

**ҚАРАҒАНДЫ
УНИВЕРСИТЕТІНІҢ
ХАБАРШЫСЫ
ВЕСТНИК
КАРАГАНДИНСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА**

ISSN 0142-0843

МАТЕМАТИКА сериясы
№ 3(71)/2013
Серия **МАТЕМАТИКА**

Шілде–тамыз–қыркүйек
1996 жылдан бастап шығады
Жылына 4 рет шығады

Июль–август–сентябрь
Издается с 1996 года
Выходит 4 раза в год

Собственник РГП

**Қарагандинский государственный университет
имени академика Е.А.Букетова**

Бас редакторы — Главный редактор

Е.К.КУБЕЕВ,

академик МАН ВШ, д-р юрид. наук, профессор

Зам. главного редактора Х.Б.Омаров, д-р техн. наук
Ответственный секретарь Г.Ю.Аманбаева, д-р филол. наук

Серияның редакция алқасы — Редакционная коллегия серии

М.И.Рамазанов, научный редактор д-р физ.-мат. наук;
М.Отелбаев, акад. НАН РК, д-р физ.-мат. наук;
Б.Р.Ракишев, акад. НАН РК, д-р техн. наук;
З.Б.Беркалиев, PhD, профессор (США);
А.А.Шкаликов, д-р физ.-мат. наук (Россия);
Н.А.Бокаев, д-р физ.-мат. наук;
М.Т.Дженалиев, д-р физ.-мат. наук;
К.Т.Искаков, д-р физ.-мат. наук;
Л.К.Кусаинова, д-р физ.-мат. наук;
Е.Д.Нурсултанов, д-р физ.-мат. наук;
Е.С.Смаилов, д-р физ.-мат. наук;
У.У.Умербаев, д-р физ.-мат. наук;
Г.Акишев, д-р физ.-мат. наук;
А.Р.Ешкеев, д-р физ.-мат. наук;
Д.М.Ахманова, отв. секретарь канд. физ.-мат. наук

Адрес редакции: 100028, г. Караганда, ул. Университетская, 28

Тел.: 77-03-69 (внутр. 1026); факс: (7212) 77-03-84.

E-mail: vestnick_kargu@ksu.kz. Сайт: <http://www.ksu.kz>

Редакторы *Ж.Т.Нұрмұханова*
Техн. редактор *Д.Н.Муртазина*

Издательство Карагандинского
государственного университета
им. Е.А.Букетова
100012, г. Караганда,
ул. Гоголя, 38,
тел.: (7212) 51-38-20
e-mail: izd_kargu@mail.ru

Басуға 26.09.2013 ж. қол қойылды.
Пішімі 60×84 1/8.
Офсеттік қағазы.
Көлемі 11,5 б.т.
Таралымы 300 дана.
Бағасы келісім бойынша.
Тапсырыс № 964.

Подписано в печать 26.09.2013 г.
Формат 60×84 1/8.
Бумага офсетная.
Объем 11,5 п.л. Тираж 300 экз.
Цена договорная. Заказ № 964.

Отпечатано в типографии
издательства КарГУ
им. Е.А.Букетова

© Карагандинский государственный университет, 2013

Зарегистрирован Министерством культуры и информации Республики Казахстан.

Регистрационное свидетельство № 13104–Ж от 23.10.2012 г.

МАЗМУНЫ

МАТЕМАТИКА

<i>Ахманова Д.М., Жиеналиев М.Т., Космакова М.Т., Рамазанов М.Ы.</i> Вольтерра ерекше интегралды теңдеуі мен оның түйіндесі туралы.....	3
<i>Асылбеков М.А., Төрбек Б.Т., Тұрметов Б.Қ.</i> Гармониялық функциялар класында Риман-Лиувиль интегро-дифференциалдау операторы модификациясының кейбір қасиеттері және қолданылулары.....	11
<i>Әшірбаев Н.К., Әшірбаева Ж.Н.</i> Үзілісті шекаралық шарттармен берілген жазық серпімді денедегі толқындардың таралу есебінің сандық шешімі.....	20
<i>Бейсебаев А.К., Қалиев Д.Н.</i> Рама конструкциясы элементінің қаттылық сипаттамаларын оңтайландыру.....	25
<i>Бейсебаев А.К., Соловьев В.Ю., Заикина Т.В.</i> Тірегі консольді бекітілген үш топсалы арка.....	30
<i>Есбаев А.Н., Есенбаева Г.А., Рамазанов М.Ы.</i> Жүктелген дифференциалдық жылжытқыштық операторы үшін бір шектік есепті зерттеу.....	35
<i>Ысқақов Қ.Т., Оралбекова Ж.О.</i> Толқын теңдеуі үшін кері есепті шешудің оңтайлы әдісі.....	43
<i>Қажыкенова С.Ш., Мазиева К.В., Шурыгина Е.Г.</i> Тілді күрделі, динамикалық, өзін-өзі ұйымдастырушы жүйе ретінде үлгілеу.....	49
<i>Каренов Р.С.</i> Желілік графигі талдау және оңтайландыру әдістемесі.....	53
<i>Букенов М.М., Москаленко А.Н.</i> Динамикалық серпімділік теориясының есебіне арналған алгоритмнің сандық жүзеге асуы.....	65
<i>Нұрсұлтанов Е.Д., Дарбаева Д.К.</i> Морри типтес кеністіктеріндегі орам операторы туралы..	72
<i>Тен Т.Л., Омаров Ғ.Т., Шаяхметова Б.Қ., Антипов Ю.Н.</i> Виртуалды университеттің программалық модульдарын толтырудың үлгілері.....	80
<i>Шаяхметова Б.Қ., Омаров Ғ.Т., Омарова Ш.Е.</i> Арнайы бағдарламалық камтамасыздандырудың күрделі жүйелерге қолдануы.....	86
АВТОРЛАР ТУРАЛЫ МӘЛІМЕТТЕР.....	91

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

<i>Akhmanova D.M., Jenaliyev M.T., Kosmakova M.T., Ramazanov M.I.</i> On a singular integral equation of Volterra and its adjoint one.....	3
<i>Асылбеков М.А., Төрбек Б.Т., Тұрметов Б.Қ.</i> Некоторые свойства и применения модифицированного интегро-дифференциального оператора Римана-Лиувилля в классе гармонических функций.....	11
<i>Аширбаев Н.К., Аширбаева Ж.Н.</i> Численное решение двумерной задачи о распространении волн в упругом теле с разрывными граничными условиями.....	20
<i>Бейсебаев А.К., Калиев Д.Н.</i> Оптимизация жесткостных характеристик элементов рамной конструкции.....	25
<i>Бейсебаев А.К., Соловьев В.Ю., Заикина Т.В.</i> Трехшарнирная арка с консольно-защемленными опорами.....	30
<i>Есбаев А.Н., Есенбаева Г.А., Рамазанов М.И.</i> Исследование одной краевой задачи для нагруженного дифференциального оператора теплопроводности.....	35
<i>Искаков К.Т., Оралбекова Ж.О.</i> Оптимизационный метод решения обратной задачи для волнового уравнения.....	43
<i>Қажыкенова С.Ш., Мазиева К.В., Шурыгина Е.Г.</i> Моделирование языка как сложной, динамичной, самоорганизующейся системы....	49
<i>Каренов Р.С.</i> Методика анализа и оптимизации сетевого графика.....	53
<i>Букенов М.М., Москаленко А.Н.</i> Численная реализация алгоритма для динамической задачи теории упругости.....	65
<i>Нурсултанов Е.Д., Дарбаева Д.К.</i> Об операторе свертки в пространствах типа Морри.....	72
<i>Тен Т.Л., Омаров Ғ.Т., Шаяхметова Б.Қ., Антипов Ю.Н.</i> Модели наполнения программных модулей виртуального университета.....	80
<i>Шаяхметова Б.Қ., Омаров Ғ.Т., Омарова Ш.Е.</i> Использование специального программного обеспечения для сложных систем.....	86
СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ.....	91

D.M.Akhmanova¹, M.T.Jenaliyev², M.T.Kosmakova¹, M.I.Ramazanov¹

¹Ye.A.Buketov Karaganda State University;

²Institute of Mathematics and Mathematical Modeling of MES RK, Almaty (E-mail: muvasharkhan@gmail.com)

On a singular integral equation of Volterra and its adjoint one

The paper deals solutions of mutually conjugate Volterra integral equations of the second kind with a variable limit of integration. Feature of equations consists of incompressibility of the corresponding kernels and, consequently, of the non-applicability of the successive approximation method. The non-zero solutions of singular homogeneous Volterra integral equations of the second kind were obtained. By direct verification it is established that the resulting functions are non-trivial solutions of the homogeneous Volterra integral equation of the second kind with a singular kernel and its adjoint equation.

Key words: volterra integral equation of the second kind, a special kernel, non-trivial solution, adjoint equation.

In the paper [1] solutions mutually conjugate of Volterra integral equations of the second kind for $a = 1$ are obtained

$$\varphi(t) - \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{t + \tau}{(t - \tau)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{(t + \tau)^2}{4a^2(t - \tau)}\right\} + \frac{1}{(t - \tau)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{t - \tau}{4a^2}\right\} \varphi(\tau) d\tau = 0, \tag{1}$$

($t > 0$)

and

$$\psi(t) - \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_t^\infty \frac{\tau + t}{(\tau - t)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{(\tau + t)^2}{4a^2(\tau - t)}\right\} + \frac{1}{(\tau - t)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{\tau - t}{4a^2}\right\} \psi(\tau) d\tau = 0, \tag{2}$$

($t > 0$).

As it was noted, a feature of the investigated equations consists in incompressibility of kernels and is expressed in the fact that the corresponding inhomogeneous equations can not be solved by successive approximation method.

Equations of this type arise in the study of some non-local inner-boundary value problems for a parabolic equation, spectrally loaded parabolic equations, problems with a moving boundary and inverse problems for parabolic equations, etc.

The aforementioned article it was shown that the solution of the integral equation (1) is the function

$$\varphi(t) = C \cdot \left\{ \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{t}{4a^2}} + \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{t}}{2a}\right) + \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \right\}, \tag{3}$$

and a solution of the adjoint equation (2) is the function

$$\psi(t) = \frac{C}{a\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (2n + 1) \exp\left(-\frac{n^2 + n}{a^2} t\right). \tag{4}$$

The reason for writing this article was a doubt some readers that the functions (3) and (4) are indeed solution of homogeneous Volterra integral equations of the second kind (1) and (2) accordingly. By direct verification we will show that these functions are solutions of the corresponding equations. In addition, the cal-

culations themselves are of independent interest in terms of finding unusual ways of solving non-standard integral equations.

1. Nontrivial solution of the direct homogeneous Volterra integral equation of the second kind with a singular kernel

In the course of solving the integral equation (1) was established [2; 183] that it is sufficient for its solution to find a solution of «simplified» equation

$$\varphi(t) - \int_0^t k(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau = 0, \quad (5)$$

where

$$k(t, \tau) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{2t}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{t\tau}{a^2(t-\tau)}\right\} + \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}} \left(1 - \exp\left\{-\frac{t\tau}{a^2(t-\tau)}\right\}\right) \right\}.$$

In [1] «simplified» integral equation (3) is reduced to the Abel integral equation of the second kind

$$\varphi(t) - \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\varphi(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau = \frac{C}{\sqrt{t}}. \quad (6)$$

The solution of the Abel equation (6), ie the solution of the «simplified» homogeneous equation (5) is a function

$$\varphi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} + \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{\frac{t}{4a^2}} \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{t}}{2a}\right) + \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{\frac{t}{4a^2}}. \quad (7)$$

By [2], after multiplication of equality (7) to $e^{-\frac{t}{4a^2}}$ we obtain a solution of the homogeneous equation (1), that is, the function (3) (For simplicity, we adopted $C=1$).

We show that the function (7) satisfies the equation (5). After substituting (7) into (5), considering that the function (7) is the solution of equation (6), we need to prove that the function (7) satisfies equation

$$\frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{t+\tau}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{t\tau}{a^2(t-\tau)}\right\} \varphi(\tau) d\tau = \frac{1}{\sqrt{t}}. \quad (8)$$

We substitute (7) in the left side of (8):

$$\frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{t+\tau}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{t\tau}{a^2(t-\tau)}\right\} \left(\frac{1}{\sqrt{\tau}} + \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{\frac{\tau}{4a^2}} \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{\tau}}{2a}\right) + \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{\frac{\tau}{4a^2}} \right) d\tau = \frac{1}{\sqrt{t}},$$

or

$$\begin{aligned} \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \left[\int_0^t \frac{t+\tau}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{t\tau}{a^2(t-\tau)}\right\} \frac{1}{\sqrt{\tau}} d\tau + \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \int_0^t \frac{t+\tau}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{t\tau}{a^2(t-\tau)}\right\} e^{\frac{\tau}{4a^2}} \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{\tau}}{2a}\right) d\tau + \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \int_0^t \frac{t+\tau}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{t\tau}{a^2(t-\tau)}\right\} e^{\frac{\tau}{4a^2}} d\tau \right] = \frac{1}{\sqrt{t}}. \end{aligned}$$

Thus we need to show validity of the equality

$$\frac{1}{2a\sqrt{\pi}} (I_1(t) + I_2(t) + I_3(t)) = \frac{1}{\sqrt{t}}, \quad (9)$$

where

$$\begin{aligned} I_1(t) &= \int_0^t \frac{t+\tau}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{t\tau}{a^2(t-\tau)}\right\} \frac{1}{\sqrt{\tau}} d\tau; \\ I_2(t) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \int_0^t \frac{t+\tau}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{t\tau}{a^2(t-\tau)}\right\} e^{\frac{\tau}{4a^2}} \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{\tau}}{2a}\right) d\tau; \\ I_3(t) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \int_0^t \frac{t+\tau}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{t\tau}{a^2(t-\tau)}\right\} e^{\frac{\tau}{4a^2}} d\tau. \end{aligned}$$

We calculate the first integral

$$I_1(t) = \int_0^t \frac{t + \tau}{(t - \tau)^{3/2} \sqrt{\tau}} \exp\left\{-\frac{t\tau}{a^2(t - \tau)}\right\} d\tau.$$

The change is $z = \sqrt{\frac{\tau}{t - \tau}}$.

Then

$$I_1(t) = 2 \left[\int_0^\infty \exp\left\{-\frac{t}{a^2} z^2\right\} dz + \int_0^\infty \frac{z^2}{z^2 + 1} \exp\left\{-\frac{t}{a^2} z^2\right\} dz \right].$$

The first integral is Euler-Poisson integral, for the second integral we use the formula (3.466 (2)) of [3]. As a result, we obtain

$$I_1(t) = \frac{2a\sqrt{\pi}}{\sqrt{t}} - \pi \exp\left\{\frac{t}{a^2}\right\} \cdot \operatorname{erfc}\left\{\frac{\sqrt{t}}{a}\right\}. \quad (10)$$

We calculate the integral

$$I_3(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \exp\left\{\frac{t}{a^2}\right\} \int_0^t \frac{t + \tau}{(t - \tau)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{t^2}{a^2(t - \tau)}\right\} \exp\left\{\frac{\tau}{4a^2}\right\} d\tau.$$

The change is $z = \sqrt{t - \tau}$. Then

$$I_3(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{a} \exp\left\{\frac{5t}{4a^2}\right\} \int_0^{\sqrt{t}} \frac{2t - z^2}{z^2} \exp\left\{-\frac{t^2}{a^2 z^2} - \frac{z^2}{4a^2}\right\} dz.$$

As

$$\frac{t^2}{a^2 z^2} + \frac{z^2}{4a^2} = \left(\frac{t}{az} + \frac{z}{2a}\right)^2 - \frac{t}{a^2}$$

and

$$\left(\frac{2t}{z^2} - 1\right) dz = d\left(-\frac{2t}{z} - z\right) = -2a d\left(\frac{t}{az} + \frac{z}{2a}\right),$$

than

$$I_3(t) = -2\sqrt{\pi} \exp\left\{\frac{9t}{4a^2}\right\} \int_0^{\sqrt{t}} \exp\left\{-\left(\frac{t}{az} + \frac{z}{2a}\right)^2\right\} d\left(\frac{t}{az} + \frac{z}{2a}\right).$$

The change $\xi = \frac{t}{az} + \frac{z}{2a}$ leads to the result

$$I_3(t) = \pi \exp\left\{\frac{9t}{4a^2}\right\} \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{3\sqrt{t}}{2a}\right). \quad (11)$$

We consider the integral

$$I_2(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \int_0^t \frac{t + \tau}{(t - \tau)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{t\tau}{a^2(t - \tau)}\right\} \exp\left\{\frac{\tau}{4a^2}\right\} \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{\tau}}{2a}\right) d\tau.$$

As the $\operatorname{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \exp\{-x^2\} dx$, then

$$I_2(t) = \frac{1}{a} \int_0^t \frac{t + \tau}{(t - \tau)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{t\tau}{a^2(t - \tau)}\right\} \exp\left\{\frac{\tau}{4a^2}\right\} \int_0^{\frac{\sqrt{\tau}}{2a}} \exp\{-x^2\} dx d\tau.$$

We interchange order of integration

$$I_2(t) = \frac{1}{a} \int_0^{\frac{\sqrt{t}}{2a}} \exp\{-x^2\} \int_{4a^2 x^2}^t \frac{t + \tau}{(t - \tau)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{t\tau}{a^2(t - \tau)}\right\} \exp\left\{\frac{\tau}{4a^2}\right\} d\tau dx.$$

To calculate the inner integral we introduce the change $z = \sqrt{t - \tau}$. Then (analogously as for calculating integral $I_3(t)$)

$$\begin{aligned} I_2(t) &= \frac{2}{a} \exp\left\{\frac{5t}{4a^2}\right\} \int_0^{\frac{\sqrt{t}}{2a}} \exp\{-x^2\} \int_0^{\sqrt{t-4a^2x^2}} \frac{2t-z^2}{z^2} \exp\left\{-\frac{t^2}{a^2z^2} - \frac{z^2}{4a^2}\right\} dz dx = \\ &= -4 \exp\left\{\frac{9t}{4a^2}\right\} \int_0^{\frac{\sqrt{t}}{2a}} \exp\{-x^2\} \cdot \left\{ \int_0^{\sqrt{t-4a^2x^2}} \exp\left\{-\left(\frac{t}{az} + \frac{z}{2a}\right)^2\right\} d\left(\frac{t}{az} + \frac{z}{2a}\right) \right\} dx. \end{aligned}$$

The change $\xi = \frac{t}{az} + \frac{z}{2a}$ leads to the result

$$\begin{aligned} I_2(t) &= 4 \exp\left\{\frac{9t}{4a^2}\right\} \int_0^{\frac{\sqrt{t}}{2a}} \exp\{-x^2\} \cdot \left\{ \int_{\frac{t}{a\sqrt{t-4a^2x^2}} + \frac{\sqrt{t-4a^2x^2}}{2a}}^{\infty} \exp\{-\xi^2\} d\xi \right\} dx = \\ &= 2\sqrt{\pi} \exp\left\{\frac{9t}{4a^2}\right\} \int_0^{\frac{\sqrt{t}}{2a}} \exp\{-x^2\} \cdot \operatorname{erfc}\left\{\frac{t}{a\sqrt{t-4a^2x^2}} + \frac{\sqrt{t-4a^2x^2}}{2a}\right\} dx. \end{aligned} \tag{12}$$

The results (10)–(12) we substitute in (9):

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \left(\frac{2a\sqrt{\pi}}{\sqrt{t}} - \pi \exp\left\{\frac{t}{a^2}\right\} \cdot \operatorname{erfc}\left\{\frac{\sqrt{t}}{a}\right\} + \pi \exp\left\{\frac{9t}{4a^2}\right\} \cdot \operatorname{erfc}\left\{\frac{3\sqrt{t}}{2a}\right\} + \right. \\ &\left. + 2\sqrt{\pi} \exp\left\{\frac{9t}{4a^2}\right\} \int_0^{\frac{\sqrt{t}}{2a}} \exp\{-x^2\} \cdot \operatorname{erfc}\left\{\frac{t}{a\sqrt{t-4a^2x^2}} + \frac{\sqrt{t-4a^2x^2}}{2a}\right\} dx \right) = \frac{1}{\sqrt{t}}. \end{aligned}$$

After simplification we obtain the equality

$$\int_0^{\frac{\sqrt{t}}{2a}} \exp\{-x^2\} \cdot \operatorname{erfc}\left\{\frac{t}{a\sqrt{t-4a^2x^2}} + \frac{\sqrt{t-4a^2x^2}}{2a}\right\} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\exp\left\{-\frac{5t}{4a^2}\right\} \cdot \operatorname{erfc}\left\{\frac{\sqrt{t}}{a}\right\} - \operatorname{erfc}\left\{\frac{3\sqrt{t}}{2a}\right\} \right).$$

We differentiate this equality on t on both sides

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4a\sqrt{t}} \exp\left\{-\frac{t}{4a^2}\right\} \lim_{x \rightarrow \frac{\sqrt{t}}{2a}} \left(\operatorname{erfc}\left\{\frac{t}{a\sqrt{t-4a^2x^2}} + \frac{\sqrt{t-4a^2x^2}}{2a}\right\} \right) - \\ &- \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\sqrt{t}}{2a}} \exp\{-x^2\} \cdot \frac{d}{dt} \left\{ \frac{t}{a\sqrt{t-4a^2x^2}} + \frac{\sqrt{t-4a^2x^2}}{2a} \right\} \cdot \exp\left\{-\left(\frac{t}{a\sqrt{t-4a^2x^2}} + \frac{\sqrt{t-4a^2x^2}}{2a}\right)^2\right\} dx = \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\exp\left\{-\frac{5t}{4a^2}\right\} \cdot \left[-\frac{5}{4a^2} \operatorname{erfc}\left\{\frac{\sqrt{t}}{a}\right\} - \frac{1}{a\sqrt{\pi t}} \exp\left\{-\frac{t}{a^2}\right\} \right] + \frac{3}{2a\sqrt{\pi t}} \exp\left\{-\frac{9t}{4a^2}\right\} \right). \end{aligned} \tag{13}$$

The limit in the first summand of the left-hand side of the equality (13) is zero.

As

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{t}{a\sqrt{t-4a^2x^2}} + \frac{\sqrt{t-4a^2x^2}}{2a} \right\} = \frac{3t - 20a^2x^2}{4a(t-4a^2x^2)^{3/2}}$$

and

$$\left(\frac{t}{a\sqrt{t-4a^2x^2}} + \frac{\sqrt{t-4a^2x^2}}{2a} \right)^2 = \frac{t^2}{a^2(t-4a^2x^2)} + \frac{5t}{4a^2} - x^2,$$

then (13) takes the form

$$\int_0^{\sqrt{t}} \frac{3t - 20a^2x^2}{(t - 4a^2x^2)^{3/2}} \cdot \exp\left\{-\frac{t^2}{a^2(t - 4a^2x^2)}\right\} dx = \frac{5\pi}{4a} \operatorname{erfc}\left\{\frac{\sqrt{t}}{a}\right\} - \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}} \exp\left\{-\frac{t}{a^2}\right\}. \quad (14)$$

Now we calculate the integral on the left-hand side of (14), which we denote $J(t)$.

We introduce the change $z = \sqrt{t - 4a^2x^2}$. The left-hand side of equation (14) takes the form

$$\begin{aligned} J(t) &= \int_0^{\sqrt{t}} \frac{5(t - 4a^2x^2) - 2t}{(t - 4a^2x^2)^{3/2}} \cdot \exp\left\{-\frac{t^2}{a^2(t - 4a^2x^2)}\right\} dx = \int_0^{\sqrt{t}} \frac{5z^2 - 2t}{z^2} \cdot \exp\left\{-\frac{t^2}{a^2z^2}\right\} \frac{1}{2a\sqrt{t - z^2}} dz = \\ &= \frac{5}{2a} \int_0^{\sqrt{t}} \exp\left\{-\frac{t^2}{a^2z^2}\right\} \frac{1}{\sqrt{t - z^2}} dz - \frac{t}{a} \int_0^{\sqrt{t}} \frac{1}{z^2} \cdot \exp\left\{-\frac{t^2}{a^2z^2}\right\} \frac{1}{\sqrt{t - z^2}} dz. \end{aligned}$$

After the change $v = z^2$ we get:

$$J(t) = \frac{5}{4a} \int_0^t v^{-1/2} \cdot (t - v)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{t^2}{a^2v}\right\} dv - \frac{t}{2a} \int_0^t v^{-3/2} \cdot (t - v)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{t^2}{a^2v}\right\} dv.$$

For the first integral we apply (3.471 (2)) of [3] with

$$\mu = \frac{1}{2}; \quad \nu = \frac{1}{2}; \quad \beta = \frac{t^2}{a^2}; \quad u = t.$$

For the second integral we apply (3.471 (3)) with $\mu = \frac{1}{2}; \quad \beta = \frac{t^2}{a^2}; \quad u = t$.

Then

$$J(t) = \frac{5\sqrt{\pi}}{4a} \left(\frac{a}{t}\right)^{1/2} t^{1/4} \exp\left\{-\frac{t}{2a^2}\right\} \cdot W_{-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}}\left(\frac{t}{a^2}\right) - \frac{t}{2a} \frac{a\sqrt{\pi}}{t} t^{-1/2} \exp\left\{-\frac{t}{a^2}\right\}.$$

By virtue of the formula (9.224) of [3] with $\mu = -\frac{1}{4}$ we have

$$W_{-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}}\left(\frac{t}{a^2}\right) = \left(\frac{t}{a^2}\right)^{1/4} \exp\left\{\frac{t}{2a^2}\right\} \cdot \int_{\frac{t}{a^2}}^{\infty} u^{-1/2} e^{-u} du.$$

Then the integral $J(t)$ takes the form

$$J(t) = \frac{5\sqrt{\pi}}{4a} \int_{\frac{t}{a^2}}^{\infty} u^{-1/2} e^{-u} du - \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}} \exp\left\{-\frac{t}{a^2}\right\}.$$

Using the integral (3.381 (3)), we obtain

$$J(t) = \frac{5\sqrt{\pi}}{4a} \Gamma\left(\frac{1}{2}; \frac{t}{a^2}\right) - \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}} \exp\left\{-\frac{t}{a^2}\right\}.$$

By virtue of the formula (8.359 (3)) we finally obtain

$$J(t) = \frac{5\pi}{4a} \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{t}}{a}\right) - \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}} \exp\left\{-\frac{t}{a^2}\right\}.$$

(cf. on the right side of (1)).

So, from the proved identity (14) it follows that function (7) satisfies the equation (5) and, as a consequence, the function (3) is indeed a solution of the homogeneous Volterra integral equation of the second kind (1).

2. Nontrivial solution of the adjoint homogeneous Volterra integral equation of the second kind with a singular kernel

In the solving integral equation (2) it was noted [2; 183] that it is sufficient for its solution to find a solution of the «simplified» equation

$$\psi(t) - \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_t^\infty \left\{ \frac{2\tau}{(\tau-t)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{\tau t}{a^2(\tau-t)}\right\} + \frac{1}{\sqrt{\tau-t}} \left(1 - \exp\left\{-\frac{\tau t}{a^2(\tau-t)}\right\}\right) \right\} \psi(\tau) d\tau = 0. \quad (15)$$

With the help of the Laplace transform it was obtained the solution of the equation (15), which has the form

$$\psi_0(t) = \frac{C}{a\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^\infty (2n+1) \exp\left(-\frac{(2n+1)^2}{4a^2} t\right). \quad (16)$$

We show that the function (16) is the solution of the «simplified» homogeneous equation (15). We substitute function (16) into equation (15):

$$\begin{aligned} \psi_0(t) - \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_t^\infty \left\{ \frac{2\tau}{(\tau-t)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{\tau t}{a^2(\tau-t)}\right\} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{\tau-t}} \left(1 - \exp\left\{-\frac{\tau t}{a^2(\tau-t)}\right\}\right) \right\} \frac{C}{a\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^\infty (2n+1) \exp\left(-\frac{(2n+1)^2}{4a^2} \tau\right) d\tau = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

We rewrite (17) as

$$\begin{aligned} \psi_0(t) = \frac{C}{2a^2\pi} \sum_{n=0}^\infty (2n+1) \left[\int_t^\infty \frac{2\tau}{(\tau-t)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{(\tau-t+t)t}{a^2(\tau-t)}\right\} \exp\left(-\frac{(2n+1)^2}{4a^2} \tau\right) d\tau + \right. \\ \left. + \int_t^\infty \frac{1}{\sqrt{\tau-t}} \exp\left(-\frac{(2n+1)^2}{4a^2} \tau\right) d\tau - \int_t^\infty \frac{1}{\sqrt{\tau-t}} \exp\left\{-\frac{(\tau-t+t)t}{a^2(\tau-t)}\right\} \exp\left(-\frac{(2n+1)^2}{4a^2} \tau\right) d\tau \right] = \\ = \frac{C}{2a^2\pi} \sum_{n=0}^\infty (2n+1) (I_1(n,t) + I_2(n,t) - I_3(n,t)), \end{aligned} \quad (18)$$

where

$$\begin{aligned} I_1(n,t) &= 2 \exp\left\{-\frac{t}{a^2}\right\} \int_t^\infty \frac{\tau}{(\tau-t)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{t^2}{a^2(\tau-t)}\right\} \exp\left(-\frac{(2n+1)^2}{4a^2} \tau\right) d\tau; \\ I_2(n,t) &= \int_t^\infty \frac{1}{\sqrt{\tau-t}} \exp\left(-\frac{(2n+1)^2}{4a^2} \tau\right) d\tau; \\ I_3(n,t) &= \exp\left\{-\frac{t}{a^2}\right\} \int_t^\infty \frac{1}{\sqrt{\tau-t}} \exp\left\{-\frac{t^2}{a^2(\tau-t)}\right\} \exp\left(-\frac{(2n+1)^2}{4a^2} \tau\right) d\tau. \end{aligned}$$

After changing $z = \sqrt{\tau-t}$ the integral $I_2(n,t)$ takes the form

$$I_2(n,t) = \frac{2a\sqrt{\pi}}{2n+1} \exp\left(-\frac{(2n+1)^2}{4a^2} t\right). \quad (19)$$

We calculate the first integral

$$\begin{aligned} I_1(n,t) &= 2 \exp\left\{-\frac{t}{a^2}\right\} \int_t^\infty \frac{\tau-t+t}{(\tau-t)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{t^2}{a^2(\tau-t)}\right\} \exp\left(-\frac{(2n+1)^2}{4a^2} (\tau-t+t)\right) d\tau = \\ &= 2 \exp\left\{-\frac{t}{a^2}\right\} \exp\left(-\frac{(2n+1)^2}{4a^2} t\right) \left[\int_t^\infty \frac{1}{\sqrt{\tau-t}} \exp\left\{-\frac{t^2}{a^2(\tau-t)}\right\} \exp\left(-\frac{(2n+1)^2}{4a^2} (\tau-t)\right) d\tau + \right. \\ &\quad \left. + t \int_t^\infty \frac{1}{(\tau-t)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{t^2}{a^2(\tau-t)}\right\} \exp\left(-\frac{(2n+1)^2}{4a^2} (\tau-t)\right) d\tau \right]. \end{aligned}$$

After changing $z = \sqrt{\tau-t}$ the integral $I_1(n,t)$ takes the form

$$I_1(n,t) = 4 \exp\left\{-\frac{t}{a^2}\right\} \exp\left(-\frac{(2n+1)^2}{4a^2} t\right) \left[\int_0^\infty \exp\left\{-\frac{t^2}{a^2 z^2}\right\} \exp\left(-\frac{(2n+1)^2 z^2}{4a^2}\right) dz + \right.$$

$$+t \int_0^{\infty} \frac{1}{z^2} \exp\left\{-\frac{t^2}{a^2 z^2}\right\} \exp\left(-\frac{(2n+1)^2 z^2}{4a^2}\right) dz.$$

By virtue of the known relations

$$\int_0^{\infty} \exp\left\{-\mu x^2 - \frac{\eta}{x^2}\right\} dx = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\mu}} \exp\{-2\sqrt{\mu\eta}\};$$

$$\int_0^{\infty} \exp\left\{-\mu x^2 - \frac{\eta}{x^2}\right\} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\eta}} \exp\{-2\sqrt{\mu\eta}\}$$

we have

$$I_1(n, t) = 4 \exp\left\{-\frac{t}{a^2}\right\} \exp\left(-\frac{(2n+1)^2}{4a^2} t\right) \left[\frac{a\sqrt{\pi}}{2n+1} \exp\left(-\frac{(2n+1)t}{a^2}\right) + t \cdot \frac{a\sqrt{\pi}}{2t} \exp\left(-\frac{(2n+1)t}{a^2}\right) \right].$$

We finally get

$$I_1(n, t) = \frac{2a\sqrt{\pi}(2n+3)}{2n+1} \exp\left(-\frac{(2n+3)^2}{4a^2} t\right). \tag{20}$$

We calculate the third integral under the sum in the right-hand side of equality (18)

$$I_3(n, t) = \exp\left\{-\frac{t}{a^2}\right\} \int_t^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\tau-t}} \exp\left\{-\frac{t^2}{a^2(\tau-t)}\right\} \exp\left(-\frac{(2n+1)^2}{4a^2}(\tau-t+t)\right) d\tau =$$

$$= \exp\left\{-\frac{t}{a^2}\right\} \exp\left(-\frac{(2n+1)^2}{4a^2} t\right) \int_t^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\tau-t}} \exp\left\{-\frac{t^2}{a^2(\tau-t)}\right\} \exp\left(-\frac{(2n+1)^2}{4a^2}(\tau-t)\right) d\tau.$$

After changing $z = \sqrt{\tau-t}$ the integral $I_3(n, t)$ takes the form

$$I_3(n, t) = 2 \exp\left\{-\frac{t}{a^2}\right\} \exp\left(-\frac{(2n+1)^2}{4a^2} t\right) \int_0^{\infty} \exp\left\{-\frac{t^2}{a^2 z^2}\right\} \exp\left(-\frac{(2n+1)^2 z^2}{4a^2}\right) dz.$$

Applying again the ratio

$$\int_0^{\infty} \exp\left\{-\mu x^2 - \frac{\eta}{x^2}\right\} dx = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\mu}} \exp\{-2\sqrt{\mu\eta}\},$$

we get

$$I_3(n, t) = 2 \exp\left\{-\frac{t}{a^2}\right\} \exp\left(-\frac{(2n+1)^2}{4a^2} t\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2a\sqrt{\pi}}{2n+1} \exp\left(-\frac{(2n+1)^2}{4a^2} t\right).$$

We finally have

$$I_3(n, t) = \frac{2a\sqrt{\pi}}{2n+1} \exp\left(-\frac{(2n+3)^2}{4a^2} t\right). \tag{21}$$

The results (19)–(21) we substitute in (18)

$$\Psi_0(t) = \frac{C}{2a^2 \pi} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \left\{ \frac{2a\sqrt{\pi}(2n+3)}{2n+1} \exp\left(-\frac{(2n+3)^2}{4a^2} t\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{2a\sqrt{\pi}}{2n+1} \exp\left(-\frac{(2n+1)^2}{4a^2} t\right) - \frac{2a\sqrt{\pi}}{2n+1} \exp\left(-\frac{(2n+3)^2}{4a^2} t\right) \right\} =$$

$$= \frac{C}{a\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (2n+2) \exp\left(-\frac{(2n+3)^2}{4a^2} t\right) + \exp\left(-\frac{(2n+1)^2}{4a^2} t\right) \right\} =$$

$$= \frac{C}{a\sqrt{\pi}} \left[\exp\left(-\frac{t}{4a^2}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{(2n+1)^2}{4a^2} t\right) + \sum_{n=0}^{\infty} (2n+2) \exp\left(-\frac{(2n+3)^2}{4a^2} t\right) \right] =$$

$$= \frac{C}{a\sqrt{\pi}} \left[\exp\left(-\frac{t}{4a^2}\right) + \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{(2n+3)^2}{4a^2} t\right) + \sum_{n=0}^{\infty} (2n+2) \exp\left(-\frac{(2n+3)^2}{4a^2} t\right) \right] =$$

$$= \frac{C}{a\sqrt{\pi}} \left[\exp\left(-\frac{t}{4a^2}\right) + \sum_{n=0}^{\infty} (2n+3) \exp\left(-\frac{(2n+3)^2}{4a^2}t\right) \right].$$

As the with $n = -1 \Rightarrow (2n+3) \exp\left(-\frac{(2n+3)^2}{4a^2}t\right) = \exp\left(-\frac{t}{4a^2}\right)$, then the last equality takes the form

$$\psi_0(t) = \frac{C}{a\sqrt{\pi}} \sum_{n=-1}^{\infty} (2n+3) \exp\left(-\frac{(2n+3)^2}{4a^2}t\right) = \frac{C}{a\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \exp\left(-\frac{(2n+1)^2}{4a^2}t\right).$$

(cf. (16)).

Thus, the function (16) satisfies the «simplified» equation (15).

Then the solution of the full equation (2) by [2; 183] has the form

$$\psi(t) = \psi_0(t) \exp\left\{\frac{t}{4a^2}\right\} = \frac{C}{a\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \exp\left(-\frac{n^2+n}{a^2}t\right).$$

Thus, homogeneous integral equation (2) has a nontrivial solution represented by the formula (4).

The work was financially supported by Science Committee of the MES (Grant 0112 RK 00619/GF on priority «Intellectual potential of the country»).

References

- 1 Akhmanova D.M., Kosmakova M.T., Ramazanov M.I., Tuimebaeva A.E. *On the solutions of the homogeneous mutually conjugated Volterra integral equations* // Bulletin of University of Karaganda. Mathematics series, 2013, No. 2 (70).
- 2 Polyanin A.D., Manzhirov A.V. *Reference book of Integral Equations*, Moscow: Fizmatlit, 2003.
- 3 Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. *Tables of integrals, sums, rows and products*, Moscow: Fizmatgiz, 1963.

Д.М.Ахманова, М.Т.Жиеналиев, М.Т.Космакова, М.Ы.Рамазанов

Вольтерра ерекше интегралды теңдеуі мен оның түйіндесі туралы

Мақалада интегралдаудың айнымалы шегімен екінші ретті өзара-түйіндес интегралды Вольтерра теңдеуінің шешімдері қарастырылды. Теңдеудің ерекшелігі — сәйкес ядроның сығылмауында және, сәйкесінше, оған біртіндеп жуықтау әдісін қолдана алмауда. Екінші ретті ерекше біртекті интегралды Вольтерра теңдеуінің нөлдік емес шешімдері алынды. Тікелей тексеру әдісін қолдану арқылы алынған функциялар ерекше ядролы біртекті екінші ретті интегралды Вольтерра теңдеуі мен оның түйіндесінің тривиалды емес шешімі екені анықталды.

Д.М.Ахманова, М.Т.Дженалиев, М.Т.Космакова, М.И.Рамазанов

Об особом интегральном уравнении Вольтерра и его сопряженном

В статье рассмотрены решения взаимно-сопряженных интегральных уравнений типа Вольтерра второго рода с переменным пределом интегрирования. Особенность уравнений заключается в несжимаемости соответствующих ядер и, соответственно, в неприменимости метода последовательных приближений. Получены ненулевые решения особых однородных интегральных уравнений Вольтерра второго рода. Путем непосредственной проверки установлено, что полученные функции являются нетривиальными решениями однородного с особым ядром интегрального уравнения Вольтерра второго рода и его сопряженного.

Список литературы

- 1 Akhmanova D.M., Kosmakova M.T., Ramazanov M.I., Tuimebaeva A.E. *On the solutions of the homogeneous mutually conjugated Volterra integral equations* // Вестник Карагандинского университета. Сер. Математика. — 2013. — No. 2 (70).
- 2 Полянин А.Д., Манжиров А.В. *Справочник по интегральным уравнениям*. — М.: Физматлит, 2003.
- 3 Градштейн И.С., Рыжик И.М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*. — М.: Физматгиз, 1963.

М.А.Асылбеков, Б.Т.Горобек, Б.Х.Турметов

Международный казахско-турецкий университет им. Х.А.Ясави, Туркестан (E-mail: mara_assyl@inbox.ru)

Некоторые свойства и применения модифицированного интегро-дифференциального оператора Римана-Лиувилля в классе гармонических функций

В классе гармонических функций изучены некоторые свойства модифицированных интегро-дифференциальных операторов дробного порядка в смысле Римана-Лиувилля. Рассматриваемые операторы обобщают интегро-дифференциальные операторы Баврина. В качестве применения полученных свойств рассмотрены вопросы разрешимости некоторых краевых задач для уравнения Лапласа в шаре и в полукруге.

Ключевые слова: оператор Баврина, оператор Римана-Лиувилля, гармоническая функция, уравнения Лапласа, задача Дирихле.

1. Введение

Пусть $\Omega = \{x \in R^n : |x| < 1\}$ — единичный шар, $n \geq 2$, $\partial\Omega = \{x \in R^n : |x| = 1\}$ — единичная сфера.

Пусть далее $u(x)$ — гармоническая функция в области Ω , $r = |x|$, $\theta = \frac{x}{|x|}$ и μ —

положительное действительное число.

В работе [1] в классе гармонических в шаре функций изучались свойства операторов вида

$$\delta_{\mu}[u](x) = \left(r \frac{\partial}{\partial r} + \mu \right) u(x);$$

$$\delta_{\mu}^{-1}[u](x) = \int_0^1 t^{\mu-1} u(tx) dt;$$

$$\delta_{\mu}^m[u](x) = \delta_{\mu}[\delta_{\mu} \dots \delta_{\mu}[u] \dots](x);$$

$$\delta_{\mu}^{-m}[u](x) = \delta_{\mu}^{-1}[\delta_{\mu}^{-1} \dots \delta_{\mu}^{-1}[u] \dots](x),$$

где $r \frac{\partial}{\partial r} = \sum_{j=1}^n x_j \frac{\partial}{\partial x_j}$.

Основными свойствами операторов δ_{μ}^m и δ_{μ}^{-m} являются следующие утверждения [1].

Лемма 1. Пусть $u(x)$ — гармоническая функция в области Ω . Тогда функции $\delta_{\mu}^m[u](x)$ и $\delta_{\mu}^{-m}[u](x)$ также являются гармоническими в шаре Ω .

Лемма 2. Пусть $u(x)$ — гармоническая функция в области Ω . Тогда для любого $x \in \Omega$ справедливы равенства

$$\delta_{\mu}^{-m}[\delta_{\mu}^m[u]](x) = \delta_{\mu}^m[\delta_{\mu}^{-m}[u]](x) = u(x).$$

Таким образом, в классе гармонических функций в шаре Ω операторы $\delta_{\mu}^m[u](x)$ и $\delta_{\mu}^{-m}[u](x)$ являются взаимно обратными.

