың үштік нүктесінің термодинамикалық температурасының $1/273,16$ бөлігіне тең.

Зат мөлшері n – денені (денелер жүйесін) құрайтын құрылымдық элементтердің санына тең шама; бірлігі – моль.

Моль массасы $0,012\text{ кг}$ көміртегі – 12 -де қанша атомдар болса, сонша құрылымдық элементтерден тұратын жүйенің зат мөлшеріне тең. Мольді қолданғанда құрылымдық элементтер арнаулы болуы керек, олар атомдар да, молекулаларда, электрондарда және басқа бөлшектерде, не бөлшектердің арнаулы тобы бола алады.

4. Грек алфавиті

Α, α – альфа	Ι, ι – йота	Ρ, ρ – ро
Β, β – бета	Κ, κ – каппа	Σ, σ – сигма
Γ, γ – гамма	Λ, λ – ламбда	Τ, τ – тау
Δ, δ – дельта	Μ, μ – мю	Υ, υ – ипсилон
Ε, ε – эпсилон	Ν, ν – ню	Φ, φ – фи
Ζ, ζ – дзета	Ξ, ξ – кси	Χ, χ – хи
Η, η – эта	Ο, ο – омикрон	Ψ, ψ – пси
Θ, θ, ϑ – тета	Π, π – пи	Ω, ω – омега

5. Кейбір физикалық константалар

Вакуумдағы жарық жылдамдығы	$c = 2,998 \cdot 10^8 \text{ м/с}$
Гравитациялық тұрақты	$G = \begin{cases} 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2) \\ 6,67 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3/(\text{г} \cdot \text{с}^2) \end{cases}$
Еркін түсу үдеуі	$g = 9,807 \text{ м/с}^2$
Авогадро заңы	$N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$
Элементар заряд	$e = \begin{cases} 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} \\ 4,803 \cdot 10^{-10} \text{ СГСЭ} \end{cases}$
Электрон массасы	$m_e = 0,911 \cdot 10^{-30} \text{ кг}$
Электронның меншікті заряды	$e/m_e = \begin{cases} 1,76 \cdot 10^{11} \text{ Кл/кг} \\ 5,27 \cdot 10^{17} \text{ СГСЭ/г} \end{cases}$
Протон массасы	$m_p = 1,672 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
Электрлік тұрақты	$\epsilon_0 = 0,885 \cdot 10^{-11} \text{ Ф/м}$ $1/4\pi\epsilon_0 = 9 \cdot 10^9 \text{ м/Ф}$
Магниттік тұрақты	$\mu_0 = 1,257 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м}$ $\mu_0/4\pi = 10^{-7} \text{ Гн/м}$
Жарық жылдамдығы мен ϵ_0 және μ_0 тұрақтылары арасындағы байланыс	$c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$



- Ағын ілінісі 233
- Ампер 190
- Ампер заңы 165
 - күші 165
- Айнымалы ток 267

- Әсерлік ток 311
 - кернеу 311

- Байланысқан зарядтар 73
- Бетатрон 237
- Бетатрондық шарт 262
- Беттік (электрлік) күштер тығыздығы 54
- Био–Савар заңы 153
- Бөгде күштер 129

- Вебер 233
- Вектор ағыны 17
- Векторлық диаграмма 318
- Вольт 30
- В** өріс үшін Гаусс теоремасы 156
 - өрісінің дивергенциясы 163
 - векторы үшін шекаралық шарттар 277

- Генри 241
- Гистерезис 76
 - тұзағы 282

- Джоуль–Ленц заңы 137
- Диамagnetиктер 190
- Дипольға әсер ететін күш 38
 - әсер ететін күштердің моменті 40

Диполь өрісі 36
Дөңгелек ток осындағы магнит өрісі 155
Диэлектриктер 82
Диэлектрик бардағы күштер 106
Диэлектриктердің полярлануы кезіндегі өріс жұмысы 109
Диэлектрлік алғырлық 76
– өтімділік 82
Диэлектриктің полярлануы 91
D векторы 144
– векторы үшін шекаралық шарттар 96
– өріс үшін Гаусс теоремасы 96

Еркін тербелістер 300
Еркін өшпейтін тербелістердің периоды 301
Еріксіз тербелістер 317
E және **D** өрістерінің көздері 82
– және **D** сынуы 86
– өрісінің дивергенциясы 26
– өріс үшін Гаусс теоремасы 26
– векторының циркуляциясы туралы теорема 27
– векторы үшін шекаралық шарттары 96
– векторының циркуляциясы 29

Жазық конденсатордың сыйымдылығы 122
Жалғыздық теоремасы 58
J векторының циркуляциясы туралы теорема 188, 196
– векторының циркуляциясы 186

Заряд тығыздығы 26
Зарядтың инварианттығы 210
Зарядтардың өзара әсер энергиясы 101
– таралуы 14

Индуктивтік 240
Индуктивтік кедергі 310
Индукция э.к.к.-і 242
Индукциялық ток 244
Импеданс 310

Квадрат метрге кулон 75
Квазистационар ток 140
Квазистационарлық шарты 140
Кескін әдісі 58
Кирхгоф ережесі 133
Контур төзімділігі 314
Конденсатор 61
– энергиясы 105
Конденсатордың апериодты разряды 303
– сыйымдылығы 64
Контурдың меншікті жиілігі 307, 309
Коэрцитивтік күш 201
Критикалық кедергі 303
Кулон 13
– заңы 13
Кюри нүктесі 202
– температурасы 202
Қалдық индукция 201
– магниттелгендік 201
Қуат коэффициенті 311