В настоящей работе мы построим дробные аналоги операторов δ_{μ}^{-m} , δ_{μ}^m и покажем, что результаты работы [1] верны и для общего случая. Пусть $\alpha > 0$. Следующие операторы:

$$I^{\alpha}[u](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^r (r-\tau)^{\alpha-1} u(\tau\theta) d\tau;$$

$$D^\alpha [u](x) = \frac{d}{dr} I^{1-\alpha} [u](x), 0 < \alpha \leq 1,$$

называются операторами интегрирования и дифференцирования порядка $\alpha > 0$ в смысле Римана–Лиувилля [2]. Так как $I^\alpha [u](x) \rightarrow u(x)$ почти всюду при $\alpha \rightarrow 0$ [2], то можно предположить, что

$$I^0 [u](x) = u(x). \text{ Тогда } D^1 [u](x) = \frac{du}{dr}(x).$$

Пусть $0 < \alpha \leq 1, \mu > 0$. Введем обозначения

$$\begin{aligned} B_\mu^\alpha [u](x) &= r^{\alpha-\mu} D^\alpha [r^\mu u](x); \\ B_\mu^{-\alpha} [u](x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 t^{\mu-\alpha} (1-t)^{\alpha-1} u(tx) dt; \\ B_\mu^{\alpha,m} [u](x) &= \underbrace{B_\mu^\alpha [B_\mu^\alpha \dots [B_\mu^\alpha [u]] \dots]}_m(x); \\ B_\mu^{-\alpha,m} [u](x) &= \underbrace{B_\mu^{-\alpha} [B_\mu^{-\alpha} \dots [B_\mu^{-\alpha} [u]] \dots]}_m(x). \end{aligned}$$

Замечание 1. Если $\alpha = 1$, то

$$\begin{aligned} B_\mu^1 [u](x) &= r^{1-\mu} \frac{d}{dr} [r^\mu u](x) = \left(r \frac{d}{dr} + \mu \right) u(x) \equiv \delta_\mu [u](x); \\ B_\mu^{-1} [u](x) &= \int_0^1 t^{\mu-1} u(tx) dt \equiv \delta_\mu^{-1} [u](x). \end{aligned}$$

Следовательно, в случае $\alpha = 1$

$$\begin{aligned} B_\mu^{1,m} [u](x) &= \delta_\mu^m [u](x); \\ B_\mu^{-1,m} [u](x) &= \delta_\mu^{-m} [u](x). \end{aligned}$$

Легко показать, что при $\alpha, \beta \in (0, 1], \mu, \nu > 0$ операторы $B_\mu^\alpha, B_\nu^\beta$ коммутируют. Действительно, поскольку верны равенства

$$\begin{aligned} B_\mu^\alpha [u](x) &= \frac{r^{\alpha-\mu}}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dr} \int_0^r (r-\tau)^{-\alpha} \tau^\mu u(\tau\theta) d\tau \underset{\tau=rs}{=} \\ &= \frac{r^{\alpha-\mu}}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dr} r^{\mu-\alpha+1} \int_0^1 (1-s)^{-\alpha} s^\mu u(sx) ds = \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{-\alpha} s^\mu \left(r \frac{d}{dr} + 1 + \mu - \alpha \right) u(sx) ds = \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{-\alpha} s^\mu \delta_{1+\mu-\alpha} [u](sx) ds \end{aligned}$$

и операторы $\delta_{1+\mu-\alpha}$ и $\delta_{1+\nu-\beta}$ коммутируют, имеем

$$\begin{aligned} B_\mu^\alpha [B_\nu^\beta [u]](x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{-\alpha} s^\mu \delta_{1+\mu-\alpha} [B_\nu^\beta [u]](sx) ds = \\ &= \int_0^1 \frac{(1-s)^{-\alpha} s^\mu}{\Gamma(1-\alpha)} \delta_{1+\mu-\alpha} \int_0^1 \frac{(1-t)^{-\beta} t^\nu}{\Gamma(1-\beta)} \delta_{1+\nu-\beta} [u](stx) dt ds = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 \frac{(1-s)^{-\alpha} s^\mu}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 \frac{(1-t)^{-\alpha} t^\nu}{\Gamma(1-\beta)} \delta_{1+\mu-\alpha} [\delta_{1+\nu-\beta} [u]](stx) dt ds = \\ &= \int_0^1 \frac{(1-t)^{-\alpha} t^\nu}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^1 \frac{(1-s)^{-\alpha} s^\mu}{\Gamma(1-\alpha)} \delta_{1+\nu-\beta} [\delta_{1+\mu-\alpha} [u]](stx) ds dt = \\ &= \int_0^1 \frac{(1-t)^{-\beta} t^\nu}{\Gamma(1-\beta)} \delta_{1+\nu-\beta} \int_0^1 \frac{(1-s)^{-\alpha} s^\mu}{\Gamma(1-\alpha)} \delta_{1+\mu-\alpha} [u](stx) ds dt = B_\nu^\beta [B_\mu^\alpha [u]](x). \end{aligned}$$

Аналогично можно показать, что и операторы $B_\mu^{-\alpha}$, $B_\nu^{-\beta}$ коммутируют:

$$\begin{aligned} B_\mu^{-\alpha} [B_\nu^{-\beta} [u]](x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 t^{\mu-\alpha} (1-t)^{\alpha-1} B_\nu^{-\beta} [u](tx) dt = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 t^{\mu-\alpha} (1-t)^{\alpha-1} \int_0^1 s^{\nu-\beta} (1-s)^{\beta-1} u(tsx) ds dt = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 s^{\nu-\beta} (1-s)^{\beta-1} \int_0^1 t^{\mu-\alpha} (1-t)^{\alpha-1} u(tsx) dt ds = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 s^{\nu-\beta} (1-s)^{\beta-1} B_\mu^{-\alpha} [u](sx) ds = B_\nu^{-\beta} [B_\mu^{-\alpha} [u]](sx). \end{aligned}$$

2. Свойства операторов $B_\mu^{\alpha,m}$ и $B_\mu^{-\alpha,m}$

В этом пункте исследуем некоторые свойства операторов $B_\mu^{\alpha,m}$ и $B_\mu^{-\alpha,m}$. Докажем, что утверждения леммы 1 и 2 остаются верными и для этих операторов. Отметим, что в случае $0 < \alpha < 1$, $\mu = 0$, свойства операторов $B_0^{\alpha,m}$ и $B_0^{-\alpha,m}$ изучены в работах [3, 4].

Пусть $0 < \alpha \leq 1$, $\mu > 0$. Введем обозначения

$$\gamma_{\mu,\alpha,k} = \frac{\Gamma(k + \mu - \alpha + 1)}{\Gamma(k + \mu + 1)}, \quad \gamma_{\mu,\alpha,k}^m = (\gamma_{\mu,\alpha,k})^m.$$

Лемма 3. Пусть $0 < \alpha \leq 1$, $\mu > 0$ и $H_k(x)$ — однородный гармонический полином степени k , при $k \in N_0 = \{0, 1, \dots\}$. Тогда справедливы равенства

$$B_\mu^\alpha [H_k](x) = \gamma_{\mu,\alpha,k} H_k(x), \quad k \in N_0; \tag{1}$$

$$B_\mu^{-\alpha} [H_k](x) = \gamma_{\mu,\alpha,k}^{-1} H_k(x), \quad k \in N_0. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть $H_k(x)$ — однородный гармонический полином степени k и $k \in N_0$. Тогда, используя связь гамма- и бета-функций Эйлера

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}$$

и в соответствии с определением оператора B_μ^α , имеем

$$\begin{aligned} B_\mu^\alpha [H_k](x) &= \frac{r^{\alpha-\mu}}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dr} \int_0^r (r-\tau)^{-\alpha} \tau^\mu H_k(\tau\theta) d\tau = \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} r^{\alpha-\mu} H_k(\theta) \frac{d}{dr} \int_0^r (r-\tau)^{-\alpha} \tau^{k+\mu} d\tau = \\ &= r^{\alpha-\mu} H_k(\theta) \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dr} \left\{ r^{k+1-\alpha+\mu} \int_0^1 (1-\xi)^{-\alpha} \xi^{k+\mu} d\xi \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= r^{\alpha-\mu} H_k(\theta) \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(k+\mu+1)}{\Gamma(k+\mu-\alpha+2)} \frac{d}{dr} r^{k+1-\alpha+\mu} = \\
 &= r^k H_k(\theta) \frac{\Gamma(k+\mu+1)}{\Gamma(k+\mu-\alpha+2)} (k+\mu-\alpha+2) = \\
 &= \frac{\Gamma(k+\mu+1)}{\Gamma(k+\mu-\alpha+1)} H_k(x) = \gamma_{\mu,\alpha,k} H_k(x).
 \end{aligned}$$

Докажем второе равенство леммы. Оператор $B_\mu^{-\alpha}$ определен для всех случаев $k \in N_0$, и поэтому, используя определение оператора $B_\mu^{-\alpha}$, имеем

$$\begin{aligned}
 B_\mu^{-\alpha} [H_k](x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 t^{\mu-\alpha} (1-t)^{\alpha-1} H_k(tx) dt = \frac{H_k(x)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 t^{k+\mu-\alpha} (1-t)^{\alpha-1} dt = \\
 &= \frac{H_k(x)}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(k+\mu-\alpha+1)}{\Gamma(k+\mu+1)} = \frac{\Gamma(k+\mu-\alpha+1)}{\Gamma(k+\mu+1)} H_k(x) = \gamma_{\mu,\alpha,k}^{-1} H_k(x).
 \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Следствие 1. Пусть $0 < \alpha \leq 1$, $\mu > 0$ и $H_k(x)$ — однородный гармонический полином степени $k \in N_0$. Тогда справедливы равенства

$$B_\mu^{\alpha,m} [H_k](x) = \gamma_{\mu,\alpha,k}^m H_k(x); \tag{3}$$

$$B_\mu^{-\alpha,m} [H_k](x) = \frac{1}{\gamma_{\mu,\alpha,k}^m} H_k(x). \tag{4}$$

Следствие доказывается последовательным применением леммы 3.

Теорема 1. Пусть $0 < \alpha \leq 1$, $\mu > 0$ и $u(x)$ — гармоническая в шаре Ω функция. Тогда функции $B_\mu^{\alpha,m}[u](x)$, $B_\mu^{-\alpha,m}[u](x)$ также являются гармоническими в области Ω .

Доказательство. Так как $u(x)$ — гармоническая функция в шаре Ω , то она разлагается при $|x| \leq \rho < 1$ в ряд вида [5]

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{h_k} u_k^{(i)} H_k^{(i)}(x), \tag{5}$$

где $\{H_k^{(i)}(x), i = 1, \dots, h_k\}$ — полная система однородных гармонических полиномов степени k , а $u_k^{(i)}$ — коэффициенты разложения (5). Применяя формально оператор $B_\mu^{\alpha,m}$ к ряду (5) и учитывая равенство (3), получим

$$B_\mu^{\alpha,m}[u](x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{h_k} \gamma_{\mu,\alpha,k}^m u_k^{(i)} H_k^{(i)}(x). \tag{6}$$

Далее из асимптотической оценки гамма-функций легко показать, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\gamma_{\mu,\alpha,k}^m} = 1$. Тогда радиус сходимости ряда (6) совпадает с радиусом сходимости ряда (5), и поэтому его сумма представляет собой гармоническую в Ω функцию.

Аналогично, используя формулу (4) легко доказать гармоничность функции $B_\mu^{-\alpha,m}[u](x)$.

Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть $0 < \alpha \leq 1$, $\mu > 0$ и $u(x)$ — гармоническая функция в шаре Ω . Тогда для любого $x \in \Omega$ справедливо равенство

$$u(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} t^{\mu-\alpha} B_\mu^\alpha[u](tx) dt. \tag{7}$$

Доказательство. Пусть $0 < \alpha \leq 1, \mu > 0$. Докажем равенство (7). Представим гармоническую в шаре Ω функцию $u(x)$ в виде ряда (5) и преобразуем его следующим образом:

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{h_k} \frac{\Gamma(k + \mu - \alpha + 1)}{\Gamma(k + \mu + 1)} \frac{\Gamma(k + \mu + 1)}{\Gamma(k + \mu - \alpha + 1)} u_k^{(i)} H_k^{(i)}(x). \quad (8)$$

Далее, учитывая равенства (1), (2) и равномерную сходимость ряда (8) по x при $|x| \leq \rho < 1$, получаем

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{h_k} \frac{\Gamma(k + \mu_j - \alpha_j + 1)}{\Gamma(k + \mu_j + 1)} \frac{\Gamma(k + \mu_j + 1)}{\Gamma(k + \mu_j - \alpha_j + 1)} u_k^{(i)} H_k^{(i)}(x) = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{h_k} u_k^{(i)} \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} t^{\mu-\alpha} \frac{\Gamma(k + \mu + 1)}{\Gamma(k + \mu - \alpha + 1)} H_k^{(i)}(tx) dt = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{h_k} \frac{u_k^{(i)}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} t^{\mu-\alpha} B_{\mu}^{\alpha} [H_k^{(i)}](tx) dt = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} t^{\mu-\alpha} B_{\mu}^{\alpha} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{h_k} u_k^{(i)} H_k^{(i)} \right] (tx) dt = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} t^{\mu-\alpha} B_{\mu}^{\alpha} [u](tx) dt. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Аналогично доказывается следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть $0 < \alpha \leq 1, \mu > 0$ и $u(x)$ — гармоническая функция в области Ω . Тогда для любого $x \in \Omega$ справедливо равенство

$$u(x) = \frac{1}{\Gamma^m(\alpha)} \int_0^1 dt_1 \int_0^1 dt_2 \cdots \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} t^{\mu-\alpha} B_{\mu}^{\alpha, m} [u](tx) dt_m, \quad (9)$$

где обозначено $(1-t)^{\alpha-1} = (1-t_1)^{\alpha-1} \dots (1-t_m)^{\alpha-1}$, $t^{\mu-\alpha} = t_1^{\mu-\alpha} \dots t_m^{\mu-\alpha}$, $tx = (t_1 \dots t_m x)$.

Теорема 4. Пусть $0 < \alpha \leq 1, \mu > 0$ и $u(x)$ — гармоническая функция в области Ω . Тогда для любого $x \in \Omega$ справедливы равенства

$$B_{\mu}^{-\alpha, m} [B_{\mu}^{\alpha, m} [u]](x) = B_{\mu}^{\alpha, m} [B_{\mu}^{-\alpha, m} [u]](x) = u(x). \quad (10)$$

Доказательство. Применим к функции $B_{\mu}^{\alpha, m} [u](x)$ оператор $B_{\mu}^{-\alpha, m}$. По определению оператора $B_{\mu}^{-\alpha, m}$ имеем

$$B_{\mu}^{-\alpha, m} [B_{\mu}^{\alpha, m} [u]](x) = \frac{1}{\Gamma^m(\alpha)} \int_0^1 dt_1 \int_0^1 dt_2 \cdots \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} t^{\mu-\alpha} B_{\mu}^{\alpha, m} [u](tx) dt_m.$$

В силу равенства (9) последнее выражение равно $u(x)$. Следовательно, первое равенство из (10) доказано. Для доказательства второго равенства из (10) применим оператор B_{μ}^{α} к функции $B_{\mu}^{-\alpha, m} [u](x)$. Тогда

$$\begin{aligned} B_{\mu}^{\alpha} [B_{\mu}^{-\alpha, m} [u]](x) &= \frac{1}{\Gamma^m(\alpha)} B_{\mu}^{\alpha} \left[\int_0^1 dt_1 \int_0^1 dt_2 \cdots \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} t^{\mu-\alpha} u(tx) dt_m \right] = \\ &= \frac{r^{\alpha-\mu}}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma^m(\alpha)} \frac{d}{dr} \int_0^r (r-\tau)^{-\alpha} \tau^{\mu} \left[\int_0^1 dt_1 \int_0^1 dt_2 \cdots \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} t^{\mu-\alpha} u(t\tau\theta) dt_m \right] d\tau = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\Gamma^m(\alpha)} \int_0^1 dt_1 \int_0^1 dt_2 \cdots \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} t^{\mu-\alpha} \frac{r^{\alpha-\mu}}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dr} \int_0^r (r-\tau)^{-\alpha} \tau^\mu u(t\tau\theta) d\tau dt_m.$$

Далее нетрудно убедиться в следующих равенствах:

$$\begin{aligned} \frac{r^{\alpha-\mu}}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dr} \int_0^r (r-\tau)^{-\alpha} \tau^\mu u(t\tau\theta) d\tau &= \frac{r^{\alpha-\mu}}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dr} \int_0^r \left(r - \frac{s}{t}\right)^{-\alpha} \left(\frac{s}{t}\right)^\mu u(s\theta) \frac{ds}{t} = \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} r^{\alpha-\mu} t^{\alpha-\mu-1} \frac{d}{dr} \int_0^{tr} (tr-s)^{-\alpha} s^\mu u(s\theta) ds = \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} (tr)^{\alpha-\mu} \frac{d}{d(tr)} \int_0^{tr} (tr-s)^{-\alpha} s^\mu u(s\theta) ds = B_\mu^\alpha[u](tx), \end{aligned}$$

где учтено, что $\theta = \frac{x}{|x|} = \frac{tx}{|tx|}$. Поэтому будем иметь

$$B_\mu^\alpha [B_\mu^{\alpha,m}[u]](x) = \frac{1}{\Gamma^m(\alpha)} \int_0^1 dt_1 \int_0^1 dt_2 \cdots \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} t^{\mu-\alpha} B_\mu^\alpha [u](tx) dt_m.$$

Следовательно, вспоминая определение оператора $B_\mu^{\alpha,m}$, можно записать

$$B_\mu^{\alpha,m} [B_\mu^{-\alpha,m}[u]](x) = \frac{1}{\Gamma^m(\alpha)} \int_0^1 dt_1 \int_0^1 dt_2 \cdots \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} t^{\mu-\alpha} B_\mu^{\alpha,m} [u](tx) dt_m = u(x).$$

Равенства (10) доказаны.

Теорема доказана.

Таким образом, из утверждения теоремы 4 следует, что операторы $B_\mu^{\alpha,m}$ и $B_\mu^{-\alpha,m}$ являются взаимно обратными в классе гармонических функций в шаре Ω .

3. Постановка и решение задачи в шаре

Пусть $0 < \alpha \leq 1$, $\mu > 0$. Рассмотрим следующую задачу.

Задача А. Найти гармоническую в шаре Ω функцию $u(x)$, для которой функция $B_\mu^{\alpha,m}[u](x)$ непрерывна в $\bar{\Omega}$ и удовлетворяет на сфере $\partial\Omega$ равенству

$$B_\mu^{\alpha,m}[u](x) = f(x), \quad x \in \partial\Omega.$$

Заметим, что аналогичные задачи с операторами целого порядка рассматривались в работах [1, 6–9], а для операторов дробного порядка с производными Римана-Лиувилля и Капуто — в работах [3, 4, 10–16], с производными типа Адамара-Маршо — в [17].

Пусть $v(x)$ — классическое решение задачи Дирихле в шаре Ω :

$$\begin{cases} \Delta v(x) = 0, & x \in \Omega \\ v(x) = f(x), & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (11)$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема А. Пусть $f(x) \in C(\partial\Omega)$. Тогда решение задачи А существует, единственно и представляется в виде

$$u(x) = B_\mu^{-\alpha,m}[v](x), \quad (12)$$

где $v(x)$ — решение задачи (11).

Замечание 2. Из утверждений теоремы А следует, что задача А представляет собой аналог задач Дирихле и Робена для уравнения Лапласа.

Доказательство теоремы А. Пусть решение задачи А существует и это $u(x)$. Применим к функции $u(x)$ оператор $B_\mu^{\alpha,m}$ и обозначим $B_\mu^{\alpha,m}[u](x) = v(x)$. Так как $B_\mu^{\alpha,m}[u](x) \in C(\bar{\Omega})$, то

$v(x) \in C(\overline{\Omega})$. Далее поскольку $u(x)$ — гармоническая функция в Ω , то, в силу утверждения теоремы 1, функция $v(x)$ тоже гармоническая в шаре Ω и

$$v(x)|_{\partial\Omega} = B_{\mu}^{\alpha,m}[u](x)|_{\partial\Omega} = f(x).$$

Таким образом, функция $v(x)$ является решением задачи Дирихле (11). Причем если $f(x) \in C(\partial\Omega)$, то решение этой задачи существует, единственно и $v(x) \in C(\overline{\Omega})$. Применим к равенству $B_{\mu}^{\alpha,m}[u](x) = v(x)$ оператор $B_{\mu}^{-\alpha,m}$. Поскольку интегралы вида

$$\int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^{\mu-\alpha} v(\tau x) d\tau$$

при $\alpha \in (0,1]$, $\mu > 0$, $\mu - \alpha \neq 0$ имеют слабые особенности при $\tau = 0$ и $\tau = 1$, то такие функции являются непрерывными по $x \in \overline{\Omega}$ при непрерывной функции $v(x) \in C(\overline{\Omega})$. Значит, оператор $B_{\mu}^{-\alpha,m}$ применим к функциям из $C(\overline{\Omega})$. В силу первого равенства из (10) получим равенство (12), т.е.

$$B_{\mu}^{-\alpha,m}[v](x) = B_{\mu}^{-\alpha,m}[B_{\mu}^{\alpha,m}[u]](x) = u(x).$$

Пусть, наоборот, функция $v(x)$ является решением задачи Дирихле (11) при $f(x) \in C(\partial\Omega)$. Ясно, что $v(x) \in C(\overline{\Omega})$. Рассмотрим функцию $u(x) = B_{\mu}^{-\alpha,m}[v](x)$. В силу второго равенства из (10) будем иметь

$$B_{\mu}^{\alpha,m}[u](x) = B_{\mu}^{\alpha,m}[B_{\mu}^{-\alpha,m}[v]](x) = v(x).$$

Значит, функция $u(x)$ гармоническая в Ω и

$$B_{\mu}^{\alpha,m}[u](x)|_{\partial\Omega} = v(x)|_{\partial\Omega} = f(x).$$

Теорема доказана.

4. Постановка и решение краевой задачи в полукруге

Пусть $n = 2$, $(x, y) \in R^2$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \arctg \frac{y}{x}$. Обозначим $\Omega_+ = \Omega \cap \{y > 0\}$ — верхний полукруг, $\partial\Omega_+ = \partial\Omega \cap \{y > 0\}$ — полуокружность, $I = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, y = 0\}$ — диаметр круга.

Рассмотрим следующую задачу.

Задача В. Найти функцию $u(r, \varphi)$, гармоническую в полукруге Ω_+ , для которой функция $B_{\mu}^{\alpha,m}[u](r, \varphi)$ непрерывна в $\overline{\Omega}_+ = \Omega_+ \cup \partial\Omega_+ \cup I$ и удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} B_{\mu}^{\alpha,m}[u](r, \varphi)|_{\partial\Omega_+} &= g(\varphi), \quad \varphi \in \partial\Omega_+; \\ u(r, \varphi)|_I &= 0, \quad (r, \varphi) \in I. \end{aligned}$$

Отметим, что различные краевые задачи в полукруге в случае $\alpha = 1$, $\mu = 0$ исследовались в работах [18, 19], а с граничными операторами Адамара-Маршо — в работе [20].

Справедливы следующие утверждения.

Теорема В. Пусть $g(\varphi) \in C(\partial\Omega_+)$ и выполняются условия $g(0) = 0$; $g(\pi) = 0$. Тогда решение задачи В существует, единственно и представляется в виде

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{\Gamma^m(\alpha)} \int_0^1 dt_1 \dots \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} t^{\mu-\alpha} v(rt, \varphi) dt_m, \tag{13}$$

где функция $v(r, \varphi)$ определяется равенством

$$v(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \left[\frac{1-r^2}{1-2r \cos(\varphi-\theta) + r^2} - \frac{1-r^2}{1-2r \cos(\varphi+\theta) + r^2} \right] g(\theta) d\theta. \tag{14}$$

Доказательство теоремы В. Предположим, что решение задачи В существует. Обозначим его через $u(r, \varphi)$. Применим к функции $u(r, \varphi)$ оператор $B_{\mu}^{\alpha, m}$ и обозначим $B_{\mu}^{\alpha, m}[u](r, \varphi) = v(r, \varphi)$. По предположению функция $B_{\mu}^{\alpha, m}[u](r, \varphi)$ непрерывна в замкнутой области $\bar{\Omega}_+$. Тогда функция $v(r, \varphi)$ также непрерывна в $\bar{\Omega}_+$. Далее, по утверждению теоремы 1, функция $v(r, \varphi) = B_{\mu}^{\alpha, m}[u](r, \varphi)$ является гармонической в Ω_+ . В силу граничного условия задачи В имеем

$$B_{\mu}^{\alpha, m}[u](1, \varphi) = v(1, \varphi) = g(\varphi).$$

По условию задачи $u(r, 0) = 0$, и если $s \in [0, 1]$ и $r \leq 1$, то $sr \leq 1$. Следовательно, $u(sr, 0) = 0$.

Тогда $B_{\mu}^{\alpha, m}[u](r, \varphi)|_I = 0$, и поэтому

$$v(r, \varphi)|_I = B_{\mu}^{\alpha, m}[u](r, \varphi)|_I = 0.$$

Таким образом, функция $v(r, \varphi)$ является решением следующей задачи:

$$\begin{cases} \Delta v(r, \varphi) = 0, & (r, \varphi) \in \Omega_+ \\ v(1, \varphi) = g(\varphi), & \varphi \in \partial\Omega_+ \\ v(r, \varphi) = 0, & (r, \varphi) \in I \end{cases} \quad (15)$$

В условиях теоремы В решение задачи (15) существует и представляется в виде (14) [21]. Далее, по утверждению теорем 3 и 4, функцию $u(r, \varphi)$ можно представить в виде (9) и (10). А так как $B_{\mu}^{\alpha, m}[u](r, \varphi) = v(r, \varphi)$ и рассматриваемые функции непрерывны, то формулы (9) и (10) можно записать в виде (13). Выполнение условий задачи В проверяется непосредственно. Действительно, если $v(r, \varphi)$ является решением задачи (15), то, применяя к функции (13) оператор $B_{\mu}^{\alpha, m}$, получаем:

$$B_{\mu}^{\alpha, m}[u](1, \varphi) = v(1, \varphi) = f(\varphi)$$

и

$$B_{\mu}^{\alpha, m}[u](r, \varphi)|_I = v(r, \varphi)|_I = 0.$$

Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов Комитетом науки МОН РК (проект 0830/ГФ2).

Список литературы

- 1 Баврин И.И. Операторы для гармонических функций и их приложения // Дифференциальные уравнения. — 1985. — Т. 21. — № 1. — С. 9–15.
- 2 Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Elsevier // North-Holland. — Mathematics studies. — 2006. — 539 p.
- 3 Карачик В.В., Турметов Б.Х., Торбек Б.Т. О некоторых интегро-дифференциальных операторах в классе гармонических функций и их применении // Мат. труды. — 2011. — № 1. — Т. 14. — С. 99–125.
- 4 Torebek B.T., Turmetov V.Kh. On solvability of a boundary value problem for the Poisson equation with the boundary operator of a fractional order // Boundary Value Problems. — Vol. 2013. — Issue 93. — 2013. — 18 p.
- 5 Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. — М.: Мир, 1974. — 333 с.
- 6 Баврин И.И. Интегро-дифференциальные операторы для гармонических функций в выпуклых областях и их приложения // Дифференциальные уравнения. — 1988. — Т. 24. — № 9. — С. 1629–1631.
- 7 Карачик В.В., Турметов Б.Х. Об одной задаче для гармонического уравнения // Изв. АН УзССР. Сер. Физ.-мат. наук. — 1990. — № 4. — С. 17–21.
- 8 Соколовский В.Б. Об одном обобщении задачи Неймана // Дифференциальные уравнения. — 1988. — Т. 24. — № 4. — С. 714–716.
- 9 Бицадзе А.В. К задаче Неймана для гармонических функций // Докл. АН СССР. — 1990. — Т. 311. — № 1. — С. 11–13.
- 10 Турметов Б.Х. Об одной краевой задаче для гармонического уравнения // Дифференциальные уравнения. — Минск, 1996. — Т. 32. — № 8. — С. 1089–1092.

- 11 Турметов Б.Х. О гладкости решения одной краевой задачи с граничным оператором дробного порядка // Мат. труды. — 2004. — Т. 7. — № 1. — С. 189–199.
- 12 Турметов Б.Х., Торебек Б.Т. О разрешимости аналога третьей краевой задачи с граничным оператором дробного порядка // Журн. Средневолж. мат. о-ва. — 2010. — Т. 12. — № 3. — С. 135–144.
- 13 Торебек Б.Т. Об одном аналоге третьей краевой задачи для уравнения Лапласа с граничным оператором дробного порядка в смысле Капуто // Докл. Адыгейской (Черкесской) Междунар. АН. — 2011. — Т. 13. — № 2. — С. 62–68.
- 14 Торебек Б.Т. О гладкости решения некоторых краевых задач с граничными операторами дробного порядка в классах Никольского // Вестн. Караганд. ун-та. Сер. Математика. — 2010. — № 4 (60). — С. 103–108.
- 15 Торебек Б.Т. О разрешимости одной нелокальной задачи для уравнения Лапласа с граничным оператором дробного порядка в смысле Капуто // Вестн. Караганд. ун-та. Сер. Математика. — 2012. — № 1 (65). — С. 76–81.
- 16 Торебек Б.Т., Турметов Б.Х. К вопросу разрешимости некоторых обратных задач для уравнения Лапласа с граничным оператором Римана-Лиувилля // Вестн. Караганд. ун-та. Сер. Математика. — 2013. — № 1 (69). — С. 113–121.
- 17 Бердышев А.С., Турметов А.С., Кадиркулов Б.Ж. Некоторые свойства и применения интегро-дифференциальных операторов типа Адамара-Маршо в классе гармонических функций // Сиб. мат. журн. — 2012. — Т. 53. — № 4. — С. 752–764.
- 18 Моисеев Е.И., Амбарцумян В.Э. О разрешимости нелокальной краевой задачи с равенством потоков на части границы и сопряженной к ней задачи // Дифференциальные уравнения. — 2010. — Т. 46. — № 5. — С. 718–725.
- 19 Моисеев Е.И., Амбарцумян В.Э. О разрешимости нелокальной краевой задачи с противоположными потоками на части границы и сопряженной к ней задачи // Дифференциальные уравнения. — 2010. — Т. 46. — № 6. — С. 883–886.
- 20 Бердышев А.С., Турметов Б.Х. О разрешимости некоторых краевых задач для уравнения Лапласа в полукруге // Вестн. КазНПУ им. Абая. — 2013. — № 2 (41). — С. 21–25.
- 21 Бицадзе А.В., Калинин Д.Ф. Сборник задач по уравнениям математической физики. — М.: Наука, 1977. — С. 131.

М.А.Асылбеков, Б.Т.Торебек, Б.Қ.Тұрметов

Гармониялық функциялар класында Риман-Лиувилль интегро-дифференциалдау операторы модификациясының кейбір қасиеттері және қолданылулары

Мақалада гармониялық функциялар класында Риман-Лиувилль мағынасындағы бөлшек ретті интегро-дифференциалдау операторы модификациясының кейбір қасиеттері зерттелген. Бұл операторлар Баврин интегро-дифференциалдау операторларының жалпыламасы болып табылды. Зерттелген қасиеттердің қолданылуы ретінде Лаплас тендеуі үшін шарда және жарты дөңгелекте кейбір шеттік есептердің шешілімділігі мәселелері қарастырылған.

M.A.Assylbekov, B.T.Torebek, B.Kh.Turmetov

Some properties and applications of the modified integral-differential operator of Riemann-Liouville in the class of harmonic functions

In this paper, in the class of harmonic functions we have studied some properties of the modified integro-differential operators of fractional order in the Riemann-Liouville. The operators in question generalize integro-differential operators of the Bavrin. As an application of the properties some of the solvability of boundary value problems for the Laplace equation in a ball and in a semicircle are considered.

References

- 1 Bavrin I.I. *Operators for harmonic functions and their applications* // Differential Equations, 1985, vol. 21, No. 1, p. 6–10.
- 2 Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Elsevier, North-Holland, Mathematics studies, 2006, 539 p.
- 3 Karachik V.V., Turmetov B.Kh., Torebek B.T. *On some integro-differential operators in the class of harmonic functions and their applications* // Matematicheskie Trudy, 2011, No. 1, vol. 14, p. 99–125. (In Russian). English transl.: // Siberian Advances in Mathematics, Allerton Press, 2012, vol. 22, No. 2, p. 115–134.
- 4 Torebek B.T., Turmetov B.Kh. *On solvability of a boundary value problem for the Poisson equation with the boundary operator of a fractional order* // Boundary Value Problems, 2013, vol. 2013, Issue 93, 18 p.
- 5 Stein E.M., Weiss G. *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Moscow: Mir, 1974, 333 p. (In Russian).
- 6 Bavrin I.I. *Integro-differential operators for harmonic functions in convex domains and their applications* // Differential'nye Uravneniya, 1988, vol. 24, No. 9, p. 1629–1631.
- 7 Karachik V.V., Turmetov B.Kh. *On a problem for the harmonic equation* // Izvestiya AN UzSSR. Ser. Fiz.-Mat.Nauki, 1990, No. 4, p. 17–21.

- 8 Sokolovskii V.B. *On a Generalization of the Neumann Problem* // *Differentsial'nye Uravneniya*, 1988, vol. 24, No. 4, p. 714–716.
- 9 Bitsadze A.V. *On the Neumann Problem for Harmonic Functions* // *Dokl. AN SSSR*, 1990, vol. 311, No. 1, p. 11–13.
- 10 Turmetov B.Kh. *On a boundary value problem for the harmonic equation* // *Differential Equations*, 1996, vol. 32, No. 8, p. 1093–1096.
- 11 Turmetov B.Kh. *On smoothness of a solution to a boundary value problem with fractional-order boundary operator* // *Matematicheskie Trudy*, 2004, vol. 7, No. 1, p. 189–199. (In Russian). English transl.: *Siberian Advances in Mathematics*, 2005, vol. 15, No. 2, p. 115–125.
- 12 Turmetov B.Kh., Torebek B.T. *On the solubility of the analogue third boundary value problem with the boundary operator of fractional order* // *Journal SVMO*, 2010, vol. 12, No. 3, p. 135–144. (In Russian).
- 13 Torebek B.T. *An analogue of the third boundary value problem for the Laplace equation with the boundary operators of fractional order in the sense of Caputo* // *Dokl. AMAN. Nal'chik*, 2011, vol. 13, No. 2, p. 62–68. (In Russian).
- 14 Torebek B.T. *Smoothness of solutions of certain boundary value problems with fractional order boundary operators in classes Nikol'sky* // *Bull. KarSU. Ser. Mathematica*, 2010, No. 4 (60), p. 103–108. (In Russian).
- 15 Torebek B.T. *On solvability of nonlocal problems for the Laplace equation with the boundary operator of fractional order in the sense Caputo* // *Bull. KarSU. Ser. Mathematica*, 2012, No. 1 (65), p. 76–81. (In Russian).
- 16 Torebek B.T., Turmetov B.Kh. *On the solvability of some inverse problems for the Laplace equation with the boundary operator in the Riemann-Liouville* // *Bull. KarSU. Ser. Mathematica*, 2013, No. 1 (69), p. 113–121. (In Russian).
- 17 Berdyshev A.S., Turmetov B.Kh., Kadirkulov B.D. *Some properties and applications of the integro-differential operators of Hadamard-Marchaud type in the class of harmonic functions* // *Sibirskii Matematicheskii Zhurnal*, 2012, vol. 53, No. 4, p. 752–764. (In Russian).
- 18 Moiseyev E.I., Ambartsumyan V.E. *On the Solvability of a Nonlocal Boundary Value Problem with the Equality of Fluxes at a Part of the Boundary and of the Adjoint Problem* // *Differential Equations*, 2010, vol. 46, No. 5, p. 722–729.
- 19 Moiseyev E.I., Ambartsumyan V.E. *On the solvability of a nonlocal boundary value problem with opposite fluxes at a part of the boundary and of the adjoint problem* // *Differential Equations*, 2010, vol. 46, No. 6, p. 892–895.
- 20 Berdyshev A.S., Turmetov B.Kh. *On the solvability of some boundary value problems for the Laplace equation in a semicircle* // *Bull. KazNPU named after Abaiy, Almaty*, 2013, vol. 41, No. 1, p. 21–25. (In Russian).
- 21 Bitsadze A.V., Kalinichenko D.Ph. *Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoi fiziki*, Moscow: Nauka, 1977, p. 131 (In Russian).

УДК 539.3

Н.К.Аширбаев, Ж.Н.Аширбаева

Южно-Казахстанский государственный университет им. М.Ауезова, Шымкент (E-mail: ank_56@mail.ru)

Численное решение двумерной задачи о распространении волн в упругом теле с разрывными граничными условиями

В статье в линейной постановке решена задача о распространении упругих нестационарных волн напряжений в двумерной плите с прямоугольным поперечным сечением конечных размеров. Волновой процесс вызван прикладыванием внешней П-образной динамической нагрузки на некоторой части лицевой границы прямоугольной плиты, а остальная часть этой границы свободна от напряжений. Сформулированная в терминах напряжений и скоростей смешанная задача моделируется численно с помощью явной разностной схемы сквозного счета, основанной на методе пространственных характеристик. Проанализированы динамические поля напряжений в прямоугольной плите.

Ключевые слова: изотропная среда, нагрузка, плоская деформация, особая точка, упругая, напряжение, скорость, волновой процесс, численное решение, алгоритм.

Процессы распространения упругих волн в неограниченной изотропной сплошной среде хорошо изучены. Основные уравнения движения показывают, что могут существовать только два типа волн: волна искажения и волна расширения. Распространение волн в ограниченном теле носит в общем случае сложный характер из-за взаимодействия волн с граничными поверхностями. При таком взаимодействии волны искажения частично обращаются в волны расширения и наоборот. Поэтому исследование волновых процессов в упругих телах с локальными неоднородностями (ослаблениями) в виде инородных включений, отверстий, вырезов и других представляет большой интерес,

вызванный потребностями развития механики деформируемого твердого тела и многочисленными приложениями в различных отраслях современной техники.

Несомненный интерес представляют задачи с разрывами в граничных условиях, так как информация о динамической напряженности в окрестности разрыва необходима для практических целей, например, проектирования строительных объектов. Однако до настоящего времени сравнительно мало решенных задач динамики с использованием моделей достаточно высокого уровня [1–4].

Математическая постановка задачи. Пусть плоская двумерная плита с прямоугольным поперечным сечением конечных размеров толщиной l в системе декартовых координат $x_1 0 x_2$ занимает область $0 \leq x_1 \leq l, |x_2| \leq L$ (рис. 1).

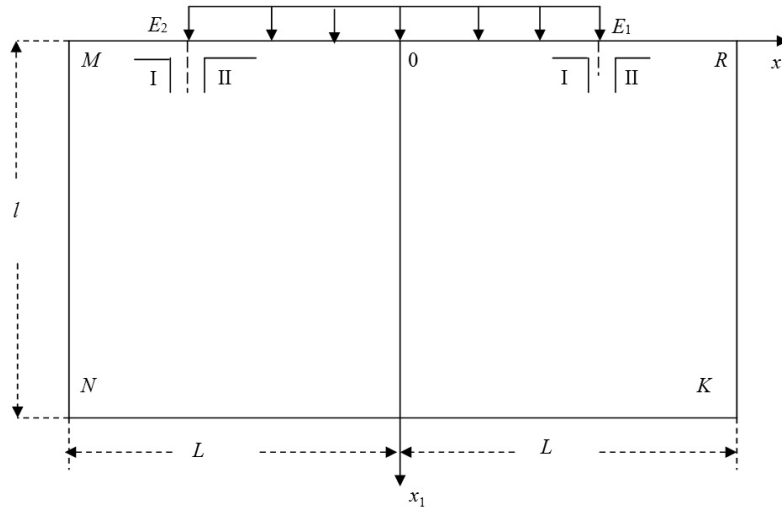


Рисунок 1. Исследуемая область

В начальный момент времени $t = 0$ точки границы $x_1 = 0, L^* \leq x_2 \leq L^{**}$ плоской двумерной плиты подвергаются динамическому воздействию, которое сводится к заданию на этой границе внешней П-образной нагрузки, остальная часть этой границы свободна от напряжений. Задача состоит в определении параметров волнового поля внутри прямоугольной плиты при условии, что напряженно-деформированное состояние в общепринятых обозначениях описывается системой уравнений линейной теории упругости

$$\begin{aligned} \sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} &= \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}; \\ \sigma_{12,1} + \sigma_{22,2} &= \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}; \\ \sigma_{11} &= \lambda \theta + 2\mu \varepsilon_{11}; \quad \sigma_{22} = \lambda \theta + 2\mu \varepsilon_{22}; \\ \sigma_{12} &= 2\mu \varepsilon_{12}; \quad \theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}. \end{aligned} \quad (1)$$

Вводя безразмерные координаты и функции:

$$\begin{aligned} \bar{t} &= \frac{t \cdot c_1}{b}; \quad \bar{x}_i = \frac{x_i}{b}; \quad v_i = \frac{1}{c_1} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial t} \quad (i=1,2); \\ p &= \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2\rho c_1^2}; \quad q = \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2\rho c_1^2}; \\ \tau &= \frac{\sigma_{12}}{\rho c_1^2}; \quad \gamma = \frac{c_1}{c_2}, \end{aligned}$$

систему (1) можно представить в эквивалентной форме в виде системы линейных уравнений первого порядка относительно искомых функций v_1, v_2, p, q, τ :

$$v_{1,t} - p_{,1} - q_{,1} - \tau_{,2} = 0; \quad v_{2,t} - p_{,2} + q_{,2} - \tau_{,1} = 0;$$

$$\begin{aligned} \gamma^2(\gamma^2 - 1)^{-1} \cdot p_{,r} - v_{1,1} - v_{2,2} = 0; \quad \gamma^2 \cdot q_{,r} - v_{1,1} + v_{2,2} = 0; \\ \gamma^2 \cdot \tau_{,r} - v_{1,2} - v_{2,1} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь и в дальнейшем черта над безразмерными параметрами ради простоты опущена. Индексами 1 и 2 обозначены переменные x_1 и x_2 соответственно. Запятая обозначает частную производную по переменной, указанной после запятой.

Для определения волнового поля в прямоугольной плите, вызванного динамическим воздействием на поверхности $x_1 = 0$, $L^* \leq x_2 \leq L^{**}$, необходимо проинтегрировать при $t \geq 0$ гиперболическую систему (2) при нулевых начальных данных

$$v_1(x_1; x_2; 0) = v_2(x_1; x_2; 0) = p(x_1; x_2; 0) = q(x_1; x_2; 0) = \tau(x_1; x_2; 0) = 0 \quad (3)$$

и следующих граничных условиях:

$$p + q = f(t) = A \cdot \sin \omega t, \quad \tau = 0, \quad \text{при } x_1 = 0, \quad L^* \leq x_2 \leq L^{**}, \quad 0 \leq t \leq t^*; \quad (4)$$

$$p + q = 0, \quad \tau = 0 \quad \text{при } x_1 = 0, \quad L^* \leq x_2 \leq L^{**}, \quad t \geq t^*;$$

$$p + q = 0, \quad \tau = 0 \quad \text{при } x_1 = l, \quad |x_2| \leq L, \quad t \geq 0; \quad (5)$$

$$v_1(x_1; t) = v_2(x_1; t) = 0 \quad \text{при } 0 \leq x_1 \leq l, \quad x_2 = \pm L \quad t \geq 0; \quad (6)$$

где A — амплитуда внешней нагрузки; ω — ее частота.

Для численного решения сформулированной смешанной задачи (2)–(6) использован модифицированный метод пространственных характеристик, сущность которого изложена в [5, 6]. Численный анализ волновых полей проводился для двумерной плиты $0 \leq x_1 \leq 100 h_1$, $|x_2| \leq 100 h_2$ из стали ($\nu = 0,3$, $\rho = 7,9 \cdot 10^3$ кг/м³, $c_1 = 5817$ м/сек, $c_2 = 3109$ м/сек, $\gamma = 1,87$) при следующих значениях исходных данных: $h = 0,05$, $k = 0,025$, $A = 1$, $T = 100k$, $\omega = \pi / T = \pi / 100k$. Необходимым и достаточным условием устойчивости разностной схемы является следующее ограничение на размеры шагов [5]:

$$\left(\frac{k}{h}\right)^2 \leq \min \left\{ \frac{\gamma^2}{\gamma^2 + 1}, \frac{\gamma^2}{2(\gamma^2 - 1)} \right\},$$

k — шаг по времени; h — шаг по координатам. Область приложения нагрузки принята следующая:

$$x_1 = 0, \quad -25h \leq x_2 \leq 25h.$$

Энергия деформации вычисляется по формуле

$$U = 0,5[v_1^2 + v_2^2 + \alpha_8 p^2 + \alpha_2(q^2 + \tau^2)].$$

На рисунках 2, 3 приведены изолинии энергии деформации U в поперечном сечении исследуемого тела в различные моменты времени. На рисунке 2 а представлены изолинии энергии деформации U в момент времени $t = 100k$. Это время характеризуется тем, что внешний синусоидальный импульс на границе $x_1 = 0$ прямоугольной плиты перестал действовать. Можно заметить, что возмущенная область, занимая некоторую эллипсоидальную область, еще не достигла границ области исследования. В момент времени $t = 190k$ передний фронт энергии деформации почти достиг свободную тыльную границу $x_1 = 100h$ (рис. 2 б).

Угловые точки M, R лицевой границы $x_1 = 0$ прямоугольной плиты уже включились в «работу». При $t = 300k$ волна возмущения отразилась от свободной тыльной границы $x_1 = 100h$, но еще находится на полпути до лицевой границы $x_1 = 0$. Изолинии энергии деформации U для этого момента времени представлены на рисунке 3 а. Следует обратить внимание на то, что в области, прилегающей к участку нагружения, энергия деформации U практически равна нулю. В момент времени $t = 500k$ вся исследуемая область находится в сложном напряженно-деформированном состоянии (рис. 3 б).

Анализ волновых эффектов во времена $t \geq 500k$ оказывается затруднительным. С другой стороны, в этом и нет особой необходимости для наших целей, так как в эти промежутки времени в реальной конструкции уровни параметров напряженно-деформированного состояний малы и не могут быть полноценной диагностической характеристикой. Прежде всего, на всех приведенных рисунках результатах расчетов видна симметрия рассматриваемого параметра, что является подтверждением достоверности получаемых результатов, по крайней мере, в области исследованных промежутков времени.

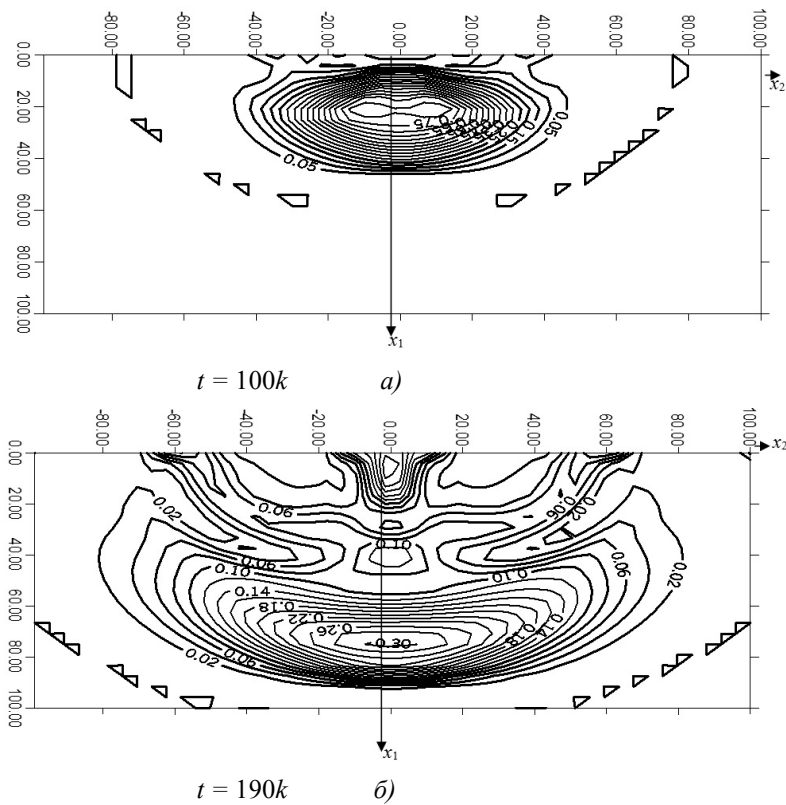


Рисунок 2. Изолинии энергии упругой деформации U в различные моменты времени

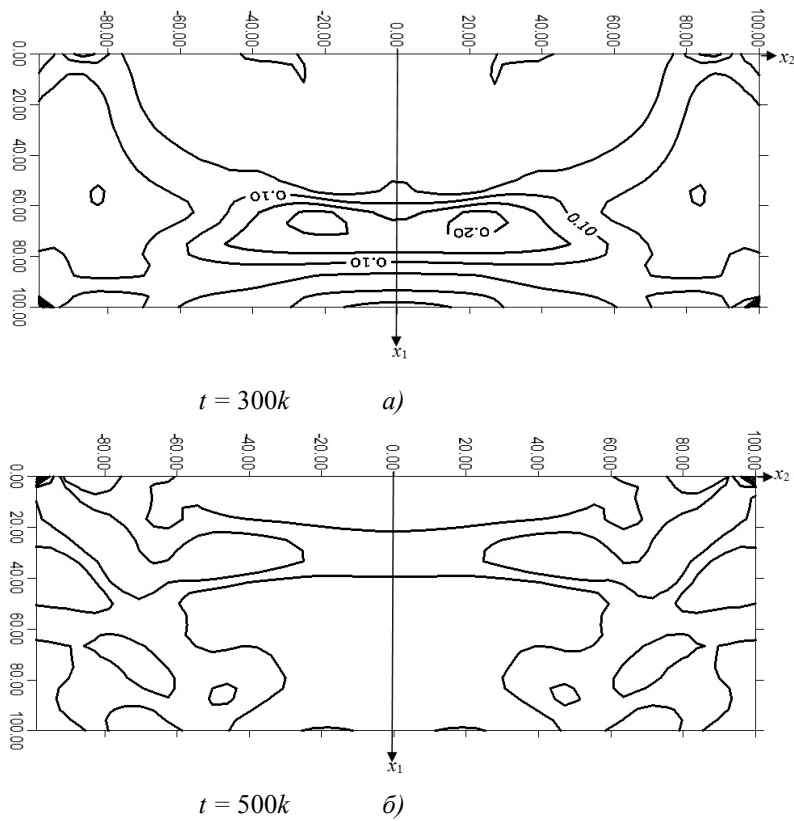


Рисунок 3. Изолинии энергии упругой деформации U в различные моменты времени

Таким образом, разработан оригинальный единый метод получения разрешающих уравнений в особых точках применительно к нестационарным задачам теории упругости, где нарушается «при-

вычная» для динамических задач гладкость функций. Разработанная методика была реализована на персональном компьютере для исследования напряженно-деформированного состояния и особенностей распространения динамических возмущений в телах конечных размеров с разрывами в граничных условиях. Результаты работы могут найти применение при расчетах на динамическую прочность современных инженерных конструкций, содержащих пластины прямоугольного очертания, при наличии в последних отверстий, вырезов, включений прямоугольной формы, в задачах общего машиностроения, геофизики, дефектоскопии, сейсморазведки полезных ископаемых, неразрушающего контроля конструкций и других областях техники.

Список литературы

- 1 Ержанов Ж.С., Жубаев Н.Ж., Жунусов К., Кожабеков Ж.Т. Поведение упругой среды при действии динамических нагрузок в цилиндрической полости // Механика горных пород. — Алма-Ата: Наука, 1975. — С. 48–58.
- 2 Ержанов Ж.С., Каримбаев Т.Д., Байтелиев Т.Б. Двумерные волны напряжений в однородных и структурно-неоднородных средах. — Алма-Ата: Наука, 1983. — С. 119.
- 3 Ержанов Ж.С., Каримбаев Т.Д., Байтелиев Т.Б. Волны напряжений в однородных и неоднородных средах. — Алма-ты: Ғылым, 1998. — С. 88.
- 4 Петров И.Б., Холодов А.С. Численное исследование некоторых динамических задач механики деформируемого твердого тела сеточно-характеристическим методом // Журн. вычислительной математики и математической физики. — 1984. — Т. 24. — № 5. — С. 722–739.
- 5 Клифтон Р.Дж. Разностный метод в плоских задачах динамической упругости // Механика. — 1968. — № 1. — С. 103–122.
- 6 Аширбаев Н.К. Численное исследование влияния разрыва в граничных условиях на волновое поле в прямоугольнике // Вестн. Караганд. ун-та. Сер. Математика. — 2012. — № 3 (67). — С. 7–11.

Н.К.Әшірбаев, Ж.Н.Әшірбаева

Үзілісті шекаралық шарттармен берілген жазық серпімді денедегі толқындардың таралу есебінің сандық шешімі

Мақалада көлденең қимасы тік төртбұрыш болатын жазық біртекті изотропты қатты денеде серпімді стационар емес толқындардың таралуы сызықты түрде қойылып, шешілген. Толқындық процесс бастапқы уақытта дененің бет жағының бір бөлігіне П-пішінді сыртқы динамикалық күш әсер етуден пайда болады, ал бет жағының қалған бөлігі кернеуден бос. Кернеулер мен жылдамдықтар терминінде қойылған аралас есеп айқын айырымдық схема, атап айтқанда, сандық кеңістіктік сипаттамалар әдісімен шешілген. Нәтижесінде қимасы тік төртбұрыш болатын денедегі динамикалық кернеулердің таралуы зерттелген.

N.K.Ashirbayev, Zh.N.Ashirbayeva

Numerical solving two problems of wave propagation in an elastic body with discontinuous boundary conditions

In this paper, a linear formulation is solved the problem of non-stationary propagation of elastic stress waves in an elastic isotropic medium with a rectangular cross-section of finite size. Wave by applying a process called external P-shaped dynamic load on some part of the face of the rectangular area and the rest of the boundary is stress-free. Formulated in terms of stress and velocity mixed problem is numerically simulated by using an explicit difference scheme through calculation based on the method of spatial characteristics. Analyzes the dynamic stress field in a rectangular strip.

References

- 1 Erzhanov Zh.S., Zhubayev N.Zh., Zhunusov K., Kozhabekov Zh.T. *The behavior of an elastic medium under dynamic loads in a cylindrical cavity* // Rock mechanics, Alma-Ata: Nauka, 1975, p. 48–58.
- 2 Erzhanov Zh.S., Karimbayev T.D., Baiteliyev T.B. *Two-dimensional waves of tension in homogeneous and structural and non-uniform environments*, Alma-Ata: Nauka, 1983, P. 119.
- 3 Erzhanov Zh.S., Karimbayev T.D., Baiteliyev T.B. *Stress wave in homogeneous and heterogeneous environments*, Almaty: Nauka, 1998, p. 88.

- 4 Petrov I.B., Kholodov A.S. *Numerical study of some dynamic problems of solid mechanics grid — a characteristic method* // Computational Mathematics and Mathematical Physics, 1984, vol. 24, No. 5, p. 722–739.
- 5 Clifton R.J. *A difference method for plane problems in dynamic elasticity* // Quart. Appl. Math., 1967, vol. 25, No. 1, p. 97–116.
- 6 Ashirbayev N.K. *Numerical investigation of the gap in the boundary conditions for the wave field in a rectangle* // Bull. KarSU, ser. Mathematics, 2012, No. 3 (67), p. 7–11.

УДК 624.04

А.К.Бейсебаев, Д.Н.Калиев

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова (E-mail: didar10_90@mail.ru)

Оптимизация жесткостных характеристик элементов рамной конструкции

В статье изложен вариантный алгоритм оптимизации рамной конструкции. Вариантное проектирование сооружений, применяемое инженерной практикой, автоматизировано. Проектными параметрами приняты соотношения жесткостных характеристик отдельных элементов рамы, варьирование которых приводит к изменению внутренних усилий, а значит — и расходу материала. Критерием оптимальности взят объем материала, необходимый для изготовления конструкции. Задача многомерной оптимизации решена методом покоординатного спуска. Для автоматизации процесса решения на алгоритмическом языке разработана программа вычислений.

Ключевые слова: проектные параметры, критерий оптимальности, метод перемещений, метод покоординатного спуска, матричный алгоритм.

Основной задачей строительной механики является разработка методов расчета и получения данных для надежного и экономического проектирования зданий и сооружений. Под надежностью сооружений здесь понимается безопасность несущих конструкций, то есть практическое исключение возможности их разрушения. Для обеспечения необходимой надежности сооружения основные элементы конструкций должны иметь достаточно большие сечения. Экономика же требует, чтобы расход материалов, идущих на изготовление конструкций, был минимальным. Чтобы увязать требования надежности с экономичностью, необходимо возможно точнее произвести расчет и строго соблюдать в процессе проектирования, возведения и эксплуатации сооружения те требования, которые вытекают из этого расчета.

Вопросы оптимального проектирования сооружений получили в последнее время значительное развитие в связи с решением стоящих перед механикой важных задач снижения материалоемкости конструкций и улучшения их механических характеристик. Расширились и сами представления о наилучших в том или ином смысле конструкциях и условиях их функционирования. В настоящее время разработаны методы численной оптимизации, позволяющие эффективно оценивать чувствительность основных характеристик конструкций к изменениям параметров проектирования и анализировать способы формирования оптимальных решений. Достигнутые результаты позволили, в частности, широко использовать методы оптимизации при разработке систем автоматизированного проектирования. Однако еще многие проблемы оптимального проектирования не получили достаточное развитие, и по ним в настоящее время ведутся интенсивные исследования в строительной механике.

Классические методы расчета статически определимых и статически неопределимых систем еще не утратили своего значения, так как именно они лежат в основе современных численных методов и, кроме того, дают более наглядное описание физического содержания рассматриваемой задачи, формирующего и изучающего их четкое инженерное мышление. Поэтому в работе, наряду с классическими методами расчета стержневых систем, используется и современная матричная форма [1].

В предлагаемой работе рассматривается алгоритм расчета рамной конструкции, изображенной на рисунке 1 а. В качестве проектных параметров приняты отношения жесткостей стержней $k_i EI$ конструкции на каждом характерном участке. Критерием оптимальности является общий объем расходуемого материала конструкции. Жесткости четвертого и пятого участков системы по технологи-

ческим соображениям приняты равными. Для оптимизации статически неопределимой рамы добавим в условие задачи четыре жесткостных переменных $k_i = 1 (i = 1, 2, 3, 4)$ для отдельного участка, что позволит нам варьировать ими для определения оптимального расхода материала данной рамы.

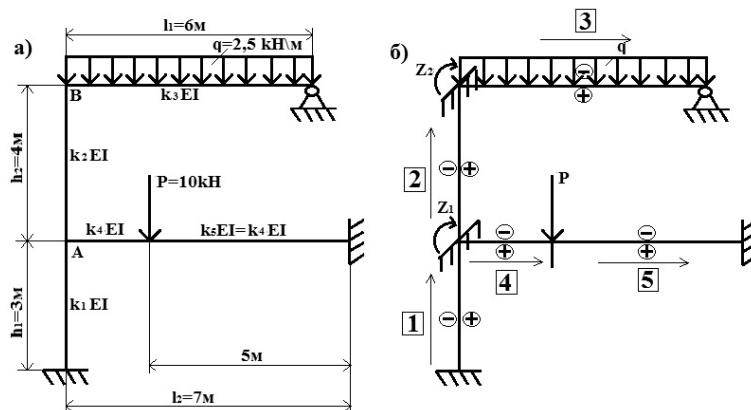


Рисунок 1. Заданная и основная системы

Расчет произведен методом перемещений, с произвольными жесткостными параметрами характерных участков рамы. Число неизвестных метода перемещений $n = n_y + n_d = 2$, называемое степенью кинематической неопределимости системы, определяют как сумму неизвестных углов поворота n_y и неизвестных линейных перемещений узлов n_d .

После определения числа неизвестных примем основную систему метода перемещений путем наложения на узлы заданной системы связей, препятствующих их перемещениям (рис. 1 б), где в прямоугольниках дана нумерация характерных участков, в кружках — знаки моментов, стрелки указывают направление и порядок расчета.

Для вычисления реакций воспользуемся свойствами взаимности реакций и перемещений. Строим эпюры изгибающих моментов в кинематической определимой основной системе метода перемещений от единичных смещений \bar{M} и от заданной нагрузки M_p , а также в основной системе метода сил строим эпюру моментов \tilde{M}_p (рис. 2) от внешней нагрузки.

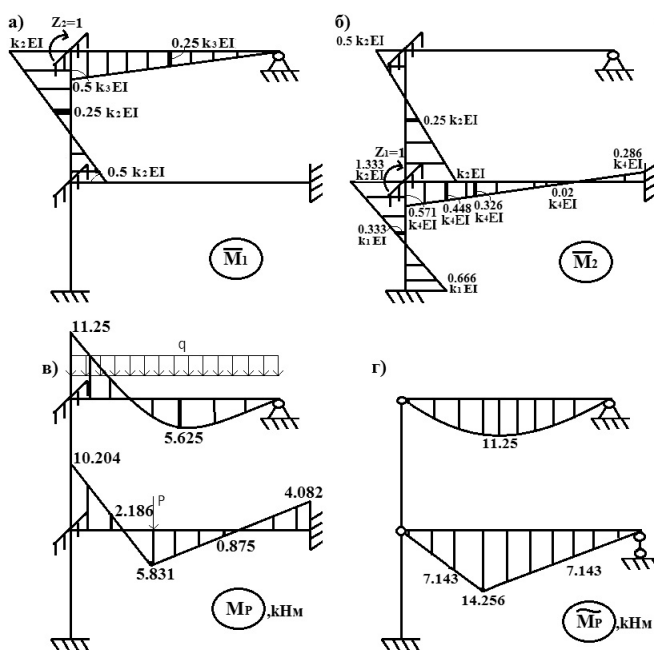


Рисунок 2. Единичные и грузовые эпюры метода перемещений

Как известно, матричный алгоритм расчета рам, позволяющий автоматизировать процесс вычислений, имеет вид [2]:

$$M = M_p + \bar{M}(\bar{M}^T L \bar{M})^{-1} \bar{M}^T L \tilde{M}_p,$$

где исходные матрицы данных единичной эпюры \bar{M} и грузовых эпюр M_p, \tilde{M}_p , а также матрица податливости L , которые для исследуемой задачи, имеют вид:

$$\bar{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0.666k_1 \\ 0 & -0.333k_1 \\ 0 & -1.333k_1 \\ 0.5k_2 & k_2 \\ -0.25k_2 & 0.25k_2 \\ -k_2 & -0.5k_2 \\ 0.5k_3 & 0 \\ 0.25k_3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0.5714k_4 \\ 0 & 0.4484k_4 \\ 0 & 0.3265k_4 \\ 0 & 0.3265k_4 \\ 0 & 0.0204k_4 \\ 0 & -0.2857k_4 \end{pmatrix}, \quad M_p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -11.25 \\ 5.625 \\ 0 \\ -10.204 \\ -2.186 \\ 5.831 \\ 5.831 \\ 0.875 \\ -4.082 \end{pmatrix}, \quad \tilde{M}_p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 11.25 \\ 0 \\ 0 \\ 7.143 \\ 14.256 \\ 14.256 \\ 7.183 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$L = \begin{pmatrix} \frac{3}{k_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12}{k_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{k_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{k_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{16}{k_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{k_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6}{k_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{24}{k_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6}{k_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{k_4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{8}{k_4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{k_4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{k_4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{20}{k_4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{k_4} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Для решения задачи многомерной оптимизации воспользуемся методом покоординатного спуска. Каждая переменная k_i , характеризующая соотношение жесткостных параметров, варьировалась в интервале неопределенности от $[0.2;5.0]$ с шагом 0.2. При изменении соотношения жесткостных характеристик менялась и эпюра внутренних усилий, а значит, и требуемые из условия прочности размеры сечения участков. Для оптимизации предлагаемого алгоритма разработана программа, реализованная на алгоритмическом языке программирования Pascal.

В рассматриваемой задаче сечение с наибольшим по абсолютной величине изгибающим моментом называется опасным поперечным сечением. Максимальный момент каждого участка необходим для решения задачи прочности.

Согласно условию прочности, необходимо выполнение следующего условия [3]:

$$[\sigma] = \frac{|M \max_i|}{W_i} = \sigma.$$

При подборе сечения балки (проектного расчета) требуемый момент сопротивления W_i на i -том участке будет равен

$$W_i = \frac{|M \max_i|}{[\sigma]} \tag{1}$$

Подставим полученные данные из таблицы в формулу (1), где допустимое напряжение для материала возьмем $[\sigma] = 40$ МПа. Проектируемая рамная конструкция находится из условия прочности работы материала, в упругой области прямоугольного сечения, которое принято с отношением сторон $b = \frac{h}{2}$.

Из формулы момента сопротивления изгибу прямоугольного сечения:

$$W_i = \frac{bh^2}{6}, \dots,$$

находим высоту сечения:

$$h_i = \sqrt[3]{12W_i}.$$

Тогда объем материала на каждом участке будет определяться:

$$V_i = \frac{(h_i^2 l_i)}{2},$$

где V_i — объем материала на участке i ; l_i — длина этого участка.

По данным матричного алгоритма, в характерных сечениях вычислены значения изгибающих моментов, согласно которым построена окончательная эпюра изгибающих моментов M от внешней нагрузки (рис. 3).

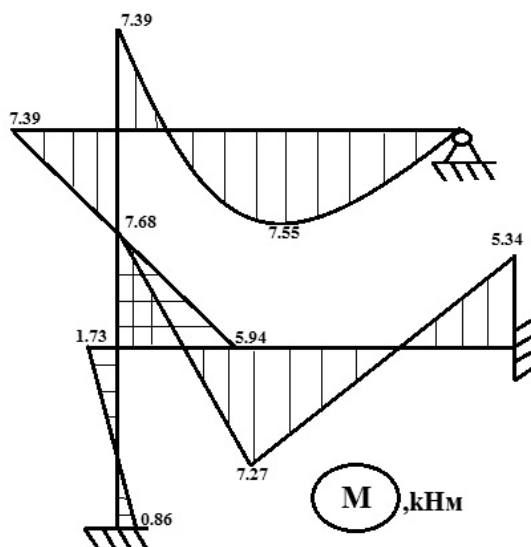


Рисунок 3. Окончательная эпюра

Далее определяем общий объем расходуемого материала, требуемого для данной рамной конструкции. По результатам объемов участков, общий минимальный объем материала, расходуемый для данной рамы, получен при значениях k_i , сведенных в приведенной ниже таблице.

Т а б л и ц а

Оптимальное значение k_i

Номер участка	1	2	3	4 и 5
Значение k_i	1.0	2.3	3.0	3.4
$ M_{\max_i} , \text{кНм}$	1,73	7,398	7,398	7,682

Вывод. Приведен алгоритм решения задачи оптимизации рамной конструкции путем рационального определения соотношений жесткостных параметров характерных элементов конструкции. Проблема свелась к задаче многомерной оптимизации, реализованной методом покоординатного спуска. Полученные результаты соответствуют теоретическим предпосылкам, а алгоритм может быть рекомендован при реализации подобных задач.

Список литературы

- 1 *Клейн Г.К.* Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики (статика стержневых систем). — М.: Высш. шк., 1997. — С. 133.
- 2 *Бутенко Ю.И.* Строительная механика стержневых систем и оболочек. — Киев: Высш. шк., 1989. — С. 184.
- 3 *Дарков А.В., Шпиров Г.С.* Сопротивление материалов. — М.: Высш. шк., 1975. — С. 184.

А.К.Бейсебаев, Д.Н.Қалиев

Рама конструкциясы элементінің қаттылық сипаттамаларын оңтайландыру

Мақалада рама конструкциясының оңтайландыру нұсқаларының алгоритмі баяндалған. Инженерлік тәжірибеде нұсқалар автоматтандырылған. Рамалық кейбір элементтердің жобалық параметрі ретінде қаттылық сипаттамасы алынған. Оларды өзгерту арқылы оның ішкі күштерін және материалдың шығынын өзгерту болады. Тиімділік критерийі ретінде жобалауға қажетті материалдың көлемі алынған. Көп өлшемді оңтайландыру есебі координат бойынша түсіру әдісімен шешілген. Есептік шешуін автоматтандыратын алгоритм тілінде бағдарлама құрылған.

А.К.Beisebayev, D.N.Kaliyev

The stiffness characteristics of the elements the frame structure optimization

The article describes a variant optimization algorithm is a frame structure. Variant design the structures, applied engineering practice, automated. Design parameters adopted by the ratio of the stiffness characteristics of the individual elements of the frame whose variation leads to a change of internal forces, and hence the flow of material. The optimality criterion is taken the amount of material required for the manufacture of construction. The problem is solved by a multi-dimensional optimization of descent. To automate the process of solving the algorithmic language a program being computed.

References

- 1 Klein G.K. *Guide to practical training at the rate of structural mechanics (statics rod systems)*, Moscow: High School, 1997, p. 133.
- 2 Butenko Y.I. *Structural Mechanics rod systems and shells*, Kiev: High School, 1989, p. 184.
- 3 Darkov A.V., Shpirov G.S. *Resistance materials*, Moscow: Higher School, 1975, p. 184.

Трехшарнирная арка с консольно-зашемленными опорами

В статье изложен расчет трехшарнирной статически определимой арки с консольно-зашемленными опорами, на которую действует подвижная равномерно распределенная нагрузка. Определены неблагоприятное положение нагрузки, рациональное расположение крайних шарниров от зашемленных опор, оптимальная стрела подъема с учетом нагрузки на арочную конструкцию и распределение материала по всей длине арки. Экономическая эффективность применения трехшарнирной арки с консольно-зашемленными опорами по материалоемкости составляет порядка 9 % по сравнению с традиционной трехшарнирной аркой.

Ключевые слова: консольно-зашемленная арка, невыгодное положение нагрузки, ось арки, оптимизация, экономическая эффективность по материалоемкости.

В настоящее время в строительстве существует необходимость в создании больших пролетов для промышленных и гражданских сооружений. Данные конструкции требуют дополнительных затрат для уточнения напряжения деформированного состояния как конструкции, так и их проектных параметров. В целях экономии производят изменения стандартных конструкций с более рациональным использованием материала и модернизацию расчетных схем типовых конструкций.

Большую роль в строительстве сооружений для перекрытия больших пролетов в инженерной практике играют арочные конструкции. Их часто применяют при перекрытии большепролетных мостовых, спортивных, зрелищных и других сооружений.

Арочные конструкции, в зависимости от количества шарниров, бывают трехшарнирные, двухшарнирные и бесшарнирные. Несложными в расчетах являются трехшарнирные арочные конструкции, так как они статически определимы.

Трехшарнирной является система, состоящая из двух криволинейных стержней, соединенных между собой ключевым шарниром C (рис. 1) и двумя шарнирно-неподвижными опорами A и B . Если шарнир C расположен выше линии опорных шарниров $A - B$, система называется арочной, если ниже — висячей. Трехшарнирная система неизменяема, так как недостающий стержень между стержнями возмещен дополнительной опорной связью. Данная конструкция статически определима относительно опорных закреплений, так как число параметров, определяющих реакции этих закреплений, равно трем. Этому условию удовлетворяет комбинация шарнирно-подвижной и шарнирно-неподвижной опор — для сооружений, опирающихся в двух точках [1].

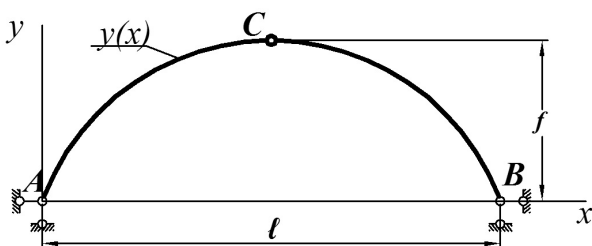


Рисунок 1. Типовая трехшарнирная арка

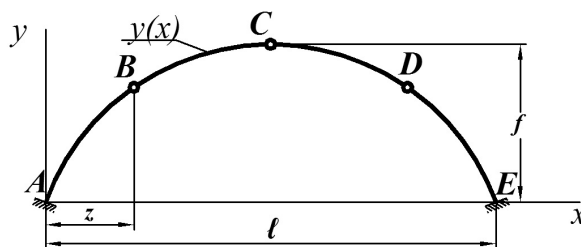


Рисунок 2. Трехшарнирная арка с консольно-зашемленными опорами

Традиционные схемы трехшарнирных арок не позволяют увидеть все возможные плюсы данной конструкции, так как в классической схеме шарниры находятся непосредственно в опорах арки.

В предлагаемых исследованиях рассмотрена схема симметричной арки, ось которой описана уравнением $y(x)$. Крайние шарниры находятся на некотором расстоянии от консоли, что позволяет уменьшить изгибающий момент, размеры сечения (рис. 2), а значит — и ее материалоемкость.

Предлагаемое расположение шарниров позволяет несколько уменьшить внутренние усилия и тем самым спроектировать более экономичную арку. Условие прочности в случае учета изгиба и сжатия можно определить из формулы [1]

$$\sigma = \frac{|M|}{W_x} + \frac{|N|}{A} \leq [\sigma], \quad (1)$$

где M и N — изгибающий момент и продольная сила в произвольном сечении арки; W_x и A — осевой момент сопротивления изгибу и площадь поперечного сечения арки; σ и $[\sigma]$ — расчетное и допускаемое напряжения материала в опасном сечении конструкции.

Требуется определить, при каких параметрах вес арочной конструкции будет минимальным.

Ось арки. Рациональным очертанием оси арки называется такое, при котором кривая давления от заданной неподвижной нагрузки совпадает с осью арки. При вертикальной нагрузке ось арки будет рациональной, если ее очертание меняется по закону изменения балочного момента [2].

При выборе очертания оси трехшарнирной конструкции при действии равномерно распределенной внешней нагрузки в данных исследованиях опирались на работу [3], где установлено, что оптимальной осью является квадратная парабола:

$$y = \frac{4fx(l-x)}{l^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = y' = \frac{4f}{l} \left(1 - \frac{2x}{l}\right), \quad \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}};$$

$$\sin \varphi = \cos \varphi \cdot \operatorname{tg} \varphi.$$

Определение реакции. Как и при расчете многопролетных статически определимых балок, составляем поэтажную схему (рис. 3).

Для нахождения изгибающих моментов, поперечных и продольных усилий необходимо определить реакции в опоре, хотя бы с одной из сторон, например — слева. Рассмотрим подвесную часть арки BD и определим реакции в шарнире B :

$$V_B = \frac{q(b-z) \left(\frac{l-z-b}{2} \right)}{l-2z};$$

$$H = H_B = \frac{V_B \frac{l-2z}{2} - q(b-z) \left(\frac{l-2z}{2} - \frac{b-z}{2} \right)}{f - f_z}.$$

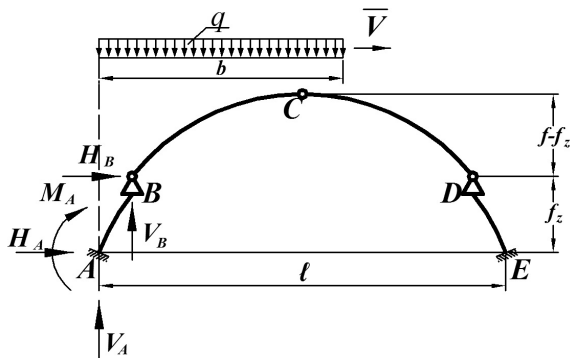


Рисунок 3. Поэтажная схема трехшарнирной арки с консольно-защемленными опорами

Рисунок 4. К расчету консоли

Для определения изгибающих моментов M , поперечных Q и продольных N усилий следует определить реакции в опорных защемлениях. Для этого рассмотрим криволинейную консоль AB (рис. 4), найдем реакции и момент в жесткой заделке A :

$$V_A = q \cdot z + V_B, \quad H_A = H_B = H;$$

$$M_A = \frac{-q \cdot z^2}{2} - V_B \cdot z + H_B \cdot f_z.$$

Изгибающие моменты M , поперечные Q и продольные N усилия определяются традиционными выражениями

$$M = M^{\circ} - H_A \cdot y;$$

$$Q = Q^{\circ} \cdot \cos \varphi - H_A \cdot \sin \varphi;$$

$$N = -Q^{\circ} \cdot \sin \varphi - H_A \cdot \cos \varphi,$$

согласно которым для $l=100м$, $a=0,6l$, $f=0,05l$ построены эпюры внутренних усилий для трехшарнирной арки с консольно-зашемленными опорами (рис. 5).

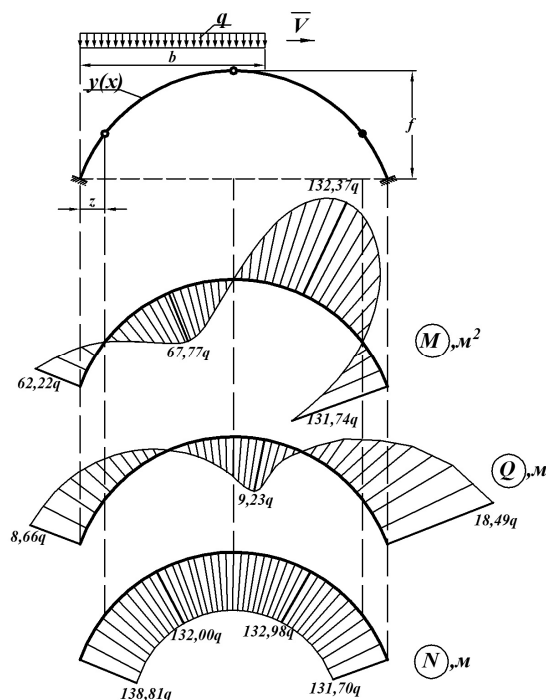


Рисунок 5. Эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил

Подвижная равномерно распределенная нагрузка. В работе конструкции большую роль играет неблагоприятное положение равномерно распределенной нагрузки q . Положение нагрузки определяется параметрами a и b , меняющимися в диапазоне $a \in [0, l]$, $b \in [0, l - a]$ (рис. 6).

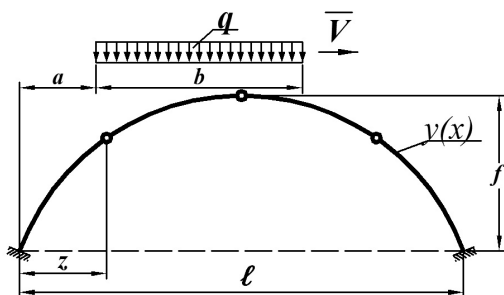


Рисунок 6. Подвижная равномерно распределенная нагрузка

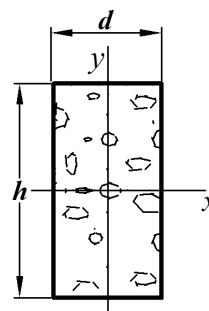


Рисунок 7. Сечение арки

Как и в [3], установлено, что максимальные внутренние усилия, а значит, и расход материала достигается при $a = 0$, $b = 0,6 l$.

Далее вычислим размеры поперечного сечения арки, необходимые для определения расхода материала. Сечение примем прямоугольное (рис. 7).

Из условия прочности (1) имеем

$$W_x = \frac{d \cdot h^2}{6}, \quad A = d \cdot h,$$

где примем $d = \frac{h}{2}$.

Отсюда следует, что

$$\sigma = \frac{12 \cdot |M|}{h^3} + \frac{2 \cdot |N|}{h^2} - [\sigma] = 0.$$

Решая последнее уравнение численным методом, находим значение h .

Задача оптимизации. В данной работе требуется найти три рациональных значения проектных параметров:

- неблагоприятное положение подвижной равномерно распределенной нагрузки q (значения b);
- положение крайних шарниров (значение z);
- наивыгоднейшую стрелу подъема f . Для этого использован алгоритм многомерной оптимизации — метод покоординатного спуска.

Необходимо определить наименьшее значение функции $u(M) = u(b, z, f)$. Здесь через M обозначена точка трехмерного пространства с координатами: $M = (b, z, f)$. Выберем какую-нибудь начальную точку $M_0 = (b_0, z_0, f_0)$ и рассмотрим функцию u при фиксированных значениях всех переменных, кроме первой: $M_0 = (b, z_0, f_0)$. Тогда она превратится в функцию одной переменной b . Изменяя эту переменную, будем двигаться от начальной точки $b = b_0$, пока не дойдем до конца диапазона ее изменения, вычисляя в каждом узле значение функции u . Среди этих значений определим минимальное значение, фиксируем, при каком значении b_1 это достигается. Точку с координатами (b_1, z_0, f_0) обозначим через M_1 , при этом $u(M_0) \geq u(M_1)$.

Фиксируем теперь переменные: $b = b_1, f = f_0$, затем рассмотрим функцию u как функцию одной переменной z : $u(b_1, z, f_0)$. Изменяя z , будем опять двигаться от начального значения $z = z_0$ в сторону убывания функции, пока не дойдем до минимума при $z = z_1$. Точку с координатами (b_1, z_1, f_0) обозначим через M_2 , при этом $u(M_1) \geq u(M_2)$.

Проведем такую же минимизацию функции по переменной f . После чего снова вернемся к b и продолжим процесс. Эта процедура вполне оправдывает название метода. С ее помощью мы построим последовательность точек M_0, M_1, M_2, \dots , которой соответствует монотонная последовательность значений функции $u(M_0) \geq u(M_1) \geq u(M_2) \geq \dots$. Обрывая ее на некотором шаге k , можно приближенно принять значение функции $u(M_k)$ за ее наименьшее значение в рассматриваемой области.

Отметим, что данный метод сводит задачу поиска наименьшего значения функции нескольких переменных к многократному решению одномерных задач оптимизации.

Вывод. В исследованиях трехшарнирной статически определимой арки с консольно-защемленными опорами определены оптимальные параметры, при которых вес арки будет минимальным. К таким параметрам относятся положение крайних шарниров ($z = 0,0801l$) и стрела подъема ($f = 0,0794l$). Также было найдено невыгодное положение равномерно распределенной нагрузки q ($a = 0$; $b = 0,6l$). После получения результатов (рис. 8) выяснилось, что опасные сечения ($h = 0,302q$) будут находиться на расстоянии $x = 0,73l$ и $x = l$.

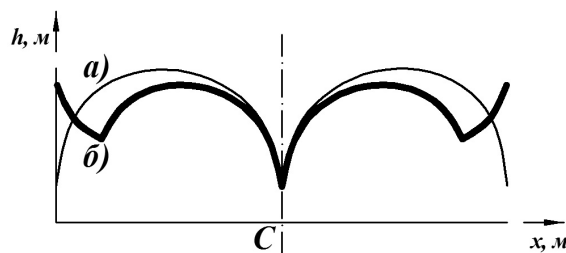


Рисунок 8. Сравнение размеров сечений арок:
а) традиционная трехшарнирная арка [4];
б) консольно-защемленная трехшарнирная арка

Исследования показали, что экономическая эффективность по материалоемкости применения трехшарнирной арки с консольно-защемленными опорами составляет порядка 9 % по сравнению с традиционной трехшарнирной аркой.

Список литературы

- 1 *Степин П.А.* Сопrotивление материалов. — М.: Высш. шк., 1979. — 312 с.
- 2 *Дарков А.В.* Строительная механика. — М.: Высш. шк., 1976. — 542 с.
- 3 *Бейсебаев А.К., Заикина Т.В.* Оптимизация геометрического очертания оси трехшарнирной арки // Вестн. Караганд. ун-та Сер. Математика. — 2005. — № 2 (38). — С. 49–51.
- 4 *Киселев В.А.* Строительная механика. — М.: Стройиздат, 1976. — 511 с.

А.К.Бейсебаев, В.Ю.Соловьев, Т.В.Заикина

Тірегі консольді бекітілген үш топсалы арка

Макалада козғалмалы бірқалыпты таралған жүктеме әрекет ететін тірегі консольді бекітілген үш топсалы арканың есебі қарастырылған. Жүктеменің жағымсыз қалпы, шекті топсалардың бекітілген тіректерден оңтайлы орналасуы, жүктемеге байланысты арканың биіктігі мен ұзындығын оңтайландыру мәселелері зерттелген. Консольді бекітілген үш топсалы арканың экономикалық тиімділігі, көрнекі материалдың жұмсалуды бойынша, дәстүрлі үш топсалы аркамен салыстырғанда шамамен 9 % құрайды.

A.K.Beisebayev, V.Yu.Solovyev, T.V.Zaikina

Three-hinged arch with the console jammed support

In this work calculation of statically indefinable three-hinged arch with the console jammed support which evenly distributed loading operates is stated. There is determined the adverse provision of loading, rational arrangement of extreme hinges from jammed support, optimum arrow of lifting with account of load on arch design and material distributional along whole length of arch. Economic efficiency of application of a three-hinged arch with the console jammed support on material capacity makes about 9 % in comparison with traditional arch.

References

- 1 *Stepin P.A.* *Resistance materials*, Moscow: High school, 1979, 312 p.
- 2 *Darkov A.V.* *Structural Mechanics*, Moscow: High school, 1976, 542 p.
- 3 *Beisebayev A.K., Zaikina T.V.* *Optimization of the geometric shape of the arch axis fully articulated* // Bull. of KarSU. Ser. Matematika, 2005, No. 2 (38), p. 49–51.
- 4 *Kiselev A.V.* *Structural Mechanics*, Moscow: Stroyizdat, 1976, 511 p.

А.Н.Есбаев, Г.А.Есенбаева, М.И.Рамазанов

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова (E-mail: adilet_e@mail.ru)

Исследование одной краевой задачи для нагруженного дифференциального оператора теплопроводности

В статье определена постановка краевой задачи для заданного нагруженного дифференциального оператора теплопроводности в неограниченной области. Исходная краевая задача редуцирована к интегральному уравнению Вольтерра второго рода. Получены различные представления функции, определяющей ядро редуцированного интегрального уравнения. Исследованы свойства определяющей функции ядра. Все результаты получены в общем виде.

Ключевые слова: краевая задача для нагруженного дифференциального оператора теплопроводности, интегральное уравнение Вольтерра второго рода, обобщенная гипергеометрическая функция, гамма-функция, символ Похгаммера.

Решение $u = u(x, t)$ первой краевой задачи в области $\Omega = \{(x, t) : x \in (0, \infty); t \in (0, \infty)\}$ для нагруженного дифференциального оператора теплопроводности

$$L_{\lambda} u \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1-2\beta}{x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - \lambda \cdot \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \Bigg|_{x=\bar{x}(t)} = f(x, t), \quad (1)$$

где β и λ — параметры, причем $0 < \beta < 1$, $\lambda \in C$; $x = \bar{x}(t)$ — заданная функция при $t \in (0, \infty)$;

$\lambda \cdot \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \Bigg|_{x=\bar{x}(t)}$ — нагруженное слагаемое; k — порядок нагруженного слагаемого ($k = 0, 1, 2, \dots$); функции

$f(x, t)$, $g(x)$ и $h(t)$ являются заданными в области Ω при $x \in (0, \infty)$ и $t \in (0, \infty)$ соответственно;

производные $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^k u}{\partial x^k}$ непрерывны всюду в Ω ;

при начальном условии

$$u(x, 0) = g(x) \quad (2)$$

и граничном условии

$$u(0, t) = h(t) \quad (3)$$

определяется из уравнения [1]

$$u(x, t) = \lambda \cdot \int_0^t \int_0^{\infty} \frac{x^{\beta} \cdot \xi^{1-\beta}}{2(t-\tau)} \cdot \exp\left(-\frac{x^2 + \xi^2}{4(t-\tau)}\right) \cdot I_{\beta}\left(\frac{\xi \cdot x}{2(t-\tau)}\right) \cdot \frac{\partial^k u}{\partial \xi^k} \Bigg|_{\xi=\bar{x}(\tau)} d\xi \cdot d\tau + \bar{F}(x, t), \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{F}(x, t) &= F_1(x, t) + F_2(x, t) + F_3(x, t); \\ F_1(x, t) &= \frac{1}{2} \cdot \int_0^t \int_0^{\infty} f(\xi, \tau) \cdot \frac{x^{\beta} \cdot \xi^{1-\beta}}{t-\tau} \cdot \exp\left(-\frac{x^2 + \xi^2}{4(t-\tau)}\right) \cdot I_{\beta}\left(\frac{\xi \cdot x}{2(t-\tau)}\right) \cdot d\xi \cdot d\tau; \\ F_2(x, t) &= \frac{x^{\beta}}{2t} \cdot \int_0^{\infty} g(\xi) \cdot \xi^{1-\beta} \cdot \exp\left(-\frac{x^2 + \xi^2}{2t}\right) \cdot I_{\beta}\left(\frac{\xi \cdot x}{2t}\right) \cdot d\xi; \\ F_3(x, t) &= \frac{x^{2\beta}}{2^{2\beta+1} \cdot \Gamma(\beta+1)} \cdot \int_0^t h(\tau) \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right) \cdot \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1+\beta}}; \end{aligned}$$

$I_{\beta}(z)$ — модифицированная функция Бесселя; $\Gamma(z)$ — гамма-функция.