Құйынды өріс 158

Лапласиан 57
Лаплас операторы 57
Лаплас теңдеуі 57
Ленц ережесі 231
Лоренц күші 150

Магнетизмнің табиғаты 216
Магнетик 183, 185
Магниттелудің негізгі қисығы 199
Магниттелу токтары 186
Магнит өрісінің кернеулігі 189
– – энергиясы 249
Магниттік алғырлық 184
– гистерезис 200
– индукция 152

- күш 153, 165
- қысым 259
- момент 167
- тұрақты 201
- энергия тығыздығы 200
- Макроөріс 49
- Максвелдің дифференциалдық теңдеулері 279
 - интегралдық теңдеулері 277
- Меншікті жылулық ток қуаты 138
 - электр өткізгіштік 128
 - энергия 104
 - электрлік кедергі 127
- Материалдық теңдеулер 277
- Метрге ампер 190
 - вольт 13
 - сименс 128
- Молекулалық токтар 185

- Набла операторы 10, 126
- Н** векторы 188
 - векторы үшін шекаралық шарттар 193
 - векторының циркуляциясы 188, 189
 - векторының циркуляциясы туралы теорема 188, 189

- Ом заңы 128
- Омның жалпыланған заңы 129
- Оңашаланған өткізгіш сыйымдылығы 95
- Оңашаланған өткізгіш энергиясы 95

- Өзара индуктивтік 267
 - индукция 267
 - энергия 253
- Өзаралық теорема 268
- Өздік индукция 240
 - индукция э.қ.к.-і 240
- Өріс импульсі 286
- Өрістегі диполь энергиясы 36
- Өрістерді түрлендіру заңдары 216
- Өткізгіштік ток 185

Өтпелі процестер 140
 Өшетін тербелістер 315
 – – амплитудасы 301
 – – периоды 301
 Өшудің логарифмдік декременті 302
 Өшу коэффициенті 302

Параллель токтардың өзара әсер күші 165
 Парамагнетиктер 190
 Пойнтинг векторы 292
 – теоремасы 281
 Полярлану 75
 – тогы 273
 Пондеромоторлық күштер 112
 Потенциал 36
 Потенциалды өріс 36
 Потенциалдың градиенті 33
 Пуассон тендеуі 57

Р векторы үшін шекаралық шарттар 79
 – өрісі үшін Гаусс теоремасы 80
 Реактив кедергі 310
 Резонанс 309
 Резонанстық қисықтар 307
 Релаксация уақыты 141
 Релятивистік заряд өрісі 219

Сегнетоэлектриктер 76
 Сименс 128
 Соленоид 164
 Соленоидты өріс 164
 Соленоидтың магнит өрісі 165
 Суперпозиция принципі 175
 Стационарлық шарты 126
 Сфералық конденсатор сыйымдылығы 63
 Сыйымдылық 61
 – кедергі 310

Тербелмелі контур 296
– теңдеуі 296
Тесла 152
Тоғы бар контурға әсер ететін күштердің моменті 168
– жазықтықтың магнит өрісі 161
Ток күші 124
– қуаты 139
– тығыздығы 143
– элементі 155
– (магнит) энергиясы 253
Толық кедергі (импеданс) 309
– магниттік ағын 313
– өзара әсер энергиясы 104
– ток 271
Томсон формуласы 300
Тороидтың магнит өрісі 161
Тұрақты ток қуаты 148
Түзу токтың магнит өрісі 167
Тізбектің біртекті емес бөлігі үшін Ом заңы 130, 148

Уақыт тұрақтысы 243

Үздіксіздік теңдеуі 124

Фарад 61

Ферромагнетиктер 190

Фуко токтары 232

Физикалық шексіз аз көлем 49

Цилиндрлік конденсатор сыйымдылығы 64

Шағылу коэффициенті 288

Шекаралық шарттар 277

Ығысу (индукция) $\mathbf{D}$ 77

Ығысу тоғы 288

Эквипотенциал бет 34

Электреттер 73

Электродинамикалық тұрақты 152
Электромагниттік өріс 210
– инварианттары 220
Электр өрісінің кернеулігі 13
– энергиясы 100
Электромагниттік индукция заңы 232
– инерция 232
– толқындар 280
– толқынның қысымы 286
Электр зарядының сақталу заңы 12
Электростатикалық индукция 50
– қорғаныс 55
Электрлік диполь 36
– моменті 37
Электрлік тұрақты 13
Электр қозғаушы күш 131
– сыйымдылық 61
– өрісі 12
– тогы 124
Электрострикция 112
Энергия ағынының тығыздығы 282

И. Е. ИРОДОВ

ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

Негізгі заңдар

Оқулық

Басуға 21.05.2013 ж. қол қойылды. Қағазы офсеттік.
Қаріп түрі «Times». Пішімі 60х90^{1/16}. Офсеттік басылым.
Баспа табағы 21,0. Таралымы 1650 дана. Тапсырыс № 7971.

Қазақстан Республикасы «Полиграфкомбинат» ЖШС-і,
050002, Алматы қаласы, М. Мақатаев көшесі, 41.