Функция $\mu(t) = \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \Bigg|_{x=\bar{x}(t)}$ является решением интегрального уравнения Вольтерра второго рода, к которому редуцируется уравнение (4) [2]:

$$\mu(t) - \lambda \cdot \int_0^t K(t, \tau) \cdot \mu(\tau) \cdot d\tau = F(t), \tag{5}$$

где

$$K(t, \tau) = \left. \frac{\partial^k Q(x, t - \tau)}{\partial x^k} \right|_{x=\bar{x}(t)}, \quad F(t) = \left. \frac{\partial^k \bar{F}(x, t)}{\partial x^k} \right|_{x=\bar{x}(t)}, \tag{6}$$

причем

$$Q(x, t - \tau) = \frac{x^\beta}{2(t - \tau)} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{4(t - \tau)}\right) \cdot P(x, t - \tau); \tag{7}$$

$$P(x, t - \tau) = \int_0^\infty \xi^{1-\beta} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4(t - \tau)}\right) \cdot I_\beta\left(\frac{\xi \cdot x}{2(t - \tau)}\right) \cdot d\xi. \tag{8}$$

Функция $Q(x, t - \tau)$ определяет, как мы видим из первого соотношения (6), ядро интегрального уравнения (5). Как известно, свойства ядра диктуют методы исследования самого интегрального уравнения. Вычислим функцию $Q(x, t - \tau)$ в общем виде и представим различные ее интерпретации.

1. Непосредственно вычисляя функцию $P(x, t - \tau)$ как несобственный интеграл (8), получим:

$$\begin{aligned} P(x, t - \tau) &= \frac{x^\beta}{2^{\beta+1} \cdot \frac{1}{4(t - \tau)} \cdot \Gamma(\beta + 1)} \cdot \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!(\beta + 1)_k} \Gamma\left(\frac{2k + 2 - \beta + \beta}{2}\right) \times \\ &\quad \times \left(\frac{c}{2p^r}\right)^{2k} \cdot \left(\frac{x}{2(t - \tau)}\right)^{2k} : \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4(t - \tau)}\right)^{2k} = \\ &= \frac{4(t - \tau)}{2^{2\beta+1} \cdot \Gamma(\beta + 1)} \cdot \frac{x^\beta}{(t - \tau)^\beta} \cdot \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!(\beta + 1)_k} \cdot \Gamma(k + 1) \cdot \left(\frac{x}{2\sqrt{t - \tau}}\right)^{2k} = \\ &= \frac{4}{2^{2\beta+1} \cdot \Gamma(\beta + 1)} \cdot \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{2^{2k} (\beta + 1)_k} \cdot \frac{x^{2k+\beta}}{(t - \tau)^{k+\beta-1}} = \\ &= \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{2^{2k+2\beta-1} (\beta + 1)_k \Gamma(\beta + 1)} \cdot \frac{x^{2k+\beta}}{(t - \tau)^{k+\beta-1}}; \\ P(x, t - \tau) &= \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{2^{2k+2\beta-1} (\beta + 1)_k \Gamma(\beta + 1)} \cdot \frac{x^{2k+\beta}}{(t - \tau)^{k+\beta-1}}. \end{aligned} \tag{9}$$

Подставляя (9) в (7), придем к следующему представлению функции $Q(x, t - \tau)$:

$$Q(x, t - \tau) = \frac{x^{2\beta}}{2^\beta \Gamma(\beta + 1)(t - \tau)^\beta} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{4(t - \tau)}\right) \cdot \sum_{k=0}^\infty \frac{x^{2k}}{2^{2k} (\beta + 1)_k (t - \tau)^k}, \tag{10}$$

где $(v + 1)_k$ — символ Похгаммера [3].

2. Используя интегральное представление модифицированной функции Бесселя [4], преобразуем соотношение (8) к виду

$$\begin{aligned} P(x, t - \tau) &= \int_0^\infty \xi^{1-\beta} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4(t - \tau)}\right) \cdot \frac{\left(\frac{\xi \cdot x}{4(t - \tau)}\right)^\beta}{\Gamma\left(\beta + \frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} d\xi \times \int_{-1}^1 (1 - \eta^2)^{\beta - \frac{1}{2}} \cdot \exp\left(\pm \frac{\xi \cdot x \cdot \eta}{2(t - \tau)}\right) \cdot d\eta = \\ &= \frac{1}{\Gamma\left(\beta + \frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot 4^\beta} \cdot \frac{x^\beta}{(t - \tau)^\beta} \times \\ &\quad \times \int_{-1}^1 (1 - \eta^2)^{\beta - \frac{1}{2}} d\eta \int_0^\infty \xi \cdot \exp\left(-\frac{1}{4(t - \tau)}(\xi^2 \mp 2x\eta\xi)\right) \cdot d\xi = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\Gamma\left(\beta + \frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{x^\beta}{4^\beta (t-\tau)^\beta} \cdot \int_{-1}^1 (1-\eta^2)^{\beta-\frac{1}{2}} \times \\
 &\times \left[2(t-\tau) - \frac{x\eta}{2} \sqrt{4\pi(t-\tau)} \cdot \exp\left(\frac{x^2\eta^2}{4(t-\tau)}\right) \left\{ 1 - \Phi\left(\frac{x\eta}{2\sqrt{t-\tau}}\right) \right\} \right] d\eta = \\
 &= \frac{1}{\Gamma\left(\beta + \frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{x^\beta}{4^\beta (t-\tau)^\beta} \cdot \left[2(t-\tau) \cdot \int_{-1}^1 (1-\eta^2)^{\beta-\frac{1}{2}} d\eta - \right. \\
 &\left. - x\sqrt{\pi(t-\tau)} \cdot \int_{-1}^1 \eta \cdot (1-\eta^2)^{\beta-\frac{1}{2}} \cdot \exp\left(\frac{x^2\eta^2}{4(t-\tau)}\right) \cdot \left\{ 1 - \Phi\left(\frac{x\eta}{2\sqrt{t-\tau}}\right) \right\} d\eta \right] = \\
 &= \frac{1}{\Gamma\left(\beta + \frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{x^\beta}{4^\beta (t-\tau)^\beta} \cdot \left[2(t-\tau) \cdot A_1 - x\sqrt{\pi(t-\tau)} \cdot A_2(x, t-\tau) \right], \tag{11}
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \int_{-1}^1 (1-\eta^2)^{\beta-\frac{1}{2}} d\eta; \\
 A_2(x, t-\tau) &= \int_{-1}^1 \eta \cdot (1-\eta^2)^{\beta-\frac{1}{2}} \cdot \exp\left(\frac{x^2\eta^2}{4(t-\tau)}\right) \cdot \left\{ 1 - \Phi\left(\frac{x\eta}{2\sqrt{t-\tau}}\right) \right\} d\eta; \\
 \Phi(z) &= \operatorname{erf}(z).
 \end{aligned}$$

Найдем значение интеграла $A_1(x, t-\tau)$:

$$A_1 = \int_{-1}^1 (1-\eta^2)^{\beta-\frac{1}{2}} d\eta = B\left(\beta + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right). \tag{12}$$

Вычислим интеграл $A_2(x, t-\tau)$:

$$\begin{aligned}
 A_2(x, t-\tau) &= \int_{-1}^1 \eta \cdot (1-\eta^2)^{\beta-\frac{1}{2}} \cdot \exp\left(\frac{x^2\eta^2}{4(t-\tau)}\right) \cdot \left\{ 1 - \Phi\left(\frac{x\eta}{2\sqrt{t-\tau}}\right) \right\} d\eta = \\
 &= \int_{-1}^1 \eta \cdot (1-\eta^2)^{\beta-\frac{1}{2}} \cdot \exp\left(\frac{x^2\eta^2}{4(t-\tau)}\right) d\eta - \int_{-1}^1 \eta \cdot (1-\eta^2)^{\beta-\frac{1}{2}} \cdot \exp\left(\frac{x^2\eta^2}{4(t-\tau)}\right) \cdot \Phi\left(\frac{x\eta}{2\sqrt{t-\tau}}\right) d\eta = \\
 &= -2 \cdot \int_0^1 \eta \cdot (1-\eta^2)^{\beta-\frac{1}{2}} \cdot \exp\left(\frac{x^2\eta^2}{4(t-\tau)}\right) \cdot \Phi\left(\frac{x\eta}{2\sqrt{t-\tau}}\right) d\eta = \\
 &= \mp \frac{x}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} B\left(\frac{3}{2}, \beta + \frac{1}{2}\right) \cdot {}_2F_2\left(1, \frac{3}{2}; \frac{3}{2}, \beta + 2; \frac{x^2}{4(t-\tau)}\right), \tag{13}
 \end{aligned}$$

где ${}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \cdot \dots \cdot (a_p)_k}{(b_1)_k \cdot \dots \cdot (b_q)_k} \cdot \frac{z^k}{k!}$ — обобщенная гипергеометрическая функция.

Исходя из результатов (12), (13), получим представление (11) в виде

$$\begin{aligned}
 P(x, t-\tau) &= \frac{1}{\Gamma\left(\beta + \frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{x^\beta}{4^\beta (t-\tau)^\beta} \cdot \left[2(t-\tau) \cdot B\left(\beta + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \pm \right. \\
 &\left. \pm x\sqrt{\pi(t-\tau)} \cdot \frac{x}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} \cdot B\left(\frac{3}{2}, \beta + \frac{1}{2}\right) \cdot {}_2F_2\left(1, \frac{3}{2}; \frac{3}{2}, \beta + 2; \frac{x^2}{4(t-\tau)}\right) \right] =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\Gamma\left(\beta + \frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot \left[B\left(\beta + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{x^\beta (t - \tau)^{1-\beta}}{2^{2\beta-1}} \pm \right. \\
 &\left. \pm B\left(\frac{3}{2}, \beta + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{x^{\beta+2}}{2^{2\beta} (t - \tau)^\beta} \cdot {}_2F_2\left(1, \frac{3}{2}; \frac{3}{2}, \beta + 2; \frac{x^2}{4(t - \tau)}\right) \right] = \\
 &= \frac{1}{\Gamma\left(\beta + \frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot \left[\frac{\Gamma\left(\beta + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\beta + 1)} \cdot \frac{x^\beta (t - \tau)^{1-\beta}}{2^{2\beta-1}} \pm \right. \\
 &\left. \pm \frac{x^{\beta+2}}{2^{2\beta} (t - \tau)^\beta} \cdot {}_2F_2\left(1, \frac{3}{2}; \frac{3}{2}, \beta + 2; \frac{x^2}{4(t - \tau)}\right) \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\beta + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\beta + 2)} \right] = \\
 &= \frac{x^\beta (t - \tau)^{1-\beta}}{2^{2\beta-1} \Gamma(\beta + 1)} \pm \frac{x^{\beta+2}}{2^{2\beta+1} \Gamma(\beta + 2) (t - \tau)^\beta} \cdot {}_2F_2\left(1, \frac{3}{2}; \frac{3}{2}, \beta + 2; \frac{x^2}{4(t - \tau)}\right),
 \end{aligned}$$

то есть

$$P(x, t - \tau) = \frac{x^\beta (t - \tau)^{1-\beta}}{2^{2\beta-1} \Gamma(\beta + 1)} \pm \frac{x^{\beta+2}}{2^{2\beta+1} \Gamma(\beta + 2) (t - \tau)^\beta} \cdot {}_2F_2\left(1, \frac{3}{2}; \frac{3}{2}, \beta + 2; \frac{x^2}{4(t - \tau)}\right). \tag{14}$$

Подстановка (14) в (7) дает следующее выражение для функции $Q(x, t - \tau)$:

$$\begin{aligned}
 Q(x, t - \tau) &= \exp\left(-\frac{x^2}{4(t - \tau)}\right) \cdot \left[\frac{x^{2\beta}}{2^{2\beta} \Gamma(\beta + 1)} \cdot \frac{1}{(t - \tau)^\beta} \pm \right. \\
 &\left. \pm \frac{x^{2\beta+2}}{2^{2\beta+2} \Gamma(\beta + 2)} \cdot \frac{1}{(t - \tau)^{\beta+1}} \cdot {}_2F_2\left(1, \frac{3}{2}; \frac{3}{2}, \beta + 2; \frac{x^2}{4(t - \tau)}\right) \right], \tag{15}
 \end{aligned}$$

где

$${}_2F_2\left(1, \frac{3}{2}; \frac{3}{2}, \beta + 2; \frac{x^2}{4(t - \tau)}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\beta + 2)_k} \cdot \left(\frac{x^2}{4(t - \tau)}\right)^k. \tag{16}$$

Из соотношения (15) с учетом (16) следует, что

$$\begin{aligned}
 Q(x, t - \tau) &= \exp\left(-\frac{x^2}{4(t - \tau)}\right) \cdot \left[\frac{x^{2\beta}}{2^{2\beta} \Gamma(\beta + 1)} \cdot \frac{1}{(t - \tau)^\beta} \pm \right. \\
 &\left. \pm \frac{x^{2\beta+2}}{2^{2\beta+2} \Gamma(\beta + 2)} \cdot \frac{1}{(t - \tau)^{\beta+1}} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\beta + 2)_k} \cdot \left(\frac{x^2}{4(t - \tau)}\right)^k \right]. \tag{17}
 \end{aligned}$$

3. Если для вычисления функции $P(x, t - \tau)$ использовать неполную гамма-функцию

$$\gamma(v, x) = \int_0^x t^{v-1} \cdot e^{-t} dt,$$

то найдем, что

$$\begin{aligned}
 P(x, t - \tau) &= \left(\frac{1}{2(t - \tau)}\right)^{\beta-1} \cdot \left(\frac{x}{2(t - \tau)}\right)^\beta \cdot \frac{1}{\Gamma(\beta)} \cdot \exp\left(\frac{x^2}{4(t - \tau)^2} \cdot (t - \tau)\right) \times \\
 &\times \gamma\left(\beta, \frac{x^2}{4(t - \tau)}\right) = \frac{2(t - \tau)}{x^\beta \cdot \Gamma(\beta)} \cdot \exp\left(\frac{x^2}{4(t - \tau)}\right) \cdot \gamma\left(\beta, \frac{x^2}{4(t - \tau)}\right); \\
 P(x, t - \tau) &= \frac{2(t - \tau)}{x^\beta \cdot \Gamma(\beta)} \cdot \exp\left(\frac{x^2}{4(t - \tau)}\right) \cdot \gamma\left(\beta, \frac{x^2}{4(t - \tau)}\right). \tag{18}
 \end{aligned}$$

Подставляя (18) в (7), вычислим $Q(x, t - \tau)$

$$\begin{aligned} Q(x, t - \tau) &= \frac{x^\beta}{2(t - \tau)} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{4(t - \tau)}\right) \cdot P(x, t - \tau) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \cdot \gamma\left(\beta, \frac{x^2}{4(t - \tau)}\right) = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \cdot \int_0^{\frac{x^2}{4(t - \tau)}} e^{-\xi} \cdot \xi^{\beta-1} d\xi; \\ Q(x, t - \tau) &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \cdot \gamma\left(\beta, \frac{x^2}{4(t - \tau)}\right). \end{aligned} \tag{19}$$

4. Через дополнительную неполную гамма-функцию

$$\Gamma(v, x) = \int_x^\infty t^{v-1} \cdot e^{-t} dt$$

функцию $Q(x, t - \tau)$ можно представить в виде

$$Q(x, t - \tau) = 1 - \frac{1}{\Gamma(\beta)} \cdot \Gamma\left(\beta, \frac{x^2}{4(t - \tau)}\right).$$

5. Учитывая свойства неполной гамма-функции [5], представление (19) преобразуем к виду

$$Q(x, t - \tau) = \frac{1}{\beta \cdot \Gamma(\beta)} \cdot \frac{x^2}{2^{2\beta}(t - \tau)^\beta} \cdot {}_1F_1\left(\beta; \beta + 1; -\frac{x^2}{4(t - \tau)}\right), \tag{20}$$

где

$${}_1F_1\left(\beta; \beta + 1; -\frac{x^2}{4(t - \tau)}\right) = \beta \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(\beta + k) \cdot k!} \cdot \left(\frac{x^2}{4(t - \tau)}\right)^k. \tag{21}$$

Из (20) с учетом (21) приходим к следующему представлению функции $Q(x, t - \tau)$:

$$Q(x, t - \tau) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \cdot \frac{x^2}{2^{2\beta}(t - \tau)^\beta} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(\beta + k) \cdot k!} \cdot \left(\frac{x^2}{4(t - \tau)}\right)^k.$$

6. Принимая во внимание, что

$$\gamma(v + 1, x) = v \cdot \gamma(v, x) - x^v e^{-x},$$

получим для функции $Q(x, t - \tau)$ выражение в виде

$$Q(x, t - \tau) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \cdot \left[(\beta - 1) \cdot \gamma\left(\beta - 1, \frac{x^2}{4(t - \tau)}\right) - \left(\frac{x}{2}\right)^{2\beta-2} (t - \tau)^{1-\beta} \exp\left(-\frac{x^2}{4(t - \tau)}\right) \right].$$

Исследуем свойства функции $Q(x, t - \tau)$.

- 1) Функция $Q(x, t - \tau)$, $0 < \tau < t < \infty$, непрерывна.
- 2) Функция $Q(x, t - \tau) \geq 0$, $0 < \tau < t < \infty$.
- 3) Для функции $Q(x, t - \tau)$ справедлива оценка

$$Q(x, t - \tau) \leq \frac{1}{\Gamma(\beta + 1)} \cdot \left(\frac{x^2}{4(t - \tau)}\right)^\beta. \tag{22}$$

Действительно, из представления (19) для функции $Q(x, t - \tau)$ получим искомое соотношение

$$\begin{aligned} Q(x, t - \tau) &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \cdot \gamma\left(\beta, \frac{x^2}{4(t - \tau)}\right) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \cdot \int_0^{\frac{x^2}{4(t - \tau)}} e^{-\xi} \cdot \xi^{\beta-1} d\xi = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \cdot \left(\frac{x^2}{4(t - \tau)}\right)^\beta \cdot \int_0^1 \exp\left(-\frac{x^2}{4(t - \tau)} z\right) \cdot z^{\beta-1} dz \leq \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\beta)} \cdot \left(\frac{x^2}{4(t - \tau)}\right)^\beta \cdot \int_0^1 z^{\beta-1} dz = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \cdot \left(\frac{x^2}{4(t - \tau)}\right)^\beta \cdot \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\Gamma(\beta + 1)} \cdot \left(\frac{x^2}{4(t - \tau)}\right)^\beta. \end{aligned}$$

Оценку, аналогичную (22), можно также найти иным путем, используя представление (10) для функции $Q(x, t - \tau)$ и учитывая, что

$$(\beta + 1)_k < k!.$$

В результате получим

$$\begin{aligned} Q(x, t - \tau) &= \left(\frac{x}{2}\right)^{2\beta} \frac{1}{\Gamma(\beta + 1)(t - \tau)^\beta} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{4(t - \tau)}\right) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\beta + 1)_k (t - \tau)^k} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} < \\ &< \left(\frac{x}{2}\right)^{2\beta} \frac{1}{\Gamma(\beta + 1)(t - \tau)^\beta} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{4(t - \tau)}\right) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \left(\frac{x^2}{4(t - \tau)}\right)^k = \\ &= \left(\frac{x}{2}\right)^{2\beta} \frac{1}{\Gamma(\beta + 1)(t - \tau)^\beta} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{4(t - \tau)}\right) \cdot \exp\left(\frac{x^2}{4(t - \tau)}\right) = \left(\frac{x}{2}\right)^{2\beta} \frac{1}{\Gamma(\beta + 1)(t - \tau)^\beta}; \\ Q(x, t - \tau) &< \left(\frac{x}{2}\right)^{2\beta} \frac{1}{\Gamma(\beta + 1)(t - \tau)^\beta}. \end{aligned}$$

Для функции $Q(x, t - \tau)$ имеет место неравенство

$$\begin{aligned} Q(x, t - \tau) &< \frac{1}{\Gamma(\beta + 1)(t - \tau)^\beta} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2\beta} \exp\left(-\frac{x^2}{4(t - \tau)}\right) \pm \\ &\pm \frac{1}{\Gamma(\beta + 2)(t - \tau)^{\beta+1}} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2\beta+2} \exp\left(-\frac{x^2}{4(t - \tau)}\right) \pm \frac{1}{\Gamma(\beta + 2)(t - \tau)^{\beta+2}} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2\beta+4}. \end{aligned} \quad (23)$$

В самом деле, для представления (17) функции $Q(x, t - \tau)$ в виде

$$\begin{aligned} Q(x, t - \tau) &= \exp\left(-\frac{x^2}{4(t - \tau)}\right) \cdot \left[\frac{x^{2\beta}}{2^{2\beta} \Gamma(\beta + 1)} \cdot \frac{1}{(t - \tau)^\beta} \pm \right. \\ &\left. \pm \frac{x^{2\beta+2}}{2^{2\beta+2} \Gamma(\beta + 2)} \cdot \frac{1}{(t - \tau)^{\beta+1}} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\beta + 2)_k} \cdot \left(\frac{x^2}{4(t - \tau)}\right)^k \right] \end{aligned}$$

имеем

$$\begin{aligned} {}_2F_2\left(1, \frac{3}{2}; \frac{3}{2}, \beta + 2; \frac{x^2}{4(t - \tau)}\right) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\beta + 2)_k} \cdot \left(\frac{x^2}{4(t - \tau)}\right)^k = \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\beta + 2)_k} \cdot \left(\frac{x^2}{4(t - \tau)}\right)^k = 1 + \frac{x^2}{4(t - \tau)} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\beta + 2)_k} \cdot \left(\frac{x^2}{4(t - \tau)}\right)^{k-1} = \\ &= 1 + \frac{x^2}{4(t - \tau)} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(\beta + 2)_{m+1}} \cdot \left(\frac{x^2}{4(t - \tau)}\right)^m. \end{aligned}$$

Так как $(\beta + 2)_{m+1} > m!$, то

$$\begin{aligned} {}_2F_2\left(1, \frac{3}{2}; \frac{3}{2}, \beta + 2; \frac{x^2}{4(t - \tau)}\right) &= 1 + \frac{x^2}{4(t - \tau)} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(\beta + 2)_{m+1}} \cdot \left(\frac{x^2}{4(t - \tau)}\right)^m < \\ &< 1 + \frac{x^2}{4(t - \tau)} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \cdot \left(\frac{x^2}{4(t - \tau)}\right)^m = 1 + \frac{x^2}{4(t - \tau)} \cdot \exp\left(\frac{x^2}{4(t - \tau)}\right); \\ {}_2F_2\left(1, \frac{3}{2}; \frac{3}{2}, \beta + 2; \frac{x^2}{4(t - \tau)}\right) &< 1 + \frac{x^2}{4(t - \tau)} \cdot \exp\left(\frac{x^2}{4(t - \tau)}\right). \end{aligned} \quad (24)$$

С учетом (24) получим из (17) для функции $Q(x, t - \tau)$ искомое неравенство (23)

$$Q(x, t - \tau) < \frac{1}{\Gamma(\beta + 1)(t - \tau)^\beta} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2\beta} \exp\left(-\frac{x^2}{4(t - \tau)}\right) \pm$$

$$\pm \frac{1}{\Gamma(\beta + 2)(t - \tau)^{\beta + 1}} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2\beta + 2} \exp\left(-\frac{x^2}{4(t - \tau)}\right) \pm \frac{1}{\Gamma(\beta + 2)(t - \tau)^{\beta + 2}} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2\beta + 4}.$$

Функция $Q(x, t - \tau)$ удовлетворяет следующему соотношению:

$$\int_0^t Q(x, t - \tau) d\tau = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \cdot \left[t \cdot \gamma\left(\beta, \frac{x^2}{4t}\right) + \frac{x^2}{4} \cdot \Gamma\left(\beta - 1, \frac{x^2}{4t}\right) \right]. \tag{25}$$

Действительно, используя представление (19) для функции $Q(x, t - \tau)$, вычислим интеграл

$$\int_0^t Q(x, t - \tau) d\tau = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \cdot \int_0^t \gamma\left(\beta, \frac{x^2}{4(t - \tau)}\right) \cdot d\tau = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \cdot \int_0^t d\tau \int_0^{\frac{x^2}{4(t - \tau)}} e^{-\xi} \cdot \xi^{\beta - 1} d\xi.$$

После замены в последнем соотношении порядка интегрирования приходим к искомому соотношению (25):

$$\begin{aligned} \int_0^t Q(x, t - \tau) d\tau &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \cdot \left[\int_0^{\frac{x^2}{4t}} e^{-\xi} \cdot \xi^{\beta - 1} d\xi \int_0^t d\tau + \int_{\frac{x^2}{4t}}^\infty e^{-\xi} \cdot \xi^{\beta - 1} d\xi \int_{t - \frac{x^2}{4\xi}}^t d\tau \right] = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \cdot \left[\int_0^{\frac{x^2}{4t}} t \cdot e^{-\xi} \cdot \xi^{\beta - 1} d\xi + \int_{\frac{x^2}{4t}}^\infty \frac{x^2}{4\xi} \cdot e^{-\xi} \cdot \xi^{\beta - 1} d\xi \right] = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \cdot \left[t \cdot \int_0^{\frac{x^2}{4t}} e^{-\xi} \cdot \xi^{\beta - 1} d\xi + \frac{x^2}{4} \int_{\frac{x^2}{4t}}^\infty e^{-\xi} \cdot \xi^{\beta - 2} d\xi \right] = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \cdot \left[t \cdot \gamma\left(\beta, \frac{x^2}{4t}\right) + \frac{x^2}{4} \cdot \Gamma\left(\beta - 1, \frac{x^2}{4t}\right) \right]. \end{aligned}$$

Для функции $Q(x, t - \tau)$ верно предельное отношение, определяемое выражением

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^t Q(x, t - \tau) d\tau = 0.$$

В самом деле, переходя к пределу при $t \rightarrow 0$ в (25), получим искомое соотношение:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^t Q(x, t - \tau) d\tau &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \cdot \left[t \cdot \gamma\left(\beta, \frac{x^2}{4t}\right) + \frac{x^2}{4} \cdot \Gamma\left(\beta - 1, \frac{x^2}{4t}\right) \right] = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left[t \cdot \frac{\gamma\left(\beta, \frac{x^2}{4t}\right)}{\Gamma(\beta)} + \frac{x^2}{4} \cdot \frac{\Gamma\left(\beta - 1, \frac{x^2}{4t}\right)}{\Gamma(\beta)} \right] = 0. \end{aligned}$$

Искомое соотношение для функции $Q(x, t - \tau)$ можно получить более простым путем. Для этого вычислим предел $\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^t Q(x, t - \tau) d\tau$, используя оценку (22):

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^t Q(x, t - \tau) d\tau &\leq \frac{1}{\Gamma(\beta + 1)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2\beta} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^t \frac{d\tau}{(t - \tau)^\beta} = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta + 1)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2\beta} \cdot \frac{1}{1 - \beta} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} (t - \tau)^{1 - \beta} \Big|_0^t = 0, \end{aligned}$$

то есть

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^t Q(x, t - \tau) d\tau = 0.$$

Заклучение. Здесь представлены те интерпретации функции $Q(x, t - \tau)$ в общем виде, которые наиболее удобны в исследованиях и которые используются (например, при исследовании краевой задачи (1)–(3) при неподвижной точке нагрузки [2]), а также могут быть использованы при исследовании интегрального уравнения (5), а следовательно, и краевой задачи (1)–(3), при различных конкретно заданных значениях параметров и конкретно заданном законе движения $x = \bar{x}(t)$ точки нагрузки.

Список литературы

- 1 Джениалиев М.Т., Рамазанов М.И. Нагруженные уравнения как возмущения дифференциальных уравнений. — Алматы: Ғылым, 2010. — 335 с.
- 2 Есбаев А.Н., Есенбаева Г.А. Об одной граничной задаче для нагруженного дифференциального оператора теплопроводности при неподвижной точке нагрузки // Вестн. Караганд. ун-та. Сер. Математика. — 2013. — № 2 (70).
- 3 Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. — Т. 2. — Специальные функции. — М.: Физматлит, 2003. — 664 с.
- 4 Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Физматгиз, 1963. — 1108 с.
- 5 Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. — Т. 3. — Специальные функции. Дополнительные главы. — М.: Физматлит, 2003. — 688 с.

А.Н.Есбаев, Г.А.Есенбаева, М.И.Рамазанов

Жүктелген дифференциалдық жылуөткізгіштік операторы үшін бір шектік есепті зерттеу

Мақалада жүктелген дифференциалдық жылуөткізгіштік операторы үшін шенелмеген облыста бір шектік есептің қойылуы анықталған. Берілген шектік есеп жалпы түрде екінші ретті Вольтерра интегралдық теңдеуіне келтірілген. Функцияның әр түрлі мағыналары келтірілген интегралдық теңдеулердің өзегін анықтайтындай алынды. Өзектің функциясын сипаттайтын қасиеттері зерттелген. Барлық нәтижелері жалпы түрде берілген.

A.N.Yesbayev, G.A.Yessenbayeva, M.I.Ramazanov

The research of one boundary value problem for the loaded differential operator of heat conduction

In this article the determination of one boundary value problem for the given loaded differential operator of heat conduction in the unlimited domain is defined. The given boundary value problem is reduced to the integral equation of Volterra of the second kind. The difference presentations of the function defining the kernel of the integral equation are calculated. The properties of this kernel function are investigated. All results are obtained in general form.

References

- 1 Jenaliyev M.T., Ramazanov M.I. *The loaded equations as indignations of differential equations*, Almaty: Gylym, 2010, 335 p.
- 2 Yesbayev A.N., Yessenbayeva G.A. *About one boundary value problem for the loaded differential operator of heat conduction with the stationary point of load* // Bull. KarSU. Mathematics ser. // *Vestnik Karagandinskogo universiteta, Seriya Matematika*, Karaganda, 2013, No. 2 (70).
- 3 Prudnikov A.P., Brychrov Y.A., Marechev O.I. *Integrals and rows*, vol. 2, Special functions, Moscow: Fizmatlit, 2003, 664 p.
- 4 Gradshteyn I.S., Rygik I.M. *Tables of integrals, sums, rows and products*, Moscow: Fizmatgiz, 1963, 1108 p.
- 5 Prudnikov A.P., Brychrov Y.A., Marechev O.I. *Integrals and rows*, vol. 3, Special functions. Supplementary chapters, Moscow: Fizmatlit, 2003, 688 p.

К.Т.Искаков¹, Ж.О.Оралбекова²¹Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева, Астана;²Казахский национальный педагогический университет им. Абая, Алматы (E-mail:oralbekova@bk.ru)

Оптимизационный метод решения обратной задачи для волнового уравнения

Для интерпретации данных георадара предложена математическая модель распространения волн, возмущенных плоской волной, падающей на поверхность. Рассмотрена обратная задача для волнового уравнения. Для решения двумерной обратной коэффициентной задачи использован метод линеаризации. Разработан оптимизационный метод решения обратных линеаризованных задач. Приведены экспериментальные исследования по диагностике взлетно-посадочной полосы коммерческого аэродрома, расположенного на территории Алматинской области РК, с использованием прибора «Георадар Лоза-1В».

Ключевые слова: обратная коэффициентная задача, волновое уравнение, метод линеаризации, оптимизационный метод, георадар.

1. Алгоритм решения обратной двумерной задачи

На основании экспериментальных исследований рассмотрим модель распространения волн, возбужденной плоской волной заданной формы [1]:

$$\frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} = r_0 \delta(t).$$

Предположим, что скорость распространения волн в полупространстве $(z, y) \in R_+ \times R^n$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, имеет следующую структуру:

$$c^2(z, y) = c_0^2 + c_1(z, y)$$

и удовлетворяет условиям:

$$1) c_0 \in C^2(\bar{R}_+), \quad c_0'(0) = 0;$$

$$2) 0 < M_1 \leq c_0(z) \leq M_2, \quad \|c_0\|_{C^2(R_+)} \leq M_3;$$

$$3) c_1(z, y) \text{ отлично от нуля в области } (z, y) \in (0, h) \times K_n(D_1), \text{ где}$$

$$K_n(D_1) = \{y \in R^n; |y_j| < D_1, j = \overline{1, n}\};$$

$$4) c_1(z, y) \in C^2((0, h) \times K_n(D_1)), \quad \alpha = \|c_1\|_{C^2((0, h) \times K_n(D_1))}, \quad \alpha \leq M_1.$$

В силу этих предположений, время пробега волны на глубину h определяется как $T_h = 2h(M_1 - \alpha)^{-1}$. Тогда обратную задачу об определении $c^2(z, y)$ находим из соотношений

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2(z, y) \Delta_{z,y} u(z, y) \in (0, h) \times K_n(D), \quad t \leq T_h; \\ u|_{t < 0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} = r_0 \delta(t); \\ u|_{y_j = D} = u|_{y_j = -D}, \quad z \in (0, h), t \leq T_h \end{cases} \quad (1)$$

по известной дополнительной информации

$$u|_{t=0} = f(y, t), \quad y \in K_n(D), \quad t \in (0, T_h).$$

Используем метод линеаризации, учитывая малость α , представим решение граничной задачи (1) в виде

$$u(z, y, t) = u_0(z, t) + u_1(z, y, t),$$

где $u_0(z)$ — решение следующей граничной задачи:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t} u_0 = c_0^2(z) \frac{\partial^2}{\partial t} u_0, z \in R_+, t \in R_+; \\ u_0|_{t<0} = 0, \frac{\partial^2}{\partial t} u_0|_{z=0} = r_0 \delta(t), \end{cases} \quad (2)$$

а $u_1(z, t)$ есть решение задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t} u_1 = c_0^2(z) \Delta_{z,y} u_1 + c_1 \frac{\partial^2}{\partial t} u_0, (z, y) \in (0, h) \times K_n(D), t \leq T_h; \\ u_1|_{t<0} = 0, \frac{\partial^2}{\partial t} u_1|_{z=0} = 0; \\ u|_{\partial K_n(D)=0} = 0, z \in (0, h), t \leq T_h. \end{cases} \quad (3)$$

Дополнительная информация для задач (2), (3) имеет вид:

$$u_0|_{z=0} = \hat{f}(y, t), t \in (0, T_h); \quad (4)$$

$$u_1|_{z=0} = g(y, t), y \in K_n(D), t \in (0, T_h). \quad (5)$$

Таким образом, для решения исходной обратной задачи (1) поступаем следующим образом:

1⁰. Решаем обратную задачу (2), (4) об определении $c_0^2(z)$.

2⁰. Решаем прямую задачу (3) на глубину h и находим $\frac{\partial^2}{\partial t} u_0$.

3⁰. Решаем обратную задачу (3), (5) об определении $c_1(z, y)$ по заданным $\frac{\partial^2}{\partial t} u_0, g(y, t)$.

Для решения обратных задач используем оптимизационный метод [2; 194–206].

Пусть $q(z)$ — приближенное решение обратной задачи (2), (4).

Рассмотрим функционал навязки:

$$J_1(q) = \int_0^{T_h} [u_0(0, t; q) - u_0(0, t; c_0)]^2 dt. \quad (6)$$

Для минимизации функционала применим метод наискорейшего спуска [3]:

$$q^{(n+1)}(z) = q^{(n)}(z) - \alpha_n \nabla J_1(q^{(n)}).$$

Здесь α_n — коэффициент спуска, а градиент функционала (6) вычисляется по формуле

$$\nabla J_1(q^{(n)}) = \int_0^{T_h} \psi(z, t; q^{(n)})(u_0)_{zz} dt,$$

где $\psi(z, t; q^{(n)})$ — решение соответствующей сопряженной задачи [2; 194–206].

Обозначим уже известное выражение на этапе 2 через $Q(z, y, t) = \frac{\partial^2}{\partial t} u_0$ и запишем оптимизационный метод об определении приближенного решения $p(z, t)$ задачи (3), (5), тогда

$$p^{(n+1)}(z, t) = p^{(n)}(z, t) - \alpha_n \nabla J_2(p^{(n)}).$$

Здесь градиент для функционала $J_2(p^{(n)}) = \int_0^{T_h} [u_1(0, y, t; p^{(n)}) - g(y, t)]^2 dt$ имеет вид

$$\nabla J_2(p^{(n)}) = \int_0^{T_h} [\varphi(z, y, t; p^{(n)}) \cdot Q(z, y, t)] dt,$$

где $\varphi(z, y, t; p^{(n)})$ есть решение сопряженной задачи:

$$\frac{\partial^2}{\partial t} \varphi = q(z) \Delta_{z,t} \varphi + p(z, t) Q(z, t), (z, y) \in (0, h) \times K_n(D), t \in [T_h, 0];$$

$$\begin{aligned} \varphi_1 \Big|_{t=T_h} &= 0, \quad \varphi_{1t} \Big|_{t=T_h} = 0; \\ \varphi \Big|_{\partial K_n(D)} &= 0, \quad z \in (0, h), \quad t \in T_h; \\ \varphi_z \Big|_{z=0} &= 2 \left[u_1(0, y, t; p^{(n)}) - g(y, t) \right]. \end{aligned}$$

2. Постановка задачи и данные экспериментальных исследований

Постановка задачи состояла в следующем: выявление внутренней структуры строения участка взлетно-посадочной полосы (с явным дефектом), представленной на рисунке 1. Обследование структуры грунта на предмет обнаружения причин дефекта поверхности полосы. Постановка задачи требует применения неразрушающего метода, дающего представление о состоянии грунта, расположенного под рабочим покрытием полосы.



Рисунок 1. Взлетно-посадочная полоса и георадар

Экспериментальное исследование состояло из следующих частей: описание объекта и его физического состояния; схема разметки участка полосы для проведения георадарных измерений; данные геологических профилей исследуемых объектов; экспертное заключение по диагностике (дефекта) исследуемого объекта.

Экспериментальные исследования были выполнены геофизическим комплексом «Лоза-1В»: с использованием антенны 100 см (100 МГц), шаг по профилю — 10 см по первой трассе (отмечен на рис. 2 сверху) и с использованием антенны 150 см (150 МГц) с шагом 20 см по второй трассе, на рисунке 2 он указан ниже.

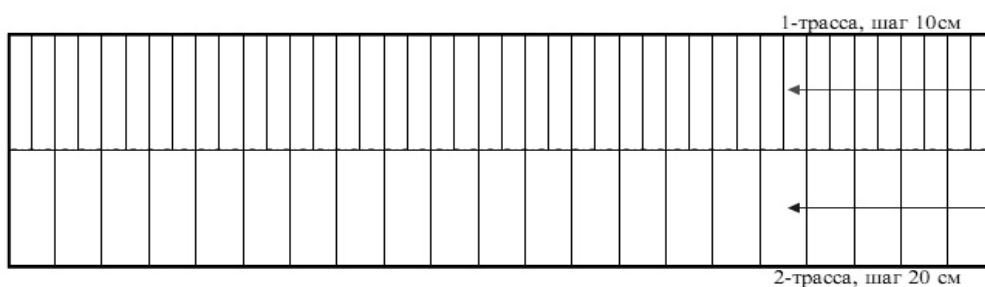


Рисунок 2. Схема трасс (эксперимент 1)

На рисунках 3, 4 показаны профили трасс после применения низкочастотного фильтра, сглаживающего осцилляции вдоль трассы.

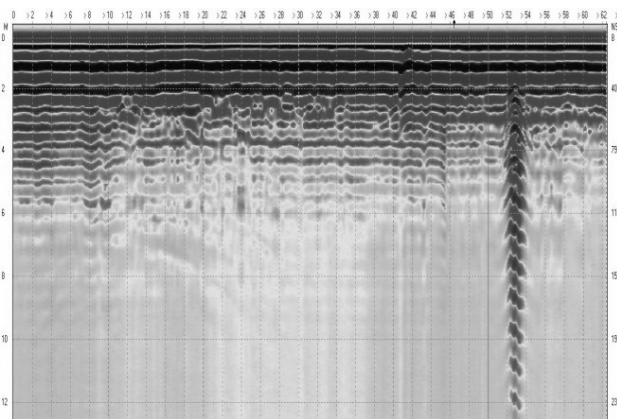


Рисунок 3. Обработка профиля низкочастотным фильтром (первая трасса)

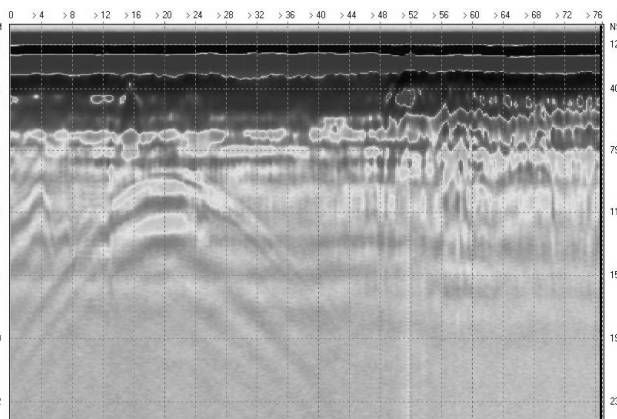


Рисунок 4. Обработка профиля низкочастотным фильтром (вторая трасса)

На рисунках 3, 4 цифры слева направо по оси абсцисс — это координаты в метрах, измеренные вдоль профиля, вертикальная шкала справа — время регистрации сигнала приемной антенной в нс.

Картины радарограмм визуально похожи на возмущения поверхности, созданной плоской волной, падающей на поверхность. Представим, что мы одновременно возмутили среду источниками, помещенными во всех точках трассы (которые на самом деле мы проходили последовательно, одна за другой). То есть как будто мы одновременно включили столько установок, сколько точек измерения было на трассе. Такое одновременное возмущение многими источниками можно трактовать как возмущение поверхности среды плоской волной, падающей на поверхность.

Если на пути волн имеются непроницаемые препятствия, волны их огибают и возникают куполообразные волновые картины (рис. 4), похожие на волновую картину, образующуюся за выступающим, например, из воды камнем.

Если препятствия представляют собой нечто вроде ворот, то волна проходит в ворота, а за стенами наблюдается штиль. На рисунке 3 интервал на расстоянии 52–54 м от начала координат — нечто вроде «ворот». Эти соображения и позволили нам сделать выводы о наличии «трубы» — непроницаемого для электромагнитных колебаний препятствия. Результаты экспериментальных и теоретических исследований, выполненных в соавторстве с профессорами С.И.Кабанихиным и Б.Г.Мукановой, были доложены на международных конференциях [4–7].

Повторные экспериментальные исследования на указанном выше объекте (рис. 5) проведены руководителем службы безопасности полетов аэродрома полковником Б.Кулназаровым и Ж.О.Оралбековой.



Рисунок 5. Взлетно-посадочная полоса и георадар (эксперимент 2)

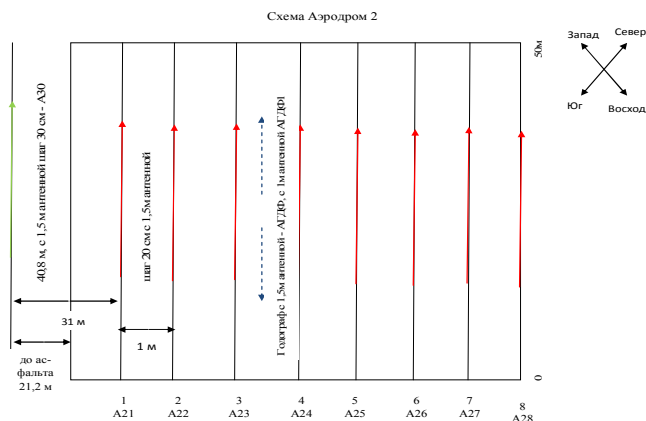


Рисунок 6. Схема трасс (эксперимент 2)

Экспериментальная часть исследования состояла из следующих блоков: описание объекта и его физического состояния; новая схема разметки участка полосы для проведения георадарных измере-

ний (рис. 6); данные геологических профилей исследуемых объектов; экспертное заключение по диагностике (дефекта) исследуемого объекта.

Экспериментальные исследования выполнены геофизическим комплексом «Лоза-1В», с использованием антенны 100 см (100МГц), шаг по профилю 10 см, и с шагом 20 см по трассам, отмеченным на рисунке 6.

Данные георадарных экспериментальных исследований объекта представлены на рисунке 7.

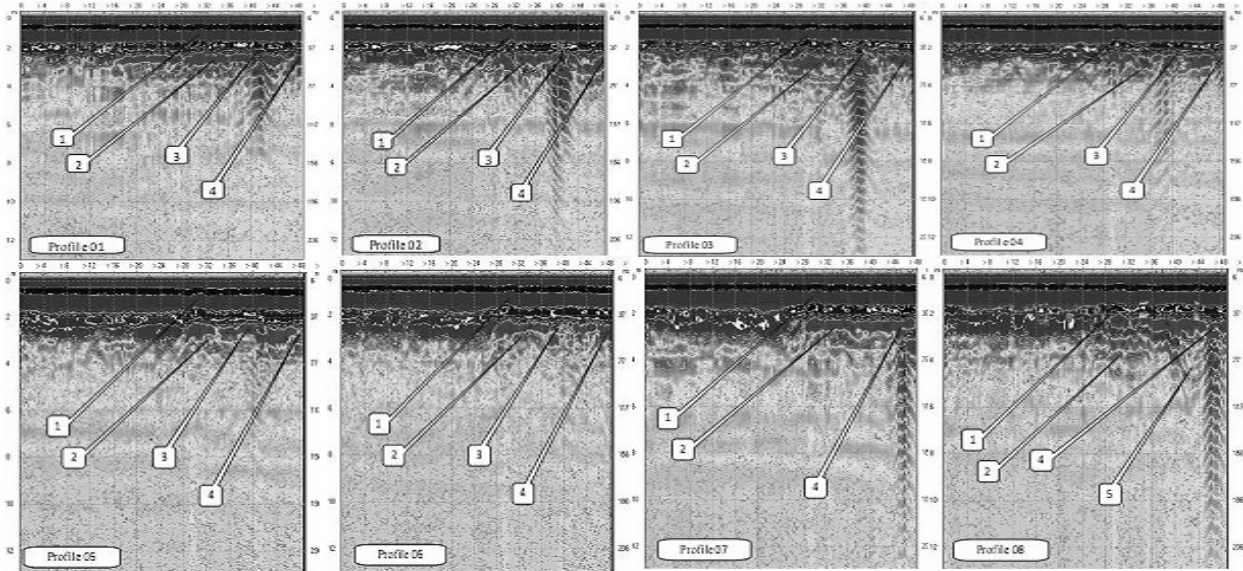


Рисунок 7. Георадарные данные эксперимента 2

Ниже приведена 3D-обработка полученных профилей эксперимента 2:

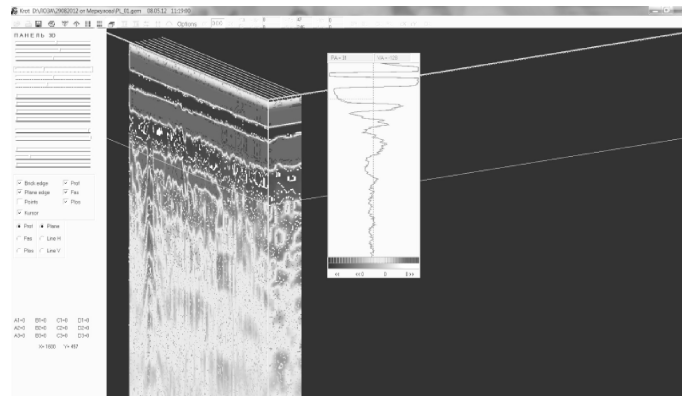


Рисунок 8. 3D-обработка полученных профилей

В результате проведенного анализа приходим к следующему заключению:

- 1 – линейно протяженный объект (трещина, шов, кабель...);
- 2 – плотный слой грунта (глина, подсыпка гравия с крупным камнем...);
- 3 – железобетонный лоток (дренаж, трубы...);
- 4 – железобетонный лоток (дренаж, трубы...);
- 5 – яма, старое русло ручья...

Замечание. В случае проведения экспериментальных измерений, параллельных вдоль предполагаемого исследуемого объекта, как видно из заключения, мы получаем более подробную картину об исследуемом дефекте поверхности аэродрома. Как показало экспериментальное исследование, необходимо проведение двух этапов эксперимента, поскольку на первом выявляется предполагаемый объект, а на втором — вокруг этого объекта нужно провести тщательные измерения.

Работа поддержана грантом МОН РК (№ 2217/ГФЗ).

Список литературы

- 1 *Кабанихин С.И.* Проекционно-разностные методы определения коэффициентов гиперболических уравнений. — Новосибирск: Наука, 1988. — С. 131–134.
- 2 *Кабанихин С.И., Искаков К.Т.* Оптимизационные методы решения коэффициентных обратных задач. — Новосибирск: Изд. НГУ, 2001. — 315 с.
- 3 *Васильев Ф.П.* Методы решения экстремальных задач. — М.: Наука, 1981. — С. 32–40.
- 4 *Kabanikhin S.I., Iskakov K.T., Oralbekova Zh.* Analysis of the measurements of subsurface coatings using Georadar // The 8 th Congress of International Society for Analysis, its Applications, and Computation (ISAAC-2011). — Moscow, Russia, 22–27 August, 2011. — P. 291–292.
- 5 *Кабанихин С.И., Искаков К.Т., Оралбекова Ж.О.* Анализ измерений подповерхностных покрытий с использованием георадара // Материалы междунар. конф. «Актуальные проблемы современной математики, информатики и механики. 20 лет Независимости РК». — Алматы, 28–30 сентября 2011 г. — С. 319, 320.
- 6 *Искаков К.Т., Муканова Б.Г., Оралбекова Ж.О.* Применение георадара в задачах идентификации подповерхностных покрытий // Материалы III междунар. науч. шк. конф. «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач». — Новосибирск, 10–15 октября 2011 г. — С. 24, 25.
- 7 *Искаков К.Т., Оралбекова Ж.О.* Обратная задача для волнового уравнения в георадарных исследованиях // Тр. II междунар. науч.-практ. конф. «Информационно-инновационные технологии: интеграция науки, образования и бизнеса», посвящ. 20-летию Независимости Республики Казахстан. — II т. — КазНТУ им.К.И.Сатпаева. — Алматы, 1–2-декабря 2011 г. — С. 357–361.

Қ.Т.Ысқаков, Ж.О.Оралбекова

Толқын теңдеуі үшін кері есепті шешудің оңтайлы әдісі

Георадар мәліметтерін интерпретациялау үшін жазықтыққа түсетін жазық толқынның әсерінен ауытқитын толқын таралуының математикалық моделі ұсынылды. Толқын теңдеуі үшін кері есеп қарастырылды. Екі өлшемді кері коэффициенттік есепті шешу үшін сызықтату әдісі қолданылды. Кері сызықтатылған есепті шешудің оңтайландыру әдісі құрастырылды. «Георадар Лоза-1В» аспабын қолданумен ҚР Алматы облысының аймағында орналасқан жеке меншік аэродромның ұшу-қону жолағын бақылау барысындағы тәжірибелік зерттеулер нәтижелері келтірілді.

K. T. Iskakov, Zh. O. Oralbekova

Optimization method of solving the inverse problem for the wave equation

For interpretation of GPR data the mathematical model of wave propagation, which perturbed by a plane wave incident on the surface is proposed. The inverse problem for the wave equation is considered. For solving the two-dimensional inverse problem the linearization method is used. The optimization method of solving the inverse linearized problem is developed. The experimental researches on the diagnoses of the runway of private airport located on the territory of Almaty in the Republic of Kazakhstan by using georadar (GPR) are presented.

References

- 1 *Kabanikhin S.I.* *Projection-difference methods of determining the coefficients of hyperbolic equations*, Novosibirsk: Nauka, 1988, p. 131–134.
- 2 *Kabanikhin S.I., Iskakov K.T.* *Optimization methods for solving the coefficient inverse problems*, Novosibirsk: Publ. NSU, 2001, 315 p.
- 3 *Vasil'ev F.P.* *Methods for solving extremal problems*, Moscow: Nauka, 1981, p. 32–40.
- 4 *Kabanikhin S.I., Iskakov K.T., Oralbekova Zh.O.* *The 8 th Congress of International Society for Analysis, its Applications and Computation (ISAAC-2011)*, Moscow, Russia, 22–27 August, 2011, p. 291–292.
- 5 *Kabanikhin S.I., Iskakov K.T., Oralbekova Zh.O.* *International conference «Actual problems of modern mathematics, computer science and mechanics»*, Almaty, 28–30 September, 2011, p. 319, 320.
- 6 *Iskakov K.T., Mukanova B.G., Oralbekova Zh.O.* *Third International Scientific School Conference «Theory and numerical methods for solving inverse and ill-posed problems»*, Novosibirsk, 10–15, October, 2011, p. 24, 25.
- 7 *Iskakov K.T., Oralbekova Zh.O.* *Proceedings of the II International Scientific and Practical Conference «Information Technology and Innovation: Integrating Science, Education and Business»*, dedicated to the 20th anniversary of Independence of the Republic of Kazakhstan, vol. II, Almaty, 1–2 December, 2011, p. 357–361.

С.Ш.Кажикенова, К.В.Мазиева, Е.Г.Шурыгина

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова (E-mail: sauleshka555@mail.ru)

Моделирование языка как сложной, динамичной, самоорганизующейся системы

В статье изложены исследования, обусловленные необходимостью изучения текстового материала различных жанров с целью его совершенствования. Предположено, что любой текст должен быть стилистически, грамматически, синтаксически оформлен грамотно, без лингвистических погрешностей. Авторами предложена идеальная лингвоматематическая модель для анализа структуры текста. Она построена на основе фундаментального закона сохранения суммы информации и энтропии с применением формулы Шеннона.

Ключевые слова: моделирование, самоорганизующаяся система, информация, энтропия, лингвосинергетика, формула Шеннона, формула Хартли, иерархическая структура, статистический метод, жанр текста, стиль текста, языковой уровень, модель.

Изучение языка методами теории информации стало перспективным научным направлением, исследующим сложные системы под углом зрения совершающихся в них процессов самоорганизации. В рамках этого направления происходит моделирование языка как сложной, динамичной, самоорганизующейся системы от неупорядоченного состояния к упорядоченному [1–4].

Подход к тексту как иерархической структуре позволяет рассматривать текст как с точки зрения анализа его составляющих, так и с точки зрения синтеза их на высшем языковом уровне.

Наши исследования обусловлены необходимостью изучения текстового материала различных жанров с целью его совершенствования. Любой текст должен быть стилистически, грамматически, синтаксически оформлен грамотно, без лингвистических погрешностей. Мы предлагаем идеальную лингвоматематическую модель для анализа структуры текста. Она построена на основе фундаментального закона сохранения суммы информации и энтропии с применением формулы Шеннона. При общей характеристике энтропийно-информационного анализа текстов (энтропия — мера беспорядка, а информация — мера снятия беспорядка) мы использовали статистическую формулу Шеннона для определения совершенства, гармонии текста:

$$H = - \sum_{i=1}^N p_i \log_2 p_i,$$

где p_i — вероятность обнаружения какой-либо единицы системы в их множестве N ; $\sum_{i=1}^N p_i = 1$, $p_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, N$.

До опубликования созданной Шенноном теории Хартли предложил определять количество максимальной энтропии по формуле

$$H_{\max} = \log_2 N.$$

Авторами проведен лингвистический анализ текста научного стиля речи [1], содержащего 500 знаков. Чтобы подсчитать p (вероятность) появления одной буквы в русском тексте, воспользуемся классической формулой определения вероятности. Для этого необходимо подсчитать, сколько букв содержится в этом тексте. Затем подсчитать, сколько раз встретилась отдельная буква в этом тексте. Тогда p (вероятность) появления одной буквы равна

$$P(a) = \frac{m}{n},$$

где n — число появления всех букв в этом тексте; m — число появления отдельной буквы.

Так как русский алфавит содержит 32 буквы (31 буква, 1 пробел), то максимальное значение энтропии текста, заключающегося в приеме одной буквы русского текста, при условии, что все буквы считаются одинаково вероятными, равно

$$H_0 = \log 32 = 5 \text{ бит.}$$

Для более точного вычисления информации, содержащейся в одной букве русского текста научного стиля, надо знать вероятности появления различных букв в этом тексте. Для определения этих вероятностей рассмотрен отрывок из курса лекций по экономической теории [1], в которых основное внимание уделяется проблемам рыночного хозяйства. В лекциях наиболее детально рассматривается система экономических отношений и законов общественной жизни, различные типы рынков, различные точки зрения как отечественных, так и зарубежных ученых-экономистов. Выделенный отрывок «Рыночная инфраструктура» представляет собой текст научного стиля, в котором четко выражены признаки и особенности языка науки.

Итак, для вычисления информации научного текста были подсчитаны вероятности появления одной буквы, двухбуквенных, трехбуквенных, четырехбуквенных, пятибуквенных и шестибуквенных сочетаний в данном тексте. При подсчете учитывалась 31 буква русского алфавита (буквы *е* и *ё*, *ь* и *ы* принимаются как одна буква) и пробел, все остальные знаки (скобки, кавычки, запятые и пр.) не рассматривались.

В ходе нашего исследования при подсчете числа повторений различных буквенных комбинаций в научном тексте на русском языке мы пришли к следующим показателям:

H_1	H_2	H_3	H_4	H_5	H_6
4,364	2,9766	0,782430,3426		0,0615	0,0537

Отсюда следует, что в научном тексте с увеличением информации происходит уменьшение степени неопределенности (энтропии). Однако на основе проведенных вычислений можно предположить, что в текстах научного стиля речи информации больше, чем в текстах других стилей.

Был проведен информационно-энтропийный анализ отрывка из газетной статьи «Бумага чиновнику ближе» Е.Ульянкиной из газеты «Новый Вестник».

Учитывая данные предыдущих расчетов, был проведен информационно-энтропийный анализ отрывка из Конституции РК, Основного Закона Казахстана, действующего со дня принятия Конституции Республики Казахстан на Всенародном референдуме 30 августа 1995 года.

Энтропия текста при учете одной буквы и двухбуквенных сочетаний в официально-деловом тексте меньше энтропии научного и публицистического текстов, энтропия текста при учете трехбуквенных сочетаний больше, энтропия при учете четырехбуквенных сочетаний меньше, энтропия при учете пятибуквенных и шестибуквенных немного превосходит количество энтропий научного и публицистического стилей. Проведенные расчеты подтверждают тот факт, что с увеличением информации происходит уменьшение степени неопределенности (энтропии) текста.

Таким образом, сопоставление данных показателей дает возможность заключить, что количество информации и энтропии в текстах официально-делового стиля принципиально отличается от текстов других стилей. Вероятно, этому способствуют отточенная форма изложения, регламентированность, стабильность и высокая информативность речевых средств.

Произведен информационно-энтропийный анализ текста разговорно-бытового стиля речи (письмо Н.В.Гоголя М.П.Погодину) [1], содержащего 500 знаков.

Для анализа текста стиля художественной литературы выбран рассказ А.П.Чехова «Крыжовник». В результате были получены следующие значения (в битах):

H_1	H_2	H_3	H_4	H_5	H_6
4,2758	2,9952	1,2651	0,2986	0,0749	0,0252

Таким образом, результаты подсчета энтропии научного текста:

H_1	H_2	H_3	H_4	H_5	H_6
4,364	2,9766	0,78243	0,3426	0,0615	0,0537

Результаты подсчета энтропии публицистического текста:

H_1	H_2	H_3	H_4	H_5	H_6
4,3742	3,0423	0,7895	0,5605	0,0451	0,0108

Результаты подсчета энтропии официально-делового текста:

H_1	H_2	H_3	H_4	H_5	H_6
4,2746	2,6721	0,9196	0,3290	0,1517	0,1046

Результаты подсчета энтропии разговорного текста:

H_1	H_2	H_3	H_4	H_5	H_6
4,3833	2,8383	1,0685	0,3683	0,0831	0,0630

Результаты подсчета энтропии художественного текста:

H_1	H_2	H_3	H_4	H_5	H_6
4,2758	2,9952	1,2651	0,2986	0,0749	0,0252

Как видим, энтропия текста при учете одной буквы и трехбуквенных сочетаний превышает показатели таких же сочетаний в четырех других стилях; энтропия текста при учете двухбуквенных сочетаний больше энтропии официально-делового текста и меньше энтропии научного, публицистического и художественных текстов; энтропия текста при учете четырехбуквенных сочетаний больше энтропии научного, художественного и официально-делового текста, но меньше энтропии текста публицистического стиля; энтропия текста при учете пятибуквенных и шестибуквенных сочетаний больше энтропии научного, художественного и публицистического стилей, но меньше энтропии официально-делового текста. Таким образом, сопоставление данных показателей дает возможность заключить, что количество информации и энтропии в текстах разговорного стиля принципиально отличается от текстов других стилей. Научный, художественный, официально-деловой и публицистический стили объединяет то, что они используются в сфере официального общения, а разговорный стиль используется в неофициальном, бытовом, повседневном общении.

Вероятно, этому способствуют неподготовленность и связанный с ней автоматизм построения высказывания; непринужденность и связанная с ней раскованность речи.

Результаты исследования заставляют полагать, что любой языковой текст, от единичного слова до объемного литературного произведения, может быть представлен как система, элементами которой являются отдельные буквы, а части представляют собой совокупность одинаковых букв. Соответственно, с помощью синергетической теории информации можно проводить структурный анализ произвольных текстов со стороны их хаотичности и упорядоченности по количеству и числу встречаемости отдельных букв.

Таким образом, всем рассмотренным материалом подчеркивается неразрывная взаимодополнительная связь детерминированной и вероятностной составляющих, из которых первая является доминирующей и обеспечивающей устойчивость, а вторая определяет наиболее тонкие изменения и оптимальную (а также максимальную) информационную емкость любых систем, в связи с чем вероятно-детерминированный подход к их изучению представляется объективно необходимым.

Согласно закону сохранения суммы информации и энтропии, количество детерминированной информации текста рассчитывается как разность между максимально возможной энтропией и некоторым текущим значением энтропии.

Таким образом, информация и энтропия являются противоположно связанными характеристиками. А их взаимодополнительное соотношение для любых самоорганизующихся систем диктуется законами сохранения суммы информации и энтропии и прогрессивного накопления информации при переходе с нижнего уровня организации на более высокий, вплоть до полной детерминации системы. В этом состоит основа сопоставления совершенства текстов, выраженной единой информационной характеристикой, со степенью детерминации идеальной иерархической системы на каждом уровне самоорганизации.

Предлагаемый информационно-энтропийный подход к определению объективной меры совершенства и полноты самоорганизации любых текстов можно рассматривать как развитие энтропийного анализа, при котором учитывалось только стремление энтропии к максимуму. В нашем подходе это стремление учитывается совместно с информационной составляющей, причем не в энергетических единицах, а в информационных битах.

Список литературы

- 1 *Кажикенова С.Ш., Оспанова Б.Р.* Информационно-энтропийный анализ структуры текста. — Караганда: Изд. КарГУ, 2012. — 251 с.
- 2 *Кажикенова С.Ш., Оспанова Б.Р.* К вопросу о формировании концептуальной системы целевого языка в структуре коммуникативной компетенции // *Язык и культура*. — 2012. — № 3. — С. 111–121.
- 3 *Кажикенова С.Ш., Оспанова Б.Р.* О некоторых аспектах языковой модели в теории информации // *Международ. журн. экспериментального образования*. — 2012. — № 8. — С. 115–120.
- 4 *Кажикенова С.Ш., Оспанова Б.Р.* Лингвосинергетический подход к исследованию текста как самоорганизующегося объекта // *Хаос и структуры в нелинейных системах: Материалы междунар. науч.-практ. конф. (18–20 июня) / КарГУ*. — Караганда, 2012. — С. 546–550.

С.Ш.Қажыкенова, К.В.Мазијева, Е.Г.Шурыгина

Тілді күрделі, динамикалық, өзін-өзі ұйымдастырушы жүйе ретінде үлгілеу

Мақалада зерттеуіміздің негізінде түрлі жанрлық мәтіндерді, оларды жетілдіру мақсатымен қарастырудың қажеттігі туралы айтылды. Кез келген мәтін стилистикалық, грамматикалық, синтаксистік жағынан, лингвистикалық ақаусыз дұрыс хатталған болуы керек. Мәтіннің құрылымын талдау үшін, біз идеалды лингвоматематикалық үлгіні ұсындық. Ол Шеннон формуласын қолдану арқылы, энтропия және ақпарат қосындысының сақталу заңы негізінде құрылған.

S.Sh.Kazhikenova, K.V.Maziyeva, Ye.G.Shurygina

The modeling of language like a complex dynamic self-organizing system

The researches due on need of studying of the text material of different genres with the purpose of its improvement are presented in this article. It is assumed that any text must be stulistically, grammatically, syntactically decorated correctly without linguistic errors. Offers an ideal lingua-mathematics model for the analysis of the text's structure. It is based on the fundamental law of conservation of the sum of information and entropy with using of Shennon's formula.

References

- 1 Kazhikenova S.Sh., Ospanova B.R. *Information and entropy analysis of structure of the text*, Karaganda: Publ. house of KarGTU, 2012, p. 251.
- 2 Kazhikenova S.Sh., Ospanova B.R. *To a question at about formation of conceptual system of target language in structure of communicative competence. Language and culture*, Tomsk, 2012, No. 3, p. 111–121.
- 3 Kazhikenova S.Sh., Ospanova B.R. *About some aspects of language model in information theory*. The International magazine of experimental education, 2012, No. 8, p 115–120.
- 4 Kazhikenova S.Sh., Ospanova B.R. *Lingvosinergetichesky approach to text research as self-organizing object*. Chaos and structures in nonlinear systems. Materials international scientific and practical conference (on June 18–20) / KarGU, Karaganda, 2012, p. 546–550.

Р.С.Каренов

*Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова (E-mail: 22Gulim1988@mail.ru)***Методика анализа и оптимизации сетевого графика**

Отмечено, что, после того как сетевой график построен и рассчитаны его основные показатели, приступают к его оптимизации. Обосновано, что под оптимизацией следует понимать последовательную корректировку сети для достижения наиболее эффективных результатов и заданных параметров по времени и ресурсам. Доказано, что оптимизация сетевого графика по времени — это сокращение его критического пути в соответствии с директивными сроками окончания комплекса работ. Рассмотрена система мероприятий, благодаря которой может быть достигнута оптимизация сетевого графика по времени. Сделан вывод о том, что многовариантные пересчеты сетевого графика при его оптимизации целесообразно проводить на ЭВМ. Раскрыты методические основы оптимизации сетевого графика по ресурсам. Уделено внимание оптимизации сетевых графиков по времени и стоимости.

Ключевые слова: сетевой график, оптимизация, анализ, коэффициент напряженности, путь, время, стоимость, модель.

Коэффициент напряженности работы

Как правило, после нахождения критического пути и резервов времени работ, оценки вероятности выполнения проекта в заданный срок должен быть проведен всесторонний анализ сетевого графика и приняты меры по его оптимизации. Этот весьма важный этап в разработке сетевых графиков раскрывает основную идею систем сетевого планирования и управления (система СПУ). Он заключается в приведении сетевого графика в соответствие с заданными сроками и возможностями организации, разрабатывающей проект [1–5].

Анализ сетевого графика начинается с анализа топологии сети, включающего контроль построения сетевого графика, установление целесообразности выбора работ, степени их расчленения.

Определить степень трудности выполнения в срок каждой группы работ не критического пути можно с помощью коэффициента напряженности работ.

Коэффициентом напряженности K_n работы (i, j) называется отношение продолжительности несовпадающих (заключенных между одними и теми же событиями) отрезков пути, одним из которых является путь максимальной продолжительности, проходящий через данную работу, а другим — критический путь:

$$K_n(i, j) = \frac{t(L_{\max}) - t'_{кр}}{t_{кр} - t'_{кр}}, \quad (1)$$

где $t(L_{\max})$ — продолжительность максимального пути, проходящего через работу (i, j) ; $t_{кр}$ — продолжительность (длина) критического пути; $t'_{кр}$ — продолжительность отрезка рассматриваемого пути, совпадающего с критическим путем.

Формулу (1) можно легко привести к виду:

$$K_n(i, j) = 1 - \frac{R_n(i, j)}{t_{кр} - t'_{кр}},$$

где $R_n(i, j)$ — полный резерв времени работы (i, j) .

Коэффициент напряженности $K_n(i, j)$ может изменяться в пределах от 0 (для работ, у которых отрезки максимального из путей, не совпадающие с критическим путем, состоят из фиктивных работ нулевой продолжительности) до 1 (для работ критического пути).

Чем ближе к 1 коэффициент напряженности $K_n(i, j)$, тем сложнее выполнить данную работу в установленные сроки. Чем ближе $K_n(i, j)$ к нулю, тем большим относительным резервом обладает максимальный путь, проходящий через данную работу.

Вычисленные коэффициенты напряженности позволяют дополнительно классифицировать работы по зонам. В зависимости от величины $K_n(i, j)$ выделяют три зоны: критическую ($K_n(i, j) > 0,8$); подкритическую ($0,6 \leq K_n(i, j) \leq 0,8$); резервную ($K_n(i, j) < 0,6$).

Оптимизация сетевого графика в зависимости от полноты решаемых задач

Оптимизация сетевого графика представляет процесс улучшения организации выполнения комплекса работ с учетом срока его выполнения. Она проводится с целью сокращения длины критического пути, выравнивания коэффициентов напряженности работ, рационального использования ресурсов [6–9].

Довольно часто случается, что сетевой график (его параметры) не соответствует имеющимся ограничениям либо по времени, либо по ресурсам. Поэтому оптимизация может проводиться по следующим параметрам [10]:

- а) по времени;
- б) по ресурсам:
 - трудовым;
 - материальным;
 - денежным;
- в) по времени и стоимости.

Приоритет отдается оптимизации по времени, так как от этого зависит оптимизация по другим параметрам.

Оптимизация сетевого графика в зависимости от полноты решаемых задач может быть условно разделена на частную и комплексную [11].

Видами частной оптимизации сетевого графика являются минимизация времени выполнения комплекса работ при заданной его стоимости; минимизация стоимости комплекса работ при заданном времени выполнения проекта. Комплексная оптимизация представляет собой нахождение оптимального соотношения величин стоимости и сроков выполнения проекта в зависимости от конкретных целей, ставящихся при его реализации.

Оптимизация сетевых моделей по времени

Оптимизация сетевого графика по времени производится в том случае, если продолжительность работ по графику больше или меньше директивной продолжительности.

Существует несколько методов оптимизации по времени:

- сокращение продолжительности критических работ;
- расчленение критических работ и их запараллеливание;
- изменение топологии сети за счет изменения технологии работ.

1. Метод сокращения продолжительности критических работ. Сокращение продолжительности критического пути при использовании этого метода достигается за счет перераспределения ресурсов с некритических работ на критические. Этот метод оптимизации сети может применяться, если, например, продолжительность критического пути равна 24 дням и проект необходимо закончить за 20 дней.

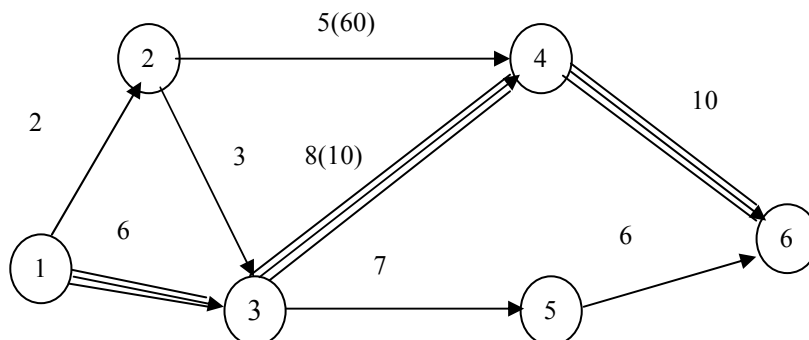


Рисунок 1. Сетевой график до оптимизации

В сетевом графике (рис. 1) над работами 2–4 и 3–4 в скобках указано количество трудовых ресурсов, занятых на этих работах до проведения оптимизации (рабочие, выполняющие эти работы, имеют одну и ту же специальность).

Если сократить продолжительность работы 3–4 на четыре дня и переключить на нее 18 человек с работы 2–4, сетевой график примет следующий вид (рис. 2).

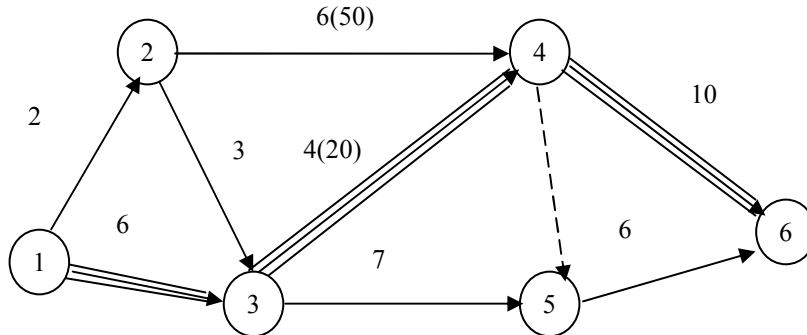


Рисунок 2. Сетевой график после оптимизации за счет перераспределения ресурсов

2. Метод расчленения критических работ и их запараллеливания. Для оптимизации сетевого графика этим методом необходимо тщательно проанализировать все работы критического пути.

Рассмотрим сетевой график, изображенный на рисунке 3.

После оптимизации графика продолжительность его критического пути вместо 24 дней составит 20 дней. В данном случае сокращение продолжительности критического пути достигнуто за счет перераспределения ресурсов, имеющихся внутри проекта, однако того же результата можно достичь и с помощью привлечения ресурсов со стороны.

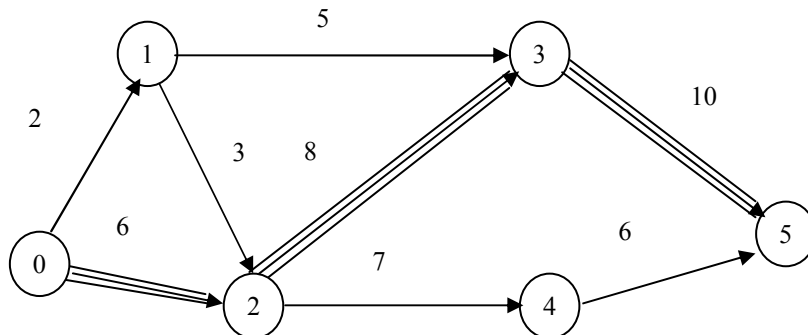


Рисунок 3. Сетевой график до оптимизации

После тщательного анализа этого графика можно установить, что работу 3–5 можно начать через четыре дня после начала работы 2–3, но при этом первую половину работы 3–5 необходимо закончить к моменту завершения работы 2–3 (рис. 4).

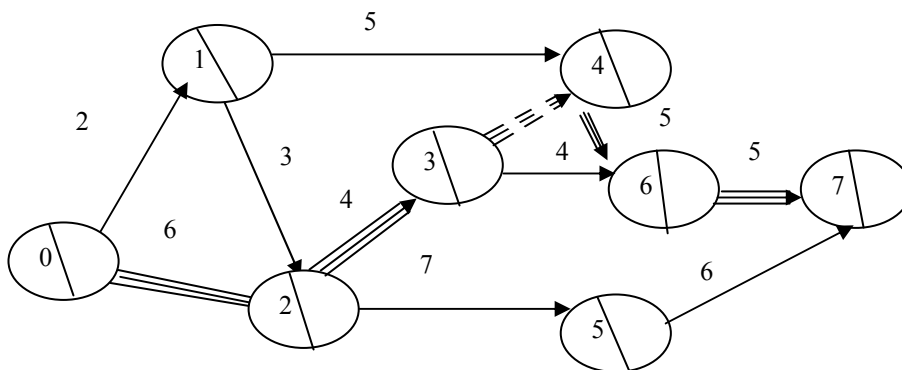


Рисунок 4. Сетевой график после оптимизации за счет расчленения и запараллеливания работ

Как видно из рисунка, в верхней части каждого события указан его номер до оптимизации, в нижней — номер после оптимизации. В результате применения метода расчленения и запараллеливания работ общая продолжительность работ 2–3 и 3–5 сократилась с 18 до 14 дней. Таким образом, общая продолжительность всей работы, то есть продолжительность критического пути, составила 20 дней.

Следует отметить, что применение рассматриваемого метода, как правило, позволяет сократить продолжительность выполнения по проекту примерно на 15–20 %.

3. Метод изменения топологии за счет изменения технологии работ. Этот метод основан на изменении зависимостей между работами.

Вернемся к сетевому графику, представленному на рисунке 3. Допустим, руководителю работы 3–5 необходимо увеличить продолжительность своей работы с 10 до 12 дней. Кроме того, после окончания работ 2–3 и 3–5 необходимо добавить еще один день для проверки результатов этих работ. Руководитель работы 2–3 также потребовал увеличить время выполнения его работы (с 8 до 12 дней). Руководитель проекта посчитал целесообразным удовлетворить требования руководителей работ 3–4 и 2–3 и увеличить продолжительность этих двух критических работ в общей сложности на семь дней, изменив при этом технологию работ.

После оптимизации за счет изменения технологии работ график будет иметь следующий вид (рис. 5).

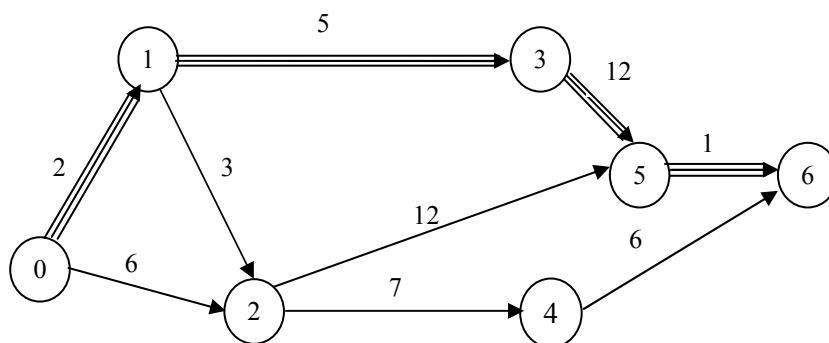


Рисунок 5. Сетевой график после оптимизации за счет изменения технологии работ

Как видно из рисунка, продолжительность критического пути составляет 20 дней. Рассмотренный пример оптимизации сетевого графика методом изменения технологии работ говорит о том, что необходимо внимательно относиться к составлению сетевых графиков, так как в самом процессе их разработки заложены огромные возможности по сокращению продолжительности проектов.

Следует иметь в виду, что если ни один из указанных методов не позволяет привести параметры сетевого графика к заданным ограничениям, то необходимо изменить эти ограничения.

Оптимизация сетевых моделей по ресурсам

Практика осуществления проектов показывает, что зачастую недостаточно упорядочить систему управления только по времени. Важным фактором в управлении любым проектом является правильное распределение ресурсов, которыми располагают исполнители работ. Поэтому при планировании сложных проектов огромное значение приобретает рациональное распределение всех видов имеющихся ресурсов. Одним из важнейших вопросов при разработке проекта является обеспечение соответствия между установленными сроками выполнения работ и имеющимися ресурсными возможностями.

Следует иметь в виду, что к оптимизации по различным видам ресурсов приступают после проведения оптимизации сетевых графиков по времени. Последовательность проведения оптимизации по отдельным видам ресурсов устанавливается в зависимости от пределов ограничения каждого из них в конкретных условиях.

С точки зрения постановки и решения задач распределения ресурсов целесообразно различать два типа ресурсов. К первому типу относятся невозобновляемые ресурсы, количество которых при использовании изменяется. К ним относятся материалы, финансы и т.д. Ко второму типу ресурсов

относятся возобновляемые ресурсы, которые в процессе использования не изменяются. К таким ресурсам относятся трудовые ресурсы, машины, производственные площади.

Различие свойств двух перечисленных видов ресурсов вызывает необходимость отдельной постановки задачи для невозобновляемых и возобновляемых ресурсов. Так, для невозобновляемых ресурсов выделяют следующие постановки задач:

- найти минимальную стоимость выполнения комплекса работ при заданном времени и известных функциях стоимости каждой работы от ее продолжительности;
- при известных функциях стоимости от продолжительности и ограниченных ресурсах минимизировать время выполнения всего комплекса работ;
- при известных функциях стоимости от продолжительности каждой работы найти зависимость минимальной стоимости всего комплекса работ от продолжительности его реализации.

Для возобновляемых ресурсов различают следующие постановки задач:

- найти минимальное время выполнения комплекса работ при постоянных или переменных интенсивностях потребления каждого из ограниченных ресурсов;
- максимально сгладить неравномерность использования ресурсов при заданном времени выполнения комплекса работ;
- при заданной функции наличных ресурсов выполнить комплекс работ в заданный срок.

Как показывает практика, на сегодняшний день чаще всего лимитирующими оказываются трудовые ресурсы.

1. Оптимизация сетевых моделей по трудовым ресурсам. При осуществлении любого проекта, а особенно при осуществлении проектов на постоянной основе в рамках одной организации, огромное значение имеет непрерывность и равномерность использования трудовых ресурсов. Оптимизация сетевых графиков по этому параметру осуществляется последовательно в пределах имеющихся частных резервов времени.

Рассмотрим условный пример.

На предприятии, реализующем проект, работают 70 человек (см. рис. 6). Необходимо оптимизировать данный график, чтобы ежедневно на работах были заняты все 70 человек.

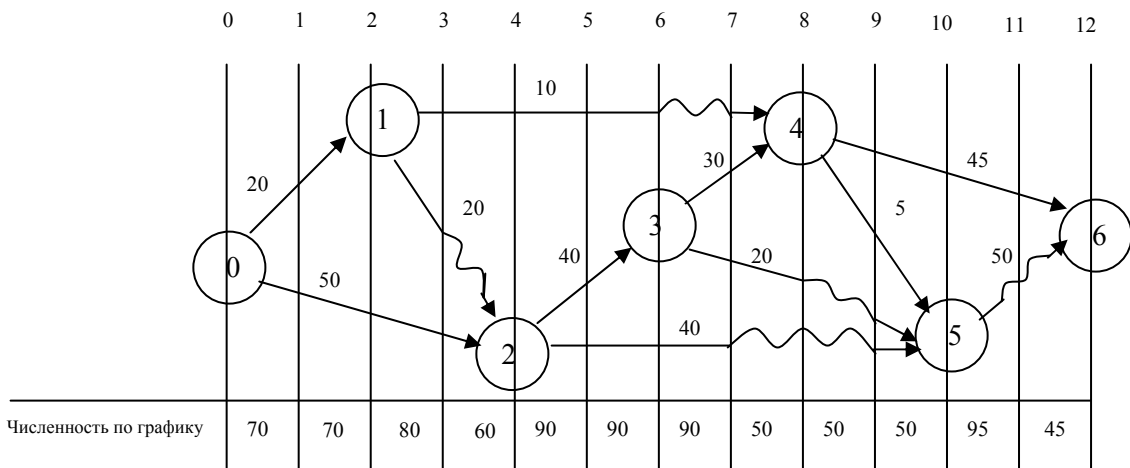


Рисунок 6. Сетевой график до оптимизации

Подсчитав на сетевом графике количество работников, ежедневно занятых на проекте, можно увидеть, что только в первые два дня планируемая численность работников соответствует заданному ограничению, а во все последующие дни она либо больше, либо меньше фактической.

Таким образом, в третий день, когда плановая численность работников превышает фактическую, многие работы могут быть не выполнены в заданные сроки, т.е. пойти с опозданием. Известно, что, если срыв сроков произошел на критических работах, в дальнейшем ликвидировать его последствия довольно сложно. Следовательно, если полученная расчетная (плановая) численность не соответствует заданным ограничениям, необходимо оптимизировать график выполнения проекта.

Для того чтобы уменьшить число людей, занятых на работах в третий день, и увеличить число людей, занятых на работах в четвертый день, нужно продлить срок выполнения работы 1–2 с одного

до двух дней за счет имеющегося на этой работе частного резерва времени и вдвое сократить численность занятых на ней работников. Аналогично следует поступить с работами 2–5 и 5–6. В данной ситуации трудоемкость работ рассматривается как величина неизменная.

После оптимизации по трудовым ресурсам сетевой график будет выглядеть так, как показано на рисунке 7.

Как видно, в результате оптимизации ежедневная численность работающих составляет 70 человек. Появились новые критические пути, так как по некоторым работам полностью использованы резервы времени. Если оптимизация не дала положительного результата, необходимо изменить продолжительность отдельных работ, выйдя за пределы резервов времени, потому что при сохранении прежней продолжительности многие работы в заданные сроки выполнены не будут.

2. Оптимизация сетевых моделей по материальным ресурсам. Оптимизация по материальным ресурсам осуществляется последовательно по каждому виду ресурса в пределах имеющихся частных резервов времени. В первую очередь оптимизацию следует проводить по тому виду ресурсов, который является определяющим для выполнения данного комплекса работ по проекту.

Допустим, на строительную площадку для выполнения работ по проекту еженедельно может поступать не более 500 м³ бетона. Параметры сетевого графика данного проекта представлены в таблице 1. Необходимо оптимизировать сетевой график проекта, чтобы эти ограничения не привели к увеличению продолжительности проекта.

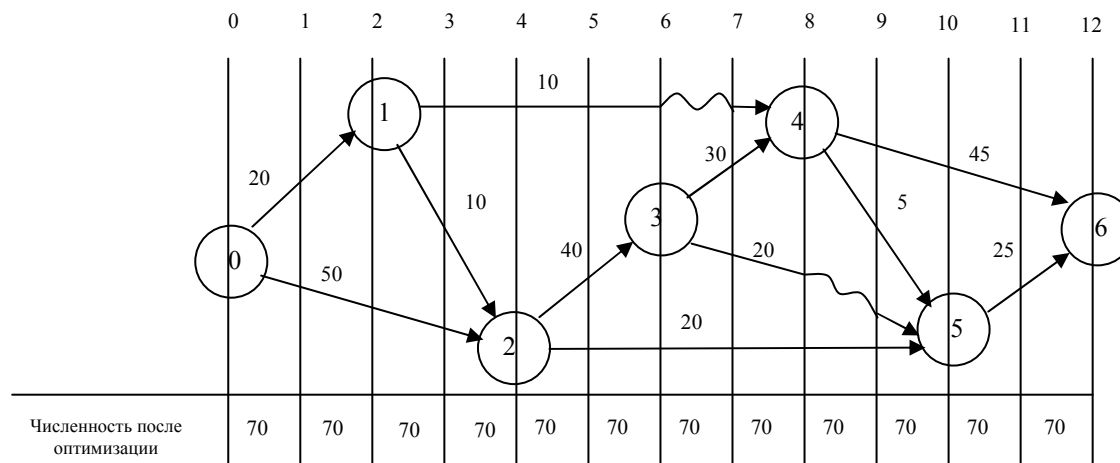


Рисунок 7. Сетевой график после оптимизации по трудовым ресурсам

Т а б л и ц а 1

Исходные параметры сетевого графика

Коды работ		Параметры графика до оптимизации		Потребность в бетоне, м ³
<i>i</i>	<i>j</i>	<i>t_{i-j}</i>	<i>r_{i-j}</i>	
0	1	1	0	300
0	2	1	1	400
1	2	1	0	300
1	3	1	2	500
2	3	2	0	400
2	4	1	2	400
3	4	1	0	100

Для определения расхода бетона в ходе выполнения работ по проекту в таблице с исходными параметрами справа добавим расчетные графы (табл. 2).

Т а б л и ц а 2

Форма таблицы для определения расхода бетона в ходе выполнения работ по проекту

Коды работ		Параметры графика до оптимизации		Потребность в бетоне, м ³	Рабочее время графика в неделях				
<i>i</i>	<i>j</i>	<i>t_{i-j}</i>	<i>r_{i-j}</i>		1	2	3	4	5

Заполним таблицу по каждой работе дробными числами (табл. 3), в которых числитель будет показывать еженедельную потребность (расход бетона) на протяжении всего времени выполнения данной работы, а знаменатель — оставшуюся после исполнения данной работы часть от объема возможной поставки бетона. Полученный остаток будем направлять для использования на следующей работе, для которой в числителе опять будем записывать потребность (расход), а в знаменателе — новый остаток, и так до полного использования объема поставки.

Т а б л и ц а 3

Использование бетона в ходе выполнения работ по проекту

Коды работ		Параметры графика до оптимизации		Потребность в бетоне, м ³	Рабочее время графика в неделях				
<i>i</i>	<i>j</i>	<i>t_{i-j}</i>	<i>r_{i-j}</i>		1	2	3	4	5
0	1	1	0	300	$\frac{300}{200}$				
0	2	1	1	400	$\frac{200}{0}$	$\frac{200}{300}$			
1	2	1	0	300		$\frac{300}{0}$			
1	3	1	2	500			$\frac{300}{200}$	$\frac{300}{200}$	
2	3	2	0	400			$\frac{200}{0}$	$\frac{200}{0}$	
2	4	1	2	400					$\frac{400}{100}$
3	4	1	0	100					$\frac{100}{0}$
Возможный объем поставки					500	500	500	500	500

Из приведенной таблицы видно, что бетоном в первую очередь необходимо обеспечивать работы 0–1, 1–2, 2–3 и 3–4, причем в точно установленные сроки, так как эти работы являются критическими. Другие работы имеют частные резервы времени, поэтому можно либо отодвигать их начала, либо увеличивать их продолжительность.

Работа 0–2 не может закончиться за одну неделю в связи с тем, что в первую неделю свободный остаток бетона составляет 200 м³, а потребность — 400 м³. Поэтому, используя частный резерв времени, нужно увеличить продолжительность работы до двух недель, распределив ее потребность в бетоне на две недели, т.е. по 200 м³ еженедельно.

Работа 1–3 не может начаться сразу после окончания предшествующей работы — работы 0–1, так как бетон, поступающий во вторую неделю, полностью распределяется между работами 1–2 и 0–2. Кроме того, работа 1–3 не может быть выполнена за одну неделю, как это определено ее продолжительностью, потому что в третью неделю из 500 м³ поставляемого бетона необходимо выделить 200 м³ на критическую работу 2–3. Следовательно, мы вынуждены, помимо смещения начала работы 1–3 на одну неделю, увеличить ее продолжительность до двух недель, равномерно распределив потребность этой работы в бетоне — 600 м³ на две недели: третью и четвертую.

Работа 2–4 не может выполняться ни в третью, ни в четвертую недели, так как в этот период общее количество поставляемого бетона уже полностью распределено между работами 2–3 и 1–3. В связи с этим отодвигаем срок выполнения работы 2–4 на пятую неделю.

Таким образом, сетевой график оптимизирован с учетом данных ограничений.

Процесс оптимизации сетевого графика по ресурсам можно выполнить также при помощи масштабного сетевого графика, аналогично тому, как это было сделано при оптимизации по трудовым ресурсам. Воспользуемся теми же самыми исходными данными (см. табл. 1).

В сетевом графике до оптимизации по материальным ресурсам (рис. 8) над стрелками указано необходимое для каждой работы количество бетона.

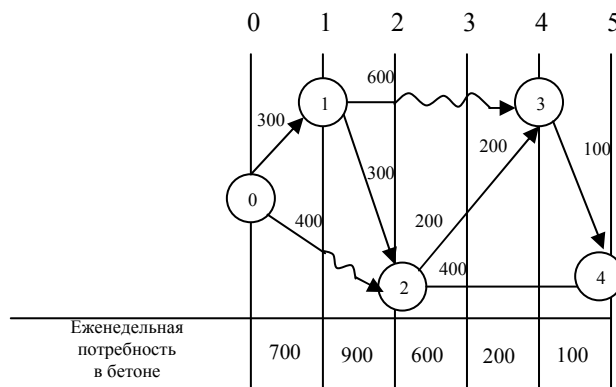


Рисунок 8. Сетевой график до оптимизации по материальным ресурсам

Как видно из графика, первые три недели необходимое количество бетона постоянно превышает поставляемое количество. Так, в первую неделю потребность превышает поставку на 200 м³, во вторую неделю — на 400 м³, в третью неделю — на 100 м³.

После оптимизации по материальным ресурсам сетевой график будет выглядеть следующим образом (рис. 9).

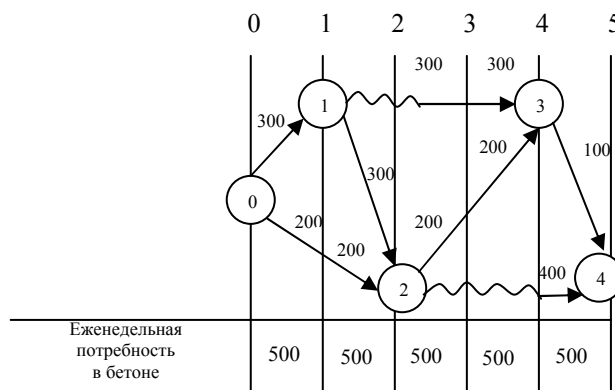


Рисунок 9. Сетевой график после оптимизации по материальным ресурсам

После оптимизации еженедельная потребность в бетоне стала равна еженедельной поставке. Однако следует иметь в виду, что в случае, когда все резервы времени использованы на всех работах, а потребность в ресурсах в единицу времени превышает их поступление, возникает необходимость изменить либо технологию работ, либо увеличить общую продолжительность критического пути.

3. Оптимизация сетевых моделей по денежным ресурсам. При планировании денежных ресурсов, необходимых для реализации проекта, как правило, стремятся к их равномерному распределению в течение года. В связи с этим возникает вопрос: как увязать планы в денежном выражении с объемами работ по сетевым графикам? Этот вопрос может быть решен в процессе оптимизации сетевых графиков по денежным ресурсам.

Заменим в таблицах 1 и 3 данные по бетону на данные по денежным средствам, необходимым для выполнения работ, то есть физические объемы работ переведем в денежный эквивалент, например, в тенге. В качестве ограничения примем ту же величину — 500. Это будет означать, что еженедельный плановый объем работ составляет 500 тыс. тенге. Оптимизация по денежным ресурсам осу-

ществляется аналогично оптимизации по материальным ресурсам. Исключением может оказаться случай, когда проект не вписывается в бюджетные ограничения организации на определенный период. Например, на год по плану отпущено 2,0 млн тенге, а подсчет объемов работ по сетевому графику показывает, что для осуществления проекта необходимо 2,3 млн тенге. Задача оптимизации будет сводиться к тому, чтобы из графика выбрать ряд работ, которые можно будет перенести на следующий год без изменения общей величины продолжительности критического пути.

Процедура оптимизации сетевой модели по стоимости и ресурсам

Выше нами рассмотрены вопросы оптимизации сетевых графиков с точки зрения приведения параметров к какому-либо одному заданному ограничению. Однако значительный интерес представляет оптимизация сетевых графиков по времени и стоимости, в процессе которой решается вопрос, как уложиться в заданные ограничения по времени с минимальными дополнительными затратами. Рассмотрим данный вопрос более обстоятельно применительно к практике работы угольной промышленности.

На угледобывающих предприятиях (шахта, карьер) сущность применения сетевых методов проектирования и планирования состоит в численном установлении рациональных схем и последовательностей выполнения каких-либо работ, процессов, свершения событий. Сетевое моделирование дает графическое представление о структуре всех сложных производственных процессов и технологических схем и аналитическое численное решение оценки разных сторон проектируемых процессов, при этом позволяя оптимизировать отдельные элементы или всю модель угольного предприятия в целом.

Оптимизация основных параметров разработки шахтного поля на этапе проектирования шахты заключается в определении оптимальной схемы вскрытия, способа подготовки, системы разработки. Наличие этой информации позволяет полностью определить и зафиксировать перечень всех работ (операций) по извлечению запасов шахтного поля и последовательность их выполнения. Эти данные служат основой для построения первоначального сетевого графика развития горных работ и последующего расчета оптимального по стоимости с учетом ресурсов календарного плана развития горных работ. Возможность регулярной оперативной корректировки сетевого графика в зависимости от изменения геологических и горнотехнических условий делает возможной регулярную оперативную корректировку оптимального по стоимости и ресурсам календарного плана. Наличие алгоритма и соответствующей стандартной программы на ЭВМ для оперативной оптимизации календарного плана в процессе эксплуатации шахты делает этот план эффективным средством оперативного управления шахтой.

Процедуру оптимизации сетевой модели по стоимости и ресурсам можно представить в следующем виде. В результате построения сетевого графика развития горных работ и его обсчета на ЭВМ определяется календарный план развития горных работ, в котором указывается минимально и максимально возможное время (условная дата) $T_{\min}(i)$ и $T_{\max}(i)$ осуществления каждого события i сетевого графика. Время $T(i)$ отсчитывается от момента осуществления нулевого события $T_0 = 0$. Кроме того, в календарном плане указываются резервы времени для каждой операции. Время $T_n = \lambda$ осуществления последнего n -го события представляет собой одновременно и минимально возможное время осуществления всего заданного комплекса работ V по выемке запасов шахтного поля при заданной нормальной продолжительности D_{ij} каждой операции, входящей в сетевую модель. Однако полученный календарный план развития горных работ длительности λ не является оптимальным с точки зрения полной стоимости $C^{\text{полн}}$ всего комплекса работ V по извлечению фиксированных запасов шахтного поля. Полные затраты на выполнение всего комплекса работ V можно разделить на прямые затраты $C^{\text{прям}}$ и косвенные затраты $C^{\text{косв}}$:

$$C^{\text{полн}} = C^{\text{прям}} + C^{\text{косв}}. \quad (2)$$

Прямые затраты $C^{\text{прям}}$ на выполнение комплекса работ V складываются из прямых затрат C_{ij} на выполнение каждой операции (i, j) , входящей в комплекс V . Прямые затраты C_{ij} на выполнение операции (i, j) складываются из переменных и постоянных затрат:

$$C^{\text{прям}} = C_{\text{пер}}^{\text{прям}} + C_{\text{пост}}^{\text{прям}}.$$

Переменные затраты, как правило, включают в себя затраты на заработную плату и амортизационные отчисления, в то время как, например, затраты на материалы и электроэнергию обычно относятся к постоянным затратам.

Пусть D_{ij} — нормальная (благоразумная) продолжительность операции (i, j) , полученная из сетевого графика развития горных работ и представляющая собой математическое ожидание времени, необходимого на выполнение данной операции.

Обозначим через $C_{t_{ij}}$ прямые затраты на выполнение операции (i, j) , когда продолжительность ее равна t_{ij} . Тогда для любой продолжительности t_{ij} имеет место $C_{t_{ij}} = C_{D_{ij}}$, если $t_{ij} \geq D_{ij}$.

Другими словами, D_{ij} есть такая продолжительность выполнения операции (i, j) , при которой всякое увеличение продолжительности этой операции по сравнению с D_{ij} не увеличивает прямых затрат C_{ij} .

Напротив, всякое сокращение продолжительности операции (i, j) по сравнению с D_{ij} за счет интенсификации работы в той или иной форме неизбежно связано с дополнительными прямыми затратами и, следовательно, ведет к увеличению C_{ij} , то есть $C_{t_{ij}} > C_{D_{ij}}$, если $t_{ij} < D_{ij}$. Это увеличение прямых затрат при сокращении продолжительности t_{ij} выполнения операции (i, j) обычно связано с ростом переменных расходов на зарплату или амортизационные отчисления при интенсификации производственного процесса.

На практике, исходя из природы самой операции и условий, в которых она выполняется, всегда можно указать минимально возможную ее продолжительность d_{ij} . Таким образом, интересующая нас продолжительность t_{ij} изменяется в замкнутом интервале $[d_{ij}, D_{ij}]$. В общем случае изменение прямых затрат C_{ij} в зависимости от продолжительности t_{ij} может быть выражено невозрастающей выпуклой функцией. Так как на практике мы можем иметь ограниченное дискретное число значений C_{ij} для конкретных t_{ij} , то целесообразно аппроксимировать кривую прямых затрат невозрастающей выпуклой кусочно-линейной функцией. В частности, если мы имеем всего два значения этой функции $C_{d_{ij}}$ и $C_{D_{ij}}$, то функция аппроксимируется линейной зависимостью, как это показано на рисунке 10, а.

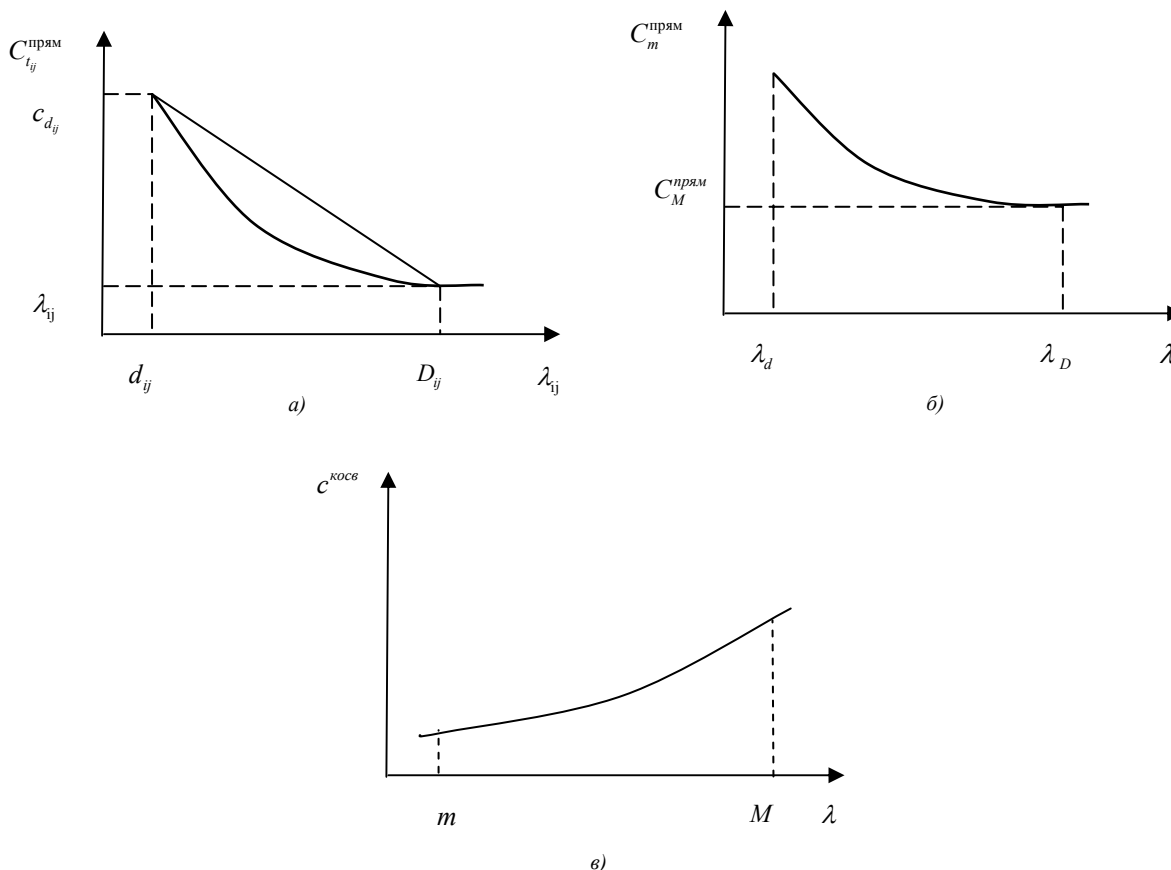


Рисунок 10. График изменения составляющих затрат

Так как прямые расходы $C^{прям}$ складываются из прямых расходов C_{ij} для всех (i, j) из V , то всякое сокращение продолжительности операций (i, j) по сравнению с нормальной ведет к возрастанию $C^{прям}$. Если при этом сокращается продолжительность операций, лежащих на критическом пути, то это ведет к сокращению продолжительности λ выполнения всего комплекса V .

В общем виде изменение прямых затрат $C^{прям}$ в зависимости от λ изобразится невозрастающей выпуклой кусочно-линейной функцией, показанной на рисунке 10, б. На графике: λ_D — продолжительность всего комплекса V , когда продолжительность всех операций нормальная ($t_{ij} = D_{ij}$); λ_d — продолжительность всего комплекса V , когда продолжительность всех операций минимальная ($t_{ij} = d_{ij}$).

К косвенным затратам $C^{косв}$ относятся затраты на те процессы, которые не входят в комплекс работ, но непосредственно необходимы для выполнения комплекса работ V (например, подъем, транспорт, содержание административного персонала). Косвенные затраты увеличиваются с увеличением продолжительности выполнения всего комплекса работ V , как это показано на рисунке 10, в.

Суммируя значения прямых и косвенных затрат согласно (2), получим кривую полных затрат на выполнение комплекса работ V в зависимости от λ , показанную на рисунке 11.

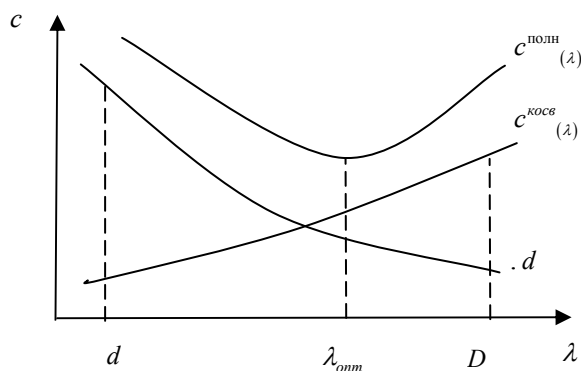


Рисунок 11. График изменения общих затрат (к оптимизации сетевого графика по стоимости)

Как видно из этого рисунка, целесообразно сократить продолжительность операций, входящих в V так, чтобы общая продолжительность комплекса работ стала равной λ_{opt} . При этом полная стоимость комплекса V станет минимальной $C_{min}^{полн}$.

С помощью данного метода оптимизации календарного плана развития горных работ можно найти оптимальную продолжительность каждой операции t_{ij}^0 и оптимальное время t_i^0 осуществления каждого события сетевого графика, т.е. определить оптимальный по стоимости календарный план развития горных работ на шахте. Наличие такого плана полностью исключает затраты на интенсификацию тех работ, где это нецелесообразно и, наоборот, указывает те работы, где такая интенсификация необходима и экономически оправдана.

Для оптимизации сетевых моделей по фактору стоимости могут быть использованы следующие методы: градиентный метод; метод линейного программирования; метод динамического программирования с дискретным представлением исходных данных.

Наиболее простым методом оптимизации сетевых моделей по фактору стоимости является градиентный метод. Для решения задач оптимизации сетевых моделей по фактору стоимости градиентным методом и методом динамического программирования созданы стандартные программы на ЭВМ.

Методы сетевого планирования при проектировании оказываются особенно полезными при разработке плана организации строительства, календарного плана развития горных работ и т.д. Опираясь на вычислительную технику, методы сетевого планирования позволяют создавать проекты, кото-

рые, наряду с эффективным использованием времени, материалов, людских ресурсов и др., обеспечивают возможность четкого оперативного руководства при их реализации.

Список литературы

- 1 *Большаков А.С.* Моделирование в менеджменте: Учеб. пособие. — М.: Информ.-изд. дом «Филинъ», Рилант, 2000. — 464 с.
- 2 *Федосеев В.В., Гармаш А.Н., Дайитбегов Д.М. и др.* Экономико-математические методы и прикладные модели: Учеб. пособие. — М.: ЮНИТИ, 1999. — 391 с.
- 3 *Разумов И.М., Белова Л.Д., Ипатов М.И., Проскуряков А.В.* Сетевые графики в планировании: Учеб. пособие. — М.: Высш. шк., 1981. — 168 с.
- 4 *Ахьюджа Х.* Сетевые методы управления в проектировании и производстве / Пер. с англ. — М.: Мир, 1979. — 639 с.
- 5 *Терехов Л.Л., Куценко В.А., Сиднев С.П.* Экономико-математические методы и модели в планировании и управлении. — Киев: Вища шк., 1987. — 231 с.
- 6 *Бороздин И.Г.* Сетевое планирование и управление в строительстве: Учеб. пособие. — М.: Стройиздат, 1972. — 288 с.
- 7 *Холод Н.И., Кузнецов А.В., Жихар Я.Н. и др.* Экономико-математические методы и модели: Учеб. пособие. — Минск: Изд. БГЭУ, 1999. — 413 с.
- 8 *Мельник М.М.* Экономико-математические методы и модели в планировании и управлении материально-техническим снабжением: Учебник. — М.: Высш. шк., 1990. — 208 с.
- 9 *Васильева Л.Н., Муравьева Е.А.* Методы управления инновационной деятельностью: Учеб. пособие. — М.: КНОРУС, 2005. — 320 с.
- 10 Управление проектом. Основы проектного управления: Учебник / Под ред. М.Л. Разу. — М.: КНОРУС, 2006. — С. 301.
- 11 *Карасев А.И., Кремер Н.Ш., Савельева Т.И.* Математические методы и модели в планировании: Учеб. пособие. — М.: Экономика, 1987. — С. 172.

Р.С.Каренов

Желілік графикті талдау және оңтайландыру әдістемесі

Желілік график құрылып және оның негізгі көрсеткіштері есептелгеннен кейін оны оңтайландыруға кірісетіндігі баяндалған. Оңтайландыру деп уақыт пен ресурстар бойынша берілген параметрлердің және нәтижелердің барынша жоғары көрсеткіштеріне қол жеткізу үшін желіге бірізділікпен түзетулер енгізуді түсіну қажеттігі негізделген. Желілік графикті уақыт тұрғысынан оңтайландыру дегеніміз — жұмыс кешендерінің директивті уақытта аяқталу мерзіміне сәйкес оның сындарлы жолын қысқарту. Желілік графикті уақыт тұрғысынан оңтайландыруға қол жеткізетін іс-шаралар жүйесі қарастырылған. Желілік графикті оңтайландыруға көп нұсқалы есептеулер электронды-есептеуіш машиналар көмегімен атқарылу қажеттігі дәлелденген. Желілік графикті ресурстар тұрғысынан оңтайландырудың әдістемелік негіздері ашылған. Желілік графикті уақыт және құн бойынша оңтайландыруға көңіл бөлінген.

R.S.Karenov

Methods of analysis and optimization of network schedule

It is noted that after the network schedule is constructed and its main indicators are calculated, start its optimization. It is proved that it is necessary to understand optimization as consistent correction network for achievement the most effective results and set parameters on time and resources. It is proved that optimization of the network schedule on time is a reducing its critical path according to directive dates of termination of a complex of works. The system of measures through which optimization of the network schedule on time can be reached is considered. It is concluded that the multivariate recalculations of the network schedule for its optimization advisable to carry out a ECM (Electronic Computing Machines). Optimization methodical bases of network schedule on resources are provided. It is raised optimization of network schedules on time and cost.

References

- 1 Bolshakov A.S. *Modeling in management: the manual book*, Moscow: «Filin» information Publ. House, Rilant, 2000, p. 464.
- 2 Fedoseyev V.V., Garmash A.N., Dayitbegov D.M., etc. *Economic-mathematical methods and applied sciences: The manual book*, Moscow: YUNITI, 1999, p. 394.

- 3 Razumov E.M., Belova L.D., Epatov M.E., Proskuryakov A.V. *Network graphs in planning: the manual book*, Moscow: High School, 1981, p. 168.
- 4 Ahyudzha H. *Network methods of management in designing and production* / Transl. from Engl., Moscow: Mir, 1979, p. 639.
- 5 Terekhov L.L., Kutsenko V.A., Sidnev S.P. *Economic-mathematical methods and models in planning and management*, Kiev: Vishcha school, 1987, p. 231.
- 6 Borozdin E.G. *Network planning and management in construction: The manual book*, Moscow: Stroyizdat, 1972, p. 288.
- 7 Kholod N.E., Kuznetsov A.V., Zhikhar Y.N., etc. *Economic-mathematical methods and models: The manual book*, Minsk: BGEU, 1999, p. 413.
- 8 Melnik M.M. *Economic-mathematical methods and models in planning and inventory management: Textbook*, Moscow: High school, 1990, p. 208.
- 9 Vasilyeva L.N., Muravyeva E.A. *Methods of control innovative activities: the manual book*, Moscow: KNORUS, 2005, p. 320.
- 10 Upravlenie proektom. *Project management. Bases of project management: Textbook* / Under the M.L.Razu's editorship, Moscow: KNORUS, 2006, p. 301.
- 11 Karasev A.E., Kremer N.S., Savelyeva T.E. *Mathematical methods and models in planning: The manual book*, Moscow: Economics, 1987, p. 172.

УДК 519.683.85

М.М.Букенов, А.Н.Москаленко

*Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букедова (E-mail: crazy_bee89@mail.ru)***Численная реализация алгоритма для динамической задачи теории упругости**

Авторами реализован алгоритм решения трёхмерной динамической задачи теории упругости «в скоростях-напряжениях», использующий расщепление оператора Ламе. Рассмотрена сеточная задача «в скоростях-напряжениях» в трёхмерном случае, где доказаны теорема аддитивности схем и теорема о консервативности схем. Трёхмерная динамическая задача теории упругости в «скоростях-напряжениях» решена с помощью метода прогонки, алгоритм реализован на языке программирования Delphi 7.0 с построением графиков функций тестового и приближённого решений на сетках различной точности. Целью авторов было реализовать алгоритм решения трёхмерной динамической задачи теории упругости «в скоростях-напряжениях» и сравнить тестовое и приближённое решения при расчётах с различной степенью точности. Цель полностью достигнута.

Ключевые слова: алгоритм решения трёхмерной динамической задачи, расщепление оператора Ламе, сеточная задача «в скоростях-напряжениях», трёхмерная задача «в скоростях-напряжениях», метод прогонки, гильбертово пространство, ковариантное дифференцирование, аддитивное разложение, разностная схема, сеточный закон сохранения.

1. Сеточная задача «в скоростях-напряжениях». Ради некоторых упрощений в обозначениях мы положим $f = 0$ и рассмотрим трёхмерный случай. Тогда

$$R = \begin{pmatrix} \nabla_1 & 0 & 0 & \nabla_2 & \nabla_3 & 0 \\ 0 & \nabla_2 & 0 & \nabla_1 & 0 & \nabla_3 \\ 0 & 0 & \nabla_3 & 0 & \nabla_1 & \nabla_2 \end{pmatrix}^T; \quad (1.1)$$

$$R = - \begin{pmatrix} \nabla_1 & 0 & 0 & \nabla_2 & \nabla_3 & 0 \\ 0 & \nabla_2 & 0 & \nabla_1 & 0 & \nabla_3 \\ 0 & 0 & \nabla_3 & 0 & \nabla_1 & \nabla_2 \end{pmatrix}.$$

В декартовой $\left(\nabla_i \equiv \frac{\partial}{\partial y_i}\right)$ и цилиндрической системах координат разностные схемы для поста-

новки «в скоростях-напряжениях» впервые, по-видимому, рассматривались в [1]. В декартовой системе координат, начиная с [2] (см. также [3–5]), (2.20, ч. I), приводится к симметрической t -гиперболической, по Фридриху, системе

$$\frac{A_0 \partial W}{\partial t} + \frac{A_1 \partial W}{\partial y_1} + \frac{A_2 \partial W}{\partial y_2} + \frac{A_3 \partial W}{\partial y_3} = 0, W = (v / \sigma), A_0 = A_0^T > 0, A_i = A_i^T, \quad (1.2)$$

которая и служит основой при численном решении динамической задачи.

Однако при таком подходе упускается из виду следующее обстоятельство. Оператор $\frac{\partial}{\partial y_i}$ является в (1.2) как в результате применения оператора $R^* : H \rightarrow H^*$ к вектору $\sigma \in H(\eta)$, так и в результате применения оператора $R^* : H^* \rightarrow H$ к вектору $v \in H^*(w)$. Поясним сказанное на простейшем примере. Для скалярных функций при соответствующих краевых условиях (либо в случае финитных функций) формула интегрирования по частям даёт

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y_i}, v \right)_D = - \left(u, \frac{\partial v}{\partial y_i} \right)_D. \quad (1.3)$$

Поэтому оператор $-\frac{\partial}{\partial y_i}$ можно считать сопряжённым, по Лагранжу, к оператору $\frac{\partial}{\partial y_i}$. В дискретном случае в стандартных обозначениях [6] вместо (1.3) будем иметь $(u_{y_i}, v)_{D_h} = -(u, v_{g_i})_{D_h}$ и сопряжённым к оператору $(\cdot)_{y_i}$ следует считать оператор $-(\cdot)_{g_i}$. Поэтому хотя в непрерывном случае (2.20, ч. I) и (1.2) эквивалентны, но для сохранения структуры (2.20, ч. I) в дискретной модели (1.2) не может использоваться одна и та же аппроксимация оператора $\frac{\partial}{\partial y_i}$ для всех компонент вектора W_h . Например, если для компонент вектора v_h в (1.2) используется аппроксимация $(\cdot)_{y_i}$, то для компонент вектора σ_h в (1.2) следует принять аппроксимацию $(\cdot)_{g_i}$ и наоборот.

По существу именно из этих соображений для одномерных уравнений акустики (частный случай модели (2.20, ч. I), когда H и H^* совпадают) в декартовой и в стандартных ортогональных системах координат построены и обоснованы полностью консервативные разностные схемы с сеточным законом сохранения типа (2.27, ч. I)

$$\left[\|v_h\|_{D_h}^2 + (\sigma_h, \varepsilon_h)_{D_h} \right]_t = 0. \quad (1.4)$$

Пусть \bar{D} — криволинейный параллелепипед: $\bar{D} = D \cup \gamma = \{(y_1, y_2, y_3) | 0 \leq y_m \leq l_m, m = 1, 2, 3\}$. Введём в \bar{D} равномерную по каждой криволинейной координате y_m сетку: $h_m > 0, N_m h_m = l_m$. Узлы сетки $\bar{D}_h : (y_{1i_1}, y_{2i_2}, y_{3i_3}) \in \bar{D}_h$ определим как пересечение координатных линий $y_{1i_1} = i_1 h_1, y_{2i_2} = i_2 h_2, y_{3i_3} = i_3 h_3, 0 \leq i_m \leq N_m$. Пусть $r > 0$, тогда $\bar{Q}_{\tau, h} = \bar{Q}_h = \{D_h \times [0 \leq t = n\tau \leq t_1]\}$. От векторов непрерывных аргументов перейдём к векторам дискретных аргументов, заданных на сетке $\bar{Q}_h : v(M_h, n\tau) = v_h^n, M_h \in \bar{D}_h; \varepsilon(M_h, n\tau) = \varepsilon_h^n$ и т.д. По аналогии с непрерывным случаем определим сеточные гильбертовы пространства $H_h(\eta_h), H_h^*(w_h)$. Для опорного оператора $R : H^* \rightarrow H$ выберем какую-либо аппроксимацию $R_h : H_h^* \rightarrow H_h$. Сеточную аппроксимацию оператора $R^* : H \rightarrow H^*$, сопряжённого, по Лагранжу, к R , определим из соотношения (ср. с (2.1, ч. I))

$$[R_h w_h, \eta_h]_{H_h} = [w_h, R_h^* \eta_h]_{H_h^*}. \quad (1.5)$$

При введении сеточных гильбертовых пространств H_h, H_h^* следует соответствующим образом определить сеточные скалярные произведения $[\cdot]_{H_h}$ и $[\cdot]_{H_h^*}$. Это, в свою очередь, сводится к построению соответствующего сеточного скалярного произведения $(\cdot)_{D_h}$ для $w_h \in H_h^*, \eta_h \in H_h$. Способы определения $(\cdot)_{D_h}$ в (1.5) существенно зависят как от конкретного выбора R_h , так и от краевых условий (1.13, ч. I) динамической задачи, то есть от $U(R_h), U(R_h^*)$. Пока мы констатируем принципиальную

возможность построения нужных $(\cdot)_{D_h}$ для H_h, H_h^* . Все необходимые для понимания комментарии будут даны по ходу дальнейшего изложения.

Для задачи «в скоростях-напряжениях» (2.26, ч. I) при $f = 0$ рассмотрим разностную схему

$$\begin{aligned} v_i^{n+1} + 0,5R_h^*(\sigma_h^n + \sigma_h^{n+1}) &= 0, v_h^0 = \psi_h(M_h); \\ \varepsilon_i^{n+1} + 0,5R_h(v_h^n + v_h^{n+1}) &= 0, \sigma_h = K_h \varepsilon_h, \varepsilon_h(M_h, 0) = \varepsilon_h^0 = R_h \phi_h(M_h). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Под K_h следует понимать какую-либо проекцию K на D_h , неразъясняемые обозначения являются стандартными в теории разностных схем [7]. Там, где это не вызывает недоразумений, часть индексов может быть опущена.

Из (1.6) вытекает, что $J_1 + J_2 = 0,5[\sigma_h^n + \sigma_h^{n+1}, \varepsilon_i^{n+1}]_{H_h} = 0$. Всегда можно считать, что $K = K^T > 0$ влечёт за собой и $K_h = K_h^T > 0$. Поэтому $J_1 = 0,5([\sigma_h^{n+1}, \varepsilon_h^{n+1}]_{H_h})_i$. Далее $J_2 = -0,25[R_h^*(\sigma_h^n + \sigma_h^{n+1}), v_h^n + v_h^{n+1}]_{H_h}$, что в силу первого уравнения из (1.6) даёт $J_2 = 0,5([v_h^{n+1}, v_h^{n+1}]_{H_h^*})_i = 0,5(\|v_h^{n+1}\|_{H_h^*}^2)_i$. Следовательно,

$$(J_3^{n+1})_i = (\|v_h^{n+1}\|_{H_h^*}^2 + [\sigma_h^{n+1}, \varepsilon_h^{n+1}]_{H_h})_i = 0, \quad (1.7)$$

что в точности совпадает с (1.4). В соответствии с терминологией из [8, 9] соотношение (1.7) означает, что справедлива

Теорема 1.1. Разностная схема (1.6) полностью консервативна.

Принципиальным здесь является тот факт, что при доказательстве теоремы 1.1 нигде в явном виде не используется конкретный вид операторов R_h и R_h^* . Существенно лишь то, что конкретная аппроксимация опорного оператора R в силу (1.5) порождает конкретную аппроксимацию сопряжённого оператора R^* . Это и позволяет на сеточном уровне сохранить структуру дифференциальной задачи (2.26, ч. I) и структуру интеграла энергии (2.27, ч. I) для этой задачи.

Можно трактовать J_3 как некоторую составную норму (полунорму) сеточной вектор-функции упругих перемещений $u_h : J_3 = [u_i, u_i]_{H_h^*} + [u_h, A_h u_h]_{H_h^*}, A_h = R_h^* K_h R_h$. Тогда из (1.7) вытекает устойчивость разностной схемы (1.6) по начальным данным в норме J_3 . Отсюда стандартным образом вытекает и устойчивость по правой части ($f_h \neq 0$) и как следствие теорема сходимости.

Любая аппроксимация опорного оператора R в силу (1.1) связана с аппроксимацией оператора ∇_α ковариантного дифференцирования. Здесь за основу примем определения (2.17, ч. I), (2.18, часть I). Пусть $w_h \in H_h^*(w_h)$ и $T_{\pm i} w = w(y_i \pm h_i)$. Сеточную ковариантную производную «назад» ∇_i^- ковариантной компоненты w_j вектора w_h зададим следующим образом:

$$\nabla_i^- w_j \equiv (w_{y_i}^-, e_j)_{H_h^*} = (w_j)_{y_i}^- + (T_{-i} w_m) (e_{y_i}^m, e_j)_{H_h^*}. \quad (1.8)$$

Первая часть формулы (1.8) связана (ср. с (2.17, ч. I)) с определением ∇_i^- , а вторая даёт способ фактического вычисления. Векторы e_j, e^m в (1.8) и далее определяют согласованный с ∇_i^- сеточный базис и кобазис. Теперь в соответствии с (1.8) будем иметь

$$\begin{aligned} R_h &= \begin{pmatrix} \nabla_1^- & 0 & 0 & \nabla_2^- & \nabla_3^- & 0 \\ 0 & \nabla_2^- & 0 & \nabla_1^- & 0 & \nabla_3^- \\ 0 & 0 & \nabla_3^- & 0 & \nabla_1^- & \nabla_2^- \end{pmatrix}^T; \\ R_h^* &= - \begin{pmatrix} \nabla_1^+ & 0 & 0 & \nabla_2^+ & \nabla_3^+ & 0 \\ 0 & \nabla_2^+ & 0 & \nabla_1^+ & 0 & \nabla_3^+ \\ 0 & 0 & \nabla_3^+ & 0 & \nabla_1^+ & \nabla_2^+ \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (1.9)$$

где ковариантная производная «вперёд» ∇_i^+ от контравариантной компоненты σ_h^{mj} определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \nabla_i^+ \sigma^{mj} \equiv (\Sigma_h)_{y_i} \cdot (e^m \otimes e^j) = (\sigma^{mj})_{y_i} + (T_{+i} \sigma^{mj}) \left((e_\alpha)_{y_i}, e^m \right) + \\ + (T_{+i} \sigma^{m\beta}) (T_{+i} e^m, e^m) \left((e_\beta)_{y_i}, e^j \right). \end{aligned} \quad (1.10)$$

При ковариантном дифференцировании векторы локального базиса (кобазиса), а также компоненты метрического тензора G следует рассматривать как постоянные. Сеточные аппроксимации (1.8), (1.10) оператора ∇_i эти свойства сохраняют [10]. И, наконец, отметим, что в соответствии с выбранным способом аппроксимации опорного оператора R сеточными аналогами скалярного произведения $(\cdot)_D$ в H_h и H_h^* являются $(\cdot)_{D_h}$ и $(\cdot)_{D_h}$, где, как обычно,

$$(\cdot)_{D_h} = h_1 h_2 h_3 \sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2} \sum_{i_3=1}^{N_3} (\cdot)_{i_1, i_2, i_3}; \quad (\cdot)_{D_h} = h_1 h_2 h_3 \sum_{i_1=0}^{N_1-1} \sum_{i_2=0}^{N_2-1} \sum_{i_3=0}^{N_3-1} (\cdot)_{i_1, i_2, i_3}.$$

Основные проблемы при численной реализации полностью консервативной разностной схемы (1.6) связаны с обращением многомерных операторов. Для задачи (2.26, ч. I) построим полностью консервативную разностную схему с законом сохранения (1.7), в которой обращению подлежат лишь одномерные операторы. Эта схема основана на методе расщепления в одной из его первоначальных редакций [11–14].

$$\begin{aligned} R_h = \begin{pmatrix} \nabla_1^- & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nabla_1^- & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \nabla_1^- & 0 \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \nabla_2^- & 0 & 0 \\ 0 & \nabla_2^- & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \nabla_2^- \end{pmatrix}^T + \\ + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \nabla_3^- & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \nabla_3^- \\ 0 & 0 & \nabla_3^- & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T = R_{1h} + R_{2h} + R_{3h}, \end{aligned} \quad (1.11)$$

которое порождает аддитивное разложение для сопряжённого сеточного оператора R_h^* :

$$\begin{aligned} R_h^* = - \begin{pmatrix} \nabla_1^+ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nabla_1^+ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \nabla_1^+ & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \nabla_2^+ & 0 & 0 \\ 0 & \nabla_2^+ & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \nabla_2^+ \end{pmatrix} - \\ - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \nabla_3^+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nabla_3^+ & 0 & 0 & \nabla_3^+ \end{pmatrix} = R_{1h}^* + R_{2h}^* + R_{3h}^*. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Следуя [11–14], переход $v^n, \sigma^n \rightarrow v^{n+1}, \sigma^{n+1}$ ($n \rightarrow n+1$) будем осуществлять с помощью последовательных переходов $n \rightarrow n + \frac{1}{3} \rightarrow n + \frac{2}{3} \rightarrow n+1$. Каждому такому переходу поставим в соответствие одномерную сеточную динамическую задачу «в скоростях-напряжениях», порождаемую аддитивным разложением (1.11), (1.12).

Итак, при заданных v^n, ε^n переход $n \rightarrow n + \frac{1}{3}$ будем осуществлять с помощью одномерной разностной схемы

$$\begin{aligned} v_i^{n+1/3} + \frac{1}{3} R_{1h_1}^* (\sigma^n + \sigma^{n+1/3}) = 0, \tau(\cdot)_i^{n+1/3} = (\cdot)^{n+1/3} - (\cdot)^n; \\ \varepsilon_i^{n+1/3} + \frac{1}{3} R_{1h_1} (v^n + v^{n+1/3}) = 0, \sigma^{n+1/3} = K_h \varepsilon^{n+1/3}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Далее при заданных $v^{n+1/3}, \varepsilon^{n+1/3}$ опять-таки с помощью одномерной разностной схемы

$$\begin{aligned} v_i^{n+2/3} + \frac{1}{3} R_{2h_2}^* (\sigma^{n+1/3} + \sigma^{n+2/3}) = 0, \tau(\cdot)_i^{n+2/3} = (\cdot)^{n+2/3} - (\cdot)^{n+1/3}; \\ \varepsilon_i^{n+2/3} + \frac{1}{3} R_{2h_2} (v^{n+1/3} + v^{n+2/3}) = 0, \sigma^{n+2/3} = K_h \varepsilon^{n+2/3}, \end{aligned} \quad (1.14)$$

осуществляется переход $n + \frac{1}{3} \rightarrow n + \frac{2}{3}$.

И, наконец, при заданных $v^{n+2/3}, \varepsilon^{n+2/3}$ с помощью одномерной разностной схемы

$$\begin{aligned} v_i^{n+1} + \frac{1}{3} R_{3h}^* (\sigma^{n+2/3} + \sigma^{n+1}) &= 0, \tau(\cdot)_i^{n+1} = (\cdot)^{n+1} - (\cdot)^{n+2/3}; \\ \varepsilon_i^{n+1} + \frac{1}{3} R_{3h} (v^{n+2/3} + v^{n+1}) &= 0, \sigma^{n+1} = K_h \varepsilon^{n+1}, \end{aligned} \quad (1.15)$$

осуществляется переход $n + \frac{2}{3} \rightarrow n + 1$.

Наиболее простые реализации сеточных задач (1.13), (1.14) и (1.15) связаны, как и в задачах газовой динамики [14], с методами бегущего счёта. Возможен также предварительный переход к сеточным инвариантам Римана. И, наконец, для (1.13), (1.14) возможно применение метода «распада разрыва» С.К.Годунова. Все эти методы достаточно детально описаны в [12], поэтому справедливо утверждение: для (1.13), (1.14) и (1.15) существуют экономичные реализации.

Практически очевидной, но, тем не менее, принципиальной является

Теорема 1.2. Аддитивная разностная схема (1.13), (1.14) и (1.15) обладает сеточным законом сохранения (1.7).

Очевидность этой теоремы связана с тем, что на каждом из переходов $n \rightarrow n + \frac{1}{3}$, $n + \frac{1}{3} \rightarrow n + \frac{2}{3}$, $n + \frac{2}{3} \rightarrow n + 1$ удалось сохранить структуру исходной дифференциальной задачи (2.26, ч. I). Поэтому, как и при доказательстве теоремы 1.1, для (1.13) будем иметь

$$\|v_h^{n+1/3}\|_{H_h^*}^2 + [\sigma_h^{n+1/3}, \varepsilon_h^{n+1/3}]_{H_h} = \|v_h^n\|_{H_h^*}^2 + [\sigma_h^n, \varepsilon_h^n]_{H_h}; \quad (1.16)$$

для (1.14) —

$$\|v_h^{n+2/3}\|_{H_h^*}^2 + [\sigma_h^{n+2/3}, \varepsilon_h^{n+2/3}]_{H_h} = \|v_h^{n+1/3}\|_{H_h^*}^2 + [\sigma_h^{n+1/3}, \varepsilon_h^{n+1/3}]_{H_h}; \quad (1.17)$$

а для (1.15) —

$$\|v_h^{n+1}\|_{H_h^*}^2 + [\sigma_h^{n+1}, \varepsilon_h^{n+1}]_{H_h} = \|v_h^{n+2/3}\|_{H_h^*}^2 + [\sigma_h^{n+2/3}, \varepsilon_h^{n+2/3}]_{H_h}. \quad (1.18)$$

Теперь из (1.16), (1.17) и (1.18) для аддитивной разностной схемы (1.13), (1.14), (1.15) вытекает справедливость сеточного закона сохранения (1.7)

$$J_3^{n+1} = J_3^n = \dots = J_3^0. \quad (1.19)$$

Остаётся заметить, что при дальнейших стандартных рассуждениях, приводящих от (1.19) к теореме сходимости, следует рассматривать аппроксимацию задачи (2.26, ч. I) разностной схемой (1.13), (1.14) и (1.15) как суммарную. Отметим также, что как для (1.6), так и для аддитивной разностной схемы (1.13), (1.14) и (1.15) справедлив «дополнительный» сеточный закон сохранения типа (2.28, ч. I): $\left(\left\| (K_h^{1/2} \varepsilon_h^{n+1})_i \right\|_{H_h}^2 + \left\| R_h^* \sigma_h^{n+1} \right\|_{H_h^*}^2 \right)_i = 0$. Это позволяет получать теоремы сходимости в более сильных нормах, чем J_3 .

2. Метод прогонки. Используя метод прогонки, решим задачу, где $\tau = 0,5/k$; k — время распространения волны в горном массиве. Затем найдём α_{i+1} и β_{i+1} .

$$U = \cos \pi x_1 \cos \pi x_2 \cos \pi x_3 \sin \pi t \quad \text{— тестовое решение и } \nabla_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \text{ найдём } \nabla_1, \nabla_2 \text{ и } \nabla_3:$$

$$\nabla_1 = -\pi \sin \pi x_1 \cos \pi x_2 \cos \pi x_3 \sin \pi t;$$

$$\nabla_2 = -\pi \cos \pi x_1 \sin \pi x_2 \cos \pi x_3 \sin \pi t;$$

$$\nabla_3 = -\pi \cos \pi x_1 \cos \pi x_2 \sin \pi x_3 \sin \pi t,$$

где $0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1, 0 \leq x_3 \leq 1$. Далее найдём v и σ_i :

$$v = \frac{\partial U}{\partial t} = -\pi \cos \pi x_1 \cos \pi x_2 \cos \pi x_3 \cos \pi t.$$

Так как $\sigma = K\varepsilon$ и $\varepsilon = Ru$, то

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \nabla_1 u_1 (\lambda + 2\mu_1) + \lambda (\nabla_2 u_2 + \nabla_3 u_3); \\ \sigma_2 &= \nabla_2 u_2 (\lambda + 2\mu_1) + \lambda (\nabla_1 u_1 + \nabla_3 u_3); \\ \sigma_3 &= \nabla_3 u_3 (\lambda + 2\mu_1) + \lambda (\nabla_1 u_1 + \nabla_2 u_2); \\ \sigma_4 &= 2\mu_1 (\nabla_1 u_2 + \nabla_2 u_1); \\ \sigma_5 &= 2\mu_1 (\nabla_1 u_3 + \nabla_3 u_1); \\ \sigma_6 &= 2\mu_1 (\nabla_2 u_3 + \nabla_3 u_2). \end{aligned}$$

Данный алгоритм реализован на языке программирования Delphi 7.0, на рисунке 1 а, б выведен график функций при шаге $h = 0,1$ по трём переменным x_1, x_2, x_3 , построенный по тестовому и по приближенному решениям.

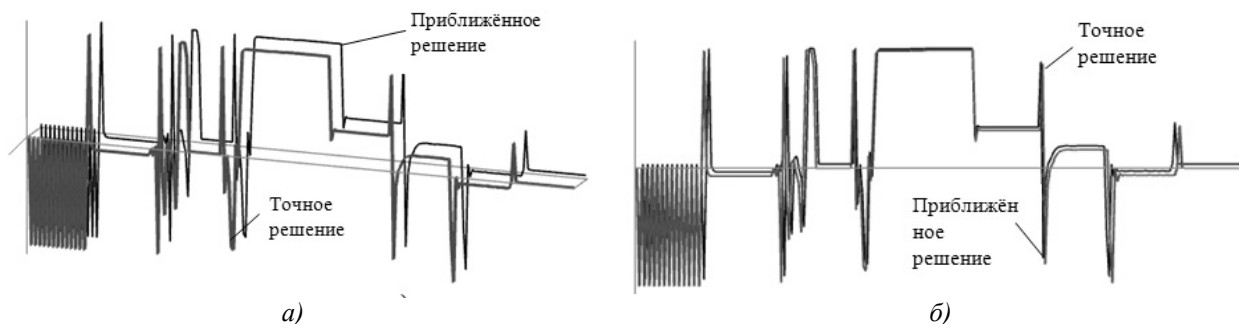


Рисунок 1. График функций при шаге $h = 0,1$

При шаге $h = 0,01$ по трём переменным x_1, x_2, x_3 (рисунок 2 а, б):

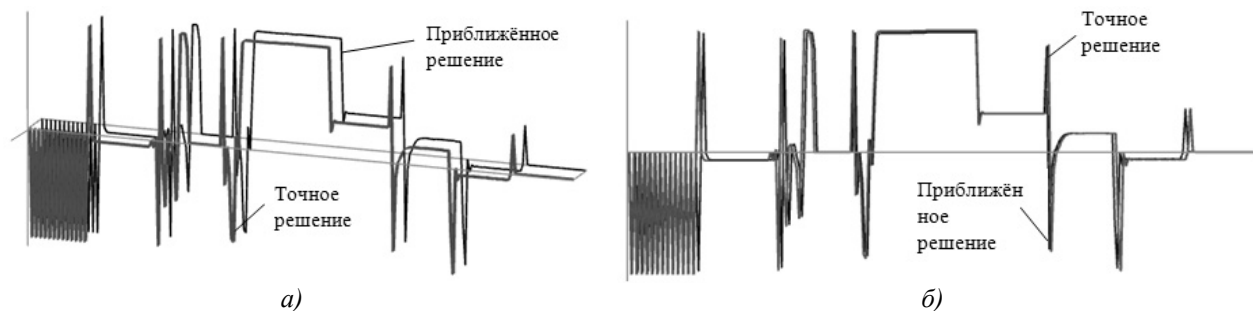


Рисунок 2. График функций при шаге $h = 0,01$

При шаге $h = 0,001$ по трём переменным x_1, x_2, x_3 (рисунок 3 а, б):

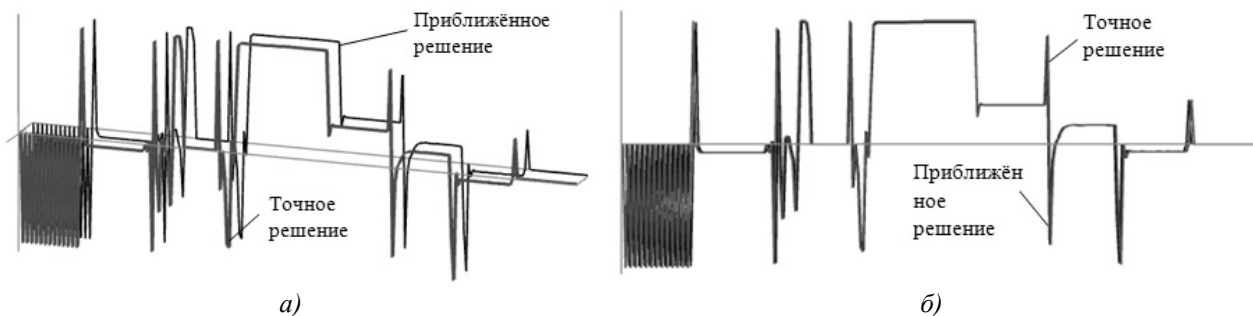


Рисунок 3. График функций при шаге $h = 0,001$

Сравнение тестового и приближённого решений показало удовлетворительное совпадение в пределах заданной точности и аппроксимации.

Список литературы

- 1 Коновалов А.Н., Сорокин С.Б. Структура уравнений теории упругости. Статика: Учеб. пособие / Новосибирск: Изд. НГУ, 1986. — 26 с.
- 2 Цуриков Н.В. Численное решение задач теории упругости в произвольной криволинейной системе координат: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Новосибирск: Изд. НГУ, 1992. — 362 с.
- 3 Букенов М.М. Малые параметры в алгоритмах задач теории упругости: Дис. ... канд. физ.-мат. наук / Новосибирск: Изд. НГУ, 1986. — 360 с.
- 4 Коновалов А.Н. Сопряженно-согласованные аппроксимации и экономичные дискретные реализации для динамической задачи линейной теории упругости // Дифференциальные уравнения. — 2010. — Т. 46. — № 7. — С. 1004–1010.
- 5 Коновалов А.Н. Задачи теории упругости в напряжениях: Вычислит. методы в мат. физике, геофизике и оптимальном управлении. — Новосибирск: Наука, 1978. — С. 130–133.
- 6 Коновалов А.Н. Решение задач теории упругости в напряжениях: Учеб. пособие. — Новосибирск: Наука, 1979. — 345 с.
- 7 Попов Ю.П., Самарский А.А. Полностью консервативные разностные схемы // Вычислит. методы в математике и мат. физике. — 1969. — Т. 9. — № 4. — С. 953–958.
- 8 Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные схемы газовой динамики: Учеб. пособие. — М.: Наука, 1975. — 351 с.
- 9 Коновалов А.Н. Численные методы в динамических задачах теории упругости // Сиб. мат. журн. — 1997. — Т. 38. — № 3. — С. 551–569.
- 10 Самарский А.А., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П., Шашков М.Ю. Использование метода опорных операторов для построения разностных аналогов операций тензорного анализа // Дифференциальные уравнения. — 1982. — Т. 18. — № 7. — С. 1251–1256.
- 11 Самарский А.А., Колдоба А.В., Повещенко Ю.А. и др. Разностные схемы на нерегулярных схемах: Учеб. пособие. — Минск: Критерий, 1996. — 353 с.
- 12 Букенов М.М. Метод фиктивных областей для среды Максвелла: Численные методы и пакеты программ для решения уравнений математической физики. — Новосибирск: Изд. НГУ, 1985. — С. 117–125.
- 13 Фикера Г. Теоремы существования в теории упругости: Учеб. пособие. — М.: Мир, 1974. — 160 с.
- 14 Филлин А.П. Прикладная механика твёрдого деформируемого тела: Учебник. — Т. III. — М.: Наука, 1978. — 832 с.

М.М.Букенов, А.Н.Москаленко

Динамикалық серпімділік теориясының есебіне арналған алгоритмнің сандық жүзеге асуы

Авторлар Ламе операторын бөліктеуді қолданатын үш өлшемді динамикалық серпімділік теориясының «жылдамдық-кернеу» есебін шешудің алгоритмін жүзеге асырды. Үш өлшемді жағдайда «жылдамдық-кернеуіндегі» торлық есеп қарастырылды, онда сызбалардың аддитивтілік және консервативтілік теоремалары дәлелденді. Үш өлшемді динамикалық серпімділік теориясының «жылдамдық-кернеу» есебі қуалау әдісінің көмегімен шешілді, алгоритм Delphi 7.0 программалау тілінде жүзеге асырылды, әр түрлі дәлдіктегі торда тестік және жуық шешімдерінің функцияларының графиктері салынды. Мұндағы негізгі мақсат үш өлшемді динамикалық серпімділік теориясының «жылдамдық-кернеу» есебін шешу алгоритмін жүзеге асыру және әр түрлі дәрежедегі дәлдіктегі есептеулердің тестік және жуық шешімдерін салыстыру болды. Қойылған мақсат толығымен орындалды.

Numerical implementation of the algorithm for the dynamic problem of elasticity

Authors have implemented an algorithm of three-dimensional dynamic problem of elasticity «in the speeds-pressures» that uses an operator splitting Lamé. We consider the grid problem «in the speeds-pressures» within the three-dimensional case, where we prove a theorem and the theorem of additivity of conservative schemes. Three-dimensional dynamic problem of elasticity theory in «speeds-pressures» solved by the sweep method, the algorithm is implemented in the programming language Delphi 7.0 with the construction of graphs of functions test and approximate solutions on grids of different accuracy. The authors' objective was to implement the algorithm of three-dimensional dynamic problem of elasticity «in the speeds-pressures» and to compare test and approximate solutions in the calculations, with varying degrees of accuracy. The purpose has been achieved entirely.

References

- 1 Konovalov A.N., Sorokin S.B. *Structure of the equations of the theory of elasticity. Statics*, Novosibirsk: Publ. NGU, 1986, p. 10–23.
- 2 Tsurikov N.V. *Numerical solution of elasticity in arbitrary curvilinear coordinates*, Novosibirsk: Nauka, 1992, p. 111–120.
- 3 Bukenov M.M. *Small parameters in the algorithms of elasticity*, Novosibirsk: Publ. NGU, 1986, p. 125–132.
- 4 Konovalov A.N. *Journal of Differential Equations*, 2010, 46 (7), p. 1004–1010.
- 5 Konovalov A.N. *Elasticity problem in pressures*, Novosibirsk: Publ. NGU, 1978, p. 130–133.
- 6 Konovalov A.N. *Solution of elasticity in pressures*, Novosibirsk: Nauka, 1979, p. 233–240.
- 7 Popov Yu.P., Samarskii A.A. *Journal of Numerical Mathematics and Mathematical Physics*, 1969, 9 (4), p. 953–958.
- 8 Samarskii A.A., Popov Yu.P. *Difference schemes of gas dynamics*, Moscow: Nauka, 1975, p. 242–256.
- 9 Konovalov A.N. *Numerical methods in dynamic problems of the theory of elasticity* // *Siberian Mathematical Journal*, 1997, 38 (3), p. 551–569.
- 10 Samarskii A.A., Tishkin V.F., Favorskii A.P., Shashkov M.Yu. *Journal of Differential Equations*, 1982, 18 (7), p. 1251–1256.
- 11 Samarskii A.A., Koldoba A.V., Poveshchenko Yu.A. et al. *Difference schemes for nonlinear schemes*, Minsk: Kriterii, 1996, p. 263–275.
- 12 Bukenov M.M. *Fictitious domain method for Maxwell medium*, Novosibirsk: Publ. NGU, 1985, p. 117–125.
- 13 Fichera G. *Existence theorems in the theory of elasticity*, Moscow: Mir, 1974, p. 110–112
- 14 Filin A.P. *Applied mechanics of solid deformable body: Textbook*, Moscow: Nauka, 1978, p. 458–519.

УДК 517.51

Е.Д.Нурсултанов¹, Д.К.Дарбаева²¹Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова (Казахстанский филиал);²Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева, Астана (E-mail: d.darbaeva@yandex.kz)

Об операторе свертки в пространствах типа Морри

В статье исследованы верхние оценки нормы оператора свертки в пространствах типа Морри. Введены пространства $M_{p,q}^\alpha$, которые охватывают классические пространства Морри, исследованы их свойства вложения, описаны интерполяционные свойства. Доказаны неравенства типа Юнга-О'Нейла в обобщенных пространствах типа Морри.

Ключевые слова: пространства Морри, оператор свертки, неравенство Юнга-О'Нейла, интерполяционные теоремы.

1. Введение. Пусть $0 \leq \lambda \leq \frac{n}{p}$ и $0 < p < \infty$. Множество всех измеримых по Лебегу функций

$f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ называется пространством Морри, если конечна следующая величина:

$$\|f\|_{M_p^\lambda} = \|f\|_{M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \sup_{r > 0} r^{-\lambda} \|f\|_{L_p(B_r(x))} < \infty.$$

Здесь $B_r(x)$ — шар с центром в точке x и радиусом $r > 0$. Заметим, если $\lambda = 0$, то $M_p^0(R^n) = L_p(R^n)$, если $\lambda = \frac{n}{p}$ и $0 < p < \infty$, то $M_p^{\frac{n}{p}}(R^n) = L_\infty(R^n)$, а если $\lambda < 0$ или $\lambda > \frac{n}{p}$, то $M_p^\lambda = \Theta$, где Θ —

множество всех эквивалентных нулю функций на R^n (см. [1]).

Пространства Морри были введены Морри [1] в 1938 г. и изучались вследствие вопросов регулярных решений нелинейных эллиптических уравнений и систем. В последние два десятилетия был проявлен большой интерес к изучению общих пространств типа Морри и классических операторов теории функций, действующих в этих пространствах (см. обзорные статьи [2–4]).

В данной работе мы изучаем оценки нормы оператора свертки

$$(Tf)(x) = (K * f)(x) = \int_{R^n} K(x-y)f(y)dy,$$

действующего из одного обобщенного пространства типа Морри $M_{p,q}^\alpha$ в другое. Здесь $K(\cdot)$ — локально интегрируемая функция на R^n .

Пусть $1 \leq p, q, r \leq \infty$ и $1 + \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r}$, тогда $K * f \in L_q(R^n)$, причем имеет место неравенство

$$\|K * f\|_{L_q} \leq \|f\|_{L_p} \|K\|_{L_r}.$$

О'Нейл [5] получил более сильное неравенство Юнга следующим образом. Пусть $1 < p, q, r < \infty$. Тогда имеет место следующее неравенство:

$$\|K * f\|_{L_p \rightarrow L_q} \leq c \|K\|_{L_{r,\infty}},$$

где $L_{r,\infty}$ — пространство Марцинкевича.

Дальнейшие результаты обобщений неравенства Юнга-О'Нейла были получены в работах Блозинского [6], Кермана [7], Костюченко и Нурсултанова [8], Степанова [9], Нурсултанова и Тихонова [10] и др. В данной работе мы также продолжаем исследовать неравенство Юнга-О'Нейла для случая пространств типа Морри, а именно, мы докажем аналог неравенства Юнга-О'Нейла для классических пространств Морри.

2. Пространства $M_{p,q}^\alpha$. Пусть $0 < p < \infty, 0 < q \leq \infty, 0 \leq \alpha \leq \frac{n}{p}$. Определим обобщенные

пространства типа Морри $M_{p,q}^\alpha$ как множество всех измеримых по Лебегу функций $f \in L^{loc}(R^n)$, для которых конечна следующая норма при $q < \infty$:

$$\|f\|_{M_{p,q}^\alpha} = \left(\int_0^\infty \left(t^{-\alpha} \sup_{x \in R^n} \|f\|_{L_p(B_t(x))} \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}$$

и при $q = \infty$ норма

$$\|f\|_{M_{p,\infty}^\alpha} = \sup_{x \in R^n} \sup_{t > 0} t^{-\alpha} \|f\|_{L_p(B_t(x))}.$$

Заметим, что введенные таким образом пространства являются обобщением классических пространств Морри при $q = \infty$, то есть $M_{p,\infty}^\alpha = M_p^\lambda$. Приведем некоторые свойства введенных пространств.

Лемма 1.

(i). Если $1 \leq p_0 < p_1 < \infty$, то $M_{p_1,q}^{\alpha_1} \hookrightarrow M_{p_0,q}^{\alpha_0}$, где $\alpha_0 = \alpha_1 - \frac{n(p_0 - p_1)}{p_0 p_1}$;

(ii). Если $0 < q_0 < q_1 \leq \infty$, то $M_{p,q_0}^\alpha \hookrightarrow M_{p,q_1}^\alpha$.

Доказательство. (i). Пусть $f \in M_{p_1,q}^{\alpha_1}$. Применяя неравенство Гёльдера и принимая во внимание, что $|B_t(x)| \sim t^n$, получим

$$\begin{aligned} \|f\|_{M_{p_0,q}^{\alpha_0}} &= \left(\int_0^\infty \left(t^{-\alpha_0} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|f\|_{L_{p_0}(B_t(x))} \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \leq \\ &\leq \left(\int_0^\infty \left(t^{-\alpha_0} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|f\|_{L_{p_1}(B_t(x))} |B_t(x)|^{\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}} \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \cong \\ &\cong \left(\int_0^\infty \left(t^{-\left(\alpha_0 - \frac{n(p_1-p_0)}{p_0 p_1}\right)} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|f\|_{L_{p_1}(B_t(x))} \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} = \|f\|_{M_{p_1,q}^{\alpha_1}}, \end{aligned}$$

что означает вложение $M_{p_1,q}^{\alpha_1} \hookrightarrow M_{p_0,q}^{\alpha_0}$.

(ii). Сначала пусть $q_1 = \infty$ и $f \in M_{p,q_0}^\alpha$. Докажем, что $M_{p,q_0}^\alpha \hookrightarrow M_{p,\infty}^\alpha$.

$$\begin{aligned} \|f\|_{M_{p,\infty}^\alpha} &= \sup_{t>0} t^{-\alpha} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|f\|_{L_p(B_t(x))} = \\ &= (\alpha q_0)^{\frac{1}{q_0}} \sup_{t>0} \left(\int_t^\infty \tau^{-\alpha q_0} \frac{d\tau}{\tau} \right)^{\frac{1}{q_0}} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|f\|_{L_p(B_t(x))}. \end{aligned}$$

Заметим, что $B_t(x) \subset B_\tau(x)$, если $t \leq \tau$, тогда

$$\|f\|_{M_{p,\infty}^\alpha} = (\alpha q_0)^{\frac{1}{q_0}} \sup_{t>0} \left(\int_t^\infty (\tau^{-\alpha} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|f\|_{L_p(B_\tau(x))})^{q_0} \frac{d\tau}{\tau} \right)^{\frac{1}{q_0}} = (\alpha q_0)^{\frac{1}{q_0}} \|f\|_{M_{p,q_0}^\alpha}. \quad (1)$$

Если $q_1 < \infty$, то достаточно воспользоваться интерполяционным неравенством

$$\|f\|_{M_{p,q_1}^\alpha} \leq (\|f\|_{M_{p,q_0}^\alpha})^{1-\frac{q_0}{q_1}} (\|f\|_{M_{p,q_0}^\alpha})^{\frac{q_0}{q_1}}$$

и неравенством (1). Таким образом, $M_{p,q_0}^\alpha \hookrightarrow M_{p,q_1}^\alpha$. Лемма доказана. \square

В дальнейшем нам понадобится также локальный вариант пространств типа Морри. Пусть $x \in \mathbb{R}^n$, пространство $LM_{p,q,x}^\alpha$ определяется с помощью квазинормы:

$$\|f\|_{LM_{p,q,x}^\alpha} = \left(\int_0^\infty (t^{-\alpha} \|f\|_{L_p(B_t(x))})^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}$$

при $0 < q < \infty$ и с обычной модификацией при $q = \infty$. Здесь $LM_{p,q,0}^\alpha = LM_{p,q}^\alpha$ — локальные пространства типа Морри, введенные в работе [11].

Утверждения леммы 1 также имеют место для пространств $LM_{p,q,x}^\alpha$.

В работе [12] была получена следующая интерполяционная теорема:

Теорема 1. Пусть $0 < \alpha_0 < \alpha_1 < \frac{n}{p}$, $0 < \beta_0 < \beta_1 < \frac{n}{q}$, $0 < p, q < \infty$, и пусть T — линейный оператор.

Если для любого $x \in \mathbb{R}^n$

$$\|Tf\|_{LM_{p,\infty,x}^{\alpha_i}} \leq M_i \|f\|_{LM_{q,1,x}^{\beta_i}}, \quad i = 0, 1,$$

тогда

$$\|Tf\|_{M_{p,\tau}^\alpha} \leq c M_0^{1-\theta} M_1^\theta \|f\|_{M_{q,\tau}^\beta},$$

где $\alpha = (1-\theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1$, $\beta = (1-\theta)\beta_0 + \theta\beta_1$, $0 < \tau \leq \infty$, $0 < \theta < 1$, и c зависит только от параметров $p, \beta_0, \beta_1, \theta$.

В следующем разделе мы хотим показать, как применение теоремы 1 позволяет получить аналог неравенства Юнга-О'Нейла для пространств типа Морри.

3. Неравенство типа Юнга-О'Нейла в обобщенных пространствах типа Морри $M_{p,q}^\alpha$.

Лемма 2. Пусть $1 \leq p, q, r \leq \infty$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = 1 + \frac{1}{q}$. Пусть $B_t(z_1), B_t(z_2)$ — шары с центрами в точках $z_1 \in R^n$ и $z_2 \in R^n$, соответственно, и радиуса $t > 0$. Если $f \in L_p(B_t(z_2))$ и $K \in L_r(B_{2t}(z_1 - z_2))$, тогда оператор свертки

$$(K * f)(x) = \int_{B_t(z_2)} K(x - y)f(y)dy$$

принадлежит пространству $L_q(B_t(z_1))$. Кроме того, верна следующая оценка:

$$\|K * f\|_{L_q(B_t(z_1))} \leq \|K\|_{L_r(B_{2t}(z_1 - z_2))} \|f\|_{L_p(B_t(z_2))}. \tag{2}$$

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству неравенства Юнга. Заметим, что для случая, когда $q = \infty$, неравенство (2) при $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = 1$ следует из неравенства Гёльдера. Рассмотрим случай $q < \infty$ и оценим оператор свертки следующим образом:

$$|(K * f)(x)| = \left| \int_{B_t(z_2)} K(x - y)f(y)dy \right| \leq \int_{B_t(z_2)} (|f(y)|^p |K(x - y)|^r)^{\frac{1}{q}} |K(x - y)|^{1 - \frac{r}{q}} |f(y)|^{1 - \frac{p}{q}} dy.$$

Применяя неравенство Гёльдера для трех сомножителей при $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} \left(1 - \frac{r}{q}\right) + \frac{1}{p} \left(1 - \frac{p}{q}\right) = 1$, получим

$$\begin{aligned} |(K * f)(x)| &= \left(\int_{B_t(z_2)} (|f(y)|^p |K(x - y)|^r) dy \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{B_t(z_2)} |K(x - y)|^r dy \right)^{\frac{1}{r}} \times \\ &\times \left(\int_{B_t(z_2)} |K(x - y)|^r dy \right)^{1 - \frac{r}{q}} \left(\int_{B_t(z_2)} |f(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B_t(z_2)} |f(y)|^p dy \right)^{1 - \frac{p}{q}}. \end{aligned}$$

Учитывая, что для любой точки $x \in B_t(z_1)$ множество $x - B_t(z_2) \subset B_{2t}(z_1 - z_2)$, а также, используя неотрицательность функции K , имеем

$$\int_{B_t(z_2)} |K(x - y)|^r dy = \int_{x - B_t(z_2)} |K(y)|^r dy \leq \int_{B_{2t}(z_1 - z_2)} |K(y)|^r dy.$$

Следовательно,

$$|(K * f)(x)| \leq \left(\int_{B_t(z_2)} (|f(y)|^p |K(x - y)|^r) dy \right)^{\frac{1}{q}} \|K\|_{L_r(B_{2t}(z_1 - z_2))}^{1 - \frac{r}{q}} \|f\|_{L_p(B_t(z_2))}^{1 - \frac{p}{q}}.$$

Далее рассмотрим оператор свертки в пространствах Лебега $L_q(B_t(z_1))$ и поменяем порядок интегрирования, в итоге получим

$$\begin{aligned} \|K * f\|_{L_q(B_t(z_1))} &\leq \|K\|_{L_r(B_{2t}(z_1 - z_2))}^{1 - \frac{r}{q}} \|f\|_{L_p(B_t(z_2))}^{1 - \frac{p}{q}} \left(\int_{B_t(z_1)} \int_{B_t(z_2)} |f(y)|^p |K(x - y)|^r dy dx \right)^{\frac{1}{q}} = \\ &= \|K\|_{L_r(B_{2t}(z_1 - z_2))}^{1 - \frac{r}{q}} \|f\|_{L_p(B_t(z_2))}^{1 - \frac{p}{q}} \left(\int_{B_t(z_2)} |f(y)|^p \left(\int_{B_t(z_1)} |K(x - y)|^r dx \right) dy \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Аналогично учитывая, что для любой точки $y \in B_t(z_2)$ множество $B_t(z_1) - y \subset B_{2t}(z_1 - z_2)$, а также, используя неотрицательность функции K , как и в предыдущем случае, получим

$$\int_{B_t(z_1)} |K(x - y)|^r dx = \int_{B_t(z_1) - y} |K(x)|^r dx \leq \int_{B_{2t}(z_1 - z_2)} |K(x)|^r dx.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \|K * f\|_{L_q(B_t(z_1))} &\leq \|K\|_{L_r(B_{2t}(z_1-z_2))} \|f\|_{L_p(B_t(z_2))} \left(\int_{B_t(z_2)} |f(y)|^p \left(\int_{B_{2t}(z_1-z_2)} |K(x)|^r dx \right) dy \right)^{\frac{1}{q}} = \\ &= \|K\|_{L_r(B_{2t}(z_1-z_2))} \|f\|_{L_p(B_t(z_2))}, \end{aligned}$$

откуда получаем нужное нам неравенство. \square

Лемма 3. Пусть $1 < p, q, r < \infty$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = 1 + \frac{1}{q}$. Пусть $B_t(z_1), B_t(z_2)$ — шары с центрами в точках $z_1 \in R^n$ и $z_2 \in R^n$, соответственно, и радиуса $t > 0$. Если $f \in L_p(B_t(z_2))$ и $K \in L_{r,\infty}(B_{2t}(z_1-z_2))$, тогда оператор свертки $K * f \in L_q(B_t(z_1))$. Кроме того, верна следующая оценка:

$$\|K * f\|_{L_q(B_t(z_1))} \leq c \|K\|_{L_{r,\infty}(B_{2t}(z_1-z_2))} \|f\|_{L_p(B_t(z_2))},$$

где c зависит только от параметров p, q и r .

Замечание 1. Здесь и в дальнейшем константы c — разные в разных формулах, они зависят только от числовых параметров и не зависят от функций f и K .

Доказательство. 1. Покажем сначала истинность следующего неравенства. Пусть $1 < p, q, r < \infty$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = \frac{1}{q} + 1$. Тогда

$$\|K * f\|_{L_{q,\infty}(B_t(z_1))} \leq c \|f\|_{L_p(B_t(z_2))} \|K\|_{L_{r,\infty}(B_{2t}(z_1-z_2))}. \quad (3)$$

Рассмотрим пары чисел $(q_0, q_1), (r_0, r_1)$ такие, что $1 < r_0 < r < r_1 < \infty, 1 < q_0 < q < q_1 < \infty$ и

$$\frac{1}{r_i} - \frac{1}{q_i} = \frac{1}{r} - \frac{1}{q}, \quad i = 0, 1. \quad (4)$$

Очевидно, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{r_i} = \frac{1}{q_i} + 1$. Далее зафиксируем параметр $p \in (1, \infty)$ и функцию $f \in L_p(B_t(z_2))$.

Тогда для линейного оператора $T_f(K) = K * f$ от аргумента K можно применить лемму 2, а значит выполняются следующие оценки:

$$T_f(K) : L_{r_0}(B_{2t}(z_1-z_2)) \rightarrow L_{q_0}(B_t(z_1)) \text{ с нормой } \|T\|_{L_{r_0}(B_{2t}(z_1-z_2)) \rightarrow L_{q_0}(B_t(z_1))} \leq \|f\|_{L_p(B_t(z_2))};$$

$$T_f(K) : L_{r_1}(B_{2t}(z_1-z_2)) \rightarrow L_{q_1}(B_t(z_1)) \text{ с нормой } \|T\|_{L_{r_1}(B_{2t}(z_1-z_2)) \rightarrow L_{q_1}(B_t(z_1))} \leq \|f\|_{L_p(B_t(z_2))}.$$

Согласно общей интерполяционной теореме Марцинкевича (см. [13; 148]), мы приходим к выводу, что

$$T_f : L_{r(\theta),\infty}(B_{2t}(z_1-z_2)) \rightarrow L_{q(\theta),\infty}(B_t(z_1))$$

с нормой $\|T\|_{L_{r(\theta),\infty}(B_{2t}(z_1-z_2)) \rightarrow L_{q(\theta),\infty}(B_t(z_1))} \leq c \|f\|_{L_p(B_t(z_2))}$, где $\frac{1}{r(\theta)} = \frac{1-\theta}{r_0} + \frac{\theta}{r_1}$ и $\frac{1}{q(\theta)} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$. (Здесь $L_{r,\infty}$ — пространство Марцинкевича.)

Далее заметим, что найдется $\theta \in (0, 1)$ такое, что $r(\theta) = r$, но тогда из (4) следует, что $q(\theta) = q$, следовательно,

$$\|K * f\|_{L_{q,\infty}(B_t(z_1))} \leq c \|f\|_{L_p(B_t(z_2))} \|K\|_{L_{r,\infty}(B_{2t}(z_1-z_2))},$$

где $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = \frac{1}{q} + 1$, откуда получили неравенство (3).

2. Покажем теперь неравенство

$$\|K * f\|_{L_{q,\tau}(B_t(z_1))} \leq c \|f\|_{L_{p,\tau}(B_t(z_2))} \|K\|_{L_{r,\infty}(B_{2t}(z_1-z_2))}, \quad (5)$$

где $1 < p, q, r < \infty, 0 < \tau \leq \infty$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = \frac{1}{q} + 1$.

Аналогично рассмотрим пары чисел $(p_0, p_1), (q_0, q_1)$ такие, что $1 < p_0 < p < p_1 < \infty$, $1 < q_0 < q < q_1 < \infty$ и $\frac{1}{p_0} - \frac{1}{q_0} = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$. Очевидно, что $1 + \frac{1}{q_i} = \frac{1}{p_i} + \frac{1}{r}$, $i = 0, 1$.

Зафиксируем параметр $r \in (1, \infty)$ и функцию $K \in L_{r, \infty}(B_{2t}(z_1 - z_2))$. Тогда, пользуясь оценкой (3), для линейного оператора $T_K(f) = K * f$ имеем

$$T_K(K) : L_{p_0}(B_t(z_2)) \rightarrow L_{q_0, \infty}(B_t(z_1)) \text{ с нормой } \|T\|_{L_{p_0}(B_t(z_2)) \rightarrow L_{q_0, \infty}(B_t(z_1))} \leq c \|K\|_{L_{r, \infty}(B_{2t}(z_1 - z_2))};$$

$$T_K(K) : L_{p_1}(B_t(z_2)) \rightarrow L_{q_1, \infty}(B_t(z_1)) \text{ с нормой } \|T\|_{L_{p_1}(B_t(z_2)) \rightarrow L_{q_1, \infty}(B_t(z_1))} \leq c \|K\|_{L_{r, \infty}(B_{2t}(z_1 - z_2))}.$$

Тогда, в силу интерполяционной теоремы Кальдерона (см. [13; 149]), получим

$$T_K : L_{p, \tau}(B_t(z_2)) \rightarrow L_{q, \tau}(B_t(z_1))$$

с нормой $\|T\|_{L_{p, \tau}(B_t(z_2)) \rightarrow L_{q, \tau}(B_t(z_1))} \leq c \|K\|_{L_{r, \infty}(B_{2t}(z_1 - z_2))}$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = \frac{1}{q} + 1$ и $0 < \tau \leq \infty$, то есть

$$\|K * f\|_{L_{q, \tau}(B_t(z_1))} \leq c \|f\|_{L_{p, \tau}(B_t(z_2))} \|K\|_{L_{r, \infty}(B_{2t}(z_1 - z_2))},$$

откуда получили неравенство (5).

3. Заметим, что, по условию леммы, $p \leq q$, следовательно, имеет место свойство вложения в пространствах Лоренца, а именно $L_{q, p}(B_t(z_1)) \hookrightarrow L_{q, q}(B_t(z_1))$, что в свою очередь $L_{q, q}(B_t(z_1)) = L_q(B_t(z_1))$. Далее вернемся к неравенству (5) и заменим параметр $\tau = p$, тогда получим

$$\begin{aligned} \|K * f\|_{L_q(B_t(z_1))} &\leq c \|K * f\|_{L_{q, p}(B_t(z_1))} \leq c \|f\|_{L_{p, p}(B_t(z_2))} \|K\|_{L_{r, \infty}(B_{2t}(z_1 - z_2))} = \\ &= c \|f\|_{L_p(B_t(z_2))} \|K\|_{L_{r, \infty}(B_{2t}(z_1 - z_2))}, \end{aligned}$$

тем самым получили утверждение леммы. \square

Теорема 2. Пусть $1 < p, q < \infty$, $0 < \nu < \frac{n}{p}$, $0 < \lambda < \frac{n}{q}$ и $1 + \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r} + \frac{\lambda - \nu}{n}$. Если $f \in LM_{p, \infty, z}^\nu$ и $K \in L_{r, \infty}(R^n)$, тогда оператор свертки $K * f \in LM_{q, \infty, z}^\lambda$. Кроме того, верна следующая оценка для любой точки $z \in R^n$:

$$\|K * f\|_{LM_{q, \infty, z}^\lambda} \leq c \|K\|_{L_{r, \infty}(R^n)} \|f\|_{LM_{p, \infty, z}^\nu},$$

где c не зависит от функции K .

Доказательство. Возьмем r_1 таким, что $1 + \frac{1}{q} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{p}$. Тогда, согласно лемме 3, при $\mu = \lambda - \nu$ имеем

$$t^{-\lambda} \|K * f\|_{L_q(B_t(z_1))} \leq c t^{-\mu} \|K\|_{L_{r_1, \infty}(B_{2t}(z_1 - z_2))} t^{-\nu} \|f\|_{L_p(B_t(z_2))}. \quad (6)$$

Учитывая тот факт, что $m\{B_{2t}(z_1 - z_2)\} = S_n(2t)^n$, где S_n — площадь n -мерной сферы, получаем:

$$\begin{aligned} \sup_{t>0} t^{-\mu} \|K\|_{L_{r_1, \infty}(B_{2t}(z_1 - z_2))} &= \sup_{t>0} t^{-\mu} \sup_{0 < s < S_n(2t)^n} s^{\frac{1}{r_1}} K^*(s) = \\ &= \sup_{t>0} t^{-\mu} \sup_{0 < s < S_n(2t)^n} s^{\frac{\mu}{n}} s^{\frac{1-\mu}{n}} K^*(s) \leq S_n^{\frac{\mu}{n}} 2^{\mu} \sup_{s>0} s^{\frac{1-\mu}{n}} K^*(s) = c \|K\|_{L_{r, \infty}(R^n)}, \end{aligned}$$

где $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} - \frac{\lambda - \nu}{n}$.

Далее, вернувшись к оценке (6), взяв с обеих сторон точную верхнюю грань по всем $t > 0$ и положив $z_1 = z_2 = z$, получим для произвольно взятой точки $z \in R^n$ оценку нормы свертки в локальных пространствах типа Морри

$$\|K * f\|_{LM_{q, \infty, z}^\lambda} \leq c \|K\|_{L_{r, \infty}(R^n)} \|f\|_{LM_{p, \infty, z}^\nu},$$

где c зависит только от параметров p, q, λ, ν и размерности n . Теорема доказана. \square

Теорема 3. Пусть $1 < p, q < \infty, 0 < \tau \leq \infty, 0 < \nu < \frac{n}{p}, 0 < \lambda < \frac{n}{q}$ и $1 + \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r} + \frac{\lambda - \nu}{n}$. Если $f \in M_{p,\tau}^\nu$ и $K \in L_{r,\infty}(R^n)$, тогда оператор свертки $K * f \in M_{q,\tau}^\lambda$ и существует c , не зависящее от K , что для нормы оператора свертки справедливо неравенство

$$\|K * f\|_{M_{p,\tau}^\nu \rightarrow M_{q,\tau}^\lambda} \leq c \|K\|_{L_{r,\infty}(R^n)},$$

в частности, если $\tau = \infty$, то

$$\|K * f\|_{M_p^\nu \rightarrow M_q^\lambda} \leq c \|K\|_{L_{r,\infty}(R^n)}.$$

Доказательство. Так как $0 < \nu < \frac{n}{p}, 0 < \lambda < \frac{n}{q}$, то существуют ν_0, ν_1 и λ_0, λ_1 такие, что

$$0 < \nu_1 < \nu < \nu_0 < \frac{n}{p} \text{ и } 0 < \lambda_1 < \lambda < \lambda_0 < \frac{n}{q}.$$

$$\nu_0 - \lambda_0 = \nu_1 - \lambda_1 = \nu - \lambda. \tag{7}$$

В силу теоремы 2 для любой точки $z \in R^n$ имеют место слабые оценки

$$\|K * f\|_{LM_{q,\infty,z}^{\lambda_i}} \leq c \|K\|_{L_{r,\infty}(R^n)} \|f\|_{LM_{p,\infty,z}^{\nu_i}}, \quad i = 0, 1.$$

Учитывая тот факт, что имеется вложение $LM_{p,1,z}^{\nu_i} \hookrightarrow LM_{p,\infty,z}^{\nu_i}$ относительно второго параметра, следовательно, для любой точки $z \in R^n$ получим следующую оценку:

$$\|K * f\|_{LM_{q,\infty,z}^{\lambda_i}} \leq c \|K\|_{L_{r,\infty}(R^n)} \|f\|_{LM_{p,1,z}^{\nu_i}}, \quad i = 0, 1.$$

Но тогда, интерполируя эти неравенства, в силу теоремы 1 следует, что верно и сильное неравенство

$$\|K * f\|_{M_{q,\tau}^\lambda} \leq c (\|K\|_{L_{r,\infty}(R^n)})^{1-\theta} (\|K\|_{L_{r,\infty}(R^n)})^\theta \|f\|_{M_{p,\tau}^\nu} = c \|K\|_{L_{r,\infty}(R^n)} \|f\|_{M_{p,\tau}^\nu},$$

где $0 < \tau \leq \infty, \nu = (1-\theta)\nu_0 + \theta\nu_1, \lambda = (1-\theta)\lambda_0 + \theta\lambda_1$ и $0 < \theta < 1$ и c зависит только от числовых параметров $p, q, \lambda, \nu, \nu_0, \nu_1, \theta$ и размерности n . Проверим соотношение $1 + \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r} + \frac{\lambda - \nu}{n}$.

Действительно,

$$1 + \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r} + \frac{(1-\theta)(\lambda_0 - \nu_0) + \theta(\lambda_1 - \nu_1)}{n},$$

которое, оценив через (7), получим нужное нам соотношение. Теорема доказана. \square

Работа выполнена при частичной поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов Комитетом науки МОН Республики Казахстан. (гранты 1080/ГФ МОН РК, 1412/ГФ МОН РК и 1834/ГФ МОН РК, 0744/ГФ МОН РК).

Список литературы

- 1 Morrey C.B. On the solution of quasi-linear elliptic partial differential equations // Trans. Amer. Math. Soc. — 1938. — Vol. 43. — P. 126–166.
- 2 Burenkov V.I. Recent progress in studying the boundedness of classical operators of real analysis in general Morrey-type spaces I // Eurasian Mathematical Journal. — 2012. — 3 (3). — P. 11–32.
- 3 Burenkov V.I. Recent progress in studying the boundedness of classical operators of real analysis in general Morrey-type spaces II // Eurasian Mathematical Journal. — 2013. — 4 (1) (принято к печати).
- 4 Ragusa M.A. Operators in Morrey type spaces and applications // Eurasian Mathematical Journal. — 2012. — 3 (3). — P. 94–109.
- 5 O'Neil R. Convolution operators and $L(p, q)$ spaces // Duke Math. J. — 1963. — 30. — P. 129–142.
- 6 Blozinski A.P. On a convolution theorem for $L_{p,q}$ spaces // Trans. Amer. Math. Soc. — 1972. — 164. — P. 255–265.
- 7 Kerman R.A. Convolution theorems with weights // Trans. Amer. Math. Soc. — 1983. — 280 (1). — P. 207–219.

- 8 Костюченко А.Г., Нурсултанов Е.Д. Об интегральных операторах в L_p -пространствах // *Фундаментальная и прикладная математика*. — 1999. — 5 (2). — Р. 475–491.
- 9 Степанов В.Д. Некоторые вопросы теории интегральных операторов свертки: Монография. — Владивосток: Дальнаука, 2000. — 227 с.
- 10 Nursultanov E.D., Tikhonov S. Convolution inequalities in Lorentz spaces // *J. Fourier Anal. Appl.* — 2011. — 17. — P. 486–505.
- 11 Буренков В.И., Гулиев В.С., Гулиев Г.В. Необходимые и достаточные условия ограниченности дробного максимального оператора в локальных пространствах типа Морри // *Докл. АН*. — 2006. — 409 (4). — С. 443–447.
- 12 Дарбаева Д.К. Интерполяционная теорема типа Марцинкевича для обобщенных пространств типа Морри // *Математический журнал* (принято к печати).
- 13 Берг Й., Лёфстрём Й. Интерполяционные пространства. Введение. — М.: Мир, 1980. — 264 с.

Е.Д.Нұрсұлтанов, Д.К.Дарбаева

Морри типтес кеңістіктеріндегі орам операторы туралы

Мақалада орам операторының нормасының жоғарыдан бағалаулары Морри типті кеңістіктерінде зерттелді. Морри типті кеңістігі енгізіліп, оның интерполяциялық қасиеттері қарастырды. Юнг-О'Нейл типті теңсіздіктері Морри типті жалпыланған кеңістіктерінде дәлелденді.

Ye.D.Nursultanov, D.K.Darbayeva

On convolution operator in Morrey-type spaces

In this paper we study the upper estimations of norm of the convolution operator in Morrey-type spaces. We introduce the space $M_{p,q}^{\alpha}$, which include classical Morrey spaces, discuss their properties and describe the interpolation properties. We prove the Young-O'Neil-type inequality in generalized Morrey-type spaces.

References

- 1 Morrey C.B. *On the solution of quasi-linear elliptic partial differential equations* / *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1938, 43, p. 126–166.
- 2 Burenkov V.I. *Recent progress in studying the boundedness of classical operators of real analysis in general Morrey-type spaces I*, *Eurasian Mathematical Journal*, 2012, 3 (3), p. 11–32.
- 3 Burenkov V.I. *Recent progress in studying the boundedness of classical operators of real analysis in general Morrey-type spaces II*, *Eurasian Mathematical Journal*, 2013, 4 (1) (accepted for publ.).
- 4 Ragusa M.A. *Operators in Morrey type spaces and applications*, *Eurasian Mathematical Journal*, 2012, 3 (3), p. 94–109.
- 5 O'Neil R. *Convolution operators and $L(p,q)$ spaces*, *Duke Math. J.*, 1963, 30, p. 129–142.
- 6 Blozinski A.P. *On a convolution theorem for $L_{p,q}$ spaces* / *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1972, 164, p. 255–265.
- 7 Kerman R.A. *Convolution theorems with weights* / *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1983, 280 (1), p. 207–219.
- 8 Kostyuchenko A.G., Nursultanov E.D. *On integral operators in L_p -spaces*, *Fundam. Prikl. Mat.*, 1999, 5 (2), p. 475–491.
- 9 Stepanov V.D. *Some topics in the theory of integral convolution operators*. Dalnauka, Vladivostok, 2000, 227 p.
- 10 Nursultanov E.D., Tikhonov S. *Convolution inequalities in Lorentz spaces*. *J. Fourier Anal. Appl.*, 2011, 17, p. 486–505.
- 11 Burenkov V.I., Guliyev H.V., Guliyev V.S. *Necessary and sufficient conditions for boundedness of the fractional maximal operator in the local Morrey-type spaces* // *Dokl. Ross. Akad. Nauk. Matematika*, 2006, 409, p. 443–447.
- 12 Darbayeva D.K. *Marcinkiewicz-type interpolation theorem for generalized Morrey-type spaces*. *Mathematical journal* (accepted for publication).
- 13 Bergh J., Löfström J. *Interpolation spaces. An introduction*, Moscow: Mir, 1980, 264 p.

Т.Л.Тен¹, Г.Т.Омаров¹, Б.К.Шаяхметова², Ю.Н.Антипов³

¹Карагандинский экономический университет Казпотребсоюза;

²Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букедова;

³Калининградский технический университет, Россия (E-mail: yunikan@yandex.ru)

Модели наполнения программных модулей виртуального университета

В статье рассмотрены вопросы наполнения учебно-методическими средствами модулей виртуального университета. Приведены основные учебные средства, используемые в контенте, а также виды компьютерных обучающих программ. Работа с такими программами направлена на активизацию умственных действий студента, формирование и закрепление профессиональных навыков. Показано, как диверсифицируются функции преподавателей, в сравнении с традиционной системой обучения. Кроме того, доказана необходимость креативного подхода преподавания в профессиональной деятельности в современных условиях.

Ключевые слова: супертьютор, профтьютор, тренинг, аттестация, модуль, юнита, интеграция, телекоммуникационная инфраструктура, конфигурация, портал, среда.

Рассмотрим вопросы наполнения учебно-методическими средствами программных модулей виртуального университета. Отметим основные учебно-методические средства, используемые в контенте, а также виды компьютерных обучающих программ.

Рабочий модульный учебник (юнита). Юнита разрабатывается по каждому модулю, в среднем за один академический период. Каждый студент получает на руки 25–27 юнит и методические рекомендации по работе с рабочим модульным учебником.

Все юниты имеют одинаковую структуру, что позволяет студенту быстро ориентироваться в новом учебном материале, переходя к изучению следующего модуля. Рабочий модульный учебник включает в себя: программу курса, дидактический план курса, список основной и дополнительной литературы, научный или тематический обзор учебного материала, глоссарий, задания для самостоятельной работы, тренинг умений, информацию к тестовым заданиям.

Особенностью юнита является обзорный характер изложения, который позволяет ориентироваться в основных понятиях и вопросах, получать основные тенденции развития науки.

Учебные дидактические или методические средства логично дополняют друг друга в нормокомплекте и усиливают дидактические функции учебной дисциплины.

Общий вид материалов виртуального университета должны составлять более 2000 наименований учебных продуктов. Среди них имитированные видеофильмы, видеоклипы, видеолекции (обзорные и модульные), спутниковые телелекции, авторские лекционные курсы, слад-лекции. К чтению и записи лекции должны приглашаться лучшие доктора и профессора из разных городов, разных стран, профессиональные режиссеры. Фонд должен систематически пополняться. Все эти учебные продукты находятся в аналоговой и цифровой записи и способствуют усилению наглядности содержания учебного материала по модулю или определенной его части.

Компьютерные обучающие программы. В университете (виртуальном) должны быть в наличии более 300 компьютерных обучающих программ по всем учебным дисциплинам. Работа с такими программами направлена на активизацию умственных действий студента, формирование и закрепление профессиональных навыков.

Виды компьютерных обучающих программ [1]:

- супертьютор (ST) — содержит всю необходимую информацию по темам курса, глоссарий, тренинг, тестирование;
- профтьютор (ПТ) — обучает работать с профессиональными малообъемными программами по методическому пособию;
- и-тьютор (ИТ, имитационный) — имитирует работу с объемными профессиональными компьютерными программами;
- г-тьютор (РТ, исследование) — исследовательская программа для развития умений и навыков исследования по определенной проблеме;

- комплей (компьютерная игра) — игровая или ролевая программа, погружение в атмосферу бизнеса и выступления в какой-либо роли;
- Reward — цифровая лингвистическая программа для нелингвистов.

Использование компьютерных обучающих программ строится по четким алгоритмам, обязательно включающим обратную связь. Анализируя обучающие программы, А.Т.Едрисов и М.А.Антонов классифицируют их следующим образом [1]:

- компьютерный учебник — программно-методический комплекс, соединяющий в себе свойства обычного учебника, справочника, задачника и лабораторного практикума;
- предметно-ориентированная среда (микромиры, моделирующие программы, учебные пакеты) — учебный пакет программы, позволяющий оперировать с объектами определенного класса, руководствуясь методическими указаниями, либо производит исследование; подобные имитационные программы дают возможность обучающему «побыть» руководителем предприятия, банка, учреждения.
- лабораторный практикум, служащий для проведения наблюдения над объектами, исследования различных аспектов использования этих объектов на практике;
- тренажер, используемый для обработки и закрепления технических навыков решения задач;
- контролирующие программы, предназначенные для аттестации качества знаний;
- справочные базы данных учебного назначения, предназначенные для хранения и предъявления разнообразной информации; для них характерна иерархическая организация материала и быстрый поиск информации по различным признакам или по контексту.

Обучающие программы представляют один из видов самостоятельной работы студентов на том этапе, когда уже сформированы определенные знания.

Коллективный тренинг — аудиторное групповое занятие, направленное на актуализацию и обработку профессиональных навыков и умений и позволяющее студенту в интерактивной форме раскрыть свой творческий потенциал. Такие занятия организуются и проводятся в соответствии с разработанными сценариями. Разработки сценариев утверждаются научно-методическим советом и рекомендуются для публикации и внедрения в учебный процесс.

Методические рекомендации по проведению коллективного тренинга содержат цели и задачи данного занятия, раздаточный материал, рекомендации для организации и проведения. В зависимости от специфики той или иной учебной дисциплины и вида занятия применяются различные виды коллективного тренинга.

Система аттестации обучающегося. Постоянный контроль и оценка качества усвоения каждого модуля, в соответствии с эталонными критериями, также является оригинальным отличием этой технологии. Система аттестации обучающегося подразделяется на модульную, текущую и итоговую. Обучающийся допускается к текущей аттестации по учебной дисциплине только после того, как ему будут зачтены включенные в нормокомплект этапы и результаты обучения (домашние задания, тесты по модулям, курсовые работы и т.п.). Контроль над прохождением каждым студентом всех учебных процедур осуществляется специальной компьютерной программой. Обучающийся допускается к итоговой аттестации после того, как проведена полная текущая аттестация по всем дисциплинам учебного плана.

В конце каждого модуля проводится модульное тестирование.

Академическая мобильность обучающихся осуществляется посредством разнообразных связей между отечественными и зарубежными университетами, а также образовательными центрами. По договору обучающиеся могут даже защитить свою дипломную работу и получить именные сертификаты и дипломы не только в закрепленных учебных структурах, но и в других вузах.

Высокая технология организации учебного процесса диктует неукоснительное соблюдение всех её элементов, каждый из которых четко согласован со всей цепочкой образовательного процесса. В условиях непрерывного совершенствования технологий обучения требуются особые меры по ускорению адаптации преподавателей к специфике виртуального обучения. Функции преподавателей, в сравнении с традиционной системой обучения, диверсифицируются, в условиях современных технологий необходим креативный подход преподавания к профессиональной деятельности [2].

Резюмируя сказанное выше, отметим характерные особенности виртуального образования.

Гибкость: студенты, слушатели, получающие виртуальное образование, в основном, не посещают регулярных занятий, а учатся в удобное для себя время и в удобном месте.

Модульность: в основу программ виртуального образования заложен модульный принцип: каждый отдельный курс создаёт целостное представление об отдельной предметной области, которая разрешает из набора независимых курсов-модулей формировать учебную программу, отвечающую индивидуальным или групповым потребностям.

Параллельность: обучение осуществляется одновременно с профессиональной деятельностью (или с обучением по другому направлению), то есть без отрыва от производства или другого вида деятельности.

Большая аудитория: одновременное обращение ко многим источникам учебной информации большого количества студентов, слушателей, общение с помощью телекоммуникационной связи студентов между собою и преподавателями.

Экономичность: эффективное использование учебных площадей и технических средств, концентрированное и унифицированное представление информации, использование и развитие компьютерного моделирования должно привести к снижению затрат на подготовку специалистов.

Технологичность: использование в учебном процессе новых достижений информационных технологий, которые оказывают содействие вхождению человека в мировое информационное пространство.

Социальное равенство: равные возможности получения образования, независимо от места жительства, состояния здоровья, социального статуса.

Интернациональность: возможность получать образование в учебных заведениях иностранных государств, не выезжая из страны, и предоставление образовательных услуг иностранным гражданам и соотечественникам, которые проживают за границей.

Новая роль преподавателя: виртуальное образование расширяет и обновляет роль преподавателя, делает его наставником-консультантом, который должен координировать познавательный процесс, постоянно совершенствовать те курсы, которые он преподаёт, повышать творческую активность и квалификацию в соответствии с нововведениями и инновациями.

Положительное влияние на студента (слушателя): повышение творческого и интеллектуального потенциала человека, получающего виртуальное образование, за счет самоорганизации, стремления к знаниям, использования современных информационных и телекоммуникационных технологий, умения самостоятельно принимать ответственные решения.

Качество: качество виртуального образования не уступает качеству иной формы обучения, поскольку для подготовки дидактических средств привлекается наилучший профессорско-преподавательский состав и используются наиболее современные учебно-методические материалы; предлагается использование специализированного контроля качества виртуального образования на его соответствие образовательным стандартам.

Основные задачи виртуального образования:

- формирование нормативно-правового, организационного, учебно-методического, информационно-телекоммуникационного, материально-технического, кадрового, экономического и финансового обеспечения, внедрение и развитие как виртуального образования, так и дистанционного обучения по отдельным курсам или блокам курсов;
- организация и развитие виртуального образования по любым направлениям подготовки специалистов: гуманитарной, экономической, юридической, естественной, воинской, аграрной и т.п.;
- внедрение технологий виртуального обучения на всех уровнях (высшего, последиplomного) и обучение по отдельным курсам или блокам курсов;
- обеспечение профессиональной подготовки и психологической поддержки с помощью виртуального обучения социально незащищенных групп населения, безработных, лиц с физическими недостатками, заключенных, военнослужащих срочной службы и т.п.;
- обеспечение профессиональной ориентации и самоопределения для будущих специалистов;
- использование технологий виртуального обучения для переподготовки и повышения квалификации кадров в сфере предпринимательства, государственного и муниципального управления, таможенной и налоговой служб, финансово-банковской системы, преподавателей высших учебных заведений и т.п.;
- создание государственной электронной библиотеки виртуальных курсов (нормативных дисциплин);
- интеграция виртуального образования в мировую систему современного образования.

Организационная структура объединяет все составные части виртуального образования и базируется на следующих компонентах:

- организационно-управленческий;
- нормативно-правовой;
- учебно-методический;
- информационно-телекоммуникационный;
- экономико-финансовый.

Обеспечивает:

- подготовку проектов нормативно-правовых документов виртуального образования;
- координацию разработок и внедрения технологии виртуального обучения и учебных планов;
- разработку виртуальных курсов с учетом международных стандартов виртуального образования;
- координацию деятельности центров виртуального образования относительно взаимодействия с региональными и областными телекоммуникационными центрами;
- разработку и внедрение наиболее эффективных информационно-учебных программных средств;
- создание распределенной информационной структуры виртуального образования, а также систему администрирования и контроля знаний;
- разработку программ, проведение обучения и переподготовки кадров для виртуального образования;
- разработку системы информационно-аналитического обеспечения виртуального образования, включая маркетинговые исследования и рекламную деятельность.

Региональные центры виртуального образования создаются на базе тех высших учебных заведений, которые являются региональными центрами телекоммуникационной сети науки и образования. Предоставляют возможность пользоваться телекоммуникационной связью сети.

Принимают участие:

- в усовершенствовании и развитии телекоммуникационной инфраструктуры для реализации технологии виртуального образования;
- в подготовке проектов нормативно-правовых документов виртуального образования;
- в разработке и внедрении технологии виртуального обучения и учебных планов;
- в разработке и внедрении наиболее эффективных информационно-учебных программных средств;
- в создании распределенной информационной структуры виртуального образования;
- в подготовке кадров виртуального образования;
- в создании государственной библиотеки виртуальных курсов.

Региональные центры могут быть одновременно и базовыми центрами по направлениям профессиональной подготовки. Базовые центры виртуального образования по направлениям профессиональной подготовки создаются на базе высших учебных заведений, имеющих выдающиеся учебно-методические и научные наработки по одному или нескольким направлениям профессиональной подготовки; вносят существенный вклад в разработку и внедрение технологий виртуального обучения и соответственно подготовленный кадровый состав.

Обеспечивают:

- разработку виртуальных курсов по определенным Координационным советом направлениям профессиональной подготовки;
- внедрение виртуального образования по соответствующим направлениям профессиональной подготовки.

Принимают участие:

- в подготовке проектов нормативно-правовых документов виртуального образования;
- в разработке методик обучения по направлениям подготовки специалистов;
- в выработке рекомендаций относительно внедрения информационных технологий и виртуальных курсов в разные формы обучения;
- в создании системы администрирования и контроля знаний.

Локальные центры виртуального обучения создаются на базе высших учебных заведениях, имеющих доступ к телекоммуникационным сетям, современную компьютерную базу и подготовленный кадровый состав.

Этапы создания и развития виртуального образования.

Создание базовых основ системы виртуального образования может быть осуществлено в следующие этапы.

Первый этап:

- создание организационной структуры виртуального образования;
- разработка нормативно-правовых основ и стандартов виртуального образования;
- проведение мониторинга из изучения условий внедрения виртуального образования и оптимизации этого процесса;
- создание материально-технической базы региональных локальных центров виртуального обучения;
- создание первичного фонда виртуальных курсов и обеспечение их экспериментального внедрения;
- разработка основ финансирования виртуального обучения;
- реализация пилотных проектов внедрения виртуального образования.

Второй этап:

- полномасштабное развертывание и внедрение виртуального образования как формы обучения;
- внедрение системы многоканального финансирования юридических и физических лиц виртуального образования;
- разработка и внедрение системы льгот использования компьютерных сетей и телекоммуникационной инфраструктуры для структурных подразделений виртуального образования;
- внедрение системы лицензирования, аттестации и аккредитации учреждений виртуального образования.

А теперь рассмотрим подходы к разработке информационно-телекоммуникационных ресурсов, а также результаты их реализации, обеспечившие успешное решение задач создания основ единого информационного пространства.

Телекоммуникационной основой, обеспечивающей взаимодействие и удаленный доступ к информационным ресурсам, может являться сегмент научно-образовательной компьютерной сети RunNet, имеющий шлюзы во все коммерческие сети и управляемый с использованием средств специально разработанной системы интегрированного сетевого управления.

Данная система может включать пять взаимосвязанных подсистем для решения отдельных задач, к числу которых относятся:

- управление конфигурацией;
- управление безопасностью;
- управление сбоями;
- учет использования ресурсов;
- управление производительностью.

Системообразующим ядром здесь является комплекс баз данных, содержащих полную информацию обо всех аспектах функционирования сети, что позволяет администратору получить необходимые ему сведения в любой момент времени.

В рамках данного сетевого сегмента можно создать информационный портал, а также информационно-образовательный портал, обеспечивающие в совокупности доступ к основным информационным ресурсам.

При этом одним из наиболее представительных научно-образовательных информационных ресурсов, доступных сети, может быть электронная библиотека (автоматизированная библиотечная информационная система – АБИС), в базах данных которой могут накапливаться как библиографические описания документов библиотечного фонда, так и их полнотекстовые электронные копии.

Библиотека рассматривается как один из основных элементов системы виртуального обучения, обеспечивая в ней оперативный доступ с удаленных рабочих мест к необходимым учебно-методическим материалам. В целом АБИС обеспечивает управление процессом формирования библиотечного фонда на основе создания и использования поисковых образов документов: проведение анализа состава фонда; определение наличия учебно-методических материалов, необходимых для успешного ведения учебной деятельности; осуществление отбора документов в соответствии с по-

стоянными и разовыми запросами пользователей в режимах избирательного распределения информации и ретроспективного поиска; подготовку различных списков и указателей литературы, а также необходимых форм отчетных документов: простой и удобный доступ к информации различным категориям пользователей, в том числе с удаленных рабочих мест; взаимодействие с другими аналогичными системами через Интернет; создание на её основе корпоративной АБИС города.

При этом основу системы составляют электронные каталоги, содержащие библиографические, фактографические и полнотекстовые базы данных, формируемые на основе новых поступлений и существующего фонда, а также комплекс автоматизированных рабочих мест (АРМ): АРМ для комплектования фонда; АРМ библиографа; АРМ читателя; АРМ библиотекаря; АРМ для межбиблиотечного абонемента; АРМ системного администратора.

Создаётся АБИС в рамках IntraNet на основе использования возможностей системы управления базами данных (СУБД) Oracle8. Введенные в систему документы непосредственно после ввода становятся доступными пользователям посредством Web-интерфейса как с рабочих станций информационно-вычислительной сети, так и с удаленных рабочих станций, имеющих доступ к телекоммуникационным сетям.

Выбор методов и инструментальных средств разработки информационных систем осуществляется с учетом следующих требований к ним:

- поддержка многоплатформенности;
- независимость от производителя;
- унифицированность;
- возможность создания надежного и качественного программного обеспечения (ПО);
- возможность поддержки разработанного ПО на протяжении всего времени жизни;
- возможность проектирования с использованием современных методов и подходов;
- возможность развития и простой модификации разработанной системы;
- простая и эффективная поддержка Web-технологии.

При создании информационных систем особое внимание уделяется комплексу средств организации взаимодействия с конечным пользователем, выполняющему на современном уровне роль «интеллектуального интерфейса», обеспечивающего интерактивное решение информационных задач на ЭВМ. Отметим, что для этих целей широко использованы возможности среды Web, обеспечивающие предоставление пользователям интерфейса для работы с одной или несколькими базами данных. При этом можно видеть, что известная трехуровневая архитектура клиент-серверных СУБД естественным образом отображается на среду Web, где Web-браузер исполняет роль «тонкого» клиента, а Web-сервер — роль сервера приложений.

Список литературы

- 1 *Едрисов А.Т., Антонов М.А.* Технология компьютерного программированного обучения // Состояние и стратегия развития дистанционного образования в условиях глобализации: Материалы междунар. науч.-практ. конф. — Караганда: Изд. КРУ, 2003. — С. 129–133.
- 2 *Морозов В.А.* Креативность преподавателя высшей школы // Высшее образование сегодня. — 2004. — № 3. — С. 64–72.

Т.Л.Тен, Ф.Т.Омаров, Б.К.Шаяхметова, Ю.Н.Антипов

Виртуалды университеттің программалық модульдарын толтырудың үлгілері

Мақалада виртуалды университеттердің бағдарламалық модульдарының оқу-әдістемелік толтырылу сұрақтары қарастырылған. Сонымен қатар контентте қолданылатын негізгі оқу амалдары, компьютерлік оқу бағдарламалардың түрлері келтірілген. Бұндай бағдарламалармен жұмыс студенттің ақыл-ойын белсендіріп, алған кәсіби машық пен дағдыны қалыптастырып бекітеді. Сондай-ақ бұл заман талаптарына сай оқытушыдан шығармашылық тұрғыда әрекет етуді талап етеді.

T.L.Ten, G.T.Omarov, B.K.Shayakhmetova, Yu.N.Antipov
Models filling of software modules virtual university

In article questions filling teaching media modules virtual university. Are the basic educational means used in the content, as well as types of computer training programs. Work with such programs directed to activate student's mental actions, the formation and consolidation of skills. The same is shown as a function of teachers compared to the traditional system of education is diversified and as will be shown terms of modern technology requires a creative approach to the teaching profession.

References

- 1 Edrisov A.T., Antonov M.A. *Technology of computer programmed instruction // Status and Strategy of development of distance education in the context of globalization. International scientific and practical conference, Karaganda: Publ. KRU, 2003, p. 129–133.*
- 2 Morozov V.A. *Creativity of high school teacher // Higher Education Today, 2004, No. 3, p. 64–72.*

УДК 378:658.336.3

Б.К.Шаяхметова¹, Г.Т.Омаров², Ш.Е.Омарова²

¹Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова;

²Карагандинский экономический университет Казпотребсоюза (E-mail: omarov-gali@mail.ru)

Использование специального программного обеспечения для сложных систем

В статье рассмотрен вопрос использования специального программного обеспечения для сложных систем, дан анализ сформулированного выше вопроса. Кроме того, предложен программный комплекс, состоящий из различных пакетов, описывающих ту или иную часть методического комплекса, с помощью которого можно создавать программы для сложных систем. Для подтверждения эффективности данного комплекса был проведен педагогический эксперимент по разработанной методике и приведены результаты итоговых данных формирующего эксперимента.

Ключевые слова: программное обеспечение, сложные системы, эксперимент, комплекс, информационные технологии, алгоритм, структура программ, типы данных, модельное программирование, визуальные методы анализа.

В Законе Республики Казахстан «Об образовании» сформулированы основные направления системы высшего образования. И задача более эффективного формирования и использования специального программного обеспечения наиболее актуальна в этом смысле.

Современные потребности образовательных, производственных и коммерческих структур выдвинули программное обеспечение в ряд наиболее важных определяющих, и в рамках поставленной выше задачи его роль и значимость переоценить невозможно. Комплекс автоматизированных способов обработки исходных данных, на основе специального программного обеспечения, позволит решать сформулированную выше задачу наиболее эффективно.

Методики, используемые преподавателями и студентами, зависят от комплекса различных факторов, как, например, профессионализм, уровень подготовки студента, техническая обеспеченность и многих других, и конечно же уровня информационной подготовленности. Информационная подготовленность — это понимание не только пакета элементарных компьютерных программ, а осознание значимости и огромного потенциала процессов информатизации, осознание правовых, социальных, психологических и других аспектов функционирования и практического использования совокупности специальных программ, умения максимально эффективно применить имеющиеся возможности и найти новые пути в преодолении существующих проблем. Так вот о проблемах: в настоящее время сложилась крайне парадоксальная ситуация подготовки будущего специалиста: с одной стороны, идет борьба за потенциального потребителя образовательных услуг (и в этом аспекте необходимость

повышения качества подготовки) и, как следствие, возрастает уровень требований как потребителя, так и субъекта обучения к приобретаемым знаниям. С другой — контингент студентов, уровень знаний которых имеет в целом гораздо более низкий потенциал готовности к обучению, чем ранее. В настоящее время наблюдается рост объема и сложности изучаемого материала, что делает необходимым его оперативное обновление и формирование принципиально нового подхода к конструированию содержания и организации учебного материала [1].

В последнее время в связи с реформированием образования происходит переход от жестко регламентированной к более гибкой и открытой форме обучения, что разрешает сложившуюся ситуацию.

Студента, как субъекта образовательного процесса, нужно рассматривать как активного выбирающего и управляющего тем, что и как изучать. Обучаемый может выбрать в рамках кредитной технологии системы обучения дисциплину, которая, на его взгляд, более актуальна или менее сложна в изучении, преподавателя, который более лоялен или менее требователен. Вследствие объективного отсутствия достаточного опыта и знаний для взвешенного решения, выбор студента может иметь негативные последствия. Таким образом, чтобы студент мог корректно и адекватно формировать свои предпосылки и правильно выбирать соответствующие кредитной технологии дисциплины, необходимо обеспечить его исчерпывающей и полной информацией.

У студента необходимо выработать мотивацию к знаниям. Может быть, одним из способов является максимальная информационная осведомленность обучаемого относительно того, как в дальнейшем отразится уровень полученных им знаний и навыков по тому или иному предмету в его будущей профессиональной практике.

Некоторые студенты видят цель своего пребывания в вузе в стремлении к приобретению практических знаний [2].

Сегодня налицо увеличение числа и объема дисциплин более умозрительного, теоретического направления и содержания, тогда возникает вопрос: зачем это нужно?

Анализ показывает, что такой подход ведет к формированию всесторонне образованной личности и призван формировать концептуальное мышление будущего специалиста, способного быстро адаптироваться в динамичной изменчивости современного общества, ибо всё чаще работодателю требуется профессионал, готовый к приобретению и способный к быстрой переориентации.

Например, высшее образование должно давать специалистам не только владение формализованными методами решения соответствующих предметной области задач, но и развивать чутье (интуицию), опирающееся на знание фундаментальных свойств различных объектов и процессов. Много времени у студентов занимает «примерка» — пригодится ли та или иная дисциплина ему на практике, что приводит к частичному упущению учебного материала, это упущение можно ликвидировать с помощью имеющихся учебников, пособий и электронных учебников. Использование специального программного обеспечения, а также создание его на каком-либо языке высокого уровня на базе информационных ресурсов в профессиональном обучении будет способствовать максимальному погружению в предметную область.

Опыт показывает, что использование и создание специального программного обеспечения в значительной степени способствуют формированию и развитию интеллектуального потенциала обучаемого, совершенствованию форм и содержания учебного процесса, внедрению инновационных методов в обучении и дают возможность разрешать на новом уровне имеющиеся проблемы. Надо заметить, что этот всплеск компьютерных и телекоммуникационных технологий в образовании привел к формированию нового студенчества. Это студенчество воспитано на основе тестирования качества знаний и других методов измерения уровня знаний, умений и навыков, что порождает комплекс информационных процессов, в автоматизации которых в вузах используются компьютерная техника и специализированное программное обеспечение, в создании которых на различных этапах принимают участие студенты разных курсов.

Современные информационные технологии в сфере образования опираются на педагогические программные средства, электронные дидактические пособия, учебно-методические комплексы, обучающие тренажеры, использование которых позволяет преподавателю эффективно спроектировать педагогический процесс и совершенствовать его в дальнейшем.

Качественное оформление и удобный интерфейс, оживленный анимацией, делают процесс обучения более привлекательным, менее рутинным. Использование гипертекста, графики, анимации, аудио- и видеoinформации в содержании позволяет увеличить эффективность и качество преподава-

ния, а наличие различных тестов и практических упражнений повышает объективность и качество контроля знаний.

Для того чтобы сформировать у студента способность к выработке собственных суждений, выводов, умозаключений, необходим эффект личностного контакта с преподавателем. Кроме того, он нужен, когда слишком обширный теоретический материал или, наоборот, сделан упор на приобретение практических навыков без достаточно полной теоретической базы (то есть частичное или полное несоответствие основным дидактическим принципам обучения). Перечислим основные дидактические принципы, о которых идет речь: научность, воспитывающее обучение, сознательность и активность, доступность и посильность, прочность усвоения знаний, умения и навыки, связи теории с практикой, наглядность.

Формальное использование дидактических принципов компьютеризованного обучения без изменения педагогических технологий не даёт желаемого эффекта, а приводит к формальному автоматизированному изучению, оставляя в стороне системное и целостное обучение.

Примером двойственного влияния компьютеризации обучения (позитивного и негативного) на подготовку бакалавра (050700 – «Вычислительная техника и программное обеспечение») является применение курса «Технологии программирования», который приводит, как показывают исследования, к ускоренному расслоению бакалавров, занимающихся программным обеспечением и использующих этот курс, на две группы.

Первая, меньшая группа, бесспорно, повышает свою квалификацию в предметной области благодаря заинтересованному анализу программ и новых технологий программирования. При большом количестве вариантов программного обеспечения такой анализ позволяет выявить основные закономерности создания ПО от варьируемых исходных данных и способствует тем самым быстрому и глубокому изучению свойств объектов программирования. Для этой группы инженеров-программистов (бакалавров вычислительной техники и программного обеспечения) выводы курса «Технологии программирования» являются не только путеводителем при создании программ, но и своеобразным интеллектуальным тренажером, способствующим ускоренному накоплению профессионального опыта.

Квалификация второй группы бакалавров вычислительной техники и ПО развивается в направлении овладения сложными программными средствами технологии. При этом осваиваются преимущественно формализованные методы и средства автоматизированного создания ПО, а анализ и исследование готовых результатов ПО оказывается на втором плане, вследствие чего профессиональный опыт в предметной области, несмотря на большое количество решаемых задач, накапливается медленно, и инженер-программист порой перерождается в своего рода инженера-оператора ЭВМ.

Более эффективны различные обучающие тренажеры, виртуальные лаборатории, которые включают средства создания *mini* программ, описывающих реальные процессы и явления.

Их применение позволяет в процесс создания ПО для сложных систем внести следующие положения: во-первых, формировать так называемые неартикулируемые знания в виде накопленного опыта и сделанных самостоятельно, иногда и интуитивных выводов и, во-вторых, освобождая от необходимости выполнения вручную рутинной обработки результатов, увеличить число выполняемых опытов. Как следствие, у студента формируется более глубокое понимание закономерностей изучаемых явлений [1, 2].

При разработке автоматизированных обучающих систем нового поколения по каждой дисциплине необходимо использование комплексной и полной модели представления знаний по предметной области в целом, а не по отдельному предмету, как это имеет место в традиционном электронном учебнике. Кроме этого, алгоритм обучения должен учитывать индивидуальные психологические и познавательные особенности студента, обеспечивать процесс обучения, который последовательно отвечает на поставленные вопросы, двигаясь от общего — к частному, от простого — к сложному.

В качестве еще одного из вариантов решения предлагается разработка компьютерных обучающих комплексов, которые базируются на концепции построения их как интеллектуальных систем. В качестве базы знаний для неё используется система комплексных моделей знаний о специальности в целом. Такой подход обеспечит возможность четкого формирования концепции будущей профессии обучаемого с самых первых шагов, так как строится на основе виртуального погружения в круг будущих профессиональных проблем и задач так, как если бы он не был принят на работу и должен выполнять свои функции под руководством опытного руководителя и наставника. Здесь могут практиковаться совместные программы, ролевые игры.

В рамках подготовки инженера-программиста по специальности 050704 – «Вычислительная техника и программное обеспечение» такой подход особенно актуален, так как именно понимание содержания будущей профессии для студента достаточно сложно. С первого курса студент должен как бы уже обладать системным пониманием мира, чтобы эффективно усваивать, например, математику, как основной инструмент моделирования, или физику, как один из моделируемых объектов.

Один из возможных вариантов инновационного подхода к разработке ПО автоматизированных обучающих систем — разработка модели, которая соответствовала бы требованиям профессиональной направленности будущего специалиста. В модели отражено содержание профессиональной подготовки студента в соответствии с ГОСО РК 3.08.329-2006 (специальность 050700 – «Вычислительная техника и программное обеспечение»). Подготовка студентов информационных специальностей к профессиональной деятельности формируется в ходе учебного процесса при изучении базовых и специальных дисциплин. В качестве ведущего предмета, в плане создания программных продуктов для сложных систем, объединяющего все дисциплины вузовского компонента в единый комплекс, выступает курс «Технологии программирования», который наиболее близок к рассматриваемым вопросам. В структуре данного курса предусматривается изучение следующих разделов: «Основы алгоритмизации», «Способы записи алгоритмов», «Структуры программ», «Описание типов данных, структуры данных», «Основные операторы программирования высокого уровня», «Элементы структурного программирования», «Разработка программ с использованием модельного программирования», «Общие сведения об объектно-ориентированном программировании» (ГОСО 3.08.329-2006).

Так как курс «Технологии программирования» не обеспечивает требуемого уровня подготовки для разработки программного обеспечения сложных систем, были введены дополнительные дисциплины: «Графическо-текстовые языки анализа и проектирования», «Объектно-ориентированные языки кодирования C++, Java», а для преподавателей, в силу объективных причин не занимавшихся созданием программ для сложных систем, — специальный курс «Визуальные методы анализа и проектирования, объектные языки кодирования», которые являются частью авторского педагогического комплекса «Создание программных продуктов для сложных систем на основе использования графическо-текстовых и объектно-ориентированных языков программирования».

В составе разработанного методического комплекса имеются следующие элементы: цели обучения студентов; деятельность преподавателя; профессиональная подготовка студентов; содержания обучения; графическо-текстовые языки анализа и проектирования; объектно-ориентированные языки кодирования; результаты обучения; рефлексия; выход на новую цель после коррекции.

Методический комплекс будет работать более результативно, если преподаватель проводит рефлексию по осознанию выполненной работы и выходит на новую цель после проведения коррекционной работы. Все компоненты педагогического комплекса взаимосвязаны и направлены на достижение поставленной цели. Началом, объединяющим все компоненты учебного процесса, является цель обучения.

Для подтверждения эффективности разработанного педагогического комплекса был проведен педагогический эксперимент по разработанной методике. Имеющееся количество учебных групп позволило осуществить опытно-экспериментальную работу на базе Карагандинского государственного технического университета, Карагандинского экономического университета. Объем выборки (количество студентов информационных специальностей контрольной и экспериментальной групп), обеспечивающей репрезентативность данных, был определен в 276 человек (138 человек — в экспериментальной группе и 138 — в контрольной), проходивших обучение в КарГТУ, КЭУ с 2008 по 2011 годы.

Анализ итоговых данных формирующего эксперимента показывает, что в результате внедрения в учебный процесс информационных специальностей экспериментальных групп педагогического комплекса разница между средними значениями групп составляет 0,5 балла, то есть уровень формирования к профессиональной деятельности в экспериментальной группе по сравнению с контрольной возрос на 11,1%.

В дальнейшем видится необходимость объединения информационных ресурсов и технологий, используемых во всех сферах деятельности вуза, в единый унифицированный комплекс. Подобный комплекс должен быть дополнен общими однотипными методологическими требованиями и рекомендациями. Разработка соответствующих проектных, технических, педагогических и методологических подходов позволила бы поэтапно построить единообразные информационные образовательные

среды отдельных учебных заведений и, объединив их, сформировать единое информационное образовательное пространство вузов Республики Казахстан.

Безусловно, внедрение новейших информационных технологий во все сферы деятельности современного вуза обеспечивает качественное улучшение форм и содержания обучения, создает возможность формирования у будущих специалистов не только навыков работы с вычислительной техникой, поиска и корректной обработки информации при решении профессиональных задач, а главное — способствует формированию современного, умеющего адаптироваться в изменчивом и динамично меняющемся пространстве информационно-грамотного и культурного профессионала.

Список литературы

- 1 Шаяхметова Б.К., Омаров Т.Е. О предполагаемых подходах к совершенствованию содержания образования специалистов по информационным системам // Вестн. Караганд. ун-та. Сер. Педагогика, 2006. — № 1 (41). — С. 92–95.
- 2 Егоров В., Омаров Т., Шаяхметова Б. Использование понятий системного анализа в процессе преподавания программирования. — Калининград: Изд. КГТУ, 2006. — С. 275–279.

Б.Қ.Шаяхметова, Г.Т.Омаров, Ш.Е.Омарова

Арнайы бағдарламалық қамтамасыздандырудың күрделі жүйелерге қолдануы

Мақалада күрделі жүйелер үшін арнайы бағдарламалық қамтамасыз етуді пайдаланудың сұрағы қарастырылып, талдау жасалған. Сонымен қатар әдістемелік кешен берілген. Құрылған әдістеме бойынша кешеннің тиімділігін мақұлдайтын педагогикалық эксперимент ұсынылған. Қалыптастыратын эксперименттің қорытынды нәтижелері жан-жақты талданған.

B.K.Shayakhmetova, G.T.Omarov, Sh.Ye.Omarova

Using special software for complex systems

The article discusses the use of special software for complex systems, an analysis of questions formulated above. Furthermore it is assumed software complex consisting of various packages that describe some part of the methodical complex, with which you can create programs for complex systems. To confirm the effectiveness of the developed complex pedagogical experiment was conducted using the developed methodology. The article provides an analysis of the resulting data forming experiment.

References

- 1 Shayakhmetova B.K., Omarov T.E. *On the proposed approaches to improve the content of education in Information Systems* // Bull. of the Karaganda University. Ser. pedagogy, 2006, No. 1 (41), p. 92–95.
- 2 Egorov V., Omarov T. Shayakhmetova B. *Using the concepts of systems analysis in the teaching of programming*, Kalinin-grad: Publ. KSTU, 2006, p. 275–279.

АВТОРЛАР ТУРАЛЫ МӘЛІМЕТТЕР СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

- Akhmanova, D.M.** — candidate of physical and mathematical sciences, docent of the chair of methods of teaching mathematics and informatics, Ye.A.Buketov Karaganda State University.
- Antipov, Yu.N.** — doctor of physical and mathematical sciences, professor, professor of the chair of mathematics, Kaliningrad Technical University, Russia.
- Ashirbayev, N.K.** — doctor of physics and mathematical sciences, professor, head of the chair of theory and methods of teaching mathematics, M.Auezov South-Kazakhstan State University, Shymkent.
- Ashirbayeva, Zh.N.** — candidate of pedagogical sciences, docent of the chair of theory and methods of teaching mathematics, M.Auezov South-Kazakhstan State University, Shymkent.
- Assylbekov, M.A.** — magistrant of the first course in the specialty 6M060100 – «Mathematics», Kh.A.Yasawi International kazakh-turkish University, Turkestan.
- Beisebayev, A.K.** — candidate of technical sciences, docent of the chair of applied mathematics and computer science, Ye.A.Buketov Karaganda State University.
- Bukenov, M.M.** — candidate of physical and mathematical sciences, docent of the chair of applied mathematics and computer science, Ye.A.Buketov Karaganda State University.
- Darbayeva, D.K.** — PhD student of the second course in the specialty 6D060100 – «Mathematics», L.N.Gumilyov Eurasian National University, Astana.
- Iskakov, K.T.** — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the chair of computing engineering, L.N.Gumilyov Eurasian National University, Astana.
- Jenaliyev, M.T.** — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Institute of Mathematics and Mathematical Modelling of MES RK, Almaty.
- Kaliyev, D.N.** — magistrant of the first course in the specialty 6M060300 – «Mechanics», Ye.A.Buketov Karaganda State University.
- Karenov, R.S.** — doctor of economic sciences, professor, head of the chair management, Ye.A.Buketov Karaganda State University.
- Kazhikenova, S.Sh.** — doctor of technical sciences, professor of the chair of applied mathematics and computer science, Ye.A.Buketov Karaganda State University.
- Kosmakova, M.T.** — magistrant of the second course in the specialty 6M010900 – «Mathematics», Ye.A.Buketov Karaganda State University.
- Maziyeva, K.V.** — magistrant of the first course in the specialty M060200 – «Informatics», Ye.A.Buketov Karaganda State University.
- Moskalenko, A.N.** — magistrant of the second course in the specialty M060200 – «Informatics», Ye.A.Buketov Karaganda State University.
- Nursultanov, Ye.D.** — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the chair of mathematics and informatics, M.V.Lomonosov Moscow State University (Kazakhstan branch), Astana.
- Omarov, G.T.** — magistrant of the first course in the specialty 6M070300 – «Information systems», Karaganda Economic University Kazpotreboyz.
- Omarova, Sh.Ye.** — candidate of economic sciences, professor, head of the chair of information systems, Karaganda Economic University Kazpotreboyz.

- Oralbekova, Zh.O.** — PhD student of the third course in the specialty 6D060100 – «Mathematics», Abai Kazach National Pedagogical University, Almaty.
- Ramazanov, M.I.** — doctor of physical and mathematical sciences, professor, professor of the chair of mathematical analysis and the differential equations, Ye.A.Buketov Karaganda State University.
- Shayakhmetova, B.K.** — candidate of pedagogical sciences, docent of the chair of mathematical analysis and the differential equations, Ye.A.Buketov Karaganda State University.
- Shurygina, Ye.G.** — magistrant of the first course in the specialty M060200 – «Informatics», Ye.A.Buketov Karaganda State University.
- Solovyev, V.Yu.** — magistrant of the first course in the specialty 6M060300 – «Mechanics», Ye.A.Buketov Karaganda State University.
- Ten, T.L.** — doctor of technical sciences, professor of the chair of information systems, Karaganda Economic University Kazpotrebsoyuz.
- Torebek, B.T.** — master of mathematics, teacher of the chair of mathematics, Kh.A.Yasawi International kazakh-turkish University, Turkestan.
- Turmetov, B.Kh.** — doctor of physical and mathematical sciences, professor of the chair of mathematics, Kh.A.Yasawi International kazakh-turkish University, Turkestan.
- Yesbayev, A.N.** — magistrant of the second course in the specialty 6M060100 – «Mathematics», Ye.A.Buketov Karaganda State University.
- Yessenbayeva, G.A.** — candidate of physical and mathematical sciences, docent of the chair of mathematical analysis and the differential equations, Ye.A.Buketov Karaganda State University.
- Zaikina, T.V.** — senior teacher of the chair of methods of teaching mathematics and informatics, Ye.A.Buketov Karaganda State University.